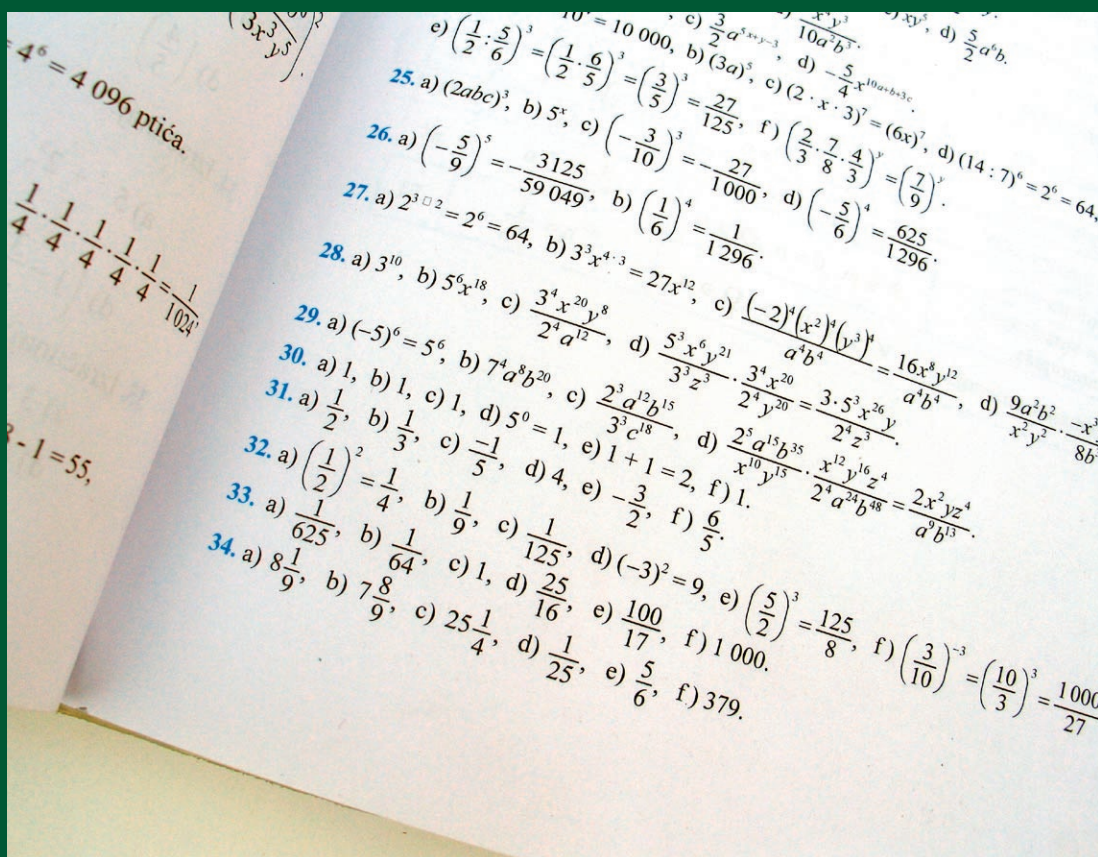


Potenciação

3

Roberto Geraldo Tavares Arnaut
Gustavo de Figueiredo Tarcsay



Sanja Gijenero

Fonte: www.sxc.hu

META

Apresentar as operações de potenciação.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, você deverá capaz de:

1. realizar operações com potências;
2. reconhecer as propriedades das potências;
3. escrever potências através da notação científica.

PRÉ-REQUISITOS

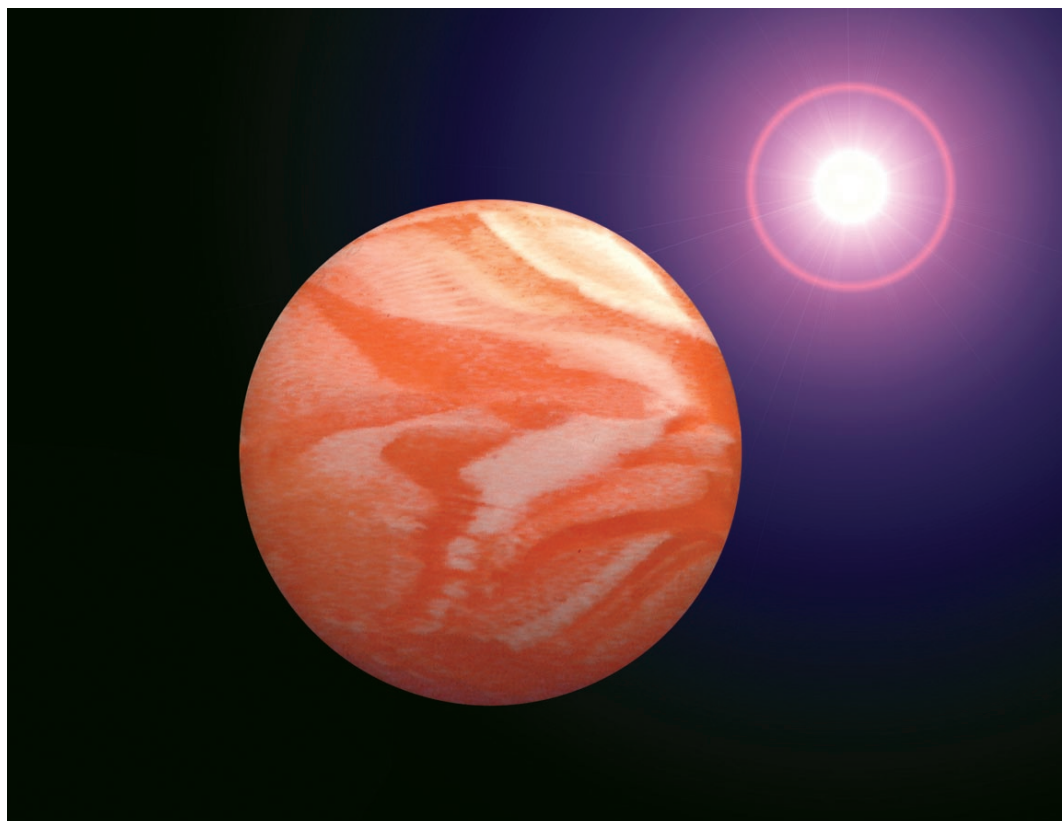
Para melhor compreensão desta aula, você deverá rever as operações de soma de frações com denominadores diferentes (Aula 1) e operações com números decimais (Aula 2).

Esta aula foi escrita com base em trechos do livro ARNAUT, Roberto Geraldo Tavares. *Matemática Básica*: volume único. 5 ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2008.

INTRODUÇÃO

A humanidade precisou de vários anos de estudo para evoluir da contagem simples até cálculos mais elaborados. Uma etapa fundamental desses estudos foi feita por Arquimedes, na Grécia Antiga. Esse cientista viveu no século III a.C. e fez importantes contribuições no campo teórico e prático da Matemática.

Em uma de suas pesquisas, Arquimedes resolveu descobrir e calcular quantos grãos de areia seriam necessários para encher o Universo. Essa questão nos parece um pouco estranha, mas na época em que ele viveu, o Universo era considerado um sistema de esferas com o mesmo centro: o Sol. Os planetas estavam fixados na superfície de cada esfera.



Adam Ciesielski

Fonte: www.sxc.hu

Figura 3.1: O Universo era um Sistema de Esferas.

Nos cálculos de Arquimedes, apareciam contas de multiplicar em que o número 10 era usado repetidas vezes. Fazer contas com esses números era extremamente difícil, pois eles eram muito grandes. Com isso, ele resolveu criar um método para escrever esses números grandes, utilizando algarismos especiais.

Com seus cálculos, esse matemático grego contribuiu para a elaboração do tema desta aula, a potenciação, e formulou algumas propriedades que veremos a seguir.

ÁRVORE GENEALÓGICA

Histórico de certa parte dos ancestrais de uma pessoa ou família.

POTENCIAÇÃO

Antes de apresentarmos o conceito de potenciação, vamos dar um exemplo do que é uma potência: a seguir, temos a **ÁRVORE GENEALÓGICA** da família de Alexandre. Alexandre tem todos os seus bisavós vivos, e agora queremos saber quantas bisavós ele tem.

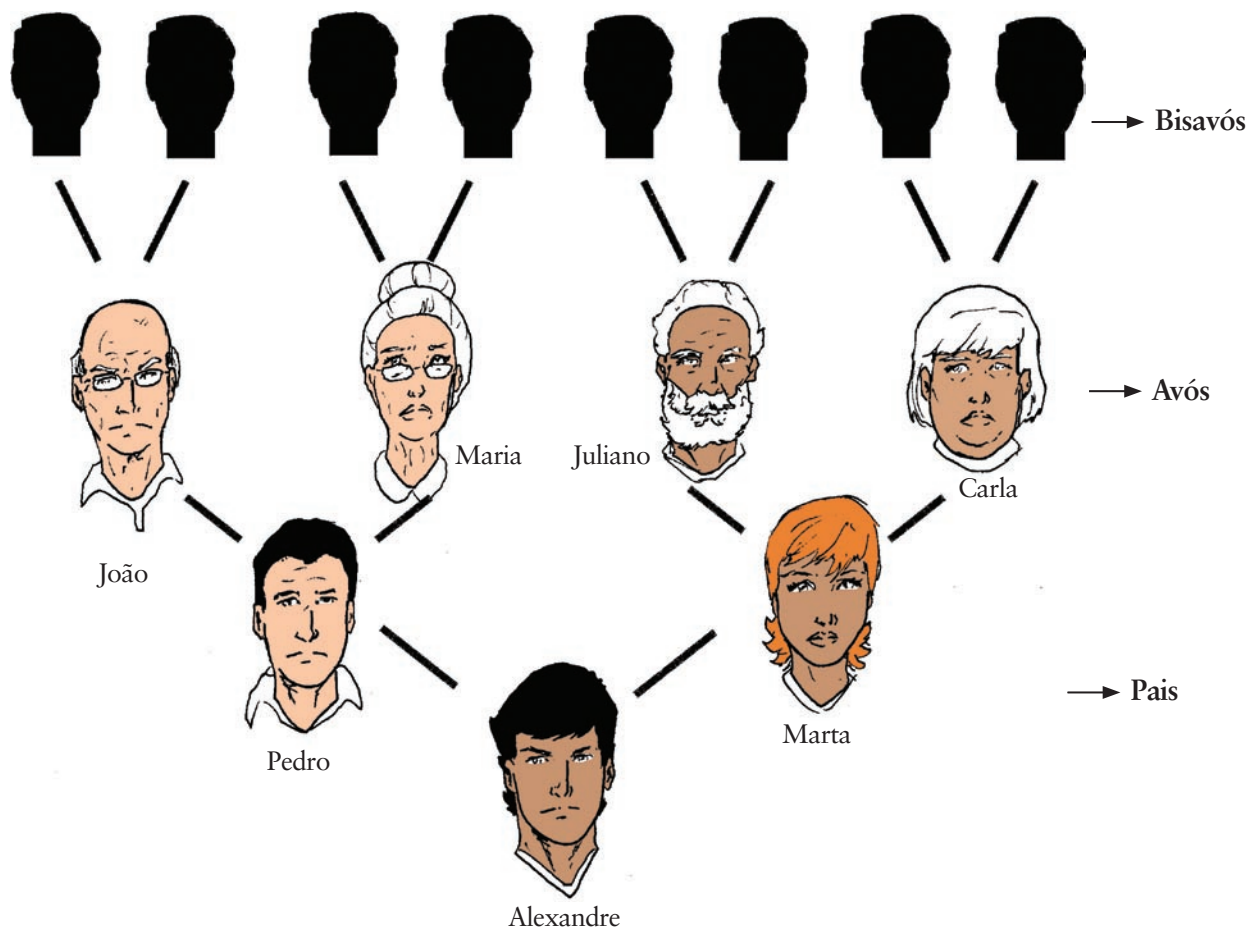


Figura 3.2: A árvore genealógica da família de Alexandre pode nos mostrar como escrever números, utilizando potências.

Observe:

- Alexandre tem 2 pais.
- Cada um deles tem 2 pais (avô e avó de Alexandre).
- Cada um dos avós de Alexandre tem 2 pais, também (bisavós de Alexandre).

Então, podemos dizer que, ao todo, Alexandre tem $2 \times 2 \times 2 = 8$ bisavós. Podemos escrever isso utilizando uma potência: $2 \times 2 \times 2 = 2^3$.

Uma potência é um produto (multiplicação) de fatores (números) iguais. Potência é o resultado da operação chamada potenciação.

Agora, vamos começar com as definições de potências de números reais. O que são os números reais? O conjunto dos números reais (\mathbb{R}) é uma expansão do conjunto dos números racionais (\mathbb{Q}), que engloba não só os números naturais, os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais. Os números irracionais são aqueles que não podem ser expressos por uma fração, como, por exemplo, um número decimal infinito: 3,141592 (...). O objetivo mais imediato dessas definições é simplificar a notação e fornecer um método para trabalhar com grandes números. No entanto, com o aprofundamento do estudo, mais adiante neste curso, você perceberá que a potenciação está na base das definições das funções logaritmo e exponencial. Esta última função é uma das mais importantes da Matemática. A seguir estão as duas definições para potenciação:

Definição 1

Seja a um número real e n um número natural, com $n \geq 2$. A potência de expoente n de a , denotada por a^n , é o número:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fatores}}$$

onde se estabeleceu a notação (ou representação simbólica) a^n para indicar, de forma simplificada (e, diga-se, criativa), esse produto, denominando-se a a *base da potência* e n o *expoente ou grau da potência*. Lê-se a representação simbólica a^n como “potência n de a ” ou “potência enésima de a ” ou, simplesmente, “ a elevado a n ”.



Figura 3.3: Potência de base a elevada ao expoente n .

Definição 2

Seja a um número real, diferente de zero, e n um número natural, com $n \geq 2$. A potência de expoente $-n$ de a , denotada por a^{-n} , é o número:

$$a^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \dots \times \frac{1}{a}}_{n \text{ fatores}}$$

Por meio dessas duas definições, podemos dizer que potência de grau n de a é o produto de n fatores iguais a a . Assim:

- a^0 é a potência de grau zero de a ou potência de expoente zero, a um número real diferente de zero. Assumimos que $a^0 = 1$.
- a^1 é a potência de grau 1 de a , sendo igual ao próprio a . Neste caso, pode ser dispensável escrever o expoente, e temos $a^1 = a$.
- a^2 é a potência de grau 2 de a , conhecida como quadrado de a ou a ao quadrado.
- a^3 é a potência de grau 3 de a , conhecida como o cubo de a ou a ao cubo;
- $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$, onde $a \neq 0$ e n é um número natural.

As potências de 0 são as potências de base 0, dados por 0^n , $n > 0$. A Matemática julga ser indeterminado o valor da potência 0^0 , mas as outras potências, cuja base é 0 e cujo expoente é positivo, têm como resultado o próprio 0.

Exemplo:

$$0^2 = 0 \times 0 = 0$$



Ruben Joye

Fonte: www.sxc.hu

Figura 3.4: 0^0 é uma indeterminação matemática.



CURIOSIDADE

As potências com base igual a 2 são muito importantes para a ciência da computação. Por exemplo, na linguagem dos computadores, chamada linguagem binária, existem 2^n valores possíveis para uma variável que ocupa n bits (menor unidade para transmissão de dados) da memória, onde $1 \text{ kilobyte} = 2^{10} = 1024 \text{ bytes}$. Considerando que é possível haver confusão entre os padrões dos prefixos, em 1998 a Comissão Eletrotécnica Internacional aprovou vários prefixos binários novos. Por exemplo, o prefixo de múltiplos de 1024 é kibi-, então 1024 bytes é equivalente a um kibibyte. Outros prefixos são mebibyte (2^{20}), gibibyte (2^{30}) e tebibyte (2^{40}).



Bazil Raubach

Fonte: www.sxc.hu

A potenciação é um importante instrumento para a linguagem dos computadores.

A seguir, temos alguns exemplos:

a) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

b) $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

c) $(0,2)^3 = (0,2) \times (0,2) \times (0,2) = 0,008$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$;

e) $6^1 = 6$

f) $7^0 = 1$

ATIVIDADE 1

Atende ao Objetivo 1

Calcule as seguintes potências:

a. 5^3

b. $(-5)^3$

c. $(0,2)^4$

d. $(0,1)^3$

e. $(\frac{1}{4})^4$

f. 2^1

g. 10^0

PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS

Sejam a e b números reais e m e n números inteiros. Supondo que as potências expressas estão bem definidas, então valem as seguintes propriedades:

POTÊNCIAS DE MESMA BASE

Para multiplicar, mantém-se a base e somam-se os expoentes, isto é:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Exemplo: $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5$

Usando a propriedade, temos que $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$.

Para dividir, mantém-se a base e subtraem-se os expoentes, isto é:

$$a^m/a^n = a^{m-n}, a \neq 0$$

Exemplo: $a^6/a^2 = (a \times a \times a \times a \times a \times a)/(a \times a)$

Simplificando, temos que $a \times a \times a \times a = a^4$

Usando a propriedade, temos que $a^6/a^2 = a^{6-2} = a^4$

**SAIBA MAIS...**

Podemos, agora, explicar por que $a^0 = 1$. Usando a propriedade de divisão de potências de mesma base, temos:

$$1 = a/a = a^1/a^1 = a^{1-1} = a^0$$

POTÊNCIAS DE MESMO EXPOENTE

Para multiplicar, mantém-se o expoente e multiplicam-se as bases, isto é:

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Exemplo: $a^3 \times b^3 = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b)$

Usando a propriedade, temos que $a^3 \times b^3 = (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) = (a \times b)^3$

Para dividir, mantém-se o expoente e dividem-se as bases, isto é:

$$a^n/b^n = (a/b)^n, b \neq 0.$$

Exemplo: $a^4/b^4 = (a \times a \times a \times a)/(b \times b \times b \times b)$

Usando a propriedade, temos que $a^4/b^4 = (a/b) \times (a/b) \times (a/b) \times (a/b) = (a/b)^4$.

ATIVIDADE 2**Atende ao Objetivo 1**

Determine o valor da expressão: $(-1)^0 + (-6) \div (-2) - 2^4$.

POTÊNCIA DE POTÊNCIA

Para calcular a potência de outra potência, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes, isto é:

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Exemplo: $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2$

Usando a propriedade, temos que $(a^2)^3 = a^{2+2+2} = a^6$.

Observações:

- Nas propriedades enunciadas, a base deve ser não-nula nas seguintes situações: o expoente é negativo ou a potência está no denominador.
- As propriedades têm a finalidade de facilitar o cálculo. Seu uso não é obrigatório. Devemos usá-las quando for conveniente.
- As propriedades enunciadas podem ser provadas a partir das definições. Por uma questão de objetividade, partimos diretamente para os exemplos.

Seguem outros exemplos:

a) $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$;

b) $4^5/4^2 = 4^{5-2} = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$;

c) $3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2 = 15^2 = 15 \times 15 = 225$;

d) $6^4/3^4 = (6/3)^4 = 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$;

e) $(3^3)^2 = 3^{3 \times 2} = 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$;

f) $(a^2 \times b^2)^2 = (a^2)^2 \times (b^2)^2 = a^4 \times b^4$.

ATIVIDADE 3

Atende aos Objetivos 1 e 2

Efetue as operações indicadas:

a. $2^3 \times 2^6$

e. $3^2 \times 5^2$

b. $3^2 \times 3^6 \times 3^{-4}$

f. $(2^4)^3$

c. $5^4 \div 5^2$

g. $4^2/2^2$

d. $3^{98}/3^{95}$

h. $3^{-4}/3^{-3}$

ATIVIDADE 4

Atende aos Objetivos 1 e 2

Determine o valor de $(0,2)^3 + (0,32)^2$.

ATIVIDADE 5

Atende aos Objetivos 1 e 2

Determine o valor de $10^2 \times 10^{-4} \times 10^{-3} / 10^{-2} \times 10^{-6}$.

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Todo número real positivo b pode ser expresso na forma $b = a \times 10^p$, onde p é um número inteiro e a um número real, com $1 < a < 10$. Esta maneira especial de escrever o número b é denominado notação científica.

Observe os números a seguir:

- 800 000
- 10 000 000
- 400 000 000 000 000
- 6 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
- 0,000158
- 0,00000023
- 0,000000000000000004
- 0,002

A expressão desses números na forma convencional torna-se difícil. O principal fator de dificuldade é a quantidade de zeros extremamente alta para a velocidade normal de leitura dos números.

ATIVIDADE 6

Atende aos Objetivos 1 e 2

Determine o valor de $5^{-1} + 2^{-1}/3^{-1}$.

ATIVIDADE 7

Atende ao Objetivo 3

Escreva, sob a forma de notação científica, o número $9^{12} \times 5^{23}$.

RESUMINDO...

- Seja a um número real e n um número natural, com $n \geq 2$. A potência de expoente n de a é denotada por a^n .
- Seja a um número real não-nulo e n um número natural, com $n = 2$. A potência de expoente $-n$ de a é denotada por a^{-n} .
- Para multiplicar potências de mesma base, mantém-se a base e somam-se os expoentes.
- Para dividir potências de mesma base, mantém-se a base e subtraem-se os expoentes.
- Para multiplicar potências de bases diferentes e expoentes iguais, mantém-se o expoente e multiplicam-se as bases.
- Para dividir potências de bases diferentes, mantém-se o expoente e dividem-se as bases.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos investigar o universo da radiciação. Até lá.

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES

ATIVIDADE 1

- a. $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
- b. $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$
- c. $(0,2)^4 = 0,2 \times 0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,0016$
- d. $(0,1)^3 = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,001$
- e. $(\frac{1}{4})^4 = (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{4}) = \frac{1}{256}$
- f. $2^1 = 2$
- g. $10^0 = 1$

ATIVIDADE 2

$$(-1)^0 + (-6) \div (-2) - 2^4 = 1 + 3 - 16 = -12$$

ATIVIDADE 3

- a. $2^3 \times 2^6 = 2^{3+6} = 2^9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 512$
- b. $3^2 \times 3^6 \times 3^{-4} = 3^{2+6+(-4)} = 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- c. $5^4 \div 5^2 = 5^{4-2} = 5^2 = 5 \times 5 = 25$
- d. $3^{98} / 3^{95} = 3^{98-95} = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
- e. $3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2 = 15^2 = 15 \times 15 = 225$
- f. $(2^4)^3 = 2^{4 \times 3} = 2^{12} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4096$
- g. $4^2 / 2^2 = (4/2)^2 = 2^2 = 2 \times 2 = 4$
- h. $3^{-4} / 3^{-3} = (1/3)^4 / (1/3)^3 = (\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}) / (\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}) =$
 $1/81 / 1/27 = 1/81 \times 27/1 = 27/81 = 1/3.$

ATIVIDADE 4

$$(0,2)^3 + (0,32)^2 = (0,2 \times 0,2 \times 0,2) + (0,32 \times 0,32) = 0,008 + 0,1024 = 0,1104$$

ATIVIDADE 5

$$10^2 \times 10^{-4} \times 10^{-3}/10^{-2} \times 10^{-6} = 10^{2 + (-4) + (-3)} / 10^{(-2) + (-6)} = 10^{-5}/10^{-8} = 10^{-5-(-8)} = 10^{-5+8} = 10^3 = 1000$$

ATIVIDADE 6

$$5^{-1} + 2^{-1}/3^{-1} = 1/5 + 1/2/1/3 = 1/5 + 1/2 \cdot 3/1 = 1/5 + 3/2 = (2 + 15)/10 = 17/10 = 1,7.$$

ATIVIDADE 7

$$9^{12} \times 5^{23} = (3^2)^{12} \times 5^{23} = 3^{24} \times 5^{23} = 3^1 \times 3^{23} \times 5^{23} = 3 \times 15^{23}$$

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ARNAUT, Roberto Geraldo Tavares. *Matemática Básica*: volume único. 5 ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2008.