Explicando Madgwick

Ler paper junto com este texto

- An effcient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays, Sebastian O.H. Madgwick, April 30, 2010
- Quaternion Gradient and Hessian, Dongpo Xu, Danilo P. Mandic
- A Tutorial on Euler Angles and Quaternions, Moti Ben-Ari

Ver as aulas de:

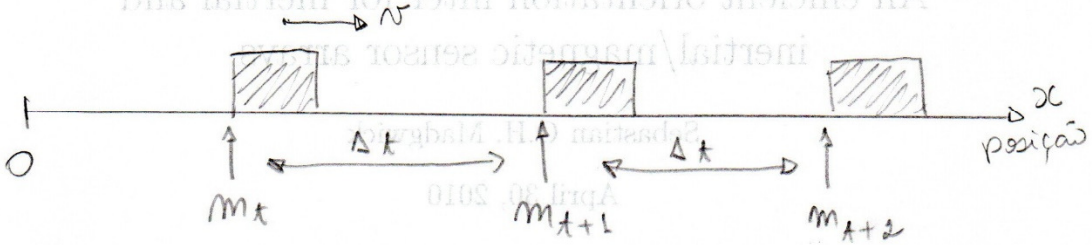
Luis Antônio Aguirre - Filtro de Kalman
https://www.youtube.com/watch?v=urhaoECmCQk

Samuel da Silva - Quaternions
https://www.youtube.com/watch?v=wuF9R_7E0VE

REVISÃO

I Filtro de Kalman

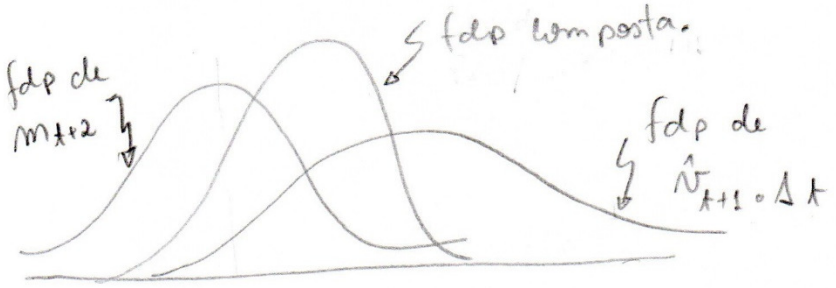
- Quero estimar a posição "p" do objeto.
- Faço medidas "m" em intervalos Δt.



- Cada medida m_i indica uma posição.
- Posso estimar a velocidade $\hat{v}_{t+1} = \dfrac{m_{t+1} - m_t}{\Delta t}$
- Assim em "t+2" tenho duas informações $\begin{cases} m_{t+2} \rightarrow \text{medida em } t+2 \\ v_{t+1} \times \Delta t \rightarrow \text{estimativa para nova posição } (\hat{p}_{t+2}) \end{cases}$
- Proposta é combinar as duas:

$$\underbrace{p_{t+2}}_{\text{a posteriori}} = \alpha \underbrace{m_{t+2}}_{\substack{\text{informação} \\ \text{nova} \\ \text{(entrada)}}} + (1-\alpha) \underbrace{\hat{v}_{t+1} \cdot \Delta t}_{\substack{\text{a priori} \\ \left(\text{modelo de transição de } p_{t+1} \text{ para } p_{t+2}\right)}} \qquad \alpha \leq 1$$

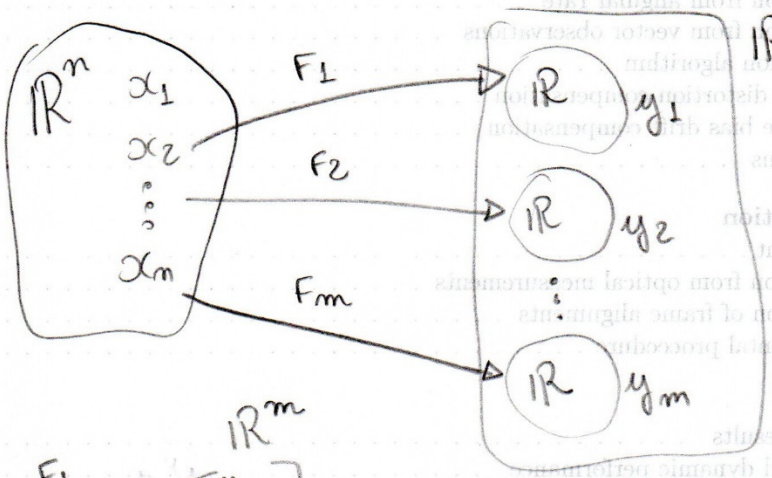
- Cada medida tem um erro indicado por σ^2

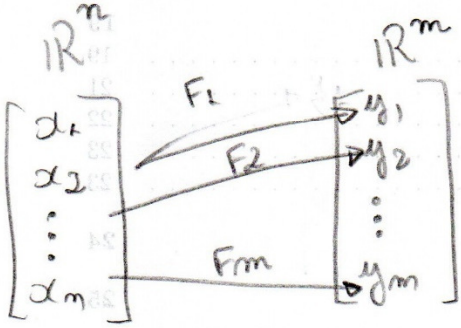


II Matriz Jacobiana

- Matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial.

- Seja função $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - F tem componentes, uma em cada direção de $\mathbb{R}^m$





$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

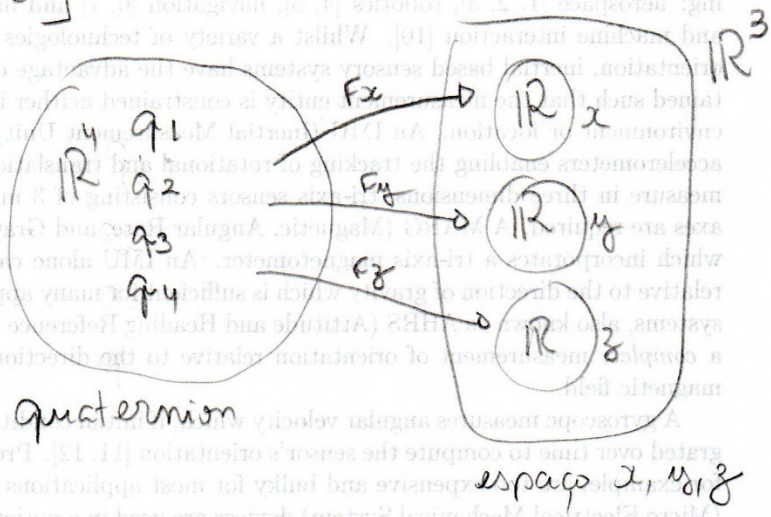
Exemplos:

1) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow F = \begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ xy \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_1 = x^2+y^2 \\ F_2 = xy \end{matrix}$

$$J_F = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

2) $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

[Eq 15]



$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial q_1} & \frac{\partial F_x}{\partial q_2} & \frac{\partial F_x}{\partial q_3} & \frac{\partial F_x}{\partial q_4} \\ \frac{\partial F_y}{\partial q_1} & \frac{\partial F_y}{\partial q_2} & \frac{\partial F_y}{\partial q_3} & \frac{\partial F_y}{\partial q_4} \\ \frac{\partial F_z}{\partial q_1} & \frac{\partial F_z}{\partial q_2} & \frac{\partial F_z}{\partial q_3} & \frac{\partial F_z}{\partial q_4} \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

[Eq 22]

Mesma coisa é apresentada na página seguinte, mas com detalhes.

[Eq 15] $$f({}^{S}_{E}\hat{q},\ {}^{E}\hat{d},\ {}^{S}\hat{s}) = {}^{S}_{E}\hat{q}^{*} \otimes {}^{E}\hat{d} \otimes {}^{S}_{E}\hat{q} - {}^{S}\hat{s}$$

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Note que dx, dy e dz não são variáveis, mas sim a direção do campo da Terra

[Eq 20] $$f({}^{S}_{E}\hat{q},\ {}^{E}\hat{d},\ {}^{S}\hat{s}) = \begin{bmatrix} f_x(\cdot) \\ f_y(\cdot) \\ f_z(\cdot) \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$f_x(\cdot) = 2d_x\left(\tfrac{1}{2} - q_3^2 - q_4^2\right) + 2d_y(q_1q_4 + q_2q_3) + 2d_z(q_2q_4 - q_1q_3) - s_x$$

$$f_y(\cdot) = 2d_x(q_2q_3 - q_1q_4) + 2d_y\left(\tfrac{1}{2} - q_2^2 - q_4^2\right) + 2d_z(q_1q_2 + q_3q_4) - s_y$$

$$f_z(\cdot) = 2d_x(q_1q_3 + q_2q_4) + 2d_y(q_3q_4 - q_1q_2) + 2d_z\left(\tfrac{1}{2} - q_2^2 - q_3^2\right) - s_z$$

1ª linha da Jacobiana [Eq 22]

$$\frac{\partial f_x}{\partial q_1} = 2d_yq_4 - 2d_zq_3 \qquad \frac{\partial f_x}{\partial q_2} = 2d_yq_3 + 2d_zq_4$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial q_3} = -4d_xq_3 + 2d_yq_2 - 2d_zq_1 \qquad \frac{\partial f_x}{\partial q_4} = -4d_xq_4 + 2d_yq_1 + 2d_zq_2$$

e assim por diante...

$$J({}^{S}_{E}\hat{q}_E,\ {}^{E}\hat{d}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x}{\partial q_2} & \frac{\partial f_x}{\partial q_3} & \frac{\partial f_x}{\partial q_4} \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y}{\partial q_2} & \frac{\partial f_y}{\partial q_3} & \frac{\partial f_y}{\partial q_4} \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1} & \frac{\partial f_z}{\partial q_2} & \frac{\partial f_z}{\partial q_3} & \frac{\partial f_z}{\partial q_4} \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

[Eq. 22]

Jacobiana

III Steepest Descent ou Gradient Descent

Gradiente → vetor que indica direção na qual um deslocamento leva a maior variação possível (da grandeza considerada)

(Wikipedia)

Cálculo do gradiente → Exemplo, seja $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = 4x + 10y^2 - \operatorname{sen} z \Rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u_z}$$

$\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}$ → vetores unitários

$$\vec{\nabla} f = (4\vec{u_x} + 20y\,\vec{u_y} - \cos z\,\vec{u_z}) \text{ ou } \vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} 4 \\ 20y \\ -\cos z \end{bmatrix}$$

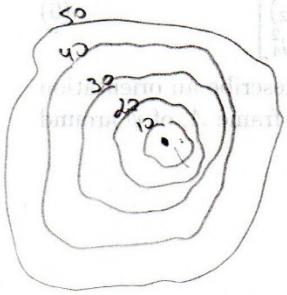
Posso então verificar em qualquer local (x, y, z) qual é a direção de maior descida.

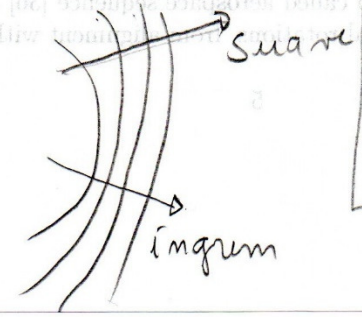
Se estou no ponto $(x=10, y=2, z=\pi) \Rightarrow$ a direção da maior descida é $4\vec{u_x}, 40\vec{u_y}, 1\vec{u_z}$

— γ —

- Vamos falar de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \Rightarrow z = f(x,y)$, descrevemos uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Para cada x e y um valor de z.

Podemos traçar curvas de nível. São conjuntos de x e y que geram o mesmo z. Quanto mais próximas, mais íngremes. Quanto mais afastadas estão as linhas, mais suave.





"O gradiente é sempre perpendicular às curvas de nível."

Steepest Descent ou **Gradient Descent** } Algoritmo de otimização de 1ª ordem que acha o mínimo (local) tomando passos proporcionais ao negativo do gradiente da função no ponto

- negativo do gradiente → desce
- positivo do gradiente → sobe

- Estamos no ponto q_k e queremos dar um passo na direção de maior descida para chegarmos a q_{k+1}.

Se fizermos isso sucessivamente, chegamos ao mínimo.

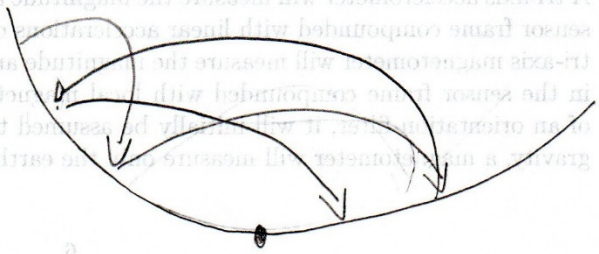
[Eq 33]
$$\boxed{q_{k+1} = q_k - \mu \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}}$$

∇f = gradiente
$\|\nabla f\|$ = norma do gradiente
μ = tamanho do passo

$\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ → é normalizado para que se possa controlar o tamanho do passo com a constante μ.

Se μ é pequeno, demora muito para chegar ao mínimo

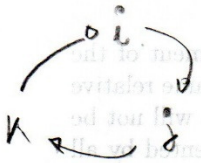
Se μ é muito grande, posso oscilar, ou seja, ficar "saltando" sobre o mínimo.



"Imagine-se numa montanha e você precisa descer o mais rápido possível. Você deve tomar o caminho mais íngrime (o negativo do gradient). Água morro abaixo segue o negativo do gradiente."

IV Quaternions (paper de Moti Ben-Ari)

quaternion $= [q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k]$ ou $[q_1\ q_2\ q_3\ q_4]$



$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ $\quad ij = k$ e $ji = -k$

$jk = i$ e $kj = -i$

$ki = j$ e $ik = -j$

- Conjugado: se $q = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4] \Rightarrow q^* = [q_1\ -q_2\ -q_3\ -q_4]$

$$|q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

$$q q^* = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \qquad q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

- Vetor tridimensional $(x, y, z) \Rightarrow q = [0\ x\ y\ z]$
quaternion puro

- Rotacão expressa por q_R, é exigido que $|q_R| = 1$

- Rotação do Frame A para o Frame B $\Rightarrow \boxed{q_B = q_R\, q_A\, q_R^*}$
(Rotação de q_A)

- Calcular Matriz de Rotação $\quad q_B = q_R\ q_A\ q_R^*$

$$q_B = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4]\ [0\ x\ y\ z]\ [q_1\ -q_2\ -q_3\ -q_4]$$

$$q_B = {}^A_B R\,[x\ y\ z] = \boxed{[\text{eq } 6]}$$

parece que está transposta no paper

$$q_B = \begin{bmatrix} 2q_1^2 + 2q_2^2 - 1 & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_4 + q_2 q_3) & 2q_1^2 + 2q_3^2 - 1 & 2(q_3 q_4 - q_1 q_2) \\ 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2q_1^2 + 2q_4^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Paper Sebastian O. H. Madgwick

I Introduction

- IMU → acel. e giro (Inertial Measurement Unity)
- MARG → Magnetic, Angular Rate and Gravity
- IMU só consegue calcular atitude com relação a $\vec{g}$
- AHRS → Attitude and Heading Reference System
  orientação em relação a $\vec{g}$ e $\vec{H}$
- Acelerômetro → medidas corrompidas pelo ruído e por aceleração devido ao movimento
- Desvantagens do Kalman
  - Complexo
  - Altas taxas, p. ex, para movimento humano demanda faixa de 512 a 30 KHz
  - Vetores grandes e carga computacional
- Proposta: IMU + MARG, bx processamento e Kalman sintonizado.
  - um único parâmetro ajustável, definido por características observáveis
  - compensação magnética on-line
  - compensação para bias-drift do giro

2 Quaternion representation

Frame A → representado por $\{\hat{x}_A \quad \hat{y}_A \quad \hat{z}_A\}$ (Vetores unitários ortogonais)

Frame B → representado por $\{\hat{x}_B \quad \hat{y}_B \quad \hat{z}_B\}$

- Giro Frame A de θ graus em torno do eixo ${}^A\hat{r} = \{r_x \; r_y \; r_z\}$

${}^A_B\hat{q}$ → representa orientação do Fram B em relação ao Frame A

$$ {}^A_B\hat{q} = [q_1 \; q_2 \; q_3 \; q_4] = \left[\cos\frac{\theta}{2} \quad -r_x \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \quad -r_y \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \quad -r_z \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right] \quad (1) $$

A → referência

$\hat{q}$

B → está sendo descrito

Se ${}^A_B\hat{q} = [q_1 \; q_2 \; q_3 \; q_4] \Rightarrow {}^A_B\hat{q}^* = [q_1 \; -q_2 \; -q_3 \; -q_4]$

- Conjugado permite trocar referências:

temos ${}^A_B\hat{q} \Rightarrow$ conjugado ${}^A_B\hat{q}^* = {}^B_A\hat{q}$ (2)

- Compor quaternions ${}^A_C\hat{q} = {}^B_C\hat{q} \otimes {}^A_B\hat{q}$ (3) $\otimes$ é o produto de quaternions

- Vamos imaginar um vetor
  - ${}^B v$ → vetor descrito no Frame B
  - ${}^A v$ → vetor descrito no Frame A

$$ \boxed{{}^B v = {}^A_B\hat{q} \otimes {}^A v \otimes {}^A_B\hat{q}^*} \quad (5) $$

matriz de Rotação

$$ {}^B v = [q_1 \; q_2 \; q_3 \; q_4] \otimes [0 \; x \; y \; z] \otimes [q_1 \; -q_2 \; -q_3 \; -q_4] = {}^A_B R_{3\times3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times1} $$

no paper parece que está a Transposta

Ver pag 7

3 Filter derivation

3.1 Orientation from angular rate → giroscópio

- giroscópio mede $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ → velocidade angular

$$^{S}\omega = [0 \;\; \omega_x \;\; \omega_y \;\; \omega_z] \text{ em } rad^{-1} \quad (10)$$ ← Por que?

- Razão de Variação do Frame Terra em relação ao Frame Sensor

$$\boxed{{}^{S}_{E}\dot{q} = {}^{S}_{E}\hat{q} \otimes {}^{S}\omega} \quad (11)$$

não tem o $\frac{1}{2}$

- Considerando o tempo t e amostras espaçadas de Δt

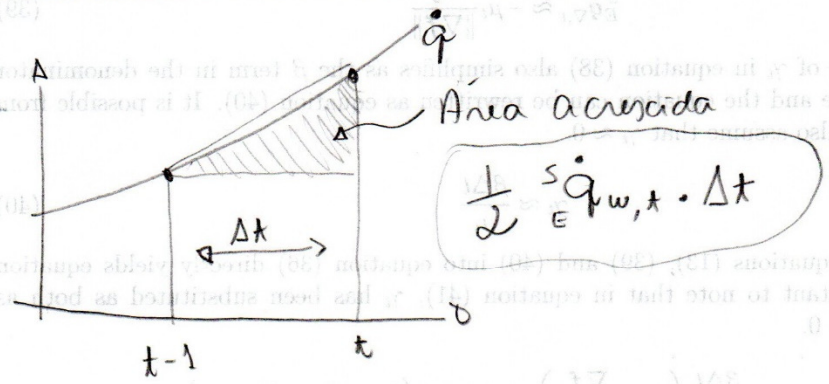
(12)
$$\boxed{{}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} = {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} \otimes {}^{S}\omega_t}$$

Estimo a derivada em t usando a última orientação $(t-1)$ do Frame E em relação ao Frame S e a leitura do giro em t

"velocidade" angular (t) — última orientação $(t-1)$ — medida atual (t)

(13)
$$\boxed{{}^{S}_{E}q_{\omega,t} = {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} + \frac{1}{2}\,{}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t}\,\Delta t}$$

Orientação atual (t) do Frame E em relação ao S (é uma estimativa)



Conclusão: com a leitura do giroscópio consigo calcular o novo ${}^{S}_{E}q_{\omega,t}$

3.2 Orientation from vector observations

Temos condições de observar 2 vetores $\begin{cases} \text{- gravidade (campo)} \\ \text{- magnético (campo)} \end{cases}$

Acelerômetro: mede magnitude e direção do campo gravidade adicionada com as aceleções lineares provocadas pelos movimentos

Magnetômetro: idem mas junto com distorções

Simplificação $\begin{cases} \text{acel} \rightarrow \text{só mede } g \\ \text{mag} \rightarrow \text{só mede } h \end{cases}$

GRAVIDADE

- Acel me fornece a medida ${}^{S}\hat{s} = [0 \; s_x \; s_y \; s_z]$ (18)
- Conheço direção do campo gravidade ${}^{E}\hat{d} = [0 \; d_x \; d_y \; d_z]$ (17)

Problema $\begin{cases} \text{- Tenho medida do acel: } {}^{S}\hat{s} \\ \text{- Tenho orientação do campo g: } {}^{E}\hat{d} \\ \text{- Quero a orientação relativa } {}^{S}_{E}\hat{q} \end{cases}$

- Se tudo fosse perfeito eu seria capaz de achar ${}^{S}_{E}\hat{q}$ tal que

$$\boxed{{}^{S}_{E}\hat{q}^{*} \otimes {}^{E}\hat{d} \otimes {}^{S}_{E}\hat{q} = {}^{S}\hat{s}}$$

gravidade

medida

orientação Frame E p/ Frame S

Notar posição do conjugado, pois a medida ${}^{S}\hat{s}$ é referenciada à Terra. Ver eq (2)

- Como minha medida ${}^{S}\hat{s}$ é ruidosa, vou procurar a melhor aproximação possível de ${}^{S}_{E}\hat{q}$

$$\boxed{\min f(\cdot) = {}^{S}_{E}\hat{q}^{*} \otimes {}^{E}\hat{d} \otimes {}^{S}_{E}\hat{q} - {}^{S}\hat{s}} \quad (14)$$

minha variável é ${}^{S}_{E}\hat{q} = [q_1 \; q_2 \; q_3 \; q_4] \rightarrow$ Problema em $\mathbb{R}^4$

- Vamos usar o Gradient Descent para estimar o mínimo
- Partimos com um chute ${}^{S}_{E}\hat{q}_0$ e usamos passo μ.

Resumo $\boxed{q_{k+1} = q_k - \mu \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}}$ normalizado, assim usamos μ para controlar o tamanho do passo. Ver pag 5

$$\boxed{{}^{S}_{E}\hat{q}_{k+1} = {}^{S}_{E}\hat{q}_k - \mu \frac{\nabla f({}^{S}_{E}\hat{q}_k, {}^{E}\hat{d}, {}^{S}\hat{s})}{\|\nabla f({}^{S}_{E}\hat{q}_k, {}^{E}\hat{d}, {}^{S}\hat{s})\|}} \quad (19)$$

(20) $\boxed{\nabla f(\cdot) = \underset{3\times4}{J^T(\cdot)} \cdot \underset{4\times1}{f(\cdot)}}$ não consegui entender esse gradiente! Ver pag 4

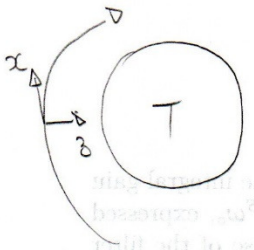
Simplificação: Campo gravitacional orientado em z e vamos normalizar com "g" (9,8 m/s²)

gravidade: ${}^{E}\hat{d} = [0 \; d_x \; d_y \; d_z] \Longrightarrow {}^{E}\hat{g} = [0 \; 0 \; 0 \; 1]$ (23)

medida: ${}^{S}\hat{s} = [0 \; s_x \; s_y \; s_z] \Longrightarrow {}^{S}\hat{a} = [0 \; a_x \; a_y \; a_z]$ (24)

Tenho novas equações: $\left\{ \begin{array}{l} f(\cdot) \longrightarrow f_g(\cdot) \\ J(\cdot) \longrightarrow J_g(\cdot) \end{array} \right\}$ índice g indica a simplificação acima.

Campo Magnético



Campo magnético simplificado para 2 componentes

Fazendo para o magnético tudo que fizemos para o gravitacional, chegamos a

(27) ${}^{E}\hat{b} = [0 \;\; b_x \;\; 0 \;\; b_z]$ → campo magnético

(28) ${}^{S}\hat{m} = [0 \;\; m_x \;\; m_y \;\; m_z]$ → medida

(29) $f_b({}^{S}_{E}\hat{q}, {}^{E}\hat{b}, {}^{S}\hat{m}) = [\cdot]$ e $J_b({}^{S}_{E}\hat{q}, {}^{E}\hat{b}, {}^{S}\hat{m}) = [\cdot]$ (30)

Gravidade + Magnético

Combinando os dois campos

$$f_{g,b} = \begin{bmatrix} f_g(\cdot) \\ f_b(\cdot) \end{bmatrix} \quad (31) \qquad J_{g,b} = \begin{bmatrix} J_g(\cdot) \\ J_b(\cdot) \end{bmatrix} \quad (32)$$

$\begin{cases} \min f_g(\cdot) \rightarrow \text{tem uma linha como solução} \\ \min f_b(\cdot) \rightarrow \text{idem} \end{cases}$

$\min f_{g,b}(\cdot) \rightarrow$ tem um ponto como mínimo (se $b_x \neq 0$)

⇒ O Gradient Descent nos leva a pensar em 2 coisas

$$q_{k+1} = q_k - \mu \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

① Calcular μ a cada iteração

② Quantas iterações (k) são necessárias?

carga computacional cresce

- Sugestão: Usar só uma iteração por medida se o μ é igual ou maior que a taxa de alteração

(33)

$$\boxed{q_t = q_{t-1} - \mu_t \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}}$$

na verdade, sumimos com o "k" e agora, para cada instante t, calculamos $\alpha > 1$

(35) $\boxed{\mu_t = \alpha \left\| {}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} \right\| \Delta t}$

Repetindo $\boxed{\mu_t = \alpha \left\| {}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} \right\| \Delta t}$ (35) giro

Passo precisa ser grande para convergir rápido. Se for muito grande, pode oscilar. Fazer $\mu_t \cong {}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t}$ que é a taxa de variação. Porém, é preciso incorporar ruído do <u>acel</u> e do <u>magnet</u>, por isso se usa $\alpha > 1$.

Sugestão $\mu_t = {}^{S}_{E}\left\|\dot{q}_{\omega,t}\right\| \Delta t$ mas tem ruído, então $\mu_t = \alpha \left\| {}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} \right\| \Delta t$

3.3. Filter fusion algorithm

Tenho duas estimativas

$$\begin{cases} {}^{S}_{E}q_{\omega,t} = {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} + \frac{1}{2}\, {}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t}\, \Delta t & (13) \\ {}^{S}_{E}q_{\nabla,t} = {}^{S}_{E}q_{est,t-1} - \mu_t \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} & (33) \end{cases}$$

giro

acel ou mag

Fundir duas estimativas

$$\boxed{{}^{S}_{E}q_{est,t} = \gamma_t\, {}^{S}_{E}q_{\nabla,t} + (1-\gamma_t)\, {}^{S}_{E}q_{\omega,t}} \quad (36) \qquad 0 \leq \gamma_t \leq 1$$

Se a eq. 13 do giro for usada por muito tempo, ela erra muito

lembra Kalman

γ_t ótimo $\begin{cases} \text{divergência de } {}^{S}_{E}q_{\omega} \\ \text{convergência de } {}^{S}_{E}q_{\nabla} \end{cases}$

"erro do giro", β

$\frac{\mu_t}{\Delta t}$

Preciso conseguir o balanceamento com uma ponderação

converge para um ${}^{S}_{E}q$ que melhor se ajusta à medida

$$(1-\gamma_t)\beta = \gamma_t \frac{\mu_t}{\Delta t} \Longrightarrow \boxed{\gamma_t = \frac{\beta}{\frac{\mu_t}{\Delta t} + \beta}} \quad (38)$$

- Vamos lembrar que $\mu_t = \alpha \left\| {}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} \right\| \cdot \Delta t$ e que $\alpha > 1$
- Vê que não há limite para α
- Então se α é grande $\Rightarrow \mu_t$ também é grande

Se μ_t é grande

$$\begin{cases} {}^{S}_{E}q_{\nabla,t} = {}^{S}_{E}q_{est,t-1} - \mu_t \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \overset{(33)}{} \Longrightarrow \boxed{{}^{S}_{E}q_{\nabla,t} \cong -\mu_t \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}} \quad (39) \\ \gamma_t = \dfrac{\beta}{\frac{\mu_t}{\Delta t} + \beta} \overset{(38)}{} \Longrightarrow \boxed{\gamma_t = \dfrac{\beta \Delta t}{\mu_t}} \quad (40) \end{cases}$$

γ_t é pequeno e pode até ficar igual a zero

$$\boxed{{}^{S}_{E}q_{est,t} = \gamma_t \, {}^{S}_{E}q_{\nabla,t} + (1-\gamma) \, {}^{S}_{E}q_{\omega,t}} \quad (36)$$

? vamos desprezar esse 1/2

Usando as simplificações para μ_t grande $\gamma \cong 0$

$$ {}^{S}_{E}q_{est,t} = \frac{\beta \Delta t}{\mu_t}\left(-\mu_t \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right) + (1-\gamma)\left({}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} + \frac{1}{2} {}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} \Delta t\right) \quad (42)$$

$$ {}^{S}_{E}q_{est,t} = -\beta \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \cdot \Delta t + {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} + {}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} \Delta t$$

$$\boxed{{}^{S}_{E}q_{est,t} = {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} + \underbrace{\left({}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} - \beta \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right)\Delta t}_{{}^{S}_{E}\dot{q}_{est,t} \cdot \Delta t}} \quad (42)$$

Passo anterior

(42)

$$\boxed{{}^{S}_{E}q_{est,t} = \underbrace{{}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1}}_{\text{anterior}} + \underbrace{{}^{S}_{E}\dot{q}_{est,t} \cdot \Delta t}_{\text{Integral}}}$$

Calcula a orientação ${}^{S}_{E}q_{est,t}$ com a integração numérica da estimação da taxa de variação ${}^{S}_{E}\dot{q}_{est,t}$

Voltando à equação (42)

$$ {}^{S}_{E}\hat{q}^{?}_{est,t} = {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} + \left({}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} - \beta \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) \Delta t $$

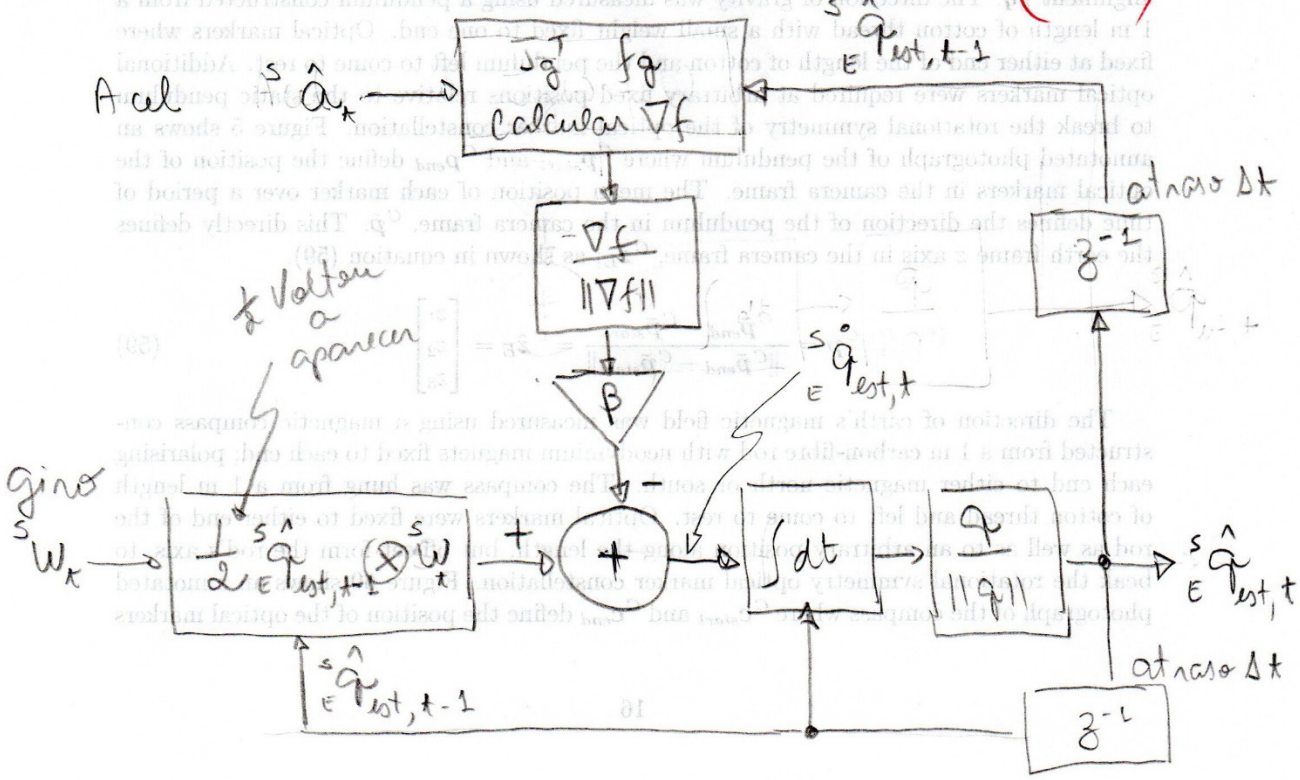
fazendo $\boxed{ {}^{S}_{E}\dot{\hat{q}}_{\epsilon,t} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} }$ ϵ = erro $\dot{\hat{q}}_{\epsilon}$

$$ {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t} = {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} + \left({}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} - \beta\, {}^{S}_{E}\dot{\hat{q}}_{\epsilon,t} \right) $$

fazendo $\boxed{ {}^{S}_{E}\dot{q}_{est,t} = {}^{S}_{E}\dot{q}_{\omega,t} - \beta\, {}^{S}_{E}\dot{\hat{q}}_{\epsilon,t} }$ → taxa de variação da orientação (medida giro) subtraída do erro de medição do giro na direção do erro estimado

$$ \boxed{ \underbrace{{}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t} = {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1}}_{\text{anterior}} + \underbrace{{}^{S}_{E}\dot{q}_{est,t} \cdot \Delta t}_{\text{integral}} } \quad (42) $$

IMU (Fig 2)



IMU ⟹ sem Magnetômetro

3.4 Magnetic distortion compensation

- Medição do campo magnético é distorcido pela presença de material ferromagnético.

- Erros de declinação (plano horizontal) não podem ser corrigidos sem uma referência.

- Erros de inclinação (perpendicular ao plano horizontal) podem ser compensados com as medidas do acelerômetro

${}^{E}\hat{b}_t \rightarrow$ estimação da direção do campo Mag. da Terra

${}^{E}\hat{h}_t \rightarrow$ medição da direção do campo Mag. da Terra

${}^{S}\hat{m}_t \rightarrow$ leitura do magnetômetro (normalizada)

${}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} \rightarrow$ orientação do sensor, vem lá do filtro

$$\boxed{{}^{E}\hat{h}_t = \begin{bmatrix} 0 & h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} = {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} \otimes {}^{S}\hat{m}_t \otimes {}^{S}_{E}\hat{q}^{*}_{est,t-1}} \quad (45)$$

Com a medida normalizada do sensor e usando a estimativa do sensor, cálculo a direção do campo mag.

- Erro de inclinação corrigido se a referência do campo Mag da Terra for a mesma da inclinação (acelerômetro)

- Obrigamos então ${}^{E}\hat{b}_t$ e ${}^{E}\hat{h}_t$ a terem componentes só em x e z

$$\boxed{{}^{E}\hat{b}_t = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{h_x^2 + h_y^2} & 0 & h_z \end{bmatrix}} \quad (46)$$

Para o magnetômetro, compensamos apenas as distorções que podem afetar a estimação da orientação do sensor (inclinação) e abandonamos a outra (declinação).

3.5 Gyroscope bias drift compensation

- O giro tem um erro em sua medição (bias)
- Esse bias varia (drift) com o tempo, temperatura e movimento.
- Kalman permite estimar bias com a adição de um estado extra ao modelo. Não faremos isso.
- Mahony (Bruno & Mahoni) propõe uma compensação calculando o bias com a integral do erro na taxa de variação da orientação.

$$\boxed{{}^{S}_{E}\dot{\hat{q}}_{\epsilon,t} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}} \quad (44)$$

? direção do erro do giro ?

$$\boxed{{}^{S}_{E}\dot{q} = \frac{1}{2}\,{}^{S}_{E}\hat{q} \otimes {}^{S}\omega} \quad (11) \longrightarrow \boxed{{}^{S}_{E}\dot{\hat{q}}_{\epsilon,t} = \frac{1}{2}\,{}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1} \otimes {}^{S}\omega_{\epsilon,t}}$$

multiplicando à esquerda por ${}^{S}_{E}\hat{q}^{*}_{est,t-1}$

$$\underbrace{{}^{S}_{E}\hat{q}^{*}_{est,t-1} \otimes {}^{S}_{E}\hat{q}_{\epsilon,t}}_{1} = \frac{1}{2}\,\underbrace{{}^{S}_{E}\hat{q}^{*}_{est,t-1} \otimes {}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t-1}}_{1} \otimes {}^{S}\omega_{\epsilon,t}$$

$$\boxed{{}^{S}\omega_{\epsilon,t} = 2 \cdot {}^{S}_{E}\hat{q}^{*}_{est,t-1} \otimes {}^{S}_{E}\dot{\hat{q}}_{\epsilon,t}} \quad (47)$$

Notem a integral ao longo do tempo, de forma a isolar o valor DC

${}^{S}\omega_{b}$ → bias do giro é um valor DC ⟹ $\boxed{{}^{S}\omega_{b,t} = \zeta \sum_{t} {}^{S}\omega_{\epsilon,t}\,\Delta t}$ (48)

${}^{S}\omega_{c}$ → medida do giro descontada o bias ⟹ $\boxed{{}^{S}\omega_{c,t} = {}^{S}\omega_{t} - {}^{S}\omega_{b,t}}$ (49)

- demanda estimação <u>completa</u> de ${}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t}$, acho então que precisa incluir as leituras do Mag. Só serve para MARG
- acel e giro } estimam ${}^{S}_{E}\hat{q}_{est,t}$ | Preciso do Mag para poder calcular o erro!

3.6 Filter gains

$$\boxed{(1-\gamma_t)\beta = \gamma_t \frac{\mu_t}{\Delta t}} \quad (37)$$

giro (diverg) — acel (converg)

$\beta \to$ erro de medida do giro $= {}^{s}_{E}q_{\omega}$ expresso como magnitude da derivada do quaternion ($\omega \to$ veloc. angular)

$\zeta \to$ taxa de convergência tb expresso como magnitude da derivada do quaternion ($\omega \to$ veloc. angular)

É inteligente expressar β e ζ usando velocidade angular

Seja $\tilde{\omega}_\beta \to$ medida do erro do giro para cada eixo (zero mean??)

Seja $\dot{\omega}_\zeta \to$ estimação da taxa do bias

$$\beta = \left\| \frac{1}{2} \hat{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\omega}_\beta & \tilde{\omega}_\beta & \tilde{\omega}_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{4}}\, \tilde{\omega}_\beta \quad (50)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{3}{4}}\, \tilde{\omega}_\zeta \quad (51)$$

! Não ficou bem entendido !