Distribution Of Primes

From Primes To Riemann

Tariq Rashid

January 29, 2021

Experimental Mathematics

- Problems resistant to analysis $\rightarrow$ **experimental** exploration can provide hints

Number of Primes Up To n

- Number of primes up to $n \leftrightarrow$ average number of primes up to n

$$\pi(n)$$

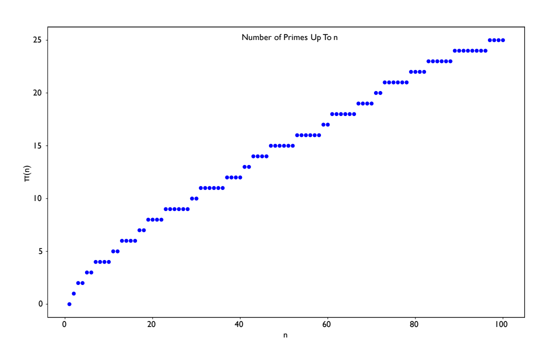
- 'The number of primes up to, and including, n'

$\pi(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\pi(n)$	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6

- $\pi(6)$ is the same as $\pi(5)$ because 6 is not prime.

$\pi(n)$



- Is this $ln(n)$?
- Smoothness suggests primes are governed by some constraint.

Gauss' Approximation

- Gauss was first to approximate $\pi(n)$ fairly well ... he was 15 years old!

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln(n)}$$

- Suprisingly simple!
- What pattern is captured by that $\ln(n)$?

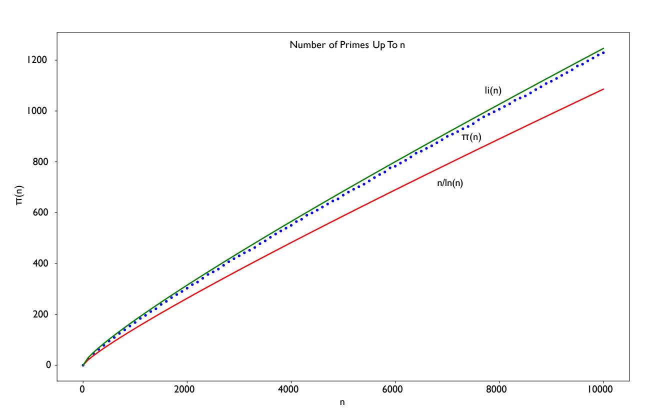
Gauss' Second Approximation

- A year later developed an even better approximation.

$$\pi(n) \approx \int_0^n \frac{1}{\ln(x)} dx$$

- Logarithmic integral is written as $\mathrm{li}(n)$
- Appears to be a **continuous** form of the first approximation.

Comparison of Approximations

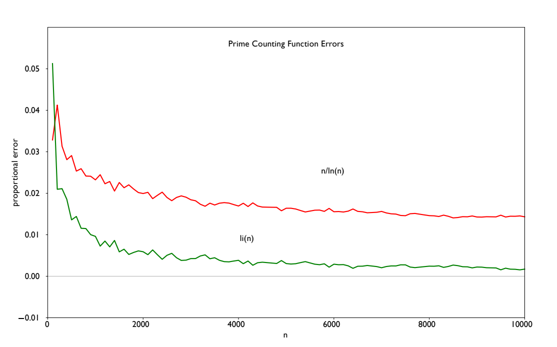


- The logarithmic integral is much closer to the real prime counts.

Error

- The charts (and the numbers) show the **error** gets larger.
- Does this mean the approximations become useless as n gets larger?

Proportional Error



- Error as a proportion of $\pi(n)$ seems to get smaller as n grows.
- $\mathrm{li}(n)$ has a distinctly smaller proportional error than $n/\ln(n)$.

Proportional Error

- $\pi(10000) = 1229$, $\mathrm{li}(1000) = 1246 \rightarrow$ error is just 17
- As a proportion of 1229, this is an impressively small 0.0138
- If proportional error falls towards zero, perhaps these approximations are correct in the limit $n \rightarrow \infty$?
  - what does it mean for the error $\rightarrow \infty$, but the proportional error $\rightarrow 0$?

Prime Density

- Can we interpret the form of Gauss' first approximation?

$$\text{mass} = \text{density} \times \text{volume}$$

$$\pi(n) \approx \frac{1}{\ln(n)} \times n$$

- Suggests $1/\ln(n)$ is the average density of primes.
- If true, this would be a remarkable insight into the primes!

Prime Density

- What about Gauss' second approximation?

$$\text{mass} = \int (\text{density}) dv$$

$$\pi(n) \approx \int_0^n \frac{1}{\ln(x)} dx$$

- Again, $1/\ln(x)$ emerges as a more locally accurate density of primes around a number x.

Imperfect History of $\pi(n)$

- Gauss didn't always publish his work, leaving us to reconstruct history from notes and letters.
- 1797 Legendre published $n/(A\ln(n)+B)$, updated in 1808 to $n/(\ln(n)-1.08366)$.
- 1849 Gauss wrote to Encke saying that in *'1792 or 1793'*, he developed $\int \frac{dn}{\mathrm{logn}}$.
- Collected works show that in 1791 Gauss had written about the simpler $\frac{a}{la}$.

Gauss' 1791 Some Asymptotic Laws Of Number Theory.

NACHLASS.

EINIGE ASYMPTOTISCHE GESETZE DER ZAHLENTHEORIE.

[I.]

[Handschriftliche Eintragung in dem Buche:] JOHANN CARL SCHULZE, Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer .... Tafeln. I, Berlin 1778; [von GAUSS' Hand] Gauß. 1791.

[Auf der Rückseite des letzten Blattes.]

[1.]

Primzahlen unter a $(=\infty)$

$$\frac{a}{la}.$$

[2.]

Zahlen aus zwei Factoren

$$\frac{lla \, . \, a}{la},$$

(wahrsch.) aus 3 Factoren

$$\frac{\frac{1}{2}(lla)^2 a}{la}, \ldots$$

et sic in inf.

2*

Legendre's 1797 Essai Sur La Theorie Des Nombres.

qu'à 1000000 la proportion sera encore moindre et ainsi de suite. En effet, la probabilité qu'un nombre pris au hasard sera premier, est d'autant moindre que ce nombre est plus grand ; car plus le nombre est grand, plus il y a de divisions à essayer pour s'assurer si le nombre est premier ou s'il ne l'est pas.

XXX. Nous remarquerons encore, que si on considère les seize suites dont les termes généraux sont : $60x+1$, $60x-1$, $60x+7$, $60x-7$, $60x+11$, $60x-11$, &c. (art. XV), et qu'on cherche, par exemple, combien il y a de nombres premiers dans un million des premiers termes de chaque suite, on trouveroit sensiblement le même nombre pour chacune ; d'où il suit que tous les nombres premiers (sauf 2, 3 et 5) sont répartis également entre ces différentes suites, et que chacune peut être censée contenir la seizième partie de la totalité des nombres premiers.

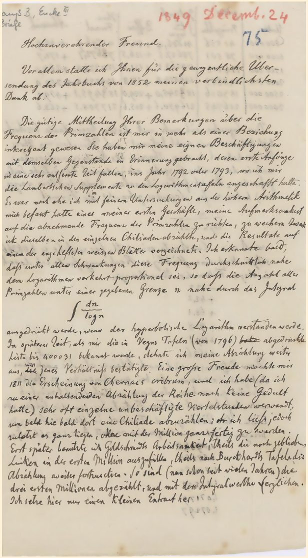
---

de a pris dans les tables ordinaires ; cette formule très-simple peut être regardée comme suffisamment approchée, au moins lorsque a n'excède pas 1000000. Ainsi si on demande combien il y a de nombres premiers depuis 1 jusqu'à 400000, on trouvera que ce nombre est $\frac{400000}{2\times 5,602}$ ou 35700 à-peu-près.

Au reste, il est vraisemblable que la formule rigoureuse qui donne la valeur de b lorsque a est très-grand, est de la forme $b=\frac{a}{A \log. a + B}$, A et B étant des coefficiens constans, et log. a désignant un logarithme hyperbolique. La détermination exacte de ces coefficiens seroit un problême curieux et digne d'exercer la sagacité des Analystes.

C 2

First page of Gauss' 1849 letter to Encke.



Gauß B, Encke III
Briefe

1849 Decemb. 24

75

Hochzuverehrender Freund.

Vor allem statte ich Ihnen für die gewogentliche Übersendung des Jahrbuchs von 1852 meinen verbindlichsten Dank ab.

Die gütige Mittheilung Ihrer Bemerkungen über die Frequenz der Primzahlen ist mir in mehr als einer Beziehung interessant gewesen. Sie haben mir meine eignen Beschäftigungen mit demselben Gegenstande in Erinnerung gebracht, deren erste Anfänge in eine sehr entfernte Zeit fallen, ins Jahr 1792 oder 1793, wo ich mir die Lambertschen Supplemente zu den Logarithmentafeln angeschafft hatte. Es war noch ehe ich mit feinern Untersuchungen aus der höhern Arithmetik mich befaßt hatte eines meiner ersten Geschäfte, meine Aufmerksamkeit auf die abnehmende Frequenz der Primzahlen zu richten, zu welchem Zweck ich dieselben in den einzelnen Chiliaden abzählte, und die Resultate auf einem der angehefteten weissen Blätter verzeichnete. Ich erkannte bald, daß unter allen Schwankungen diese Frequenz durchschnittlich nahe dem Logarithmen verkehrt proportional sei, so daß die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze n nahe durch das Integral

$$\int \frac{dn}{\log n}$$

ausgedrückt werde, wenn der hyperbolische Logarithm verstanden werde. In späterer Zeit, als mir die in Vegas Tafeln (von 1796) abgedruckte Liste bis 400031 bekannt wurde, dehnte ich meine Abzählung weiter aus, jenes Verhältniß bestätigte. Eine große Freude machte mir 1811 die Erscheinung von Chernacs cribrum, und ich habe (da ich zu einer anhaltenden Abzählung der Reihe nach keine Geduld hatte) sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt, um bald hie bald dort eine Chiliade abzuzählen; ich ließ jedoch zuletzt es ganz liegen, ohne mit der Million ganz fertig zu werden. Erst später benutzte ich Goldschmidts Arbeitsamkeit, theils die noch gebliebenen Lücken in der ersten Million auszufüllen, theils nach Burckhardts Tafeln die Abzählung weiter fortzusetzen. So sind (nun schon seit vielen Jahren) die drei ersten Millionen abgezählt, und mit dem Integralwerthe verglichen. Ich setze hier nur einen kleinen Extract her: