Projekt matematično modeliranje - poročilo

Gašper Žajdela, 27171185

16. september 2020

Kazalo

1 Uvod

Pri predmetu matematično modeliranje je ustna ocena pridobljena na podlagi projekta, ki ga vsak študent prejme in izdela individualno. Moja naloga je bila napisati program, ki bo rešil problem simetrične diskretne verižnice s sodo mnogo členki in raziskati kako se odbija kroglica, ki jo spustimo, da prosto pade na prvi členek verižnice z neko hitrostjo v_0, odboji pa so prožni. Jaz sem nalogo nekoliko posplošil, tako da lahko kroglico vržemo iz poljubne točke in v poljubni smeri, pri čemer je pomembno le, da kroglica v prvem odboju pade na verižnico z zgornje strani, kasneje pa se lahko odbije tudi ven. Simulacija je narejena za n odbojev, in se ustavi, če kroglica prej zapusti verižnico. Dodal pa sem tudi faktor dušenja, ki pri vsakem odboju kroglico upočasni za 2%, tako da skakanje kroglice zgleda bolj realno.

2 Reševanje problema simetrične diskretne verižnice s sodo mnogo členki

2.1 Splošna diskretna verižnica – na kratko

V splošnem imamo kot podatek dolžine in mase palic. Naj bo naša verižnica sestavljena iz $n+1$ členkov. Tedaj označimo L_i, $i = 1, \ldots, n+1$ dolžine palic in M_i, $i = 1, \ldots, n+1$ mase palic (privzemamo, da so palice homogene). Ko našo verižnico obesimo v krajiščih in pustimo da pade in se izoblikuje v naravno obliko, nas zanima, kakšna oblika to je.

Če bomo poznali obe koordinati za vsa krajišča palic, bomo točno poznali obliko verižnice. Iskali bomo torej točke (x_i, y_i) za $i = 0, \ldots, n+1$, kjer sta prva in zadnja točka obesišči (to že poznamo).

Iz fizike vemo, da se bo verižnica izoblikovala v tako obliko, da bo njena potencialna energija čim manjša. Minimizirati želimo torej funkcijo.

$$F(y) = \sum_{i=1}^{n+1} M_i \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$$

Opazimo, da potencialna energija ni odvisna od x, vendar to ni težava, saj velja zveza $x_i^2 + y_i^2 = L_i^2$ za vsak $i = 1, \ldots, n+1$, torej bomo iz tega znali izračunati tudi x. Če dobro pogledamo na problem, opazimo, da gre za problem iskanja ekstrema funkcije pri več vezeh. Problema se bomo lotili z uporabo metode Lagrangeevih multiplikatorjev. Tvorimo torej Lagrangeevo funkcijo

$$G(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(M_i \frac{y_{i-1} + y_i}{2} + \lambda_i((x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 - L_i^2) \right).$$

Odvajamo funkcijo G po x, y in λ in enačimo z 0. Dobimo naslednje enačbe:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_i} &= 0, \qquad i = 1, \ldots, n \\
\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial y_i} &= 0, \qquad i = 1, \ldots, n \\
\frac{\partial G}{\partial \lambda_i} &= 0, \qquad i = 1, \ldots, n+1
\end{aligned}$$

kar lahko prepišemo v

$$\begin{aligned}\lambda_i(x_i - x_{i-1}) - \lambda_{i+1}(x_{i+1} - x_i) &= 0, \qquad i = 1, \ldots, n\\ \lambda_i(y_i - y_{i-1}) - \lambda_{i+1}(y_{i+1} - y_i) &= -\frac{M_i + M_{i+1}}{4}, \qquad i = 1, \ldots, n\\ (x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 &= L_i^2, \qquad i = 1, \ldots, n+1\end{aligned}$$

Uvedemo relativne koordinate za lažje računanje, torej

$$\xi_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\eta_i = y_i - y_{i-1}$$

od koder dobimo zvezi:

$$x_i = x_0 + \sum_{j=1}^{i} \xi_j, \qquad i = 1, \ldots, n+1 \tag{1}$$

$$y_i = y_0 + \sum_{j=1}^{i} \eta_j, \qquad i = 1, \ldots, n+1 \tag{2}$$

označimo še $\mu_i = \frac{M_i + M_{i+1}}{2}$
in tako lahko zgornji sistem enačb prepišemo v

$$\lambda_i \xi_i - \lambda_{i+1}\xi_{i+1} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

$$\lambda_i \eta_i - \lambda_{i+1}\eta_{i+1} = -\frac{1}{2}\mu_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

$$\xi_i^2 + \eta_i^2 = L_i^2, \qquad i = 1, \ldots, n+1 \tag{5}$$

iz enačbe (3) sledi $\lambda_i \xi_i = -\frac{1}{2u}$, kjer je u neka konstanta, ki jo bomo še določili. Iz enačbe (4) in te zveze dobimo

$$\frac{\eta_i}{\xi_i} = \frac{\eta_1}{\xi_1} - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j, \tag{6}$$

kjer bomo pisali $v = \frac{\eta_1}{\xi_1}$. Iz enačbe (5) sedaj sledi

$$1 + \left(v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \right)^2 = \frac{L_i^2}{\xi_i^2}$$

od kjer lahko izrazimo ξ in z upoštevanjem prejžnje enačbe dobimo zvezo med ξ in η. Dobimo sistem dveh enačb za neznanki v in u.

Mi pa imamo še en pogoj, ki ga nismo upoštevali, in sicer simetričnost. Ko to upoštevamo, bomo eliminirali eno enačbo, saj bomo našli zvezo med v in u.

2.2 Simetrična diskretna verižnica s sodo mnogo členki

Naj bo sedaj $n+1=2p$. Zdaj bo veljalo $L_{n+2-i}=L_i$ in $M_{n+2-i}=M_i$ za $i=1,\dots p$. Vidimo, da je na simetrijski osi verižnice ravno točka (x_p,y_p). Od tod opazimo, da je $x_{p+1}-x_p=x_p-x_{p-1}$ in $y_{p+1}-y_p=y_{p-1}-y_p$. Če uporabimo enake oznake kot v prejšnjem razdelku, takoj dobimo zvezi:

$$\eta_{p+1}=-\eta_p$$
$$\xi_{p+1}=\xi_p\neq 0.$$

Delimo ti dve enačbi in upoštevamo zvezo (11), da dobimo zvezo med v in u.

$$v=u\sum_{j=1}^{p-1}\mu_j+\frac{1}{2}u\mu_p$$

In končno enačbo:

$$0=\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i-x_{n+1}+x_0,$$

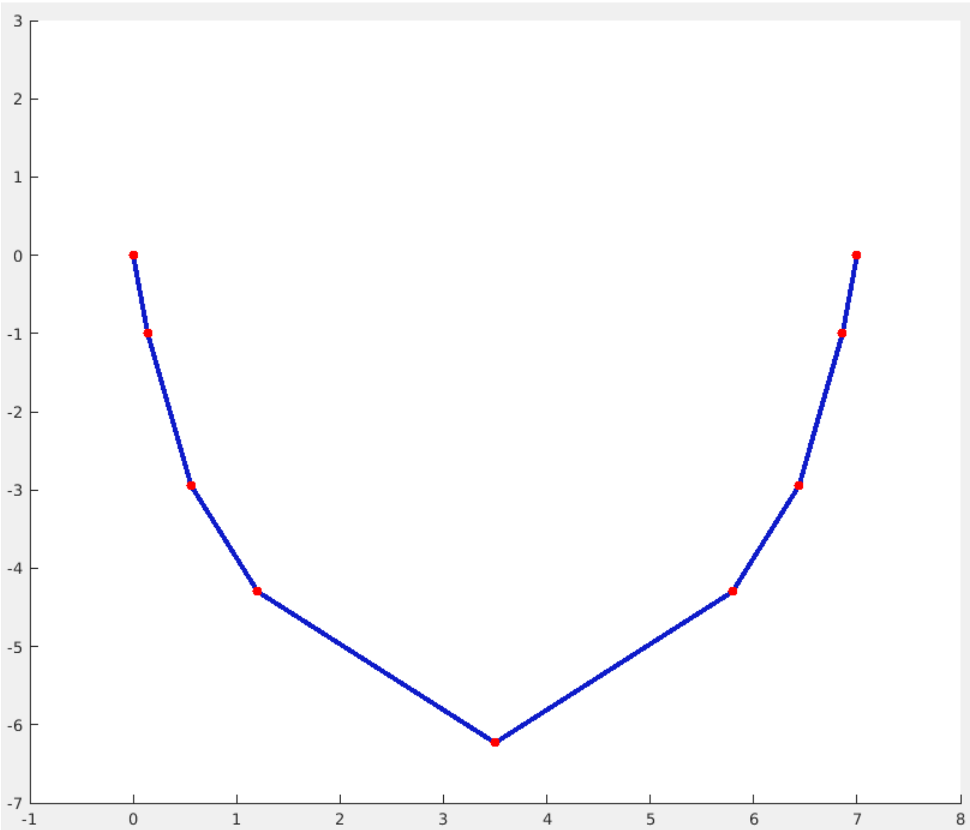
kjer je

$$\xi_i=\frac{L_i}{\sqrt{1+\left(u\sum_{j=1}^{p-1}\mu_j+\frac{1}{2}u\mu_p-u\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j\right)^2}}.$$

η_i pa dobimo tako, da ξ pomnožimo z $u\sum_{j=1}^{p-1}\mu_j+\frac{1}{2}u\mu_p-u\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j$. Torej smo res dobili le eno enačbo za neznanko u.

Če si pogledamo primer:

```
L = [1, 2, 1.5, 3];  % le prva polovica dolžin
M = [1, 5, 1, 2];  % le prva polovica mas
```



Slika 1: Simetrična diskretna verižnica s sodo mnogo členki.

3 Odboj kroglice

Odbijanje kroglice bomo simulirali po korakih, in sicer bomo najprej izračunali en odboj, nato pa za več odbojev kombinirali posamezne odboje.

3.1 En odboj

Vemo, da gre pri gibnju kroglice za poševni met. Izberemo si neko začetno točko $p_0 = (x_0, y_0)$, kjer se kroglica nahaja na začetku, z vektorjem hitrosti $v_0 = (v_x, v_y)$ pa določimo začetno smer gibanja. Privzeli bomo, da je začetna pozicija in začetna hitrost taka, da kroglica pade na zgornjo stran verižnice.

Verižnica je sestavljena iz daljic, torej kosov premic, katerih predpis bomo znali določiti ($y = kx + n$, kjer je $k = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ in $n = y_{i-1} - kx_{i-1}$), saj poznamo vsa krajišča vseh daljic. Iz tega bomo znali določiti čas odboja (t_0) iz tega pa točno koordinato odboja ($P(t_0)$), ker pa vemo kako se kroglica giblje ($P(t) = (x_0 + v_x t, y_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2})$), bomo vedeli tudi s kakšno hitrostjo je prispela do odbijališča ($V(t_0) = (v_x, v_y - gt_0)$). Iz fizike nadalje vemo, da je odbojni kot enak vpadnemu, z upoštevanjem da so odboji prožni, pa bomo znali določit s kakšno hitrostjo se kroglica odbije (vektor bomo zrcalili preko normale na členek).

Vemo, da je tir gibanja pri poševnem metu parabola. Da poiščemo mesto odboja, moramo najprej poiskati členek, na katerem se kroglica odbije. Pogledamo torej predpis za nosilko vsakega členka posebej in v dobljeni predpis vstavimo $P(t)$. Tako dobimo kvadratno enačbo za spremenljivko t. Tu imamo 2 možnosti. Lahko se parabola in premica sekata (v tem primeru dobimo dve ne nujno različni ničli), v nasprotnem primeru pa bosta ničli kompleksni. Slednji primer pove, da se parabola in premica ne sekata, torej to ne bo naš izbrani členek. Zanimiva pa je prva možnost. Praviloma bosta rešitvi različno predznačeni, saj bo teme parabole ležalo nad verižnico. Izbrali bomo torej pozitivno vrednost, saj je čas v realnem svetu pozitiven. Določimo še hitrost odboja s pomočjo zrcaljenja.

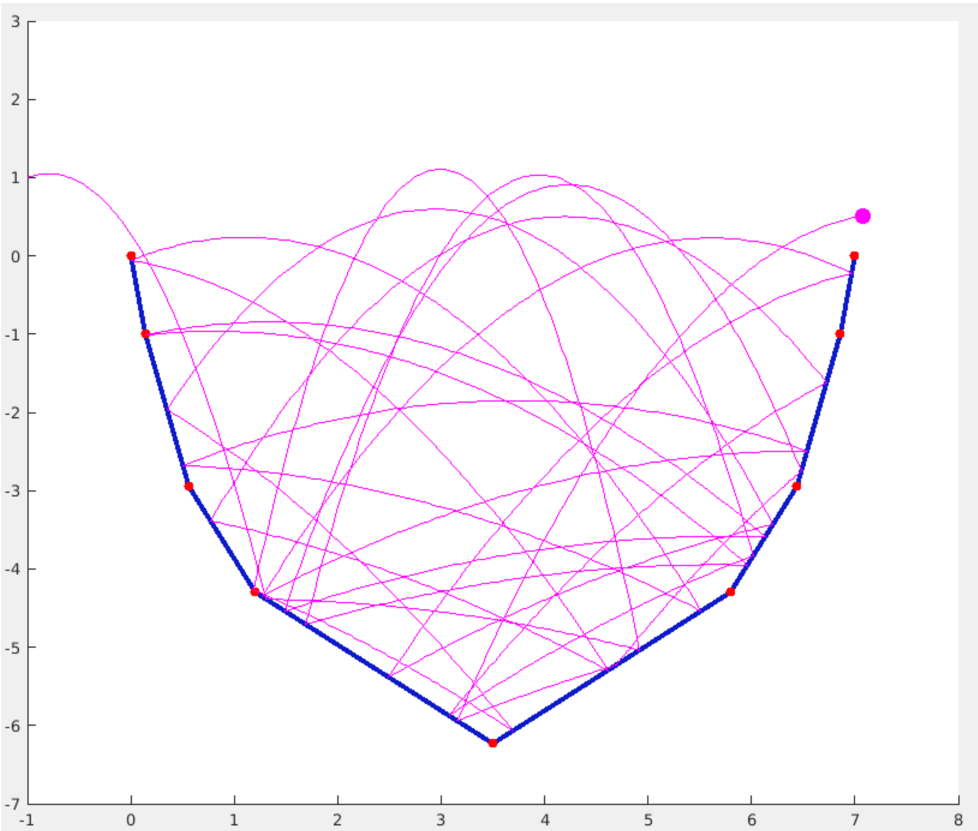
3.2 Več odbojev

Naj bo n število, ki določa koliko odbojov nas zanima. S pomočjo prejšnjega podrazdelka določimo vse odboje. En odboj znamo izračunati tako kot smo to storili v prejšnjem razdelku. Naslednji odboj izračunamo na enak način, le da za začetni položaj izberemo točko odboja, za začetno hitrost pa izberemo hitrost po odboju. Ta postopek ponavljamo, dokler ne pridemo v situacijo, ko kroglica odleti iz verižnice.

Ker bo v nadaljevanju naša želja odboje tudi grafično prikazati, si vse izračunane odboje hranimo v za to pripravljenih matrikah.

Primer:

```
L = [1, 2, 1.5, 3];  % le prva polovica dolžin
M = [1, 5, 1, 2];  % le prva polovica mas
v0 = [2; 1];
p0 = [-1, 1];
n = 100; % ne bo toliko odbojev, ker bo kroglica
% prej zapustila verižnico
```



Slika 2: Vsi odboji kroglice, ko kroglica zapusti verižnico.

Literatura

[1] E. Zakrajšek, *Verižnica*, 6. oktober 1999 strani 6–8.

[2] E. Žagar, *Dodatek k članku o diskretni verižnici*, 16. marec 2020