

Materiały pomocnicze do ćwiczeń z przedmiotu

## **Mechanika konstrukcji okrętu**

sem. 5, Budowa okrętów i jachtów

Wojciech Puch

Politechnika Gdańska  
Wydział Oceanotechniki i Okrętownictwa  
Gdańsk, 2014

# Rozdział 1

## Wprowadzenie – dlaczego obliczenia i jakie

Celem nauki jest opisywanie, tłumaczenie i przewidywanie zachowania otaczającego nas świata. Zadanie to można uczynić łatwiejszym, jeśli zamiast obiektów rzeczywistych rozpatruje się ich *modele*.

Model: to zbiór elementów rzeczywistości, przyjętych jako istotne dla danego zagadnienia, oraz reguł, które nimi rządzą.

Przy konstruowaniu modelu *celowo* rezygnujemy z pełnego opisu, aby uzyskać jak najprostszy schemat, w którym staramy się uwzględnić tylko wybrane cechy badanych zjawisk.

Technika najczęściej stawia sobie skromniejsze zadania: korzystając z osiągnięć nauki chce przewidywać zachowanie się obiektów technicznych. Obliczenia wytrzymałościowe konstrukcji zawężają obszar zainteresowania do zjawisk wytrzymałościowych.

Dlaczego wykonuje się obliczenia wytrzymałościowe (w jakim celu):

bo obiekt techniczny, który ma być częścią środowiska życia społeczności, powinien być:

1. bezpieczny i nieuciążliwy dla użytkowników, obsługi i środowiska;
2. funkcjonalny.

Dodatkowo, inwestor oczekuje, że obiekt ten, spełniając powyższe wymagania, będzie „optymalny”, tzn. łączne koszty materiału, projektu, wykonania i przyszłej eksploatacji oraz utylizacji, będą minimalne.

Wymaganiem bezwzględny, z punktu widzenia społeczeństwa, jest bezpieczeństwo i nieuciążliwość obiektów technicznych. Aby się przekonać, czy dany obiekt taki jest, należy:

1. sformułować kryteria oceny;
2. dokonać oceny.

Dąży się do tego, aby kryteria oceny były wyrażone w postaci liczbowej i były powiązane ze zjawiskami fizycznymi.

Dlaczego wykonuje się obliczenia wytrzymałościowe (z jakiego powodu):

1. Materiał ma ograniczoną wytrzymałość, tzn. po przekroczeniu określonego obciążenia element z niego wykonany traci spójność.
2. Pod wpływem obciążenia zmiana kształtu jest większa od dopuszczalnej i obiekt traci własności użytkowe.

3. Zachowanie się obiektu poddanego działaniu obciążenia jest niebezpieczne dla zdrowia ludzi i pracy urządzeń.

Najbardziej typowe inżynierskie analizy wytrzymałości, to wyznaczenie stanu naprężenia i sprawdzenie stateczności, w następujących warunkach:

- obciążenia statyczne,
- materiał liniowo–sprężysty,
- stałe warunki brzegowe,
- małe przemieszczenia.

Są one albo jedynymi wymaganymi rodzajami obliczeń, albo pierwszym etapem nawet najbardziej złożonej analizy.

## Rozdział 2

# Zasady wykonywania obliczeń „ręcznych”

1. Obliczenia są prowadzone w systemie wzór – podstawienie – wynik.
2. Wszystkim wartościom liczbowym muszą towarzyszyć jednostki.  
Czasem rutynowe obliczenia wykonujemy w jednolitych jednostkach (np. obliczenia charakterystyk geometrycznych przekrojów) i wówczas pomijamy jednostki na etapach pośrednich, ale wynik jest zawsze opatrzony jednostką.
3. Liczby zapisujemy z dokładnością do czterech lub pięciu cyfr znaczących.  
(Cyfry znaczące są liczone od pierwszej niezerowej cyfry z lewej strony.)
4. Najmniej znacząca (ostatnia) cyfra w liczbie powstaje przez zaokrąglenie zgodnie z regułami:  
(następna cyfra) =  $\langle 0 \div 4 \rangle \rightarrow +0$   
(następna cyfra) =  $\langle 5 \div 9 \rangle \rightarrow +1$ .
5. Jako separatora dziesiętnego używamy przecinka lub kropki, ale konsekwentnie.
6. Jeśli liczba jest duża (np.  $\geq 10^5$ ) lub mała (np.  $< 10^{-3}$ ) to zapisujemy ją w postaci wykładniczej, np. zamiast 0.00002679 piszemy  $2.679 \cdot 10^{-5}$ .
7. Wartości naprężeń wyrażamy w [MPa] i zapisujemy z dokładnością do jednej cyfry dziesiętnej (np. 78.3 MPa).  
Wystarczająca jest dokładność do całych [MPa] (bo poziom naprężeń dopuszczalnych jest rzędu 100 MPa i podawany jest z dokładnością do 1 MPa, a dokładność obliczeń nie jest lepsza niż 1%), ale ze względów historycznych (bo kiedyś naprężenia wyrażano w  $[\text{kg}/\text{cm}^2]$  z dokładnością do 1  $\text{kg}/\text{cm}^2$ , a  $1 \text{ kg}/\text{cm}^2 = 0.1 \text{ MPa}$ ) biura obliczeniowe i instytucje nadzorcze preferują dokładność 0.1 MPa.

Przykłady:

$$A = a \cdot b = 0.0379 \text{ m} \cdot 0.01358 \text{ m} = 5.147 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

(dokładny wynik mnożenia: 0.000514682)

## Rozdział 3

# Konstrukcja, modele

Przestrzeń, w której żyjemy, ma trzy wymiary geometryczne. Wobec tego każde ciało stałe, a przedmiotem mechaniki konstrukcji są sprężyste ciała stałe, jest „zbudowane” z brył. Do celów obliczeniowych stosujemy modele – opisujące rzeczywistość w sposób uproszczony, zarówno w zakresie geometrii jak i zjawisk fizycznych.

Powszechnie stosowane są trzy grupy modeli geometrycznych:

1. bryłowe, zachowujące wszystkie trzy wymiary geometryczne;
2. powierzchniowe, stosowane do obiektów, których jeden wymiar geometryczny jest znacznie mniejszy od dwóch pozostałych;
3. liniowe, stosowane do obiektów, których jeden wymiar geometryczny jest znacznie większy od dwóch pozostałych.

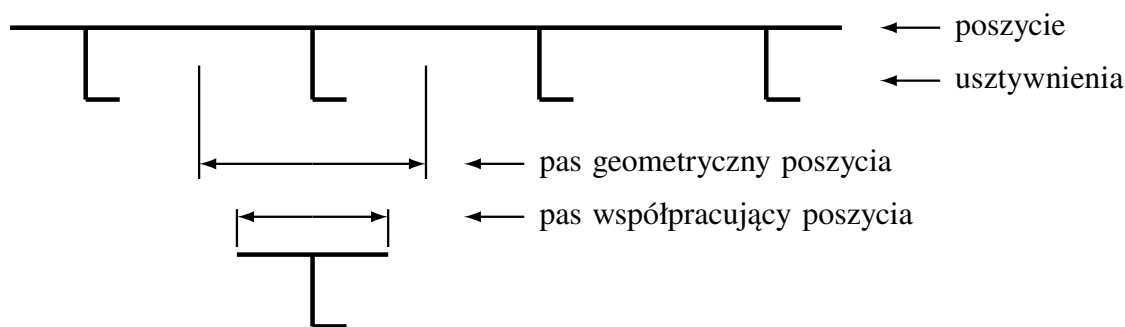
Konstrukcja klasycznego kadłuba statku jest utworzona z blach i kształtowników. Obydwa te „składniki konstrukcji” są „cienkościenne”, a kształtowniki dodatkowo również „jednowymiarowe”. Z tej obserwacji wynika zalecany przez przepisy powłokowo-belkowy lub powłokowo-prętowy, „globalny” model wytrzymałościowy konstrukcji kadłuba statku. Pozwala on odwzorować pracę konstrukcji w zakresie wytrzymałości strefowej i ogólnej oraz zebrać informacje umożliwiające wykonanie pełnych obliczeń wytrzymałości lokalnej blach poszycia.

Prostsze koncepcyjnie, ale często wystarczające, a niekiedy nawet niezastąpione, są modele belkowe. Mogą one posłużyć do analizy wytrzymałości ogólnej kadłuba statku, strefowej analizy wytrzymałości wiązarów i lokalnej analizy wytrzymałości usztywnień. Każde z tych obliczeń jest wykonywane niezależnie.

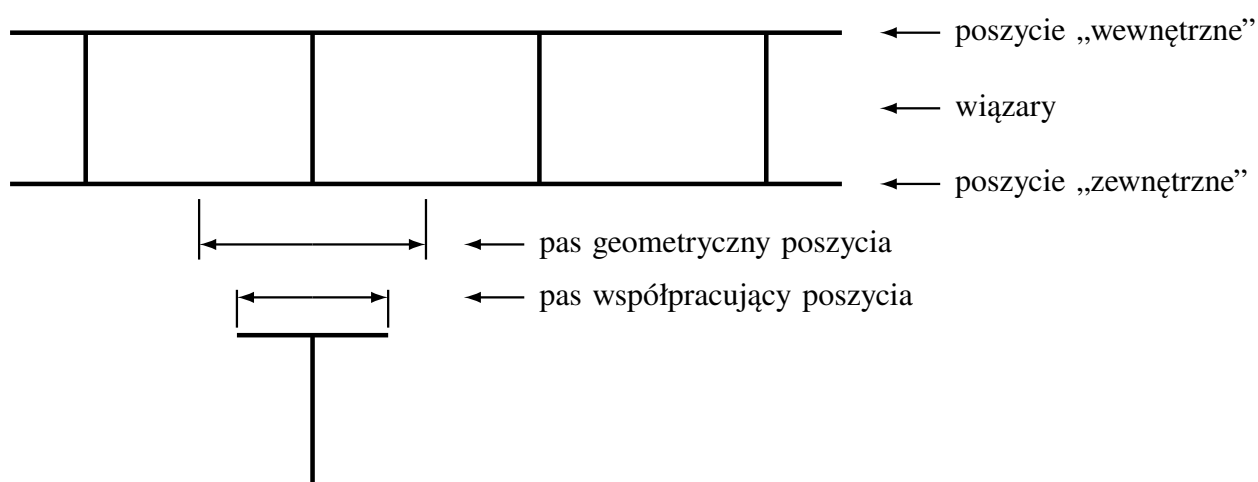
Postać geometryczna „jednowymiarowych” modeli belkowych, wyodrębnionych z ciągłej, „dwuwymiarowej” konstrukcji kadłuba statku, wynika z następujących obserwacji.

- Podstawową strukturą konstrukcji kadłuba statku jest poszycie podparte wiązaniami: usztywnieniami i wiązarami.
- Obciążenie poprzeczne (prostopadłe do poszycia), przenoszone przez tę strukturę, wywołuje w wiązaniami siły wewnętrzne: momenty gnące i siły tnące. Zgięcie i ścinanie następuje w płaszczyźnie środka wiązania.

- Wygodnym modelem do obliczeń projektowych i szybkich obliczeń sprawdzających wytrzymałość usztywnień i wiązarów jest belka „dwuteowa” utworzona z wiązania i przyspawanego „współpracującego” pasa poszycia, obciążona obciążeniem ciągłym równoważnym ciśnieniu działającemu w obrębie „geometrycznego” pasa poszycia.
- „Pas geometryczny” jest definiowany jako obszar blachy sięgający do połowy odległości do najbliższego „równoległego sąsiada” tej samej lub wyższej klasy sztywności (usztywnienie, wiązar, płat prostopadły).
- „Pas współpracujący” jest pojęciem umownym. Obejmuje on fragment „pasa geometrycznego” o takiej szerokości, że siła podłużna równoważna naprężeniom tarczowym, które powstały w poszyciu wskutek zginania układu poszycie–wiązanie, jest taka sama w przypadku modelu belkowego (naprężenia stałe na szerokości mocnika) i cienkościennej konstrukcji powłokowej (zmienne naprężenia w poszyciu w obrębie pasa geometrycznego). Szerokość pasa współpracującego poszycia wyznacza się korzystając ze wskazówek zawartych w odpowiednich przepisach.
- Belki „wycięte” z poszycia modelują pracę usztywnień (rys. 3.1) oraz wiązarów (rys. 3.2).



Rysunek 3.1:



Rysunek 3.2:

## Rozdział 4

# Obliczanie naprężeń w belkach cienkościennych obciążonych obciążeniem poprzecznym i dodatkowymi naprężeniami „osiowymi”

Belki cienkościenne stosowane w konstrukcji kadłuba statku charakteryzują się tym, że mają wyraźnie wyróżniony „środek”, do którego są przyspawane „mocniki”. Obciążenie poprzeczne działa w płaszczyźnie środka, na kierunku prostopadłym do osi belki. Naprężenia generowane współpracą ze strukturami „wyższych rzędów” – wiązarami i belką kadłuba – są liniowo zmienne na wysokości środka.

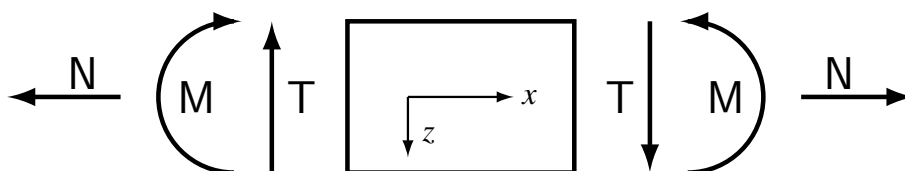
Założenia:

1. Mocniki są prostopadłe do środka.
2. Współpraca z poszyciem wymusza płaską formę zgięcia belek; zgięcie następuje w płaszczyźnie środka.
3. Obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów.

Powyższe założenia sprawiają, że skutkiem działania obciążenia są wyłącznie naprężenia normalne wywołane zginaniem i naprężenia styczne wywołane ścinaniem.

W poniższych obliczeniach przyjmujemy następujące konwencje:

1. dodatnie naprężenie normalne powoduje rozciąganie;
2. obowiązuje układ współrzędnych kartezjański, prostokątny: oś  $x$  jest skierowana wzdłuż belki, oś  $z$  leży w płaszczyźnie środka i jest prostopadła do osi  $x$ , oś  $y$  dopełnia prawoskrętny układ współrzędnych (a więc jest prostopadła do płaszczyzny środka);
3. dodatnie zwroty sił wewnętrznych:



4. obliczenia będą wykonywane tylko dla zginania w płaszczyźnie  $Oxz$ , więc siły wewnętrzne i charakterystyki geometryczne przekrojów będą oznaczane „bezwskaźnikowo”:  $M \equiv M_y$ ,  $T \equiv T_z$ ,  $\sigma \equiv \sigma_x$ ,  $\tau \equiv \tau_{xz}$  lub  $\tau_{xy}$ ,  $I \equiv I_y$ ;
5. w obliczeniach numerycznych charakterystyk geometrycznych będą używane jednostki [metr] lub [centymetr] i miana te będą pomijane;
6. jeśli w przykładach numerycznych, w pewnych liczbach jest mniej cyfr znaczących niż 4, to oznacza to, że pozostałe „znaczące cyfry” były zerami;
7. może się zdarzyć, że rezultaty obliczeń przykładowych będą się różnić na ostatniej pozycji od wyników obliczeń „kalkulatorowych”, bo obliczenia te były wykonywane bez zaokrąglania wyników pośrednich.

## 4.1 Obliczanie naprężeń

Naprężenia w belkach można obliczyć korzystając ze wzorów znanych z kursu Wytrzymałości Materiałów. Do obliczania naprężeń w wybranym przekroju belki można przystąpić po wyznaczeniu w tym przekroju wartości sił wewnętrznych oraz niezbędnych charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego belki.

W poniższych wzorach układ współrzędnych  $Oyz$  jest układem centralnym przekroju poprzecznego belki (ale niekoniecznie głównym, bo płaszczyzna zginania jest wymuszona).

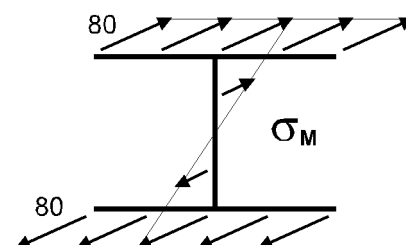
### 4.1.1 Naprężenia wywołane zginaniem

Naprężenia wywołane zginaniem są naprężeniami normalnymi. Wartości w dowolnym punkcie przekroju są opisane zależnością:

$$\sigma_M(z) = \frac{M}{I} \cdot z$$

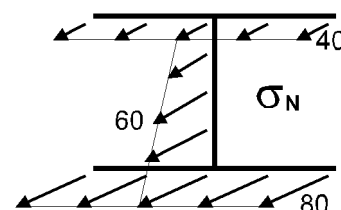
gdzie:  $M$  – moment gnący;  $I$  – moment bezwładności zginania względem osi  $y$ ;  $z$  – współrzędna punktu, w którym wyznaczone są naprężenia.

Naprężenia przyjmują ekstremalne wartości w punktach najbardziej oddalonych od osi obojętnej zginania. Na szerokości mocników naprężenia są stałe, natomiast na osi obojętnej naprężenia są równe zero.



### 4.1.2 Naprężenia wynikające ze współpracy z „wyższymi” strukturami

Naprężenia powstające wskutek współpracy ze zginanymi strukturami „wyższych rzędów” – więzarami i belką kadłuba – są naprężeniami normalnymi i przyjmujemy, że są liniowo zmienne na wysokości środnika. Mogą być dane bezpośrednio w postaci wartości  $\sigma_N(z)$  lub w formie siły podłużnej  $N$  i wówczas są stałe w obszarze przekroju:  $\sigma_N = N/A$  ( $A$  – pole przekroju poprzecznego belki).





### 4.1.3 Naprężenia wywołane ścinaniem

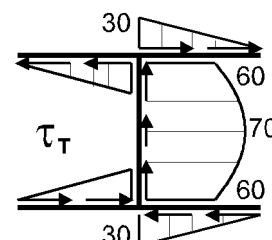
Siła tnąca generuje w danym przekroju konstrukcji naprężenia styczne. W belkach cienkościennych (tzn. gdy przekrój można zastąpić „linią szkieletową”) średnie naprężenia styczne na grubości „cienkościennej ścianki”, w wybranym punkcie linii szkieletowej, wyznacza się z zależności:

$$|\tau(s)| = \frac{|T| \cdot |\tilde{S}_y(z)|}{I \cdot t(s)}$$

gdzie:  $T$  – siła tnąca;  $\tilde{S}_y$  – moment statyczny części przekroju „odciętej” w miejscu wyznaczania naprężeń, względem osi  $y$ ;  $I$  – moment bezwładności zginania całego przekroju względem osi  $y$ ;  $t$  – grubość ścianki w miejscu wyznaczania naprężeń. „Przecięcie” przekroju zawsze jest wykonywane prostopadłe do linii szkieletowej.

Moment statyczny  $|\tilde{S}_y|$  osiąga maksymalną wartość na osi obojętnej zginania. Na „swobodnych końcach” linii szkieletowej jego wartość jest równa zero.

Ze wzoru nie wynika wprost, w którym punkcie przekroju naprężenia  $\tau$  będą największe, bo ich wartość zależy od dwóch zmiennych parametrów: momentu statycznego  $\tilde{S}_y$  i grubości ścianki  $t$ . W standardowych konstrukcjach okrętowych środniki są cieńsze od mocników i mają stałą grubość na całej wysokości i wówczas naprężenia styczne są największe na poziomie osi obojętnej zginania.

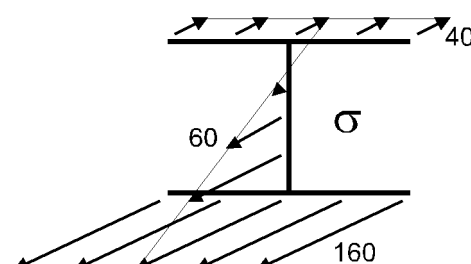


### 4.1.4 Sumaryczne naprężenia normalne

Wypadkowe naprężenia normalne są sumą naprężeń wywołanych zginaniem i naprężeń będących efektem współpracy:

$$\sigma(z) = \sigma_M(z) + \sigma_N(z)$$

Jako że obydwa składniki sumy są funkcjami liniowymi zmiennej  $z$ , więc również naprężenia sumaryczne są zmienne liniowo w funkcji  $z$ .

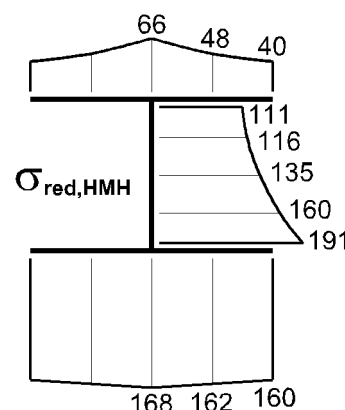


### 4.1.5 Naprężenia zredukowane

Naprężenia zredukowane w konstrukcjach stalowych i aluminiowych są obliczane zgodnie z hipotezą Hubera–Misesa–Hencky’ego (HMH):

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Naprężenia  $\sigma$  i  $\tau$  muszą być, oczywiście, wyznaczone w tym samym punkcie konstrukcji. Rozkład naprężeń w przekroju jest nieliniowy.



### 4.1.6 Obliczenia „inżynierskie”

Inżyniera najczęściej interesują naprężenia powodujące maksymalne wyężenie konstrukcji. Miejsce ich potencjalnego wystąpienia często można określić i w takim przypadku wzory do obliczania

naprężeń można zapisać w prostszej postaci.

Dla zginania:

$$\sigma(z = z') = \frac{M}{I/z'} = \frac{M}{W}$$

gdzie  $W = I/z'$  – wskaźnik wytrzymałości na zginanie w punkcie  $z = z'$ . Uwaga: wskaźnik ten może być liczbą dodatnią lub ujemną, ale nie da się go obliczyć dla  $z' = 0$  (ale wówczas  $\sigma = 0$ ). Najczęściej wskaźniki te oblicza się dla „skrajnych włókien” przekroju, ale wcale tak nie musi być.

Dla ścinania:

$$|\tau| = \frac{|T|}{I \cdot t / |\tilde{S}_y|} = \frac{|T|}{A_T}$$

gdzie  $A_T = I \cdot t / |\tilde{S}_y|$  – pole przekroju na ścinanie w wybranym punkcie linii szkieletowej. Pole to jest zawsze dodatnie, ale nie da się go obliczyć dla  $\tilde{S}_y = 0$  (ale wówczas  $\tau = 0$ ).

Racjonalne postępowanie jest więc takie: w punktach przekroju, gdzie spodziewamy się maksymalnych naprężeń, wyznaczamy charakterystyki przekroju  $W$  i  $A_T$  i wykorzystujemy w dalszych obliczeniach naprężeń.

## 4.2 Charakterystyki geometryczne przekrojów

Przekroje poprzeczne belek są najczęściej przekrojami złożonymi z prostych figur geometrycznych (np. prostokątów) i figur nieregularnych (np. przekroje kształtowników walcowanych). Obliczenia wykonuje się dwuetapowo: najpierw przyjmuje się pomocniczy układ współrzędnych  $\overline{Oyz}$  i względem niego znajduje się położenie osi obojętnej zginania, a potem w układzie „zginania”  $Oyz$  oblicza się niezbędne charakterystyki geometryczne.

Jeśli płaszczyzna zginania  $Oxy$  jest wymuszona, obliczenia upraszczają się, bo układ zginania jest układem centralnym, ale niekoniecznie głównym. Przyjmijmy, że oś  $y$  będzie osią obojętną zginania przekroju (prostopadłą do płaszczyzny zginania), a osie układu pomocniczego  $\overline{Oyz}$  mają takie same zwroty, jak osie układu  $Oyz$ . Obliczenia można wykonać korzystając ze wzorów:

- pole całkowite

$$A = \sum_i A_i$$

gdzie:  $A_i$  – pola części składowych;

- moment statyczny względem osi  $\bar{y}$  równoległej do osi  $y$

$$S_{\bar{y}} = \sum_i A_i \cdot \bar{z}_i$$

gdzie:  $\bar{z}_i$  – współrzędne środków ciężkości części składowych w układzie  $\overline{Oyz}$  ;

- moment bezwładności względem osi centralnej, równoległej do osi  $y$  (moment bezwładności zginania)

$$I = \sum_i \left( I_i + A_i \cdot \bar{z}_i^2 \right) - \frac{S_{\bar{y}}^2}{A}$$

gdzie:  $I_i$  – momenty bezwładności części składowych względem osi równoległych do osi  $y$  i przechodzących przez środki ciężkości tych pól („własne momenty bezwładności”);

- współrzędna środka ciężkości przekroju w układzie  $\overline{Oyz}$  (współrzędna osi obojętnej zginania)

$$\bar{z}_C = \frac{S_{\bar{y}}}{A}$$

- współrzędna punktu przekroju względem osi obojętnej zginania  $y$

$$z = \bar{z} - \bar{z}_C$$

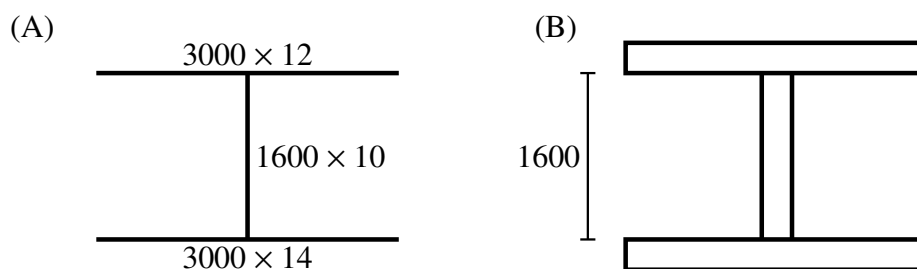
gdzie:  $\bar{z}$  – współrzędna punktu w układzie pomocniczym  $\overline{Oyz}$  ;

- wskaźnik wytrzymałości na zginanie

$$W = \frac{I}{z}$$

gdzie:  $I$  – moment bezwładności zginania,  $z$  – współrzędna punktu przekroju względem osi obojętnej zginania  $y$ .

### 4.3 Belki dwuteowe modelujące wiazary



Rysunek 4.1:

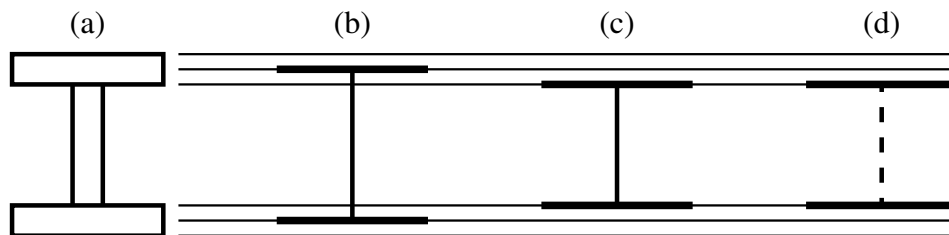
Rysunki konstrukcyjne zawierają informacje jak na rys. 4.1(A), gdzie 1600 oznacza wysokość np. dennika (czyli wymiar blachy). Przedstawienie „bryłowe” tego przekroju jest pokazane na rys. 4.1(B).

Charakterystyki geometryczne przekroju powinny być wyznaczone dla opisu „bryłowego”, ale często w obliczeniach „kalkulatorowych” stosujemy uproszczone modele „cienkościenne”. Uproszczenia te prowadzą do różnych odstępstw od dokładnych wartości charakterystyk.

#### 4.3.1 Zginanie

Modele stosowane przy obliczeniach charakterystyk zginania – rys. 4.2:

- grubościenny,
- cienkościenny – „linia szkieletowa”,
- cienkościenny – „technologiczny”,
- cienkościenny – „idealny dwuteownik”.



Rysunek 4.2: Modele przekroju: (a) grubościenny, (b) „linia szkieletowa”, (c) „technologiczny”, (d) „idealny dwuteownik”

### Model grubościenny, jednostki: [metr]

$$A = 3.0 \cdot 0.012 + 1.6 \cdot 0.010 + 3.0 \cdot 0.014 = 0.094 \text{ m}^2$$

$$S_{\bar{y}} = 3.0 \cdot 0.012 \cdot \frac{-0.012}{2} + 1.6 \cdot 0.010 \cdot \frac{1.6}{2} + 3.0 \cdot 0.014 \cdot \left(1.6 + \frac{0.014}{2}\right) = 0.08008 \text{ m}^3$$

$$I_y = 3.0 \cdot \frac{0.012^3}{12} + 3.0 \cdot 0.012 \cdot \left(\frac{-0.012}{2}\right)^2 + 0.010 \cdot \frac{1.6^3}{3} + 3.0 \cdot \frac{0.014^3}{12} + 3.0 \cdot 0.014 \cdot \left(1.6 + \frac{0.014}{2}\right)^2 - \frac{0.08008^2}{0.094} = 0.0539 \text{ m}^4$$

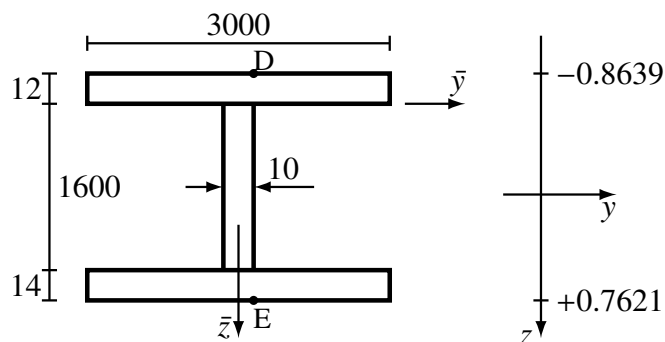
$$\bar{z}_C = \frac{0.08008}{0.094} = 0.8519 \text{ m}$$

$$z_D = -0.012 - 0.8519 = -0.8639 \text{ m}$$

$$z_E = 1.6 + 0.014 - 0.8519 = 0.7621 \text{ m}$$

$$W_D = \frac{0.0539}{-0.8639} = -0.06239 \text{ m}^3$$

$$W_E = \frac{0.0539}{0.7621} = 0.07073 \text{ m}^3$$



### Model cienkościenny – „linia szkieletowa”, jednostki: [metr]

$$A = 3.0 \cdot 0.012 + 1.613 \cdot 0.010 + 3.0 \cdot 0.014 = 0.09413 \text{ m}^2$$

$$S_{\bar{y}} = 1.613 \cdot 0.010 \cdot \frac{1.613}{2} + 3.0 \cdot 0.014 \cdot 1.613 = 0.08075 \text{ m}^3$$

$$I_y = 0.010 \cdot \frac{1.613^3}{3} + 3.0 \cdot 0.014 \cdot 1.613^2 - \frac{0.08075^2}{0.09413} = 0.05398 \text{ m}^4$$

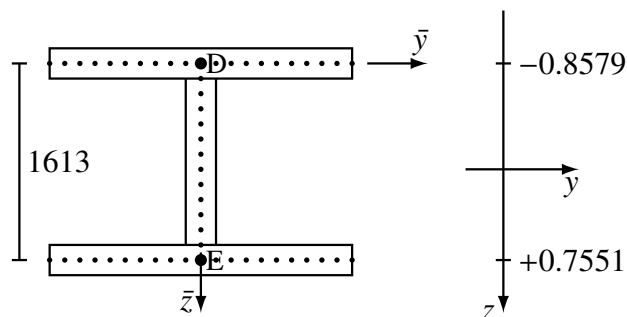
$$\bar{z}_C = \frac{0.08075}{0.09413} = 0.8579 \text{ m}$$

$$z_D = -0.8579 \text{ m}$$

$$z_E = 1.613 - 0.8579 = 0.7551 \text{ m}$$

$$W_D = \frac{0.05398}{-0.8579} = -0.06292 \text{ m}^3$$

$$W_E = \frac{0.05398}{0.7551} = 0.07149 \text{ m}^3$$



**Model cienkościenny – „technologiczny”** (wysokość równa wysokości blachy środknika), jednostki: [metr]

$$A = 3.0 \cdot 0.012 + 1.6 \cdot 0.010 + 3.0 \cdot 0.014 = 0.094 \text{ m}^2$$

$$S_{\bar{y}} = 1.6 \cdot 0.010 \cdot \frac{1.6}{2} + 3.0 \cdot 0.014 \cdot 1.6 = 0.08 \text{ m}^3$$

$$I_y = 0.010 \cdot \frac{1.6^3}{3} + 3.0 \cdot 0.014 \cdot 1.6^2 - \frac{0.08^2}{0.094} = 0.05309 \text{ m}^4$$

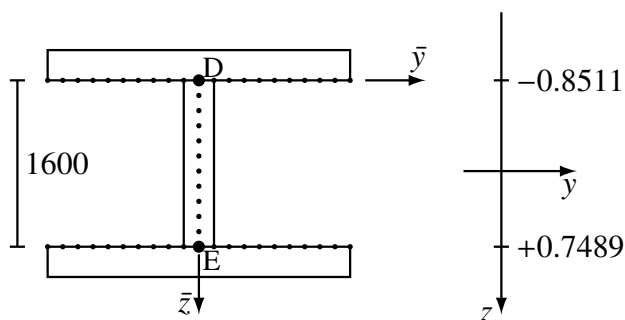
$$\bar{z}_C = \frac{0.08}{0.094} = 0.8511 \text{ m}$$

$$z_D = -0.8511 \text{ m}$$

$$z_E = 1.6 - 0.8511 = 0.7489 \text{ m}$$

$$W_D = \frac{0.05309}{-0.8511} = -0.06238 \text{ m}^3$$

$$W_E = \frac{0.05309}{0.7489} = 0.07088 \text{ m}^3$$



**Model cienkościenny – „idealny dwuteownik”**

Idealny dwuteownik składa się z samych mocników, a nie zawiera środknika, nie może więc pracować na ścinanie. Jeśli  $A_1$  i  $A_2$  to pola powierzchni mocników, a  $h$  to ich odległość (wysokość belki), to charakterystyki geometryczne można wyznaczyć ze wzorów:

$$I = \frac{A_1 \cdot A_2}{A_1 + A_2} \cdot h^2$$

$$W_{A_1} = A_1 \cdot h$$

$$W_{A_2} = A_2 \cdot h$$

gdzie:  $W_{A_1}$  i  $W_{A_2}$  – wskaźniki wytrzymałości na zginanie wyznaczone na poziomie mocników  $A_1$  i  $A_2$ .

Wzorów tych można używać do obliczeń szacunkowych; zasadniczo nie należy ich wykorzystywać przy wykonywaniu obliczeń klasyfikacyjnych itp. Przydatne są przy szybkich, wykonywanych „w pamięci”, obliczeniach szacunkowych. Można i należy wykorzystywać je do sprawdzenia obliczeń „dokładnych”. Istotne jest, że wzory te zawsze zaniżają zarówno wartości momentu bezwładności jak i minimalnych wskaźników wytrzymałości na zginanie.

Jednostki: [metr]

$$A_1 = 3.0 \cdot 0.012 = 0.036 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 3.0 \cdot 0.014 = 0.042 \text{ m}^2$$

$$I = \frac{0.036 \cdot 0.042}{0.036 + 0.042} \cdot 1.6^2 = 0.04962 \text{ m}^4$$

$$|W_D| = W_{A_1} = 0.036 \cdot 1.6 = 0.0576 \text{ m}^3$$

$$|W_E| = W_{A_2} = 0.042 \cdot 1.6 = 0.0672 \text{ m}^3$$

## Podsumowanie

Dla poszczególnych modeli cienkościennych, względne błędy  $\delta\%$  odniesione do modelu grubościennego wynoszą:

	Względne błędy $\delta\%$		
	linia szkieletowa	wysokość technologiczna	idealny dwuteownik
$A$	0.14	0.00	—
$I$	0.15	-1.50	-7.94
$W_D$	0.85	-0.02	-7.68
$W_E$	1.07	0.21	-4.99

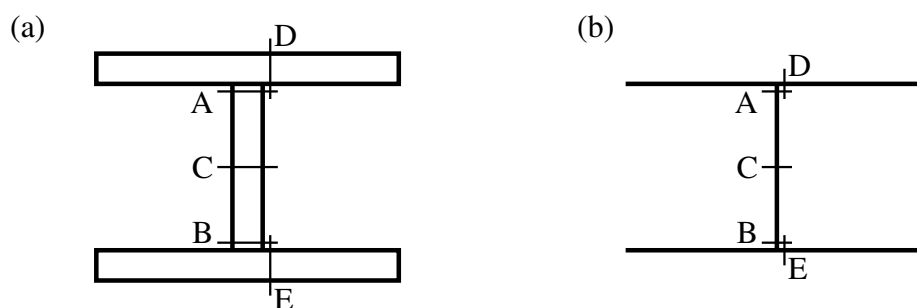
W powyższej tabeli

$$\delta\% = \frac{w_u - w_d}{w_d} \cdot 100\%$$

gdzie:  $w_u$  – wartość z obliczeń uproszczonych,  $w_d$  – wartość z obliczeń dokładnych. Wynik dodatni oznacza, że obliczenia uproszczone szacują daną wielkość z nadmiarem, a ujemny – że z niedomiarem.

### 4.3.2 Ścinanie

Wartość pola przekroju ścinania  $A_T$ , podobnie jak „wskaźnik wytrzymałości na zginanie”, zależy od położenia punktu, w którym chcemy wyznaczyć naprężenia  $\tau_T$ , na przekroju. Przyjmuje się, że naprężenia styczne wywołane ścinaniem są stałe na grubości ścianki przekroju cienkościennego, więc obliczenia wykonywane są zawsze „w środku grubości” ścianki.



Rysunek 4.3:

Wartość naprężenia  $\tau_T$  zmienia się liniowo na szerokości mocników i parabolicznie na wysokości środka. Wobec tego charakterystyczne punkty, w których mogą wystąpić maksymalne naprężenia styczne  $\tau_T$  lub maksymalne naprężenia zredukowane  $\sigma_{red}$  i w których warto liczyć naprężenia, to (rys. 4.3):

- na środku: przekroje położone najbliżej mocników (punkty A i B) i w osi obojętnej zginania (punkt C),
- na mocnikach: przekroje położone najbliżej środka (punkty D i E).

Obliczenia  $A_T$  można wykonać zarówno dla modelu grubościennego jak i dla modeli cienkościennych „linii szkieletowej” i „technologicznego”; dla „idealnego dwuteownika” wartości  $A_T$  nie oblicza się.

W poniższych obliczeniach będą wykorzystywane wyniki uzyskane przy obliczaniu charakterystyk zginania.

**Model grubościenny**

$$\bar{z}_C = 0.8519 \text{ m}, \quad I_y = 0.0539 \text{ m}^4$$

$$|\tilde{S}_A| = 3.0 \cdot 0.012 \cdot (0.8519 + 0.012/2) = 0.03088 \text{ m}^3$$

$$A_{T,A} = \frac{0.0539 \cdot 0.010}{0.03088} = 0.01745 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_B| = 3.0 \cdot 0.014 \cdot (1.6 - 0.8519 + 0.014/2) = 0.03171 \text{ m}^3$$

$$A_{T,B} = \frac{0.0539 \cdot 0.010}{0.03171} = 0.01700 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_C| = 3.0 \cdot 0.012 \cdot (0.8519 + 0.012/2) + 0.010 \cdot \frac{0.8519^2}{2} = 0.03451 \text{ m}^3$$

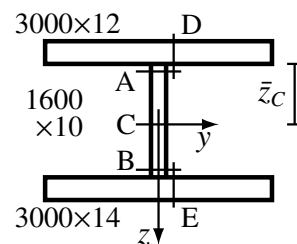
$$A_{T,C} = \frac{0.0539 \cdot 0.010}{0.03451} = 0.01562 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_D| = (3.0/2 - 0.010/2) \cdot 0.012 \cdot (0.8519 + 0.012/2) = 0.01539 \text{ m}^3$$

$$A_{T,D} = \frac{0.0539 \cdot 0.012}{0.01539} = 0.04203 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_E| = (3.0/2 - 0.010/2) \cdot 0.014 \cdot (1.6 - 0.8519 + 0.014/2) = 0.01580 \text{ m}^3$$

$$A_{T,E} = \frac{0.0539 \cdot 0.014}{0.01580} = 0.04776 \text{ m}^2$$

**Model cienkościenny – „linia szkieletowa”**

$$\bar{z}_C = 0.8579 \text{ m}, \quad I_y = 0.05398 \text{ m}^4$$

$$|\tilde{S}_A| = 3.0 \cdot 0.012 \cdot 0.8579 = 0.03088 \text{ m}^3$$

$$A_{T,A} = \frac{0.05398 \cdot 0.010}{0.03088} = 0.01748 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_B| = 3.0 \cdot 0.014 \cdot (1.613 - 0.8579) = 0.03171 \text{ m}^3$$

$$A_{T,B} = \frac{0.05398 \cdot 0.010}{0.03171} = 0.01702 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_C| = 3.0 \cdot 0.012 \cdot 0.8579 + 0.010 \cdot \frac{0.8579^2}{2} = 0.03456 \text{ m}^3$$

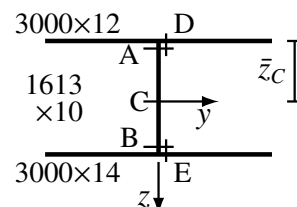
$$A_{T,C} = \frac{0.05398 \cdot 0.010}{0.03456} = 0.01562 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_D| = 3.0/2 \cdot 0.012 \cdot 0.8579 = 0.01544 \text{ m}^3$$

$$A_{T,D} = \frac{0.05398 \cdot 0.012}{0.01544} = 0.04195 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_E| = 3.0/2 \cdot 0.014 \cdot (1.613 - 0.8579) = 0.01586 \text{ m}^3$$

$$A_{T,E} = \frac{0.05398 \cdot 0.014}{0.01586} = 0.04765 \text{ m}^2$$



**Model cienkościenny – „technologiczny”**

$$\bar{z}_C = 0.8511 \text{ m}, \quad I_y = 0.05309 \text{ m}^4$$

$$|\tilde{S}_A| = 3.0 \cdot 0.012 \cdot 0.8511 = 0.03064 \text{ m}^3$$

$$A_{T,A} = \frac{0.05309 \cdot 0.010}{0.03064} = 0.01733 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_B| = 3.0 \cdot 0.014 \cdot (1.6 - 0.8511) = 0.03145 \text{ m}^3$$

$$A_{T,B} = \frac{0.05309 \cdot 0.010}{0.03187} = 0.01688 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_C| = 3.0 \cdot 0.012 \cdot 0.8511 + 0.010 \cdot \frac{0.8511^2}{2} = 0.03426 \text{ m}^3$$

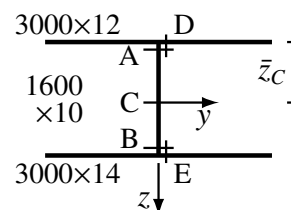
$$A_{T,C} = \frac{0.05309 \cdot 0.010}{0.03426} = 0.01550 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_D| = 3.0/2 \cdot 0.012 \cdot 0.8511 = 0.01532 \text{ m}^3$$

$$A_{T,D} = \frac{0.05309 \cdot 0.012}{0.01532} = 0.04158 \text{ m}^2$$

$$|\tilde{S}_E| = 3.0/2 \cdot 0.014 \cdot (1.6 - 0.8511) = 0.01573 \text{ m}^3$$

$$A_{T,E} = \frac{0.05309 \cdot 0.014}{0.01573} = 0.04725 \text{ m}^2$$

**Obserwacje i podsumowanie**

Pola na ścinanie  $A_T$  wyznaczone dla powyższych trzech modeli wykazują znaczącą zgodność. Na poziomie osi obojętnej zginania (punkt C) cienkościenny model linii szkieletowej jest zgodny z modelem grubościennym, natomiast model „technologiczny” wykazuje wartość o ok. 1% mniejszą (czyli prowadzi do bezpiecznego oszacowania).

Pola  $A_T$  wyznaczone w obrębie środnika (punkty A, B, C) są na tyle zgodne ze sobą, że pojawia się pytanie, czy można by było znaleźć prostszą formułę do wyznaczania pola na ścinanie w obrębie środnika. Taką formułą może być:

$$A_T = A_{\text{środnika}}$$

co oznacza, że naprężenia styczne będą stałe na wysokości środnika.

Naprężenia styczne w mocnikach można wyznaczyć wykorzystując koncepcję strumienia naprężeń stycznych: jeśli naprężenia styczne są stałe na grubości środnika, to

$$q = \tau \cdot t \quad \left[ \begin{array}{|c|} \hline \tau \\ \hline \end{array} \right] t \iff \left[ \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow q \\ \hline \end{array} \right]$$

i w każdym przekroju (punkcie) ścianki jest spełnione równanie bilansu naprężeń stycznych

$$\sum q_i = 0 \quad \left[ \begin{array}{|c|} \hline q_1 \rightarrow \bullet \rightarrow q_2 \\ \hline \end{array} \right]$$

(strumienie „dopływające” są dodatnie, a „wypływające” – ujemne).

Wobec tego, że na styku środnika z mocnikiem (dla przypadku, gdy przekrój jest symetryczny względem płaszczyzny środnika):

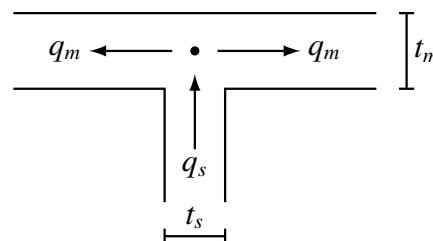


## Strumienie naprężeń

$$\begin{aligned} q_s &= \tau_s \cdot t_s \\ q_m &= \tau_m \cdot t_m \end{aligned}$$

Równanie bilansu strumieni naprężeń stycznych

$$q_s - q_m - q_m = 0$$



Wobec tego:

$$q_m = \frac{1}{2} q_s \Rightarrow \tau_m \cdot t_m = \frac{1}{2} \tau_s \cdot t_s \Rightarrow \tau_m = \frac{1}{2} \tau_s \cdot \frac{t_s}{t_m}$$

i pole na ścinanie dla mocników:

$$A_{T,m} = 2 A_{\text{środn}} \cdot \frac{t_m}{t_s}$$

Dla powyższego przykładu prowadzi do wartości:

$$A_{T,ABC} = 1.6 \cdot 0.010 = 0.016 \text{ m}^2$$

$$A_{T,D} = 2 \cdot 0.016 \text{ m}^2 \cdot \frac{12 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 0.0384 \text{ m}^2$$

$$A_{T,E} = 2 \cdot 0.016 \text{ m}^2 \cdot \frac{14 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 0.0448 \text{ m}^2$$

Rozbieżności w stosunku do obliczeń ścisłych, dla poszczególnych modeli, są następujące:

Punkt	Względne błędy $\delta\%$		
	grubościenny	linia szkieletowa	wysokość technologiczna
A	-8.3	-8.5	-7.7
B	-5.9	-6.0	-5.2
C	+2.4	+2.4	+3.2
D	-8.6	-8.5	-7.6
E	-6.2	-6.0	-5.2

$$(\delta\% = \frac{A_{T,u} - A_{T,s}}{A_{T,s}} \cdot 100\%)$$

Jak widać, na poziomie mocników naprężenia styczne będą zawyżane o ok. 8%, natomiast w rejonie osi obojętnej zaniżane o ok. 3%. W okrętowych belkach cienkościennych maksymalne naprężenia zredukowane najczęściej występują w rejonie mocników (pasów poszycia), więc ten uproszczony sposób liczenia doprowadzi do bezpiecznych oszacowań.

### 4.3.3 Uwagi

Tak dobra zgodność uproszczonych modeli cienkościennych z dokładnym opisem grubościennym jest skutkiem ich znacznej „cienkościowości”, a możliwość uproszczenia obliczania pola na ścinanie wynika z istnienia „solidnych” mocników.

### Zginanie

Miarą „cienkościowości” przekroju jest stosunek wysokości środka do grubości grubszego z mocników – im ta liczba jest większa, tym przekrój jest „bardziej cienkościenny” i obliczenia uproszczone będą obarczone mniejszym błędem.

W poniższej tabeli są przedstawione wyniki obliczeń wykonane dla symetrycznego dwuteownika o mocnikach  $B \times 12$  i środku  $H \times 10$ , dla  $B/H = 1.50$ :

$H/t_m$	Względne błędy $\delta\%$			
	linia szkieletowa		wysokość technologiczna	
	$\delta I\%$	$\delta W\%$	$\delta I\%$	$\delta W\%$
2	5.63	5.63	-54.96	-32.44
3	4.71	4.71	-42.72	-23.62
4	4.02	4.02	-34.81	-18.51
5	3.50	3.50	-29.32	-15.19
10	2.09	2.09	-16.34	-7.97
20	1.15	1.15	-8.64	-4.07
30	0.79	0.79	-5.87	-2.37
40	0.60	0.60	-4.45	-2.06
50	0.49	0.49	-3.58	-1.65
100	0.25	0.25	-1.81	-0.83
150	0.17	0.17	-1.21	-0.55

Wielkością odniesienia był przekrój grubościenny.

Jeśli przyjąć, że dopuszczalny błąd wynosi ok. 3.5%, to model linii szkieletowej można stosować dla  $H/t_m > 5$ , natomiast model „technologiczny” dla  $H/t_m > 50$ . Zastrzeżenie to jest szczególnie ważne w przypadku konstrukcji laminatowych, gdzie występują stosunkowo niskie wiązania przy grubych poszyciach i mocnikach.

## Ścinanie

Obecność mocników prowadzi do zmniejszenia zmienności naprężeń stycznych w środniku (dla przekroju bez mocników naprężenia styczne na krawędzi są równe zero, a w rejonie osi obojętnej są o 50% wyższe od średnich). Miara „solidności” mocników może być stosunek pola mniejszego z mocników do pola środnika, przy założeniu, że przekrój jest cienkościenny.

Dla symetrycznego dwuteownika o polach mocników  $A_m$  i wymiarach środnika  $h \times t$ , otrzymujemy:

– charakterystyki geometryczne przekroju:  $A_s = h \cdot t$ ,  $I = \frac{A_m h^2}{2} + \frac{t h^3}{12}$ ,  $A_T = \frac{I t}{\bar{S}}$

– na styku mocnika ze środnikiem:  $A_{T,m} = t h \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{t h}{A_m} \right]$

– w osi obojętnej zginania:  $A_{T,o} = t h \frac{1 + \frac{1}{6} \frac{t h}{A_m}}{1 + \frac{1}{4} \frac{t h}{A_m}}$

– średnie pole, stałe na wysokości środnika:  $\bar{A}_T = A_s$

Ocena względnego błędu spowodowanego stosowaniem uproszczonego (stałego na wysokości środnika) rozkładu naprężeń stycznych  $\bar{\tau}$ :

$$\delta_\tau = \frac{\bar{\tau} - \tau}{\tau} = \frac{T/\bar{A}_T - T/A_T}{T/A_T} = A_T \cdot \left( \frac{1}{\bar{A}_T} - \frac{1}{A_T} \right) = \frac{A_T - \bar{A}_T}{\bar{A}_T}$$

Wobec tego, względny błąd

– na styku mocnika ze środnikiem:  $\delta_{\tau,m} = \frac{1}{6} \frac{1}{A_m/A_s}$

– w osi obojętnej zginania:  $\delta_{\tau,o} = -\frac{1}{12} \frac{1}{1/4 + A_m/A_s}$

Wartości liczbowe błędów procentowych, na styku środnika z mocnikiem i w osi obojętnej, są następujące:

$A_m/A_s$	0.0	0.1	0.5	0.7	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0
$\delta_{\tau,m}\%$	—	166.7	33.3	23.8	16.7	11.1	8.3	6.7	5.6	4.2
$\delta_{\tau,o}\%$	-33.3	-23.8	-11.1	-8.8	-6.7	-4.8	-3.7	-3.0	-2.6	-2.0

Jeśli dopuścić niedoszacowanie naprężeń stycznych w rejonie osi obojętnej o ok. 5%, a przeszacowanie w rejonie mocników o ok. 10%, to uproszczoną formułę dla pola na ścinanie w środku można stosować dla  $A_m/A_s > 1.5$ .

### 4.3.4 Naprężenia

Niech w pewnym przekroju belki, o wyżej wyznaczonych charakterystykach, występuje moment gnący  $M = 10$  MNm i siła tnąca  $T = 1.3$  MN. Należy wyznaczyć naprężenia normalne, styczne i zredukowane w tym przekroju.

#### Naprężenia styczne liczone w sposób ścisły

Wykorzystując wcześniej podane wzory i już wyznaczone charakterystyki geometryczne przekroju, można wyznaczyć naprężenia np. dla modelu „wysokości technologicznej” i ścisłych wzorów na  $A_T$ :

$$\begin{aligned}
 \text{punkt A: } \sigma &= \frac{10 \text{ MNm}}{-0.06238 \text{ m}^3} = -160.3 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.01733 \text{ m}^2} = 75.0 \text{ MPa} \\
 \sigma_{red} &= \sqrt{(-160.3)^2 + 3 \cdot (75.0)^2} = 206.3 \text{ MPa} \\
 \text{punkt B: } \sigma &= \frac{10 \text{ MNm}}{0.07088 \text{ m}^3} = 141.1 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.01688 \text{ m}^2} = 77.0 \text{ MPa} \\
 \sigma_{red} &= \sqrt{(141.1)^2 + 3 \cdot (77.0)^2} = 194.2 \text{ MPa} \\
 \text{punkt C: } \sigma &= 0, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.01550 \text{ m}^2} = 83.9 \text{ MPa}, \quad \sigma_{red} = \sqrt{3 \cdot (83.9)^2} = 145.3 \text{ MPa} \\
 \text{punkt D: } \sigma &= \frac{10 \text{ MNm}}{-0.06238 \text{ m}^3} = -160.3 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.04158 \text{ m}^2} = 31.3 \text{ MPa} \\
 \sigma_{red} &= \sqrt{(-160.3)^2 + 3 \cdot (31.3)^2} = 169.2 \text{ MPa} \\
 \text{punkt E: } \sigma &= \frac{10 \text{ MNm}}{0.07088 \text{ m}^3} = 141.1 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.04725 \text{ m}^2} = 27.5 \text{ MPa} \\
 \sigma_{red} &= \sqrt{(141.1)^2 + 3 \cdot (27.5)^2} = 148.9 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Wyniki obliczeń naprężeń dla poszczególnych modeli i ścisłych wartości  $A_T$  są przedstawione poniżej. Błąd względny  $\delta\%$  był liczony w stosunku do przekroju grubościennego.

Punkt	grubościenny			linia szkieletowa			wysokość technologiczna		
	$\sigma$	$\tau$	$\sigma_{red}$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma_{red}$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma_{red}$
A [MPa]	-158.1	74.5	204.0	-158.9	74.4	204.6	-160.3	75.0	206.3
$\delta\%$				0.6	-0.2	0.3	1.4	0.7	1.1
B [MPa]	138.8	76.5	191.9	139.9	76.4	192.5	141.1	77.0	194.2
$\delta\%$				0.8	-0.1	0.4	1.7	0.7	1.2
C [MPa]	0.0	83.2	144.2	0.0	83.2	144.2	0.0	83.9	145.3
$\delta\%$				—	0.0	0.0	—	0.8	0.8
D [MPa]	-160.3	30.9	169.0	-158.9	31.0	167.8	-160.3	31.3	169.2
$\delta\%$				-0.8	0.2	-0.7	0.0	1.1	0.1
E [MPa]	141.4	27.2	149.0	139.9	27.3	147.6	141.1	27.5	148.9
$\delta\%$				-1.1	0.2	-0.9	-0.2	1.1	-0.1

### Naprężenia styczne liczone w sposób uproszczony

Wykonując analogiczne obliczenia dla uproszczonego opisu naprężeń stycznych w środku ( $A_T = A_{\text{środk}}\text{m}$ ) i mocnikach, dla modelu „wysokości technologicznej” otrzymujemy:

$$\text{punkt A: } \sigma = \frac{10 \text{ MNm}}{-0.06238 \text{ m}^3} = -160.3 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.016 \text{ m}^2} = 81.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{(-160.3)^2 + 3 \cdot (81.3)^2} = 213.4 \text{ MPa}$$

$$\text{punkt B: } \sigma = \frac{10 \text{ MNm}}{0.07088 \text{ m}^3} = 141.1 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.016 \text{ m}^2} = 81.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{(141.1)^2 + 3 \cdot (81.3)^2} = 199.3 \text{ MPa}$$

$$\text{punkt C: } \sigma = 0, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.016 \text{ m}^2} = 81.3 \text{ MPa}, \quad \sigma_{red} = \sqrt{3 \cdot (81.3)^2} = 140.8 \text{ MPa}$$

$$\text{punkt D: } \sigma = -160.3 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.0384 \text{ m}^2} = 33.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{(-160.3)^2 + 3 \cdot (33.9)^2} = 170.7 \text{ MPa}$$

$$\text{punkt E: } \sigma = 141.1 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.0448 \text{ m}^2} = 29.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{(141.1)^2 + 3 \cdot (29.0)^2} = 149.8 \text{ MPa}$$

Obliczenia wykonane dla pozostałych modeli dają wyniki następujące:

Punkt	grubościenny			linia szkieletowa			wysokość technologiczna		
	$\sigma$	$\tau$	$\sigma_{red}$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma_{red}$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma_{red}$
A [MPa]	-158.0	81.3	211.6	-158.9	81.3	212.3	-160.3	81.3	213.3
$\delta\%$	0.0	9.1	3.7	0.6	9.1	4.0	1.4	9.1	4.6
B [MPa]	138.8	81.3	197.7	139.9	81.3	198.4	141.1	81.3	199.3
$\delta\%$	0.0	6.2	3.0	0.8	6.2	3.4	1.6	6.2	3.9
C [MPa]	0.0	81.3	140.7	0.0	81.3	140.7	0.0	81.3	140.7
$\delta\%$	—	-2.4	-2.4	—	-2.4	-2.4	—	-2.4	-2.4
D [MPa]	-160.3	33.7	170.6	-158.9	33.9	169.4	-160.3	33.9	170.7
$\delta\%$	0.0	9.1	0.9	-0.8	9.4	0.2	0.0	9.4	1.0
E [MPa]	141.4	28.9	150.0	139.9	29.0	148.6	141.1	29.0	149.8
$\delta\%$	0.0	6.2	0.6	-1.1	6.6	-0.3	-0.2	6.6	0.5

Błąd względny  $\delta\%$  był liczony w stosunku do przekroju grubościennego i naprężeń stycznych liczonych w sposób ścisły.

### Obserwacje i wnioski

- Dla klasycznego przekroju belki i stanu obciążenia o naprężeniach spełniających warunek  $\max|\sigma| > \max|\tau|$ , maksymalne naprężenia zredukowane występują w środku, na styku z mocnikiem.
- Wyznaczając naprężenia styczne w sposób ścisły, dla najprostszego modelu cienkościennego „wysokości technologicznej” uzyskujemy bezpieczne oszacowanie maksymalnych naprężeń zredukowanych, a błąd jest rzędu 1%.
- Wykorzystując uproszczoną formułę na rozkład naprężeń stycznych w środku możemy stwierdzić, że oszacowanie  $\max \sigma_{red}$  jest bezpieczne, a błąd nie przekracza 5%.

Wynika z tego, że do oceny wytrzymałości belki w danym przekroju dwuteowym wystarczy wyznaczyć  $\sigma_{red}$  w jednym punkcie, naprężenia można liczyć dla uproszczonego modelu „wysokości technologicznej”, wykorzystując uproszczoną formułę na naprężenia styczne w środku.

## 4.4 Belki dwuteowe modelujące usztywnienia

Jako usztywnienia stosowane są:

- kształtowniki walcowane, np. kątowniki, płaskowniki łebkowe,
- kształtowniki prefabrykowane, np. teowniki, „pseudokątowniki”.



Ich wysokość z regły nie przekracza 400 mm – chociaż na bardzo dużych statkach osiąga nawet 600 mm – a grubość mocników jest znaczna, więc zazwyczaj stosunek  $h_s / \max t_m < 40$  i charakterystyki zginania są liczone jak dla przekrojów grubościennych.

1. Charakterystyki geometryczne zginania i ścinania są wyznaczane dla przekroju złożonego z kształtownika i pasa współpracującego poszycia.
2. Szerokość pasa współpracującego poszycia, wg przepisów,  
 $b_e = \min(s, l/6)$ ,  $s$  – odstęp usztywnień,  $l$  – rozpiętość usztywnienia.  
 Odstęp denników to ok. (1200 ÷ 3600) mm, więc zazwyczaj  $b_e = (200 ÷ 600)$  mm.
3. Niezależnie od tego, czy kształtownik jest symetryczny względem osi środnika, czy nie, charakterystyki geometryczne zginania i ścinania są liczone względem osi równoległej do linii poszycia.

Uzasadnienie: poszycie jest na tyle sztywne, że zapobiega skręcaniu usztywnienia wywołanemu obciążeniem poprzecznym przyłożonym poza środkiem skręcania.

### 4.4.1 Kształtownik walcowany – płaskownik łebkowy

Podstawowe parametry geometryczne usztywnienia odczytuje się z norm (jeśli kształtownik jest znormalizowany) lub programów produkcji (walcowania) hut; parametry dodatkowe (np. wysokość „środnika”) można obliczyć na ich podstawie.

Obliczenia charakterystyk geometrycznych zginania są standardowe. Wyznaczenie charakterystyk geometrycznych ścinania sprawia większe kłopoty, bo płaskownik łebkowy ma postać „środnika o zmiennej wysokości”, tzn. nie jest w nim wyraźnie wyróżniony środek i mocnik. Kształt i wymiary mocnika-łba są tak dobrane, aby naprężenia styczne „przepływały” przez „łeb” i w konsekwencji ich wartość szybko maleje, a na krańcu wysokości usztywnienia  $\tau_{xz} = 0$ . Wobec tego w rejonie łba naprężeń stycznych oraz pola na ścinanie  $A_T$  nie wyznaczamy.

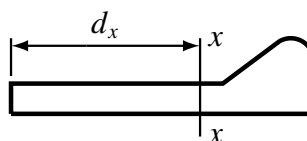
Przykład: Przekrój obliczeniowy tworzą pas poszycia:  $500 \times 12$  i płaskownik łebkowy BF260  $\times$  10 według normy PN-EN 10076:1996.

Z normy PN-EN 10076:1996

$$A = 36.11 \text{ cm}^2$$

$$d_x = 16.22 \text{ cm}$$

$$I_x = 2434 \text{ cm}^4$$



Wykorzystując dane wymiarowe usztywnienia można wyznaczyć wysokość płaskiej części, czyli „środnika” usztywnienia  $h_s = 22.1$  cm.

Stosunek wysokości usztywnienia do grubości pasa poszycia  $h_v / t_p = 260 / 12 = 21.67 < 40$ , więc należy zastosować model grubościenny.

Wymiary zarówno pasa poszycia jak i usztywnienia nie są duże, więc wygodnie jest posługiwać się jednostkami [centymetr].

### Charakterystyki geometryczne zginania

Obliczenia są standardowe, jak dla przekroju grubościennego; jednostki: [centymetr]

$$A = 50.0 \cdot 1.2 + 36.11 = 96.11 \text{ cm}^2$$

$$S_{\bar{y}} = 50.0 \cdot 1.2 \cdot \left(-\frac{1.2}{2}\right) + 36.11 \cdot 16.22 = 549.7 \text{ cm}^3$$

$$\bar{z}_C = \frac{549.7}{96.11} = 5.72 \text{ cm}$$

$$I_y = \frac{50.0 \cdot 1.2^3}{3} + 2434 + 36.11 \cdot 16.22^2 - \frac{549.7^2}{96.11} = 8819 \text{ cm}^4$$

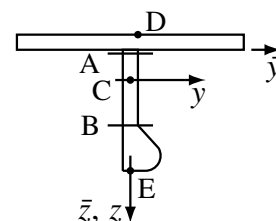
$$\bar{z}_A = 0 - 5.72 = -5.72 \text{ cm}, \quad W_A = \frac{8819}{-5.72} = -1542 \text{ cm}^3$$

$$\bar{z}_B = 22.1 - 5.72 = 16.38 \text{ cm}, \quad W_B = \frac{8819}{16.38} = 538.4 \text{ cm}^3$$

$$\bar{z}_C = 0$$

$$\bar{z}_D = -1.2 - 5.72 = -6.92 \text{ cm}, \quad W_D = \frac{8819}{-6.92} = -1274 \text{ cm}^3$$

$$\bar{z}_E = 26.0 - 5.72 = 20.28 \text{ cm}, \quad W_E = \frac{8819}{20.28} = 434.9 \text{ cm}^3$$



### Charakterystyki geometryczne ścinania

$$A_T = t \cdot I_y / |\tilde{S}_y|$$

jednostki: [centymetr]

punkt A:  $\tilde{S}_y = 50.0 \cdot 1.2 \cdot (-1.2/2 - 5.72) = -379.2 \text{ cm}^3$

$$A_{T,A} = 1.0 \cdot 8819 / |-379.2| = 23.26 \text{ cm}^2$$

punkt C:  $\tilde{S}_y = \tilde{S}_{y,A} + 1.0 \cdot 5.72 \cdot (-5.72/2) = -395.6 \text{ cm}^3$

$$A_{T,C} = 1.0 \cdot 8819 / |-395.6| = 22.3 \text{ cm}^2$$

punkt B:  $\tilde{S}_y = \tilde{S}_{y,C} + 1.0 \cdot (22.1 - 5.72)^2 / 2 = -261.4 \text{ cm}^3$

$$A_{T,B} = 1.0 \cdot 8819 / |-261.4| = 33.74 \text{ cm}^2$$

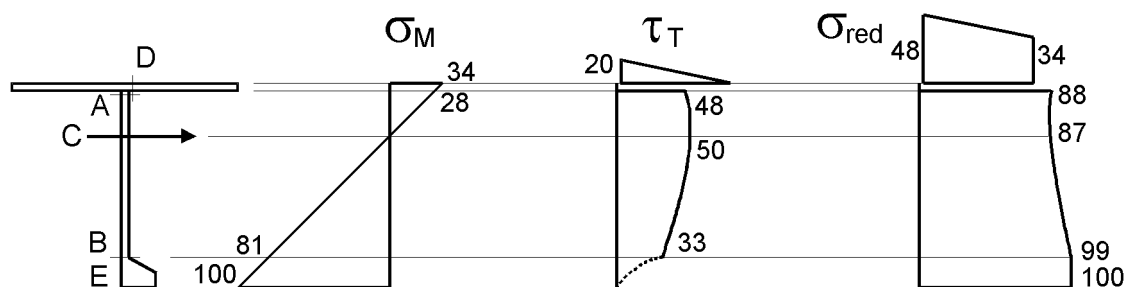
punkt D:  $\tilde{S}_y = (50.0 - 1.0)/2 \cdot 1.2 \cdot (-1.2/2 - 5.72) = -185.8 \text{ cm}^3$

$$A_{T,D} = 1.2 \cdot 8819 / |-185.8| = 56.96 \text{ cm}^2$$

punkt E:  $\tilde{S}_y = 0$ , więc  $A_{T,E}$  jest nieokreślone

### Naprężenia

Naprężenia zostaną wyznaczone dla tak dobranego momentu gnącego  $M$  i siły tnącej  $T$ , aby maksymalne wartości naprężeń wywołanych zginaniem były równe 100 MPa, a ścinaniem 50 MPa; takie proporcje naprężeń są realne dla tych wymiarów pasa poszycia.



### Zginanie

$\min |W|$  jest w p.E, więc  $M = 434.9 \text{ cm}^3 \cdot 100 \text{ MPa} = 43.49 \text{ kNm}$

$$\sigma_{M,A} = M / W_A = 43.49 \text{ kNm} / (-1542) \text{ cm}^3 = -28.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{M,B} = \dots = 80.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{M,C} = 0$$

$$\sigma_{M,D} = \dots = -34.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{M,E} = \dots = 100.0 \text{ MPa}$$

### Ścinanie

$\min |A_T|$  jest w p.C, więc  $T = 22.3 \text{ cm}^2 \cdot 50 \text{ MPa} = 111.5 \text{ kN}$

$$\tau_{T,A} = T / A_{T,A} = 111.5 \text{ kN} / 23.26 \text{ cm}^2 = 47.9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{T,B} = \dots = 33.0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{T,C} = \dots = 50.0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{T,D} = \dots = 19.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{T,E} = 0$$

**Naprężenia zredukowane**, jednostki: [MPa]

$$\sigma_{red,A} = \sqrt{\sigma_{M,A}^2 + 3 \tau_{T,A}^2} = \sqrt{(-28.2)^2 + 3 (47.9)^2} = 87.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red,B} = \dots = 99.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red,C} = \dots = 86.6 \text{ MPa}$$

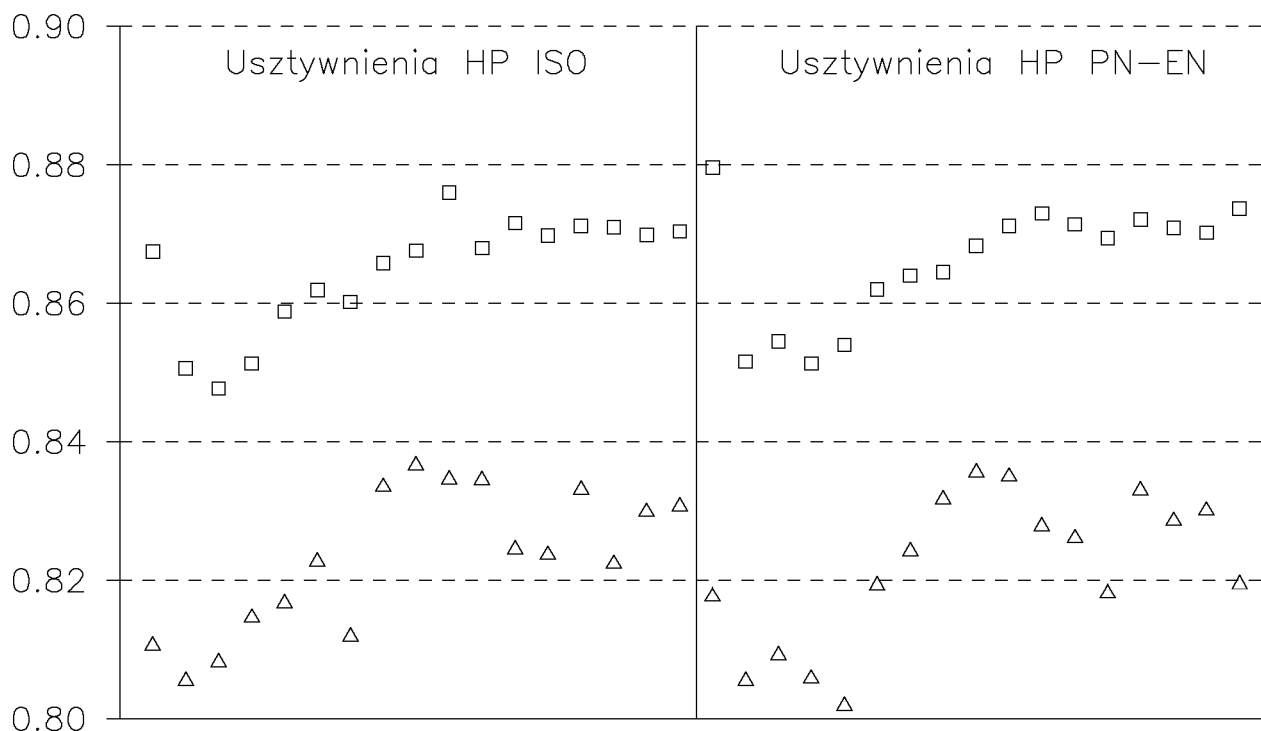
$$\sigma_{red,D} = \dots = 48.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red,E} = \dots = 100.0 \text{ MPa}$$

### Obserwacje i podsumowanie

1. Oś obojętna zginania jest blisko poszycia (tak jest zazwyczaj, chociaż zdarza się, np. na promach, że jest blisko środka wysokości), więc naprężenia wywołane zginaniem są w mocniku wielokrotnie większe, niż w pasie poszycia.
2. Na wykresach naprężeń widać, że w miejscach, gdzie naprężenia wywołane zginaniem są duże („mocnik”–„łeb”), naprężenia styczne są małe, a w miejscu wystąpienia maksymalnych naprężeń normalnych –  $\tau_T = 0$ .
3. W rejonie pomiędzy osią obojętną zginania ( $\tau_T = \max$ ) a poszyciem naprężenia styczne są niemal stałe (bo odległość pomiędzy osią obojętną zginania a poszyciem jest mała).
4. Wobec tego, wyznaczając (szacując) maksymalne naprężenia zredukowane wystarczyłoby obliczyć: (a) naprężenia wywołane zginaniem w mocniku-łbie; (b) naprężenia zredukowane na styku środka z poszyciem, ale używając maksymalnych naprężeń stycznych  $\tau_T$ .
5. Obliczenia związane z określaniem naprężeń stycznych są żmudne i ponadto wymagają wyznaczenia miejsca przejścia „środnika” w „łeb”. Przydatne by było znalezienie prostego oszacowania wielkości naprężeń stycznych.

Na poniższym wykresie są przedstawione wyniki obliczeń dla przekrojów złożonych z pasa poszycia ( $b = 200 \div 600 \text{ mm}$ ,  $t = 6 \div 12 \text{ mm}$ ) i kształtownika walcowanego ( $80 \times 5 \dots 430 \times 20$ ), bez przypadków, gdy oś obojętna jest bliżej łba niż poszycia. Symbole „trójkąt” i „kwadrat” reprezentują minimalną i maksymalną wartość  $A_T/(h_u t_u)$  dla danego kształtownika i wszystkich wariantów pasa poszycia.



Jak widać, wszystkie wyniki układają się w pasie ( $0.8 \div 0.9$ ). Jeśli więc zadowoli nas znajomość maksymalnych naprężeń stycznych, a jak widać z wcześniejszych uwag może to być wystarczające nawet do racjonalnego określenia maksymalnych naprężeń zredukowanych, to oszacowanie

$$A_T = 0.8 \cdot h_u \cdot t_u$$

jest wystarczające i bezpieczne.

#### 4.4.2 Kształtownik walcowany – kątownik

Kątownik nie sprawia kłopotów obliczeniowych, bo środnik jest wyraźnie oddzielony od mocnika-ramienia, a grubości środnika i ramienia kątownika są stałe i równe sobie.

Wobec tego charakterystyki geometryczne przekroju oraz naprężenia należy wyznaczać jak dla usztywnienia w postaci teownika. Należy tylko pamiętać, że strumień naprężeń stycznych ze środnika nie rozdziela się w mocniku (bo mocnik jest jednostronny), więc maksymalne naprężenia zredukowane zapewne wystąpią w mocniku (ramieniu kształtownika).

#### 4.4.3 Usztywnienie prefabrykowane – teownik

Usztywnienia prefabrykowane są wykonywane z płaskowników i przyjmują postać teowników symetrycznych lub niesymetrycznych (mocnik „dostawiony” do czoła środnika) bądź „pseudokątowników” (mocnik „dostawiony” do boku środnika); może też być sam środnik bez mocnika.

Zazwyczaj są stosowane wówczas, gdy kształtowniki walcowane nie spełniają wymagań wytrzymałościowych – nie daje się uzyskać wymaganego wskaźnika wytrzymałości na zginanie, bo



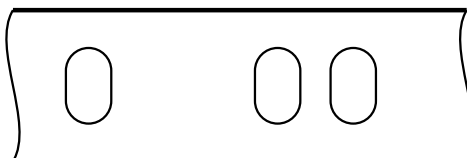
dostępne kształtowniki są za małe albo wysokość kształtownika jest zbyt duża w stosunku do narzuconych ograniczeń wymiarowych. Bywa również, że ich zastosowanie jest skutkiem dążenia do uzyskania minimalnej masy konstrukcji.

### Charakterystyki geometryczne przekroju

Obliczenia charakterystyk geometrycznych zginania i ścinania są standardowe; zazwyczaj należy zastosować model grubościenny, bo grubość mocnika bądź poszycia jest znaczna w stosunku do wysokości środnika.

## 4.5 Naprężenia w wiązarach z otworami w środnikach

W środnikach wiązarów są wycinane otwory komunikacyjne, ulżeniowe, na przejście usztywnień i rurociągów bądź kabli, odpowietrzające, ściekowe, skalopsy. Otwory duże (komunikacyjne, ulżeniowe, na przejście rurociągów) są zazwyczaj umieszczane w środku wysokości wiązara (wyjątek – otwory komunikacyjne w bardzo wysokich wiązarach „poziomych”).



Ich wysokość standardowo nie może przekraczać 60% wysokości wiązara i bywają rozmieszczane w znacznych odległościach od siebie lub w bliskich „grupach”.

Wycięcie otworów prowadzi do zmniejszenia charakterystyk geometrycznych przekroju, co skutkuje zwiększeniem poziomu naprężeń.

### 4.5.1 Wpływ otworów na naprężenia wywołane zginaniem

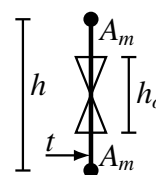
Naprężenia wywołane zginaniem nie zależą od wzajemnego położenia otworów.

$h$  – wysokość środnika,

$t$  – grubość środnika,

$A_m = \alpha \cdot h t$  – pole powierzchni mocnika,

$h_o = \beta \cdot h$  – wysokość otworu.



Moment bezwładności zginania – przekrój bez otworu

$$I_{bo} = \frac{th^3}{12} + 2 \cdot \alpha ht \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{th^3}{12} + \frac{1}{2} \alpha th^3 = \frac{th^3}{12} (1 + 6\alpha)$$

Moment bezwładności zginania – przekrój z otworem

$$I_{zo} = I_{bo} - \frac{t(\beta h)^3}{12} = I_{bo} - \beta^3 \frac{th^3}{12}$$

Jaki błąd zostanie popełniony, jeśli licząc naprężenia  $\sigma_M$  pominiemy obecność otworu w środniku?

Naprężenia wywołane zginaniem, to  $\sigma_M = M/W$  i jeśli przyjmujemy oznaczenia:

$W = W_{zo}$  – dla obliczeń dokładnych,

$W = W_{bo}$  – dla obliczeń uproszczonych,

to błąd względny oceny naprężeń wywołanych zginaniem:

$$\delta_\sigma = \frac{\sigma_{bo} - \sigma_{zo}}{\sigma_{zo}} = \frac{1/W_{bo} - 1/W_{zo}}{1/W_{zo}} = \frac{W_{zo} - W_{bo}}{W_{bo}}$$

Ale  $W = I / (h/2)$ , niezależnie od tego, czy otwór jest wycięty, czy nie, więc:

$$\delta_\sigma = \frac{I_{zo} - I_{bo}}{I_{bo}} = \frac{I_{bo} - \beta^3 \frac{th^3}{12} - I_{bo}}{I_{bo}} = -\frac{\beta^3}{1 + 6\alpha}$$

Wartości liczbowe  $\delta_\sigma \% = \delta_\sigma \cdot 100\%$ :

$\beta = h/h_o$	$\alpha = A_m/ht$				
	0	1	2	3	4
0.3	-2.7	-0.4	-0.2	-0.1	-0.1
0.4	-6.4	-0.9	-0.5	-0.3	-0.3
0.5	-12.5	-1.8	-1.0	-0.7	-0.5
0.6	-21.6	-3.1	-1.7	-1.1	-0.9

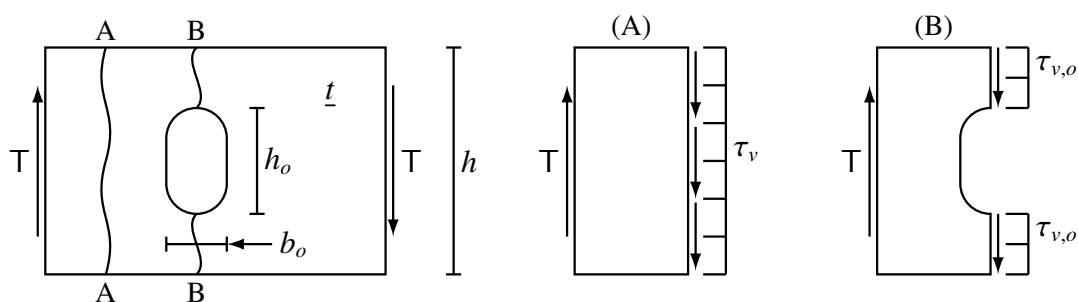
Jak widać, nieuwzględnienie otworu podczas liczenia wskaźnika wytrzymałości na zginanie zawsze prowadzi do zaniżenia naprężeń obliczeniowych (a więc sytuacji potencjalnie niebezpiecznej), ale już dla  $A_m/ht = 1$ , nawet dla  $h_o/h = 0.6$  błąd wynosi tylko ok. 3% i szybko spada dla większych  $\alpha$  i mniejszych  $\beta$ : dla typowych wartości  $\alpha \geq 2$  i  $\beta \leq 0.5$  nie przekracza 1%. Duże wartości błędów dla  $\alpha = 0$  nie są podstawą do niepokoju, bo taka postać „wiązarów” – brak mocników – w konstrukcji kadłuba statku nie występuje.

Podsumowując: jeśli wysokości otworów w środnikach wiązarów nie przekraczają wartości dopuszczalnych ( $h_o/h \leq 0.6$ ), to otwory wpływają na wskaźniki wytrzymałości na zginanie w tak niewielkim stopniu, że w obliczeniach charakterystyk zginania otwory pomijamy.

## 4.5.2 Wpływ otworów na naprężenia wywołane ścinaniem

Naprężenia wywołane ścinaniem zależą od wzajemnego położenia otworów.

### Duże odległości między otworami



„Odcinamy” fragment środnika i przyjmujemy, że w miejscu przecięcia naprężenia styczne mają rozkład równomierny. Warunek równowagi „suma rzutów wszystkich sił na kierunek pionowy jest równa zero” prowadzi do równania  $T = \int_A \tau dA$ , gdzie  $A$  jest polem przekroju „blachy” w miejscu przecięcia. Skoro przyjęliśmy równomierny rozkład naprężeń, to  $\tau(A) = \text{const}$ , więc warunek równowagi przyjmie prostszą postać  $T = \tau \cdot A_{bl}$  ( $A_{bl}$  – pole przekroju „blachy”), a po przekształceniu  $\tau = \frac{T}{A_{bl}}$

Naprężenia w przekroju bez otworu – przekrój A-A, szkic (A)

$$A_{bl} = t \cdot h \quad \Rightarrow \quad \tau_v = \frac{T}{t h}$$

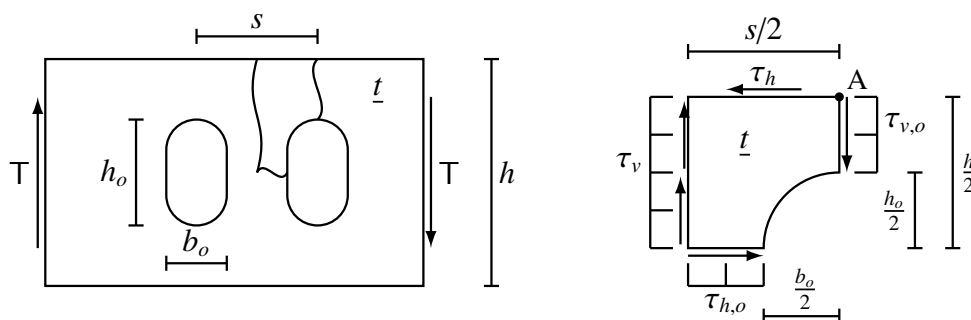
Naprężenia w przekroju z otworem – przekrój B-B, szkic (B)

$$A_{bl} = t \cdot (h - h_o) \Rightarrow \tau_{v,o} = \frac{T}{t(h - h_o)} = \frac{T}{t h} \frac{h}{h - h_o} = \frac{T}{t h} \frac{1}{1 - h_o/h}$$

Jak widać, naprężenia styczne na kierunku „poprzecznym” w przekroju z otworem zależą tylko od wysokości otworu.

Wpływ wyciętego otworu jest znaczny, bo np. dla  $h_o/h = 0.5$  otrzymamy  $\tau_{v,o} = \frac{T}{t h} \cdot \frac{1}{1 - 0.5} = 2 \frac{T}{t h}$ , czyli naprężenia dwukrotnie większe, niż w przekroju bez otworu.

### Małe odległości między otworami



„Wycinamy” fragment środnika i przyjmujemy, że w miejscach przecięć naprężenia styczne mają rozkład równomierny. Wykorzystując warunek równowagi „suma momentów względem punktu A jest równa zero” oraz powyższe założenie, otrzymujemy:

$$\sum M|_A = 0 \Rightarrow \tau_v \cdot \frac{h}{2} \cdot t \cdot \frac{s}{2} - \tau_{h,o} \cdot \left( \frac{s}{2} - \frac{b_o}{2} \right) \cdot t \cdot \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow$$

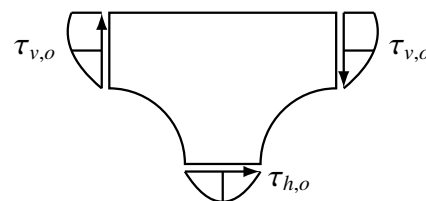
$$\tau_{h,o} = \tau_v \cdot \frac{s/2}{s/2 - b_o/2} = \frac{T}{h t} \frac{1}{1 - b_o/s}$$

Jak widać, wzór jest analogiczny, jak w przypadku ścinania na kierunku pionowym, ale tym razem naprężenia zależą od szerokości otworu a nie od jego wysokości.

### Obserwacje i uwagi

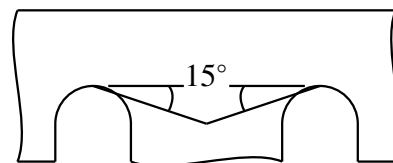
Porównując wzory na  $\tau_{v,o}$  i  $\tau_{h,o}$  widać, że jeśli  $b_o/s > h_o/h$ , to największe naprężenia styczne występują między otworami.

Należy pamiętać, że w rzeczywistości rozkłady naprężeń stycznych  $\tau_{v,o}$  i  $\tau_{h,o}$  nie są równomierne, a mają rozkład paraboliczny i ich zmienność jest szczególnie duża w przypadku otworów nieobramowanych. Oznacza to, że  $\max \tau$  będą większe, niż wyznaczone z powyższych wzorów, ale na szczęście tylko na części długości przekroju i zazwyczaj efektu tego nie uwzględniamy.



### 4.5.3 Wpływ otworów na rozkład naprężeń od zgięcia ogólnego

Wycięcie otworu sprawia, że naprężenia normalne są na kierunkach prostopadłych do brzegu otworu równe zero na krawędzi otworu. W związku z tym, naprężenia  $\sigma_x$  pomiędzy bliskimi otworami są niemal zerowe – popularnie nazywa się to zjawisko „efektem cienia otworu”. Zazwyczaj przyjmuje się, że „linia cienia” odchyla się o  $15^\circ$  od linii równoległej do osi wiązara.



## Rozdział 5

### Ruszty płaskie

Model wytrzymałościowy „ruszt płaski” opisuje pracę układu krzyżujących się wiązań, tworzących „płaski płat konstrukcyjny”; najczęściej są to wiązary, rzadziej usztywnienia (bo zazwyczaj biegną tylko w jednym kierunku) lub wiązary z usztywnieniami (bo znacznie różnią się sztywnością na zginanie).

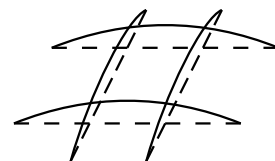
Płat konstrukcyjny, który zamieniamy na ruszt, zawiera oprócz wiązań również poszycie, więc „belki” rusztu, które powstały wskutek „rozcięcia” poszycia, mogą się ugiąć tylko na kierunku prostopadłym do płaszczyzny rusztu.

Zasadniczym zadaniem układu wiązarów jest „podpieranie struktur podrzędnych” – usztywnień i poszycia – oraz przenoszenie znacznych lokalnych obciążeń. Wskutek tego podstawowe obciążenie rusztu jest prostopadłe do jego płaszczyzny: obciążenie ciągłe odwzorowujące obciążenia przenoszone z poszycia i usztywnień oraz siły skupione pochodzące od bezpośrednich obciążeń lokalnych (np. nacisk naroża kontenera). Oprócz tego w płaszczyźnie rusztu pojawiają się oddziaływania pochodzące od współpracy ze strukturami nadrzędnymi (np. od zgięcia ogólnego kadłuba) jak również siły „wzdłużne” generowane siłami bezwładności lub mocowaniem osprzętu bądź ładunku (np. odciągami do mocowania pojazdów lub kontenerów). Zazwyczaj przyjmuje się, że te dwa układy obciążeń są niezależne, czyli np. że siły „podłużne” nie wpływają na ugięcia rusztu.

Postać, pracę i modelowanie rusztu można przedstawić w następujący sposób:

#### 1. Postać konstrukcji i forma deformacji

- (a) płaski układ krzyżujących się belek;
- (b) belki mogą się zginać tylko w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rusztu.

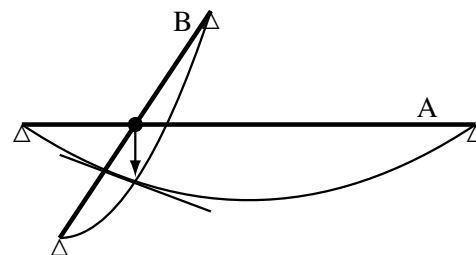


#### 2. Współpraca krzyżujących się, połączonych sztywno belek W punktach skrzyżowania występuje:

- (a) zgodność ugięć;
- (b) zgodność kątów obrotu / skręcenia.

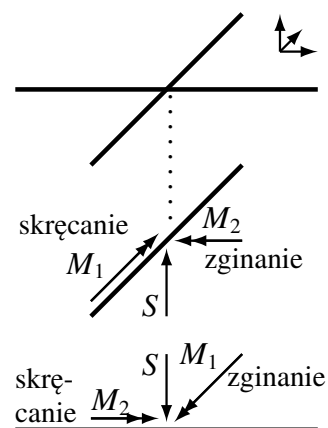
Komentarz do rysunku:

Styczna do linii ugięcia belki A, w miejscu skrzyżowania z belką B, nie jest pozioma, więc belka B obróci się wokół swojej osi.



#### 3. Oddziaływania pomiędzy belkami

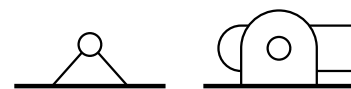
- (a) siły poprzeczne  $S$ , prostopadłe do osi belki;
- (b) momenty gnące  $\leftrightarrow$  skręcające  $M_1 \leftrightarrow M_2$ .



#### 4. Podpory

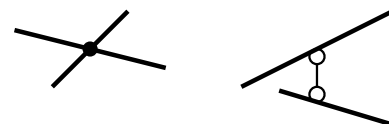
Opis podpór należy uzupełnić o informację dotyczącą możliwości swobodnego lub nieswobodnego bądź zablokowanego „obracania się – skręcania” belki wokół własnej osi; np. podpora przegubowa może wystąpić w dwóch postaciach:

- a. „przegub kulisty”,
- b. „zawias”.



#### 5. Modele rusztu

- (a) model pełny: zgodność ugięć i kątów (belki „zespawane”);
- (b) model uproszczony: tylko zgodność ugięć (belki połączone „łącznikiem przegubowym”).



Dwa podstawowe „przypadki obliczeniowe” to:

1. Wytrzymałość rusztu (poziom naprężeń, wielkość ugięć) pod działaniem obciążeń „poprzecznych”; przy obliczaniu naprężeń dodaje się naprężenia od „oddziaływań wzdłużnych”.
2. Stateczność rusztu poddanego ściskaniu; obciążenia „poprzeczne” pomija się.

## 5.1 Wytrzymałość rusztu

Do obliczenia naprężeń w belkach rusztu trzeba znać wykresy sił wewnętrznych. Ruszt zazwyczaj jest statycznie niewyznaczalny (nierzadko wielokrotnie, zewnętrznie i wewnętrznie), więc nie da się wyznaczyć reakcji w podporach i oddziaływań między belkami korzystając wyłącznie z równań równowagi.

Metoda „rozwiązania” rusztu polega na „rozdzieleniu” go na belki proste i wyznaczeniu oddziaływań między belkami, a potem „rozwiązaniu” każdej z belek niezależnie.

### 5.1.1 Algorytm

Przyjmując założenia:

- a. ruszt jest złożony z belek prostych,
- b. potrafimy rozwiązywać zadania zginania belek prostych,
- c. model rusztu: uproszczony,

algorytm rozwiązania może być taki:

## 1. Przygotowanie modelu

(a) dzielimy ruszt na belki proste („rozcinamy” w skrzyżowaniach – „przecinamy” połączenia), zachowując:

- topologię,
- warunki brzegowe,
- obciążenia,

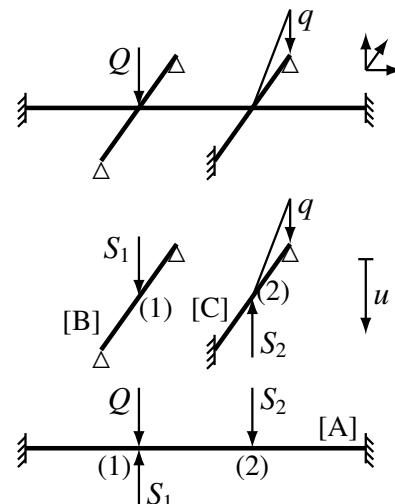
i dbając, aby żadna z belek nie stała się mechanizmem (jeśli belka po oddzieleniu staje się mechanizmem, to oddziaływania przez nią przekazywane można wyznaczyć z równań równowagi);

(b) identyfikujemy oddziaływania – siły  $S_1$ ,  $S_2$  – w miejscach „rozdzielenia”;

(c) piszemy warunki zgodności przemieszczeń (ugięć) w rozciętych połączeniach:

$$u_{A,1} = u_{B,1}$$

$$u_{A,2} = u_{C,2}$$



2. Wyznaczenie zależności opisujących ugięcia ( $u$ ) belek w funkcji zadanych obciążeń ( $Q$  i  $q$ ) oraz poszukiwanych oddziaływań ( $S_i$ ), wykorzystując np. tablice ugięć belek:

$$u_{A,1} = f(Q, S_1, S_2), \quad u_{A,2} = f(Q, S_1, S_2), \quad u_{B,1} = f(S_1), \quad u_{C,2} = f(q, S_2)$$

3. Wyznaczenie poszukiwanych wartości oddziaływań  $S_1$  i  $S_2$  – rozwiązanie układu algebraicznych równań liniowych.

4. Wyznaczenie wykresów sił wewnętrznych i naprężeń.

## 5.1.2 Współpraca belek rusztu

Obciążenie przenosi się na poszczególne belki rusztu w zależności od ich podatności na zginanie w miejscu skrzyżowania belek. Podatność ta zależy od:

- sztywności giętej  $EI$ ,
- sposobu podparcia,
- długości belek,
- położenia miejsca skrzyżowania.

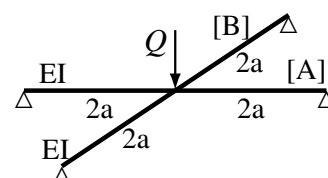
Poniżej przedstawiono 5 przykładów obrazujących, jak te parametry wpływają na siłę  $S$  oddziaływania między belkami oraz na maksymalne momenty gnące  $M_A$  i  $M_B$  w belkach.

a. Belki identyczne

$$u_A = \frac{4}{3} \frac{Sa^3}{EI}, \quad u_B = \frac{4}{3} \frac{(Q-S)a^3}{EI}$$

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)S = \frac{4}{3}Q \Rightarrow S = \frac{1}{2}Q$$

$$\max |M_A| = \frac{1}{2}Qa = 0.5Qa, \quad \max |M_B| = \frac{1}{2}Qa = 0.5Qa$$

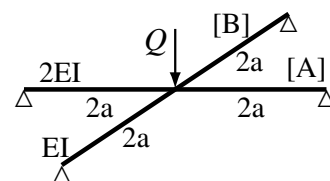


b. Belka wzdłużna: większa sztywność giętą ( $EI \rightarrow 2EI$ )

$$u_A = \frac{2}{3} \frac{Sa^3}{EI}, \quad u_B = \frac{4}{3} \frac{(Q-S)a^3}{EI}$$

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)S = \frac{4}{3}Q \Rightarrow S = \frac{2}{3}Q$$

$$\max |M_A| = \frac{2}{3}Qa \approx 0.667Qa, \quad \max |M_B| = \frac{1}{3}Qa \approx 0.333Qa$$

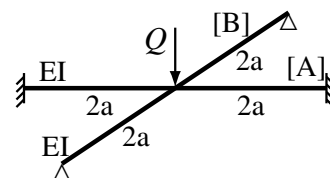


c. Belka wzdłużna: utwierdzona

$$u_A = \frac{1}{3} \frac{Sa^3}{EI}, \quad u_B = \frac{4}{3} \frac{(Q-S)a^3}{EI}$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)S = \frac{4}{3}Q \Rightarrow S = \frac{4}{5}Q$$

$$\max |M_A| = \frac{2}{5}Qa = 0.4Qa, \quad \max |M_B| = \frac{1}{5}Qa = 0.2Qa$$

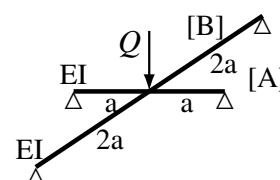


d. Belka wzdłużna: krótsza od belki poprzecznej ( $4a \rightarrow 2a$ )

$$u_A = \frac{1}{6} \frac{Sa^3}{EI}, \quad u_B = \frac{4}{3} \frac{(Q-S)a^3}{EI}$$

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\right)S = \frac{4}{3}Q \Rightarrow S = \frac{8}{9}Q$$

$$\max |M_A| = \frac{4}{9}Qa \approx 0.444Qa, \quad \max |M_B| = \frac{1}{9}Qa \approx 0.111Qa$$

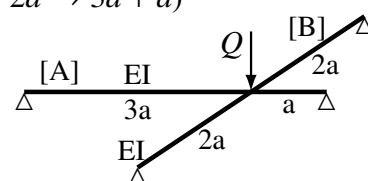


e. Belka poprzeczna: bliżej prawej podpory belki wzdłużnej ( $2a + 2a \rightarrow 3a + a$ )

$$u_A = \frac{3}{4} \frac{Sa^3}{EI}, \quad u_B = \frac{4}{3} \frac{(Q-S)a^3}{EI}$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right)S = \frac{4}{3}Q \Rightarrow S = \frac{16}{25}Q$$

$$\max |M_A| = \frac{12}{25}Qa = 0.48Qa, \quad \max |M_B| = \frac{9}{25}Qa = 0.36Qa$$



Ruszt tworzą dwie belki, obciążone siłą  $Q$  w miejscu skrzyżowania. Belka wzdłużna „A” przenosi siłę  $S$ , a belka poprzeczna „B” – siłę  $Q-S$ . W wariancie bazowym (a) belki są identyczne, więc siła  $Q$  rozdzieliła się równo na obie belki. W pozostałych przypadkach belka „A” jest mniej podatna od belki „B”, co sprawia, że przejmuje większą część obciążenia ( $S > 0.5Q$ ) i również moment gnący jest większy w belce „A” niż w belce „B”. Fakt przejścia większej części obciążenia niekoniecznie musi prowadzić do wzrostu momentu gnącego – widać to na przykładach (c)–(e), gdzie moment gnący jest mniejszy, niż w przypadku (a). W bardziej podatnej belce „B” w każdym przypadku maksymalny moment gnący jest mniejszy niż w wariancie (a). Warto zwrócić uwagę, że w przypadkach (c)–(e) belki mają identyczną sztywność giętą  $EI$ , a wartości maksymalnych momentów gnących różnią się znacznie – nawet o czynnik 4.

## 5.2 Stateczność rusztu z jednym wzdłużnikiem

Utrata stateczności konstrukcji obciążonej **powoli** narastającym obciążeniem, objawia się:

- nagłą zmianą kształtu,
- przemieszczenia występują na kierunku prostopadłym do obciążenia.



### 5.2.1 Stateczność giętą ściskanej belki jednoprzęsłowej

#### Przypadki elementarne

Dla stanu naprężenia, gdy  $\max \sigma = P/A < R_H < R_e$ , ( $R_H$  – granica proporcjonalności,  $R_e$  – granica plastyczności), belka nie traci stateczności, jeśli

$$P < P_E = \frac{\pi^2 EI}{l_w^2}$$

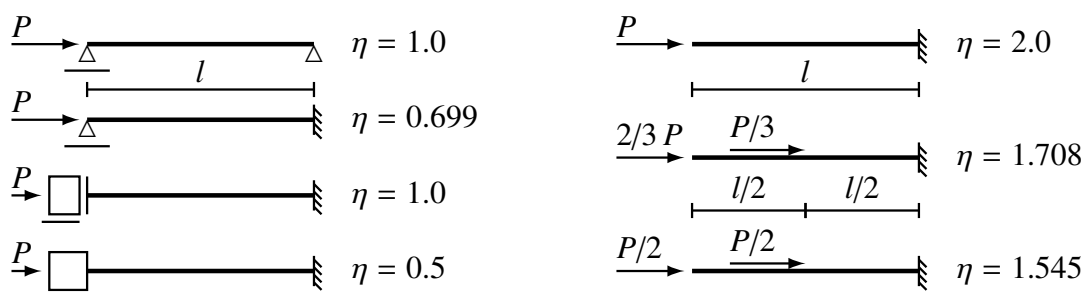
$E$  – moduł Younga,

$I$  – mniejszy moment bezwładności zginania,

$l_w = \eta \cdot l$  – długość wyboczeniowa.

Parametr  $\eta$  zależy od:

- (a) warunków brzegowych,
- (b) sposobu obciążenia.



#### Przypadki złożone

Zjawisko utraty stateczności nie podlega zasadzie superpozycji obciążeń, więc każdy złożony stan obciążenia trzeba rozpatrywać jako całość.

Rysunek : Superpozycja obciążeń na przykładzie wykresu momentów gnących

Przykład:

Należy określić stopień wykorzystania nośności wyboczeniowej  $\beta$  belki,

jeśli siła  $P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$

- Stan 1

$$l_w = 2 \cdot l = 2l$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \Rightarrow \beta_1 = \frac{P/2}{P_E} = \frac{P}{2P_E} = \frac{\pi^2 EI}{8l^2} \cdot \frac{4l^2}{\pi^2 EI} = \frac{1}{2}$$

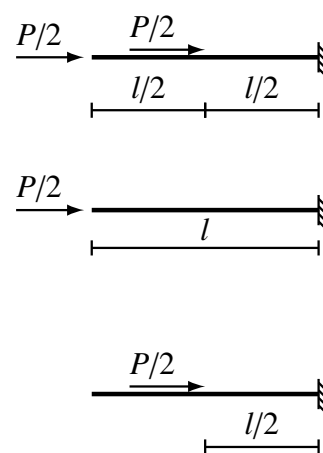
- Stan 2

$$l_w = 2 \cdot l/2 = l$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \Rightarrow \beta_2 = \frac{P/2}{P_E} = \frac{P}{2P_E} = \frac{\pi^2 EI}{8l^2} \cdot \frac{l^2}{\pi^2 EI} = \frac{1}{8}$$

- Stan 1 + Stan 2

$$\beta_{(1)+(2)} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$$

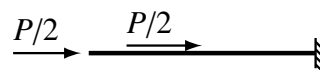


- Stan (1+2)

$$l_w = 1.545 \cdot l$$

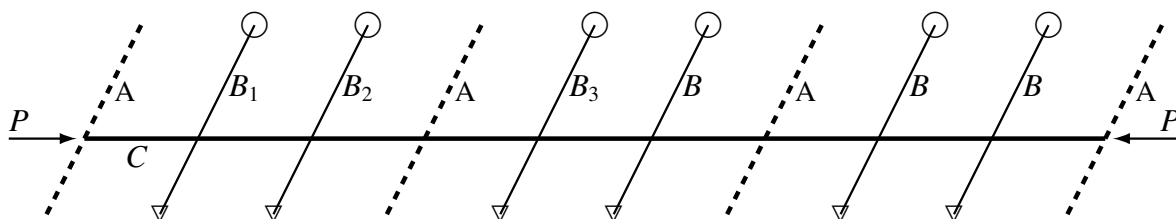
$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(1.545l)^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{2.387l^2} \Rightarrow \beta_{(1+2)} = \frac{P}{P_E} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \cdot \frac{2.387l^2}{\pi^2 EI} = 0.5968$$

Jak widać,  $\beta_{(\text{stan } 1)+(\text{stan } 2)} \neq \beta_{\text{stan } (1+2)}$  i poprawna jest, oczywiście, wartość  $\beta_{(1+2)}$ .



## 5.2.2 Ruszt z jednym wzdłużnikiem

Najprostszym przykładem analizy stateczności rusztu jest przypadek ściskanej belki wzdłużnej opartej na szeregu niezależnych belek poprzecznych. Taki ruszt może odwzorowywać pracę struktury pokładu lub dna barki bądź zrębnicy luku, gdy ściskanie jest skutkiem zgięcia ogólnego kadłuba.



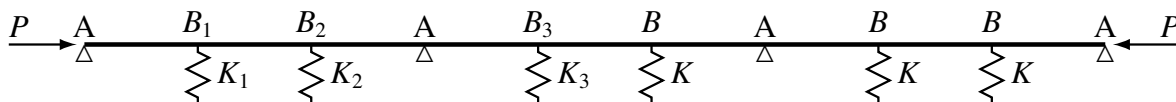
A – gródź poprzeczna,

B – belka poprzeczna (np. dennik),

C – belka wzdłużna (np. wzdłużnik środkowy),

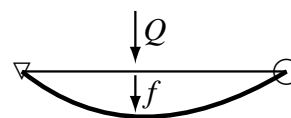
∇, ○ – symbolizują warunki brzegowe belek poprzecznych.

Równoważnym wytrzymałościowo modelem takiego rusztu jest belka ściskana:



A – podpora przegubowa modelująca gródź (nieskończenie duża sztywność w płaszczyźnie grodzi – czyli na przemieszczenie prostopadłe do płaszczyzny rusztu; zerowa sztywność grodzi na zginanie poprzeczne – czyli brak ograniczenia obrotu);

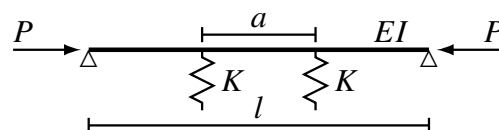
$B_1, B_2, \dots$  – sprężyny modelujące belki poprzeczne; sztywność sprężyny jest równa sztywności belki poprzecznej na zginanie, w miejscu skrzyżowania się z belką wzdłużną:  $K = \frac{Q}{f}$ , natomiast pominięto sztywność skrętną belki.



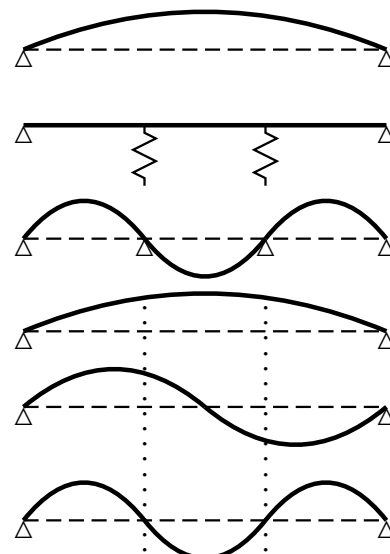
Jeśli odległości pomiędzy podporami są takie same, a belki poprzeczne są identyczne, tak samo podparte i równomiernie rozmieszczone, to wystarczy ograniczyć się do belki jednoprzęsłowej, podpartej przegubowo na końcach i opartej na szeregu równomiernie rozmieszczonych, identycznych sprężyn:

$$a = \frac{l}{n+1}$$

$n$  – liczba podpór sprężystych.



Sprężyny mogą mieć sztywność zarówno bardzo małą (w szczególności zerową) jak i bardzo dużą (w szczególności nieskończoną). Te dwa skrajne przypadki, to: (a) belka jednoprzęsłowa, która traci stateczność w postaci jednej półfali sinusoidy, (b) belka wieloprzęsłowa (każda ze sprężyn jest podporą przegubową), która traci stateczność w postaci tylu półfal sinusoidy, ile jest przęseł.



Wobec tego, forma utraty stateczności belki opartej na sprężynach o „normalnej” sztywności, będzie zależała od sztywności sprężyn, i np. dla dwóch sprężyn:

- $K$  „małe”, ale niezerowe: 1 półfala,
- $K$  „pośrednie”: 2 półfale,
- $K$  „duże”, ale nie nieskończone: 3 półfale.

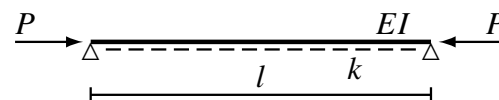
Również siła powodująca utratę stateczności belki wspartej na sprężynach będzie przyjmowała wielkości pośrednie pomiędzy wartościami dla belki jednoprzęsłowej i  $(n+1)$ -przęsłowej.

Można rozpatrywać dwa modele obliczeniowe opisujące stateczność takiej belki:

- model przybliżony: belka na podłożu sprężystym,
- model dokładny: belka na sprężynach.

### Belka na podłożu sprężystym

sztywność podłoża sprężystego:  $k = \frac{K}{a}$



Belka nie straci stateczności, jeśli dla każdej liczby naturalnej  $m > 0$

$$P < P_k = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \cdot EI + \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \cdot k$$

$m$  – liczba półfal formy utraty stateczności.

Funkcja ta posiada tylko jedno minimum, które można znaleźć wykonując obliczenia dla kolejnych wartości  $m = 1, 2, \dots$ . Wartość  $m$ , dla której funkcja osiąga minimum jest liczbą półfal formy utraty stateczności.

*Przykład:* Należy znaleźć siłę krytyczną  $P_k$  i odpowiadającą jej formę utraty stateczności, jeśli  $k = 49(\pi/l)^4 EI$ .

$$P_k = m^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot EI + \frac{1}{m^2} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \cdot 49 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 EI = \left[ m^2 + \left(\frac{7}{m}\right)^2 \right] \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI$$

Należy zbadać zmienność  $m^2 + (7/m)^2$ :

$m$	1	2	3	4
$m^2 + (7/m)^2$	50	16.25	14.44	19.06

Jak widać, funkcja osiąga minimum dla  $m = 3$ .

Odpowiedź: Belka traci stateczność pod działaniem siły ściskającej  $P = 14.44 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  w formie 3 półfal.

## Belka na sprężynach

Belka nie utraci stateczności pod działaniem siły ściskającej  $P$ , jeżeli:

- a. belka nie straci stateczności na odcinku pomiędzy sprężynami (kryterium stateczności lokalnej)

$$\lambda < 1, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \frac{P}{P_E^o} \quad \text{i} \quad P_E^o = \frac{\pi^2 EI}{a^2}$$

- b. belka nie straci stateczności na odcinku pomiędzy podporami (kryterium stateczności ogólnej)

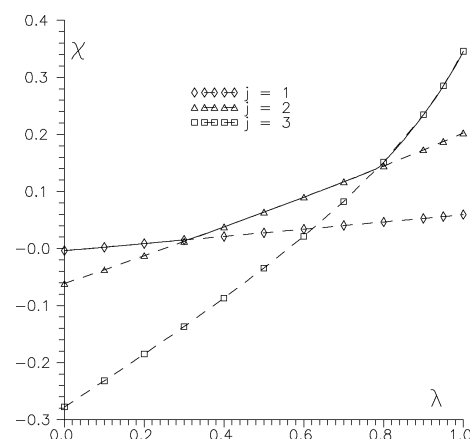
$$K_{rzecz} > K_{wym} = \frac{\pi^4 EI}{a^3} \cdot \chi_{j\max}(\lambda)$$

$\chi_{j\max}(\lambda)$  – funkcja zależna od liczby podpór sprężystych  $n$  oraz wartości  $\lambda$ , zazwyczaj dana w postaci tabeli liczb;

$j$  – liczba półfal formy utraty stateczności.

Funkcja  $\chi_{j\max}$  jest górną obwiednią gałęzi odpowiadających kolejnym wartościom „ $j$ ” – liczbom półfal utraty stateczności.

Dla  $n = 3$  sprężyn poszczególne „gałęzie” i obwiednia są przedstawione na rysunku (oś pozioma:  $\lambda$ , oś pionowa:  $\chi$ ).



Typowe zadania:

1. Obliczenia sprawdzające

Należy sprawdzić, czy belka wzdłużna przeniesie siłę ściskającą  $P$  nie tracąc stateczności.

2. Poznawcze

Należy wyznaczyć maksymalną siłę  $P$ , którą przeniesie belka wzdłużna nie tracąc stateczności i naszkicować formę utraty stateczności.

3. Projektowe

- (a) szukane parametry belek poprzecznych, np. sztywność  $EI$  lub długość  $b$ ,
- (b) szukana minimalna liczba belek poprzecznych  $n$ ,
- (c) szukana minimalna sztywność belki wzdłużnej  $EI$ .

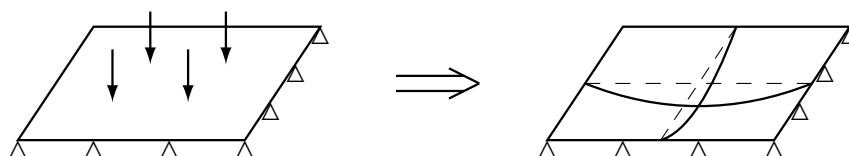
## Rozdział 6

### Płyty prostokątne

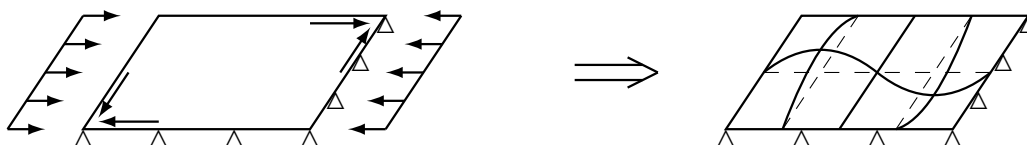
Płyta jest to element wytrzymałościowy, płaski, pracujący tak, że pod działaniem obciążenia przestaje być płaski.

Stany pracy płyty pod działaniem obciążeń statycznych:

1. obciążenie prostopadłe do powierzchni płyty – płyta ugina się



2. obciążenie leżące w płaszczyźnie płyty – płyta traci stateczność



3. łączne działanie obydwóch obciążeń powoduje sprzężone, nieliniowe skutki:

- (a) rozciąganie płyty zginanej powoduje zmniejszenie ugięć i momentów gnących w płycie, natomiast ściskanie powiększa ugięcia i momenty gnące w płycie;
- (b) obciążenia poprzeczne płyty ściskanej (ściananej) wpływają na zmianę naprężeń krytycznych odpowiadających utracie stateczności i mogą je zarówno obniżyć jak i podwyższyć.

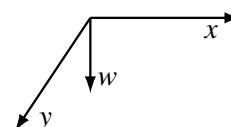
## 6.1 Wytrzymałość płyt

### 6.1.1 Równanie zginania

Podstawowe równanie zginania płyty

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = p(x, y)$$

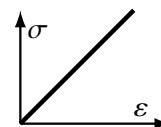
$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \text{sztywność płytowa,}$$



$t$  – grubość płyty,  $E$ ,  $\nu$  – stałe materiałowe,  
 $w \equiv w(x, y)$  – poszukiwane równanie ugiętej płyty,  
 $p(x, y)$  – obciążenie (ciśnienie),

opisuje zginanie płyty przy następujących założeniach:

1. Płyta cienka, czyli  $t \ll \sqrt{A}$ , ( $A$  – pole płyty), więc nie uwzględniamy
  - (a) dodatkowego ugięcia wywołanego ścinaniem,
  - (b) „ściśnięcia” płyty, czyli wpływu obciążenia  $p(x, y)$  na zmianę grubości płyty.
2. Płyta sztywna, czyli
  - (a) przesunięcia płyty w płaszczyźnie  $Oxy$  są tak małe, że nie wpływają na ugięcia płyty,
  - (b) obciążenia działające w płaszczyźnie płyty nie wpływają na ugięcia płyty.
3. Materiał jednorodny, izotropowy, liniowo-sprężysty.
4.  $t = \text{const}$ ,  $E = \text{const}$ ,  $\nu = \text{const}$
5. Małe ugięcia płyty, czyli  $\partial w / \partial x \approx \text{tg } \phi \approx \phi$ ,  $\partial w / \partial y \approx \text{tg } \theta \approx \theta$ .
6. Obciążenie  $p(x, y)$  tylko prostopadle do powierzchni płyty.



Równanie to nie uwzględnia jakiegokolwiek wpływu obciążeń i naprężeń tarczowych na pracę płyty.

Równanie zginania płyty jest równaniem różniczkowym cząstkowym. Dla:

- a. dowolnego kształtu płyty,
- b. dowolnego obciążenia,
- c. dowolnych warunków brzegowych,

nie jest znane rozwiązanie „zamknięte” tego równania.

Trzeba spróbować ograniczyć zakres możliwych kształtów, obciążeń i warunków brzegowych do wystarczających dla opisu wytrzymałości konstrukcji kadłuba statku.

### 6.1.2 Model obliczeniowy

Płyta „wytrzymałościowa” odpowiada elementom konstrukcyjnym wykonanym z blachy, gdy podstawowe obciążenie działa prostopadle do powierzchni blachy.

#### Kształt płyty

Typową formą konstrukcji kadłuba statku, przystosowaną do przenoszenia obciążeń poprzecznych i stanowiącą równocześnie barierę rozdzielającą dwie przestrzenie, jest blacha uźebrowana.

Najczęściej spotykaną postacią konstrukcji przystosowanej do przenoszenia takich obciążeń są blachy usztywnione dwoma, wzajemnie prostopadłymi, systemami równoległych wiązań.

**Rysunek : pola płytowe**

Typowymi przykładami są pokłady, dno zewnętrzne, dno wewnętrzne, burty, grodzie.

„Właściwa” płyta jest więc ograniczona sąsiadującymi wiązaniami, co zazwyczaj prowadzi do prostokątnego kształtu płyty.

Inne kształty też są spotykane, np. w rejonie fundamentów oraz włazów, i wówczas zazwyczaj są to czworoboki zbliżone kształtem do trapezów; rejonów takich jest na statku niewiele i najczęściej wymiarowane są według specyficznych dla nich reguł i stanów obciążenia.

Można więc przyjąć, że typową płytą, występującą w konstrukcji kadłuba statku, jest **płyta prostokątna**.

### Obciążenie

Sposób obciążenia może, zasadniczo, być dowolny, tzn. nie da się np. zabezpieczyć przed ustawieniem na blachach ciężkiej sztuki ładunku opierającej się o podłoże na 3 stopkach o wymiarach 50 mm × 50 mm. Innym przykładem możliwego obciążenia jest nacisk skalistego dna akwenu przy wejściu na mieliznę.

Ograniczając się do przypadków obciążenia płyt poszycia, dopuszczalnych „dobrą praktyką eksploatacyjną”, można zawęzić obciążenie do:

- a. działania cieczy (woda zaburtowa, ładunek),
- b. ładunku sypkiego (luzem lub w workach),
- c. ładunku drobnicowego (skrzynki),
- d. nacisku kół pojazdów.

Nacisk kół pojazdów przenosi się na pokład poprzez prostokątne „odciski” opon o wymiarach 160 mm × 80 mm do 400 mm × 300 mm, a odległości pomiędzy kołami lub grupami kół są rzędu 2 m i więcej. Jak widać, strefa nacisku jest znacznie mniejsza od pola płytowego, a odległości między strefami są wielokrotnie większe od odstępów usztywnień. Wskutek tego, obciążenia nie tworzą powtarzalnego schematu, bo np. pole obciążone może sąsiadować zarówno z polem obciążonym jak i nieobciążonym albo pola obciążone mogą być rozdzielone kilkoma polami nieobciążonymi.

Ładunek drobnicowy, jeśli nie są to „ciężkie sztuki”, może być uznany za tożsamy z ładunkiem sypkim, a ładunek sypki, przy uwzględnieniu tarcia wewnętrznego, niczym nie różni się od cieczy.

Wobec tego, typową postacią obciążenia działającego na płyty będzie ciśnienie, takie samo na wspólnych brzegach stykających się płyt. Wartość ciśnienia w obrębie płyty nie jest stała; o ile dla poszycia pokładów, dna czy poziomo usztywnionych burt i grodzi te zmiany są niewielkie, to dla grodzi i burt usztywnionych pionowo, zmienność ciśnienia na obszarze płyty jest znaczna.

Tak więc, za wyjątkiem obciążeń od kół pojazdów oraz przypadków pionowo usztywnionych struktur, można przyjąć, że typowym obciążeniem płyt jest **stałe ciśnienie**.

### Warunki brzegowe

Warunki brzegowe na konturze prostokątnego pola płytowego ograniczonego wiązaniami wynikają nie z warunków „fizycznego” zamocowania a ze sposobu obciążenia i postaci konstrukcji.

Pola płytowe poszycia dna, burt, grodzi, pokładów, tworzą zazwyczaj, w znacznych rejonach, powtarzalną siatkę prostokątów.

Rysunek : ugięcia pól płytowych

Wobec tego, „na prawo i na lewo” od każdego wiązania, kolejne wiązania podpierające płyty są położone w takich samych odległościach, więc występuje symetria konstrukcji i sposobu podparcia. Jeśli ponadto przyjmiemy, że obciążeniem jest stałe ciśnienie, to również obciążenie jest symetryczne względem każdego wiązania. Z obydwóch przesłanek łącznie wynika, że forma deformacji sąsiadujących płyt względem ich wspólnego brzegu musi być symetryczna, a z postaci równania opisującego zginanie płyt wiadomo, że powinna to być powierzchnia gładka, co razem prowadzi do wniosku, że kąt obrotu w tym miejscu musi być równy zero.

Wobec tego, dla pól płytowych, tworzących periodyczną strukturę, obciążoną stałym ciśnieniem, warunki brzegowe sprowadzają się do **utwierdzenia na konturze**.

**Klasyczny model obliczeniowy** służący do analizy wytrzymałości (plastycznej) płyt tworzących konstrukcję kadłuba statku, to:

- płyta prostokątna,
- obciążona stałym ciśnieniem na całej powierzchni,
- utwierdzona na wszystkich czterech bokach.

Oczywiście, nie obejmuje to wszystkich spotykanych przypadków, ale stanowi podstawę do obliczeń projektowych i wstępnych obliczeń sprawdzających.

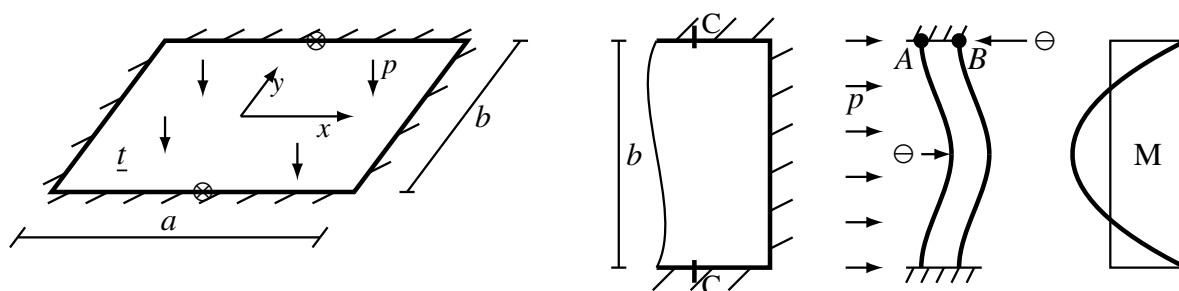
### 6.1.3 Wzory inżynierskie

Płyty poszycia mogą podlegać wyłącznie zginaniu (np. poszycie platform) jak również dodatkowo przenosić naprężenia tarczowe wynikające ze zgięcia wiązarów oraz zgięcia ogólnego całego kadłuba statku. Ten pierwszy przypadek nazywany jest *wytrzymałością lokalną*, a drugi – *wytrzymałością globalną*.

#### Wytrzymałość lokalna

Wytrzymałość lokalna uwzględnia tylko działanie ciśnienia.

- Model: Płyta prostokątna, utwierdzona na brzegu, obciążona stałym ciśnieniem.



- Dodatkowe założenie:  $\frac{a}{b} \geq 2$ .
- Wobec tego wystarczy rozpatrzeć tzw. zgięcie cylindryczne (walcowe) płyty, a wówczas maksymalne naprężenia występują w środku długości dłuższego boku płyty.
- Naprężenia w środku długości dłuższego boku
  - Naprężenia wywołane zginaniem

$$\sigma_{p,y} = \pm \frac{1}{2} p \left( \frac{b}{t} \right)^2, \quad \sigma_{p,x} = \nu \cdot \sigma_{p,y}$$

Znak „+” występuje w punkcie A (strona obciążona ciśnieniem  $p$ ), a znak „-” w punkcie B (strona nieobciążona).

- Naprężenia zredukowane (hipoteza HMH, dwuwymiarowy płaski stan naprężenia)

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

W tym przypadku  $\sigma_x = \nu \cdot \sigma_y$ , więc



$$\sigma_{red} = \sqrt{\nu^2 \cdot \sigma_y^2 + \sigma_y^2 - (\nu \cdot \sigma_y) \cdot \sigma_y} = |\sigma_y| \sqrt{1 - \nu + \nu^2}$$

co dla  $\nu = 0.3$  daje

$$\sigma_{red} = |\sigma_y| \sqrt{1 - 0.3 + 0.3^2} = |\sigma_y| \sqrt{0.79} \approx 0.89 |\sigma_y|$$

Jak widać, naprężenia zredukowane są mniejsze od maksymalnych naprężeń normalnych. (W powyższych zależnościach, oczywiście  $\sigma_y \equiv \sigma_{p,y}$ ).

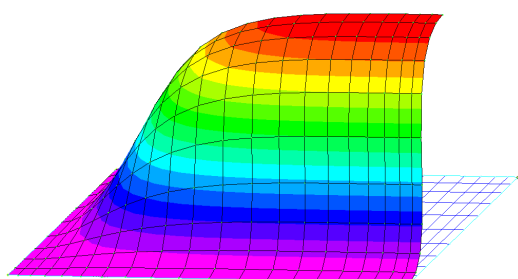
- Naprężenia w środku długości krótszego boku  
Naprężenia wywołane zginaniem

$$\sigma'_{p,x} \approx \pm \frac{1}{3} p \left( \frac{b}{t} \right)^2, \quad \sigma'_{p,y} = \nu \cdot \sigma'_{p,x}$$

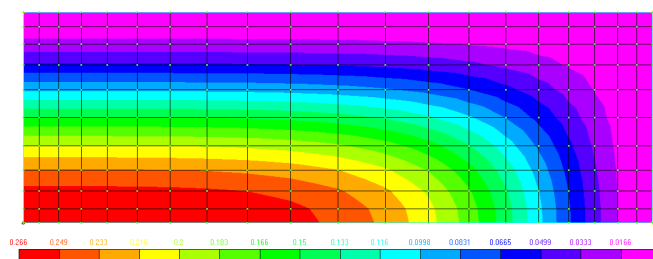
Znak „+” występuje w punkcie A (strona obciążona ciśnieniem  $p$ ), a znak „-” w punkcie B (strona nieobciążona).

Mnożnik  $1/3$  we wzorze na  $\sigma'_{p,x}$  jest przybliżoną, „okrągłą” wartością, bo w zależności od metody rozwiązania zagadnienia zginania płyty, w literaturze przedmiotu spotyka się różne wartości mianownika ułamka, od 2.92 do 2.98 (średnia 2.95).

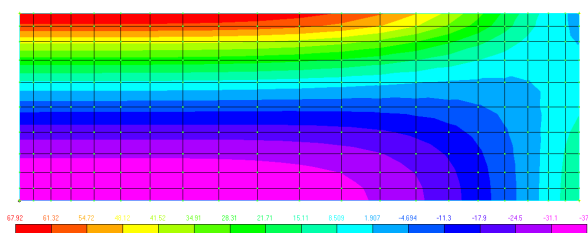
Przykładowe wyniki dla płyty  $500 \text{ mm} \times 1500 \text{ mm}$ ,  $t = 20 \text{ mm}$ ,  $p = 240 \text{ kPa}$ , uzyskane metodą MES; model obejmuje „prawą górną” ćwiartkę płyty.



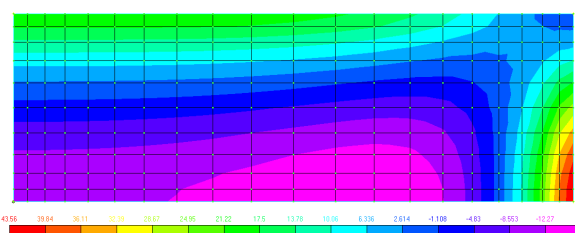
Forma ugięcia



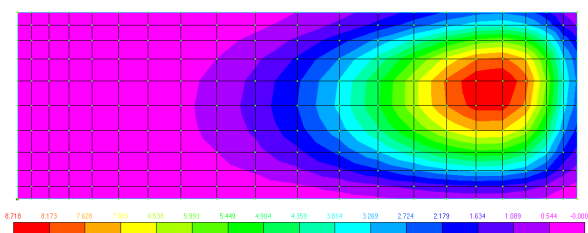
Forma ugięcia



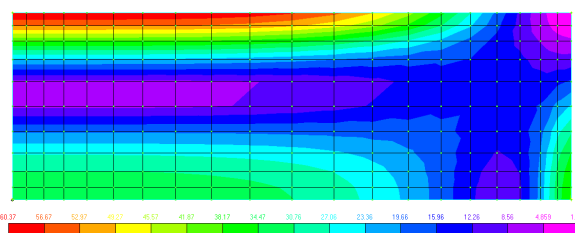
Naprężenia  $\sigma_y$ ,  $(-38 \div 68) \text{ MPa}$



Naprężenia  $\sigma_x$ ,  $(-16 \div 44) \text{ MPa}$



Naprężenia  $\tau_{xy}$ ,  $(0 \div 9) \text{ MPa}$

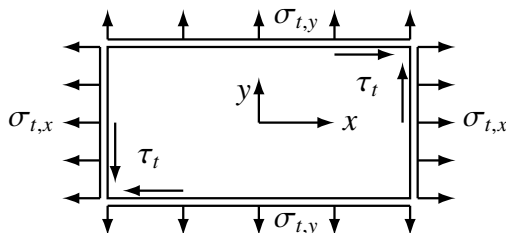


Naprężenia  $\sigma_{red}$ ,  $(1 \div 60) \text{ MPa}$

## Wytrzymałość globalna

Wytrzymałość globalna obejmuje wytrzymałość lokalną (czyli działanie ciśnienia) oraz wpływ normalnych i stycznych naprężeń tarczowych.

- Sumaryczne naprężenia normalne w środku długości boków:

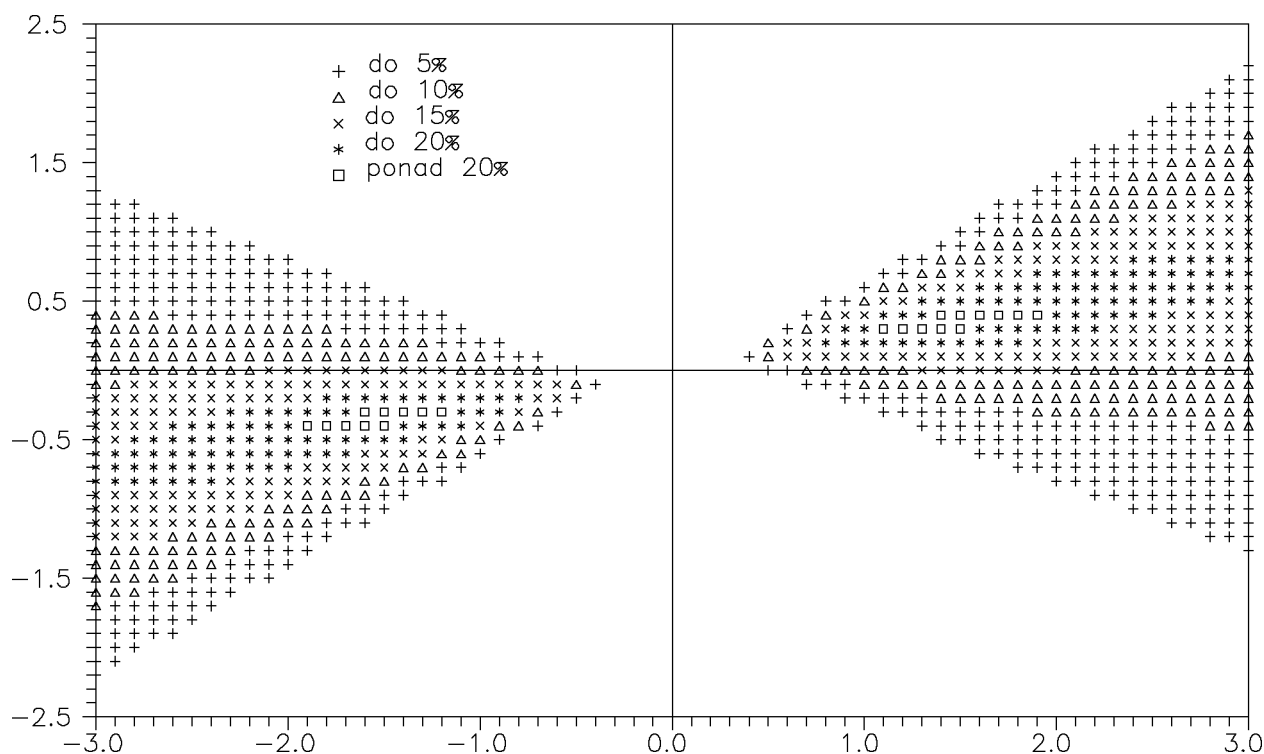


$$\sigma_x = \sigma_{p,x} + \sigma_{t,x}, \quad \sigma_y = \sigma_{p,y} + \sigma_{t,y} \quad \text{lub} \quad \sigma_x = \sigma'_{p,x} + \sigma_{t,x}, \quad \sigma_y = \sigma'_{p,y} + \sigma_{t,y}$$

- Naprężenia zredukowane (hipoteza HMH, dwuwymiarowy płaski stan naprężenia)

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \tau_t^2}$$

Maksymalne naprężenia zredukowane, w zależności od proporcji pomiędzy naprężeniami  $\sigma_{p,y}$ ,  $\sigma_{t,x}$  i  $\sigma_{t,y}$ , występują w środku długości dłuższego boku lub w środku długości krótszego boku płyty.

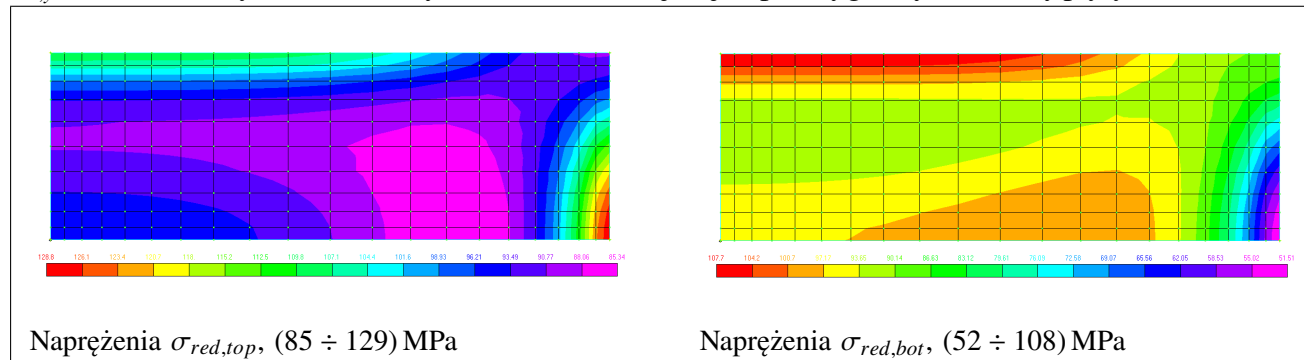


Na powyższej „mapie” pokazano zakresy wartości  $\sigma_{t,x}/\sigma_{p,y}$  (oś pozioma) i  $\sigma_{t,y}/\sigma_{p,y}$  (oś pionowa), dla których największe naprężenia  $\sigma_{red}$  są w środku długości krótszego boku. Symbole obrazują „poziom przewyższenia”:  $+$   $\rightarrow$  5%,  $\Delta$   $\rightarrow$  10%, ...,  $\square$   $\rightarrow$  pow. 20%; maksymalna wartość to ok. 21%. Widać na niej, że:

- dla  $\sigma_{t,x} = 0$  maksymalne  $\sigma_{red}$  będą zawsze w środku dłuższego boku;
- dla  $\sigma_{t,y} = 0$  maksymalne  $\sigma_{red}$  będą w środku krótszego boku dla  $|\sigma_{t,x}/\sigma_{p,y}| > 0.6$ ;

- jeśli  $\sigma_{t,y} \neq 0$ , to maksymalne  $\sigma_{red}$  będą w środku dłuższego boku dla  $|\sigma_{t,x}/\sigma_{p,y}| < 0.4$ , a dla pozostałego zakresu należy sprawdzić naprężenia w obydwóch miejscach.

Przykładowe wyniki dla płyty  $500 \text{ mm} \times 1500 \text{ mm}$ ,  $t = 20 \text{ mm}$ ,  $p = 240 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{t,x} = 100 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{t,y} = 25 \text{ MPa}$ , uzyskane metodą MES; model obejmuje „prawą górną” ćwiartkę płyty.



Jak widać, maksymalne naprężenia  $\sigma_{red}$  są w środku krótszego boku i wynoszą 129 MPa; naprężenia w środku długości dłuższego boku to tylko 108 MPa – mniej o ok. 19%.

## 6.2 Stateczność płyt prostokątnych

Płyta traci stateczność, jeśli zostanie poddana działaniu odpowiednio dużego, tarczowego naprężenia ściskającego. Należy pamiętać, że naprężenia ściskające są efektem nie tylko „prostego” ściskania, ale również zginania i ścinania tarczowego. Właściwym sposobem sprawdzenia, czy występuje ściskanie, jest wyznaczenie minimalnego naprężenia głównego.

*Przykład:* Ścinanie naprężeniami  $\tau$  w układzie  $Oxy$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} 0 - \sigma & \tau \\ \tau & 0 - \sigma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma^2 - \tau^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \tau^2 \Rightarrow$$

$$\sigma = \tau \quad \text{lub} \quad \sigma = -\tau, \quad \text{więc} \quad \bar{\sigma}_{12} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

Jak widać, ścinanie tarczowe jest równoważne rozciąganiu i ściskaniu na wzajemnie prostopadłych kierunkach.

Podstawowym modelem służącym do oceny stateczności „pół płytowych” jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na całym obwodzie. (Określenie „płaska” oznacza, że nie uwzględniamy zarówno ugięć wywołanych działaniem obciążenia poprzecznego jak i wstępnych deformacji, np. technologicznych).

Rysunek : pola płytowe, forma utraty stateczności

(Model ten, za wyjątkiem szczególnych przypadków, nie jest odpowiedni do oceny stateczności węzłówek oraz rejonów ze swobodnymi bądź usztywnionymi krawędziami, np. krawędzie otworów, nawet te usztywnione lub obramowane).

Nie ma prostej, ogólnej metody pozwalającej ocenić stateczność takiej płyty przy dowolnym stanie obciążenia tarczowego. W praktyce inżynierskiej posługujemy się zestawem wzorów, dopasowanych do poszczególnych przypadków, albo wykonujemy analizę stateczności metodą MES.

Podane niżej wzory, zarówno dokładne jak i uproszczone, można wykorzystywać tylko w liniowo-sprężystym zakresie pracy płyty. Uprozczone formuły obejmujące również zakres sprężysto-plastyczny są zamieszczone w przepisach towarzystw klasyfikacyjnych.

## 6.2.1 Proste stany obciążenia

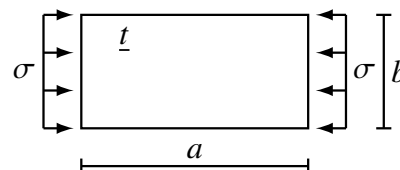
### Jednokierunkowe ściskanie

Płyta jest ściskana naprężeniami  $\sigma$  równoległymi do boku  $a$ .

Płyta nie traci stateczności, jeśli dla każdej liczby naturalnej  $m > 0$

$$\sigma < \sigma_E$$

$m$  – liczba półfal formy utraty stateczności na kierunku  $\parallel$  do boku  $a$ ; na kierunku  $\parallel$  do boku  $b$  jest zawsze jedna półfala.



$$\begin{aligned}\sigma_E &= \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left[ m + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]^2 = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left[ m \left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b}\right) \right]^2 \\ &= \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a/m}\right)^2 \left[ 1 + \left(\frac{a/m}{b}\right)^2 \right]^2\end{aligned}$$

gdzie:  $E$  – moduł Younga,  $\nu$  – liczba Poissona,  $t$  – grubość płyty.

Zamiast wykonywać obliczenia dla każdego  $m > 0$ , wystarczy sprawdzić, czy warunek jest spełniony dla takiego  $m$ , dla którego  $\sigma_E = \min$ . Tę wartość  $m$  można wyznaczyć w zależności od  $a/b$ :

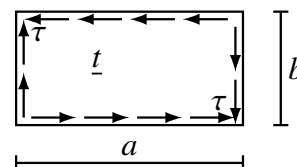
$m$	1	2	3	4	5	6	7	
$a/b$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{30}$	$\sqrt{42}$	$\sqrt{m(m+1)}$	
	1.41	2.45	3.46	4.47	5.48	6.48		

Jak widać, dla  $a/b > 5$  można  $m$  przyjmować jako „ $a/b$  zaokrąglone do liczby całkowitej”.

### Ścinanie tarczowe

Płyta ścinana naprężeniami  $\tau$  nie traci stateczności, jeśli

$$\tau < \tau_E$$



$$\tau_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}, \quad \bar{K} = 5.35 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad \text{dla } \frac{a}{b} \geq 1$$

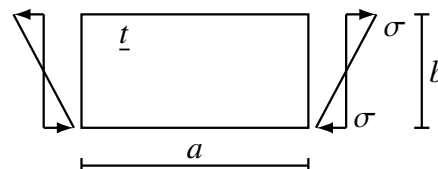
gdzie:  $E$  – moduł Younga,  $\nu$  – liczba Poissona,  $t$  – grubość płyty.

Uwaga: jest to wzór przybliżony, będący bezpiecznym oszacowaniem.

### Zginanie tarczowe

Płyta zginana naprężeniami  $\sigma$ , działającymi równoległe do boku  $a$ , nie traci stateczności, jeśli

$$\sigma < \sigma_E$$



$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}$$

$$\bar{K} = \begin{cases} 15.87 + 1.87(b/a)^2 + 8.6(a/b)^2 & \text{dla } a/b < 2/3 \\ 23.9 & \text{dla } a/b \geq 2/3 \end{cases}$$

gdzie:  $E$  – moduł Younga,  $\nu$  – liczba Poissona,  $t$  – grubość płyty.

Uwaga: jest to wzór przybliżony, będący bezpiecznym oszacowaniem.

**Zginanie tarczowe + ściskanie = obciążenie trójkątne**

Płyta ściskana naprężeniami  $\sigma$ , działającymi równolegle do boku  $a$ , nie traci stateczności, jeśli

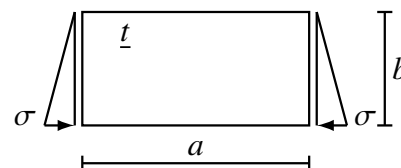
$$\sigma < \sigma_E$$

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}$$

$$\bar{K} = \begin{cases} 5.02 + 1.56(b/a)^2 + 1.23(a/b)^2 & \text{dla } a/b < 1 \\ 7.81 & \text{dla } a/b \geq 1 \end{cases}$$

gdzie:  $E$  – moduł Younga,  $\nu$  – liczba Poissona,  $t$  – grubość płyty.

Uwaga: jest to wzór przybliżony, będący bezpiecznym oszacowaniem.

**6.2.2 Złożone stany obciążenia**

Przedstawione niżej przypadki obciążenia odpowiadają podstawowym stanom pracy struktur konstrukcji kadłuba statku:

- dwukierunkowe ściskanie: poszycie dna zewnętrznego, wewnętrznego, pokładów (zazwyczaj w środkowej części statku), lokalnie obciążone środniki wiązarów (np. pod gniazdami kontenerów);
- jednokierunkowe ściskanie ze ścinaniem: wzdłużniki dna podwójnego, wzdłużniki pokładu;
- zginanie tarczowe ze ścinaniem: denniki, pokładniki, środniki wiązarów.

**Dwukierunkowe ściskanie**

Płyta jest ściskana naprężeniami  $\sigma_x$  równoległymi do boku  $a$  oraz  $\sigma_y$  równoległymi do boku  $b$ .

Płyta nie traci stateczności, jeśli dla każdej pary liczb naturalnych ( $m > 0, n > 0$ ) jest spełniona nierówność:

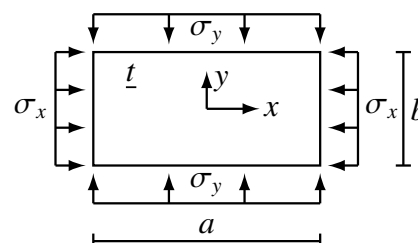
$$m^2 \sigma_x + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sigma_y < \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left[ m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]^2$$

$m$  – liczba półfal formy utraty stateczności na kierunku  $x$ ,

$n$  – liczba półfal formy utraty stateczności na kierunku  $y$ ,

$E$  – moduł Younga,  $\nu$  – liczba Poissona,  $t$  – grubość płyty.

Wzór jest prawdziwy zarówno dla ściskania ( $\sigma > 0$ ) jak i dla rozciągania ( $\sigma < 0$ ).



Jeśli  $\sigma_x \geq 0$  i  $\sigma_y \geq 0$  oraz  $a \geq b$ , to wystarczy sprawdzić kombinacje  $(m, n)$ :

$$n = 1, \quad m = 1, \dots, \bar{m}$$

gdzie  $\bar{m}$  – liczba półfal dla jednokierunkowego ściskania na kierunku  $x$ .

**Jednokierunkowe ściskanie ze ścinaniem tarczowym**

Płyta jest ściskana naprężeniami  $\sigma$  oraz ścinana tarczowo naprężeniami  $\tau$ .

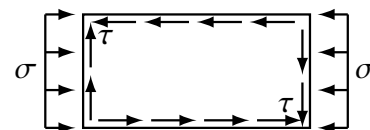
Płyta nie traci stateczności, jeśli jest spełniona nierówność:

$$\frac{\sigma}{\sigma_E} + \left( \frac{\tau}{\tau_E} \right)^2 < 1$$

$\sigma_E$  – naprężenia eulerowskie przy jednokierunkowym ściskaniu,

$\tau_E$  – naprężenia eulerowskie przy ścinaniu tarczowym.

Uwaga: jest to wzór przybliżony, będący bezpiecznym oszacowaniem.

**Zginanie tarczowe ze ścinaniem tarczowym**

Płyta jest zginana tarczowo naprężeniami  $\sigma$  oraz ścinana tarczowo naprężeniami  $\tau$ .

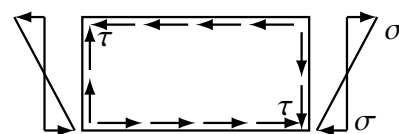
Płyta nie traci stateczności, jeśli jest spełniona nierówność:

$$\left( \frac{\sigma}{\sigma_E} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{\tau_E} \right)^2 < 1$$

$\sigma_E$  – naprężenia eulerowskie przy zginaniu tarczowym,

$\tau_E$  – naprężenia eulerowskie przy ścinaniu tarczowym.

Uwaga: jest to wzór przybliżony, będący bezpiecznym oszacowaniem.



## Rozdział 7

# Metoda Elementów Skończonych

Podstawowe informacje:

- Metoda Elementów Skończonych wykorzystywana jest do wykonywania obliczeń sprawdzających w zagadnieniach wytrzymałości konstrukcji (konstrukcji a nie mechanizmów) poddanych działaniu obciążeń zarówno statycznych jak i zmiennych w funkcji czasu, ale zajmować się będziemy wyłącznie statyką konstrukcji prętowych i belkowych.
- Dane potrzebne go uzyskania rozwiązania:
  1. konstrukcja:
    - (a) topologia (postać, kształt),
    - (b) charakterystyki geometryczne przekrojów,
    - (c) charakterystyki materiałowe;
  2. obciążenie;
  3. warunki brzegowe (podpory).
- Założenia:
  1. konstrukcja sprężysta;
  2. przemieszczenia i odkształcenia proporcjonalne do obciążeń.
- Równanie macierzowe

$$K \cdot u = Q$$

( $K$  – macierz sztywności,  $u$  – wektor przemieszczeń węzłów na kierunkach stopni swobody,  $Q$  – wektor sił w węzłach na kierunkach stopni swobody), opisuje pracę zarówno pojedynczego elementu (w lokalnym układzie współrzędnych) jak i całej konstrukcji (w globalnym układzie współrzędnych).

- Rozwiązanie
  1. Podstawowe – całej konstrukcji:

$$K^G \cdot u^G = Q^G \quad \Rightarrow \quad u^G = (K^G)^{-1} \cdot Q^G$$

Rozwiązaniem są przemieszczenia węzłów całej konstrukcji na kierunkach globalnych stopni swobody.

2. Wtórne – uzyskiwane w ramach MES:

(a) reakcje podpór działające na konstrukcję:

$$R^G = \tilde{K}^G \cdot u^G - Q^G$$

$\tilde{K}^G$  – globalna macierz sztywności bez sprężyn;

(b) siły węzłowe działające w węzłach każdego z elementów:

$$Q_L = K_L \cdot u_L - \bar{Q}_L$$

$\bar{Q}_L$  – wektor obciążeń elementowych.

3. Dodatkowe – uzyskiwane poza MES, w ramach Wytrzymałości Materiałów:

(a) siły wewnętrzne w węzłach elementów

(zmiana znaków sił węzłowych);

(b) wykresy sił wewnętrznych w elementach

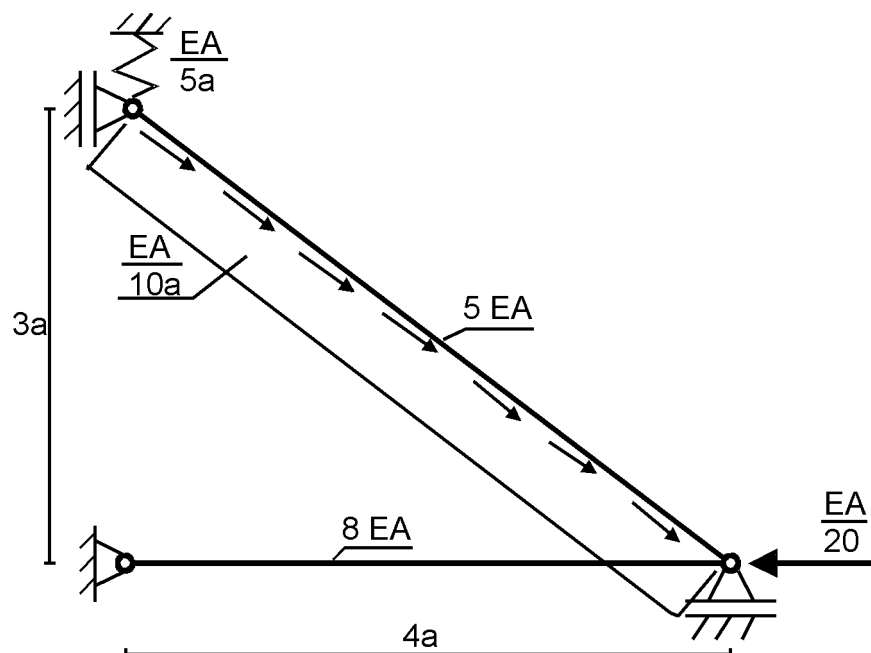
(wyznaczane na podstawie sił wewnętrznych na końcach elementów, obciążeń elementowych i wiedzy z Wytrzymałości Materiałów);

(c) naprężenia w elementach

(obliczane na podstawie wykresów sił wewnętrznych, charakterystyk geometrycznych przekrojów i wiedzy z Wytrzymałości Materiałów).

## 7.1 Algorytm rozwiązania zadania metodą MES

Zadanie: Należy wyznaczyć reakcje działające na konstrukcję oraz wykresy sił wewnętrznych w elementach konstrukcyjnych.



1. Identyfikacja rodzaju konstrukcji.

- Konstrukcja 2-wymiarowa, płaska;
- obciążenie leży w płaszczyźnie konstrukcji;
- podpory nie wymuszają niepłaskiej formy pracy.



## 2. Dobór typów elementów skończonych.

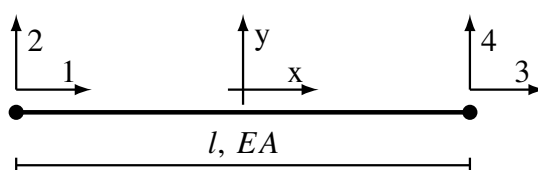
Jeśli:

- (a) element konstrukcyjny jest prostoliniowy,
- (b) ma na końcach przeguby,
- (c) nie ma obciążeń prostopadłych do osi,

to może być opisany elementem prętowym; w pozostałych przypadkach – elementem belkowym.

Wniosek: Konstrukcja jest płaską kratownicą.

Element płaskiej kratownicy:



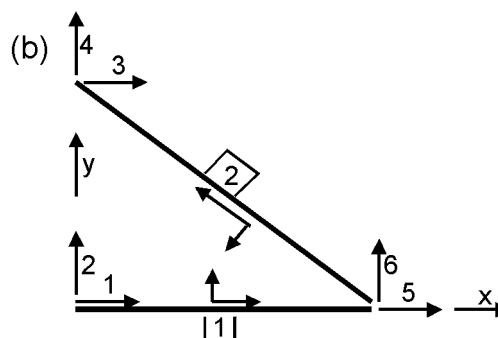
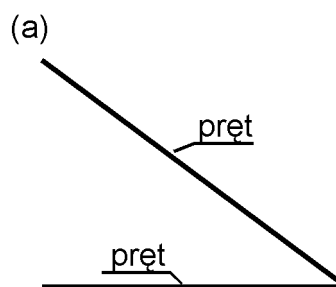
Lokalna macierz sztywności i macierz transformacji:

$$K_L = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 2 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 4 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

## 3. Układ globalny.

Wymagania:

- (a) musi umożliwić opis podpór,
- (b) musi umożliwić opis sprężyn,
- (c) musi być prostokątny (ortogonalny) i prawoskrętny,
- (d) powinien być wygodny.



## 4. Podział na elementy, numeracja, układy lokalne.

- Podział minimalny:

- (a) elementy prostoliniowe;
- (b) punkty, w których występują „obiekty punktowe”:
  - przeguby (nieciągłości przemieszczeń),
  - obciążenia skupione: siły, momenty (zalecane, ale niekonieczne),
  - podpory,
  - sprężyny,
  - zadane przemieszczenia.
- Dodatkowe wymagania dla elementów (zalecane, ale niekonieczne):
  - (a) stały materiał,
  - (b) stałe charakterystyki geometryczne,
  - (c) obciążenia ciągłe opisane funkcjami ciągłymi i gładkimi (najczęściej zmiennymi liniowo).
- Dodatkowo można przyjąć punkt podziału w dowolnym miejscu konstrukcji (np. chcemy tam poznać przemieszczenia i siły wewnętrzne).
- Numeracja: dowolna, czasem musi być ciągła od 1.
- Układy lokalne: oś  $x$  musi leżeć na osi elementu i muszą mieć skrętność zgodną z układem globalnym.

#### 5. Stopnie swobody konstrukcji.

Stopnie swobody konstrukcji są to możliwe przemieszczenia (przesunięcia i obroty) w węzłach konstrukcji:

- (a) rodzaj i liczba stopni swobody w węźle wynika z typu elementów dochodzących do tego węzła;
- (b) kierunek i zwrot stopnia swobody jest zgodny z globalnym układem współrzędnych;
- (c) numeracja stopni swobody jest dowolna, ale powinna być ciągła od 1.

#### 6. Macierze sztywności i macierze transformacji elementów.

- (a) Macierze sztywności zapisywane są w układach lokalnych.
- (b) Macierze transformacji pomiędzy układem globalnym i lokalnym są zapisywane dla kąta  $\alpha$  zakreślanego od osi  $x$  układu globalnego do osi  $x$  układu lokalnego zgodnie ze skrętnością układu.

- Element 1

$$(l) = 4a, \quad (EA) = 8EA, \quad \cos \alpha = 1, \quad \sin \alpha = 0$$

$$K_L^{(1)} = \frac{8EA}{4a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{2EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Element 2

$$(l) = 5a, \quad (EA) = 5EA, \quad \cos \alpha = -4/5, \quad \sin \alpha = 3/5$$

$$K_L^{(2)} = \frac{5EA}{5a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

## 7. Budowa globalnej macierzy sztywności

(a) Transformacja lokalnych macierzy sztywności do układu globalnego

$$K_G = A^T \cdot K_L \cdot A$$

- Element 1

$$\begin{aligned} K_G^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{2EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Element 2

$$\begin{aligned} K_G^{(2)} &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A^{(2)} \\ &= \frac{EA}{5a} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{EA}{25a} \begin{bmatrix} 16 & -12 & -16 & 12 \\ -12 & 9 & 12 & -9 \\ -16 & 12 & 16 & -12 \\ 12 & -9 & -12 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) Zapis sztywności sprężyn w układzie globalnym

$$C_4 = \frac{EA}{5a}$$

(c) Budowa GMS konstrukcji

$$K^G = K_G^{(1)} \oplus K_G^{(2)} \oplus C_G$$

$$\begin{aligned}
 K^G &= 2 \frac{EA}{a} \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \oplus \frac{EA}{25a} \begin{array}{c|cccc} & 5 & 6 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 16 & -12 & -16 & 12 \\ 6 & -12 & 9 & 12 & -9 \\ 3 & -16 & 12 & 16 & -12 \\ 4 & 12 & -9 & 12 & 9 \end{array} \oplus \frac{EA}{5a} \begin{array}{c|c} & 4 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \\
 &= \frac{EA}{25a} \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 50 & & & & -50 & \\ 2 & & & & & & \\ 3 & & & 16 & -12 & -16 & 12 \\ 4 & & & -12 & 9 [+5] & 12 & -9 \\ 5 & -50 & & -16 & 12 & 50 + 16 & -12 \\ 6 & & & 12 & -9 & -12 & 9 \end{array}
 \end{aligned}$$

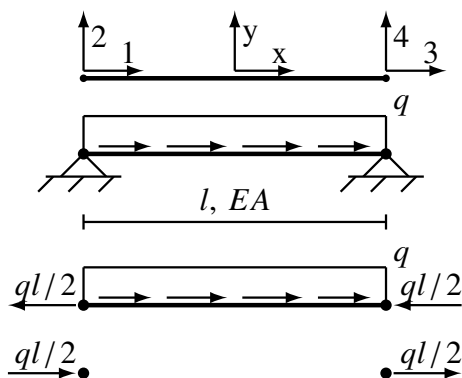
8. Zamiana obciążeń elementowych na równoważne obciążenia węzłowe.

Jeśli obciążenie jest przyłożone bezpośrednio do elementu, a nie do jego węzłów, to należy zamienić go na równoważne obciążenie węzłowe. Można uczynić to dwiema technikami:

- (a) wykorzystując wiedzę z Wytrzymałości Materiałów;
- (b) wykorzystując funkcje kształtu elementów (czyli wiedzę z MES).

Algorytm dla techniki pierwszej, którą wykorzystamy w tym zadaniu, jest następujący:

1. zablokować przemieszczenia we wszystkich stopniach swobody elementu;
2. przyłożyć obciążenie elementowe;
3. wyznaczyć reakcje działające na podpory;
4. zapisać te reakcje zgodnie z kierunkami i zwrotami lokalnych stopni swobody.



Po rozwiązaniu zadania wytrzymałościowego stwierdzamy, że dla elementu płaskiej kratownicy o długości  $l$  i sztywności  $EA$ , obciążonego stałym obciążeniem ciągłym  $q$  stycznym do osi pręta i o zwrocie zgodnym z dodatnim zwrotem lokalnej osi  $x$  elementu, wektor statycznie równoważnych obciążeń węzłowych ma postać:

$$\bar{Q}_L^T = \left[ \frac{ql}{2}, \quad 0, \quad \frac{ql}{2}, \quad 0 \right] = \frac{ql}{2} [1, \quad 0, \quad 1, \quad 0]$$

Dla elementu 2:

$(l) = 5a$ ,  $(q) = (-EA/10a)$ , więc

$$\bar{Q}_L^{(2)} = \left(-\frac{EA}{10a}\right) \cdot \frac{5a}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{EA}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. Tworzenie globalnego wektora obciążeń.

(a) Obciążenia węzłowe zrzutowane na globalne stopnie swobody

$$F_5 = -\frac{EA}{20}$$

(b) Transformacja wektorów obciążeń elementowych do układu globalnego

$$\bar{Q}_G = A^T \cdot \bar{Q}_L$$

Dla elementu 2:

$$\bar{Q}_G^{(2)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{EA}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{20} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(c) Tworzenie globalnego wektora obciążeń

$$Q^G = F_G \oplus M_G \oplus \bar{Q}_G$$

$$Q^G = \left(-\frac{EA}{20}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{EA}{20} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{20} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

10. Uwzględnienie warunków brzegowych.

(a) Zerowe przemieszczenia:

- wykreślenie równań, lub
- wyzerowanie odpowiednich wierszy/kolumn i wstawienie jedynki na główną przekątną.

(b) Zadane przemieszczenia niezerowe:

- podział układu równań na bloki, lub
- modyfikacja  $K^G$  i  $Q^G$ .

(c) Podpory nachylone: węzłowe układy współrzędnych.

(d) Przemieszczenia powiązane zależnością liniową: dodatkowe równanie, modyfikacja  $K^G$ .

W tym zadaniu występują tylko zerowe przemieszczenia:

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_6 = 0,$$

więc po wykreśleniu tych równań, otrzymujemy zredukowany układ równań:

$$\frac{EA}{25a} \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 66 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \frac{EA}{20} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## 11. Wyznaczenie przemieszczeń w węzłach konstrukcji.

(a) Rozwiązanie układu równań

$$K^G \cdot u^G = Q^G \Rightarrow u^G = (K^G)^{-1} \cdot Q^G$$

Dla macierzy  $2 \times 2$  można wykorzystać gotowe rozwiązanie:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{Wyznacznik } W = ad - bc)$$

Wyznacznik  $W = 780 \left( \frac{EA}{25a} \right)^2$ , a więc jest większy od zera.

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{780} \left( \frac{25a}{EA} \right)^2 \cdot \frac{EA}{25a} \begin{bmatrix} 66 & -12 \\ -12 & 14 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{20} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{a}{8} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

- jednostki przesunięć (jednostka długości),
- jednostki obrotów (radiany – bezwymiarowe),
- możliwa forma deformacji.

(b) Zapis pełnego wektora przemieszczeń.

$$u^G = \frac{a}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 12. Wyznaczenie reakcji działających na konstrukcję.

$$R^G = \tilde{K}^G \cdot u^G - Q^G$$

 $\tilde{K}^G$  – GMS bez sprężyn i bez wprowadzonych warunków brzegowych;  $Q^G$  – wektor obciążenia bez wprowadzonych warunków brzegowych.Wektor  $R^G$  zawiera reakcje działające na konstrukcję, zapisane w globalnym układzie współrzędnych.

(a) Obliczenia

$$R^G = \frac{EA}{25a} \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -12 & -16 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & 9 & 12 & -9 \\ -50 & 0 & -16 & 12 & 66 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & -9 & -12 & 9 \end{bmatrix} \cdot \frac{a}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{EA}{20} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{40} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(b) Rysunek

Na rysunku zamieszczamy konstrukcję z obciążeniami oraz reakcje. Jeśli reakcje mają znak ujemny, to zmieniamy zwrot na przeciwny i zapisujemy wartość jako dodatnią.

(c) Sprawdzenie:

- globalne  $\sum F|_x = 0$ ,  $\sum F|_y = 0$ ,  $\sum M|_A = 0$ ;
- siła/moment w sprężynie  $|F| = C \cdot |u|$  jest równa reakcji  $|R|$ ;
- na „swobodnym” stopniu swobody  $R = 0$ ;
- przypadki szczególne.

Dla tego zadania:

- w sprężynie  $|F_4| = C_4 \cdot |u_4| = \frac{EA}{5a} \cdot \left| -\frac{3a}{8} \right| = \frac{3}{40}EA = |R_4|$
- $R_5 = 0$ , bo nie ma żadnej podpory (stałej ani sprężystej);
- $R_2 = 0$ , bo nie może być siły prostopadłej do osi pręta.

### 13. Siły węzłowe w elementach

$$Q_L = K_L \cdot u_L - \bar{Q}_L, \quad u_L = A \cdot u_G$$

(a) Element 1

$$u_G^{(1)} = \frac{a}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad u_L^{(1)} = u_G^{(1)}$$

$$Q_L^{(1)} = 2 \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{a}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Element 2

$$u_G^{(2)} = \frac{a}{8} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad u_L^{(2)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \frac{a}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{a}{40} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$Q_L^{(2)} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{a}{40} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix} - \left( -\frac{EA}{4} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{8} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Sprawdzenie:

- na lokalnym kierunku y wszystkie siły muszą być równe zero;
- każdy z prętów musi być w równowadze, czyli  $\sum F|_x = 0$ .

---

Tu kończy się metoda MES

---

### 14. Wykresy sił wewnętrznych w elementach.

(a) Siły wewnętrzne w węzłach elementów

$$N_{(1)} = -Q_1, \quad N_{(2)} = Q_3$$

- Element 1

$$N_{(1)} = -\left(-\frac{EA}{4}\right) = \frac{EA}{4}, \quad N_{(2)} = \frac{EA}{4}$$

- Element 2

$$N_{(1)} = -\frac{3EA}{8}, \quad N_{(2)} = \frac{EA}{8}$$

(b) Wykresy sił wewnętrznych w prętach

$$N(x) = N_{(1)} - \int_0^x n(\xi) d\xi$$

- Element 1

$$N(x) = \frac{EA}{4}$$

- Element 2

$$N(x) = -\frac{3EA}{8} - \int_0^x \left(-\frac{EA}{10a}\right) d\xi = -\frac{3EA}{8} + \frac{EA}{10a} \cdot x = \frac{EA}{8} \left(\frac{4}{5} \frac{x}{a} - 3\right)$$

15. Naprężenia w elementach prętowych

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

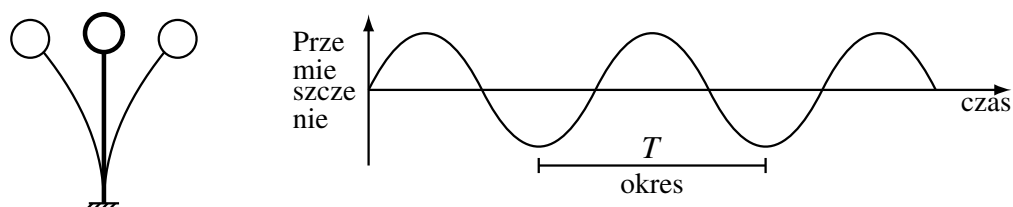


## Rozdział 8

# Drgania własne konstrukcji kadłuba statku

### 8.1 Uwagi ogólne

Ciała sprężyste poddane działaniu obciążeń cyklicznych wykonują drgania, tzn. punkty ciała przemieszczają się względem średniego położenia.



Parametry opisujące drgania harmoniczne, to:

- amplituda – maksymalne wychylenie z położenia równowagi,
- okres – czas pomiędzy dwoma kolejnymi maksymalnymi wychyleniami.

Zamiast okresu  $T$ , często posługujemy się pojęciami:

$$\text{częstotliwość} \quad f = \frac{1}{T}, \quad \text{jednostka} \quad \left[ \frac{1}{s} \right] \equiv 1 \text{ Hz}$$

lub

$$\text{częstość} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad \left[ \frac{\text{rad}}{s} \right]$$

(Uwaga: W literaturze spotykane są też określenia „częstość” w odniesieniu do  $f$  oraz „częstość kołowa” dla  $\omega$ .)

Drgania, w zależności od ich amplitudy i częstotliwości, mogą być (a) niezauważalne, (b) tolerowane, (c) kłopotliwe, (d) uciążliwe, a nawet (e) szkodliwe dla ludzi oraz mogą prowadzić do awarii urządzeń technicznych.

### 8.1.1 Dlaczego należy zajmować się drganiami własnymi

Związek amplitudy drgań (strzałki ugięcia) z naprężeniami

Belka poddana działaniu siły ugina się

$$a = \frac{Ql^3}{3EI} \Rightarrow Q = 3 \frac{EI a}{l^3}$$

Maksymalne naprężenia wywołane zginaniem

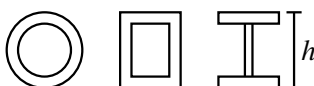
$$\max |\sigma_M| = \frac{\max |M|}{\min |W|}$$

W przypadku belki wspornikowej

$$\max |M| = Q \cdot l$$

Dla przekroju symetrycznego

$$\min |W| = \frac{I}{h/2} = 2I/h$$



Wobec tego

$$\max |\sigma_M| = \frac{Q \cdot l}{2I/h} = 3 \frac{EI a}{l^3} \cdot \frac{hl}{2I} = \frac{3}{2} E \left( \frac{a}{l} \right) \left( \frac{h}{l} \right)$$

ale  $\max |\sigma_M| < \text{dop } \sigma_M$ , więc

$$\text{dop} \left( \frac{a}{l} \right) = \frac{2 \text{dop } \sigma_M}{3} \left( \frac{l}{h} \right)$$

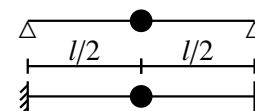
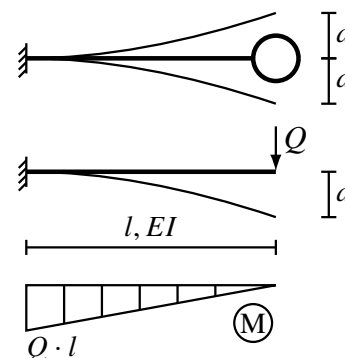
dla belki wspornikowej i  $l/h = 10$  oraz  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\text{dop } \sigma_M = 240 \text{ MPa}$

$$\text{dop} \left( \frac{a}{l} \right) = \frac{8}{1000}, \text{ czyli np. dla } l = 3 \text{ m, otrzymujemy dop } a = 24 \text{ mm}$$

a dla innych sposobów podparcia i tych samych danych:

belka podparta przegubowo:  $\text{dop}(a/l) = 2/1000$

belka utwierdzona:  $\text{dop}(a/l) = 1/1000$



Amplituda drgań zależy nie tylko od amplitudy wymuszenia, ale również od częstości wymuszenia oraz od własności obiektu pobudzonego do drgań. Własnościami obiektu, decydującymi o amplitudzie drgań, są:

- częstości drgań własnych,
- tłumienie.

Jeśli częstość wymuszenia jest bliska częstości drgań własnych obiektu, a tłumienie jest odpowiednio małe, to następuje narastanie amplitudy drgań – zachodzi zjawisko zwane rezonansem

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{\text{wymuszenia}} \approx \omega_{\text{drgań własnych}} \\ \text{tłumienie małe} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{narastanie amplitudy drgań (rezonans)}$$

Przy braku tłumienia amplituda drgań rezonansowych może teoretycznie narastać aż do nieskończoności, ale w rzeczywistości nie jest możliwe, bo:

1. tłumienie zawsze występuje;
2. przy odpowiednio dużych amplitudach drgań konstrukcja ulegnie awarii, co zmieni jej własności mechaniczne, a więc i częstości drgań własnych, co z kolei spowoduje zanik zjawiska rezonansu.

W spawanych konstrukcjach metalowych tłumienie jest niewielkie (ok. 2% tłumienia krytycznego), toteż wystąpienie drgań rezonansowych jest niebezpieczne dla tych obiektów. Należy więc znać częstości drgań własnych konstrukcji, aby już na etapie projektowania i konstruowania wykryć możliwość wystąpienia drgań rezonansowych.

## 8.1.2 Ogólna zależność opisująca częstość drgań własnych

Aby wystąpiły drgania:

1. obiekt musi wykazywać „bezwładność”,
2. musi istnieć przyczyna „przyciągająca” obiekt do położenia średniego.

W konstrukcjach sprężystych, o „powrocie do położenia średniego” decyduje sprężystość (podatność) konstrukcji. Bezwładność natomiast jest powiązana z masą obiektu i jej rozmieszczeniem przestrzennym.

Częstość drgań własnych jest funkcją tych dwóch własności:

$$\omega \sim \sqrt{\frac{\text{sztywność}}{\text{bezwładność}}}$$

**Zalecenie:** W odróżnieniu od zagadnień statyki, w formułach opisujących drgania, w sposób jawny, obok wielkości wyrażanych w jednostkach siły i długości, występują wielkości wyrażane w jednostkach masy i czasu, więc aby uniknąć błędów związanych z niespójnymi jednostkami, usilnie zaleca się, aby stosować wyłącznie jednostki z układu SI, podstawowe: [m], [kg], [s] i pochodne: [N], [Pa].

## 8.2 Drgania lokalne elementów konstrukcji kadłuba statku

Poszczególne elementy konstrukcji i wyposażenia mają formę wydłużoną i cienkościenną – wskutek tego są podatne na drgania giętne.

Oprócz tej postaci drgań, czasem należy rozpatrywać również drgania wzdłużne (raczej rzadko) i skrętne (częściej) oraz drgania „sztywnych” obiektów posadowionych elastycznie, ale tymi zagadnieniami nie będziemy się zajmować.

### 8.2.1 Model podstawowy

Najprostszym modelem przydatnym do oszacowania najniższej częstości giętnych drgań własnych jest „masa skupiona zawieszona na nieważkiej sprężynie”:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$k$  – sztywność sprężyny,

$m$  – masa „masy skupionej”.

Jednostką jest  $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{jednostka czasu}} \right]$ , np.  $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$

Często zamiast „częstości”  $\omega$  używa się „częstotliwości”  $f$ :

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}, \left[ \frac{1}{\text{jednostka czasu}} \right], \text{ np. } \left[ \frac{1}{\text{s}} \right] \equiv 1 \text{ Hz}$$

W rzeczywistych konstrukcjach okrętowych takie obiekty nie występują, ale jeśli masa struktury, na której spoczywa ciężki obiekt, jest mała w porównaniu z masą tego obiektu, to ten model jest wystarczająco dokładny do wstępnych obliczeń.



### 8.2.2 Konstrukcje belkowe

Konstrukcje belkowe – układy wiązarów – zazwyczaj wspierają „równomiernie rozłożone” usztywnienia, poszycie, elementy wyposażenia, izolację, itp. (i wówczas masa jest „rozłożona”), a czasem

również więcej niż jeden „masywny” obiekt. W takich przypadkach analogii „masa na sprężynie” nie da się bezpośrednio zastosować i trzeba wykorzystać inne modele i metody.

## Belki

Gdy masa struktury jest duża w porównaniu z „masami skupionymi”, to konstrukcję należy traktować jak „układ o masie rozłożonej” i wówczas nawet dla belek prostych zagadnienie jest opisane równaniem różniczkowym cząstkowym czwartego rzędu, więc w zastosowaniach inżynierskich zazwyczaj wykorzystujemy gotowe rozwiązania – przypadki szczególne zależne od sposobu podparcia oraz rozmieszczenia masy i sztywności. Belki te wykazują nieskończenie wiele częstości drgań własnych.

Dla belek jednoprzęsłowych o jednorodnym rozkładzie masy i stałej sztywności giętej  $EI$ :

$$\omega_n = \frac{\alpha_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

$\bar{m}$  – masa na jednostkę długości belki, np. [kg/m];

$n$  – numer częstości drgań 1, 2, ...;

$l$  – długość belki

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_n$
	$\pi$	$2\pi$	$n\pi$
	4.7300	7.8532	$\frac{2n+1}{2}\pi$
	3.9266	7.0685	$\frac{4n+1}{4}\pi$
	1.8751	4.6941	$\frac{2n-1}{2}\pi$

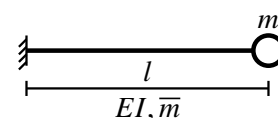
## Belki „masywne” z masami skupionymi

Jeśli masa konstrukcji i masa dodatkowa są porównywalne, to trzeba uwzględnić obydwie masy.

- Belka wspornikowa

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{3EI}{\left(m + \frac{33}{140}\bar{m}l\right)l^3}}$$

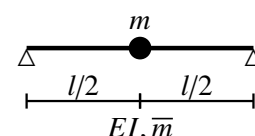
Jak widać, w tym przypadku wpływ masy belki jest 4-krotnie mniejszy, niż wpływ masy skupionej. (Ponadto dla  $m = 0$  wzór jest zgodny ze wzorem dla belki, bo  $\sqrt[4]{140/11} = 1.889$ ).



- Belka jednoprzęsłowa, podparta przegubowo

$$\omega_1 \approx \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{(2m + \bar{m}l)l^3}}$$

(Dla  $\bar{m} = 0$  wzór jest zgodny z modelem „masa na sprężynie”, bo  $\pi^4/2 = 48.7$ ).



## Układy belek i mas skupionych

Metody, dokładne i przybliżone, służące do oceny częstości drgań własnych, bazują na rozwiązaniach zagadnień statyki.

- Wykorzystując zasadę d'Alemberta oraz znajdując podatności w miejscach wystąpienia mas skupionych, można wyznaczyć wszystkie częstości i formy drgań struktury o masach skupionych. Wymaga to zbudowania „macierzy struktury” i rozwiązania zagadnienia na wartości własne. Analityczne rozwiązanie, przydatne w projektowaniu, staje się żmudne już przy 3–4 masach skupionych.
- Zamiana struktury z wieloma masami skupionymi na równoważny układ o jednym stopniu swobody – sposób Geigera:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\sum \delta_i m_i}}$$

$\bar{\delta}_i$  – przemieszczenie masy  $m_i$  pod działaniem statycznej siły jednostkowej.

Za pomocą tego wzoru można określić, i to w sposób przybliżony, jedynie najniższą częstość drgań własnych, a zwroty przemieszczeń występujące w powyższym wzorze muszą odpowiadać właściwej, podstawowej formie drgań.

- Wyznaczenie jednej częstości drgań własnych układu zawierającego masy skupione i rozłożone – metoda Rayleigha:

$$\omega^2 = g \frac{\sum m_i w_i + \int \bar{m}(s) w(s) ds}{\sum m_i w_i^2 + \int \bar{m}(s) w^2(s) ds}$$

$m_i, \bar{m}(s)$  – masy skupione i rozłożone,

$w_i, w(s)$  – linie ugięcia belek wywołane działaniem obciążeń  $gm_i$  i  $g\bar{m}(s)$ .

Można w ten sposób wyznaczyć częstość drgań własnych konstrukcji związaną z jedną formą drgań, tą opisaną funkcją  $w(s)$ . Dokładność, czyli stopień przybliżenia, zależy od tego, jak dobrze „odgadniemy” postać funkcji  $w(s)$ . Ponadto, przy zastosowaniach projektowych, całkowanie należy wykonać analitycznie, a w mianowniku funkcja  $w(s)$  występuje w kwadracie, co znacznie komplikuje obliczenia.

Znaczne skomplikowanie obliczeń oraz konieczność „odgadniania” rozwiązań sprawiają, że powyższe metody, za wyjątkiem nieskomplikowanych przypadków, są obecnie niezbyt często stosowane, gdyż zastąpiła je metoda elementów skończonych (również w zadaniach projektowych, gdzie stosujemy „wariantowanie”, czyli technikę „prób i błędów”).

## 8.2.3 Płyty poszycia

Podatne na drgania są również płyty poszycia.

Modelem obliczeniowym do wyznaczania częstości drgań giętych płyt poszycia jest płyta prostokątna, podparta przegubowo na całym obwodzie.

### Drgania „w próżni”, czyli bez kontaktu ze środowiskiem

Dla płyty prostokątnej, o równomiernie rozłożonej masie, podpartej przegubowo na obwodzie, występuje nieskończenie wiele częstości drgań własnych

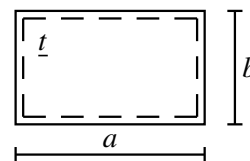
$$\omega_{mn} = \left[ m^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + n^2 \right] \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12(1 - \nu^2) \cdot \bar{m}}}$$

$m, n$  – liczba półfal formy drgań, odpowiednio wzdłuż boku  $a$  i  $b$ ,

$E$  – moduł Younga,  $\nu$  – liczba Poissona,

$\bar{m}$  – masa na jednostkę powierzchni, np.  $\text{kg/m}^2$ .

¶ (Sprawdzić jednostki)



Drgania o wysokich częstościach są silniej tłumione niż drgania o częstościach niskich, więc zazwyczaj interesuje nas najniższa częstość drgań własnych. Jak widać z powyższego wzoru, jest ona związana, niezależnie od proporcji długości boków  $a/b$ , z formą drgań  $m = 1$  i  $n = 1$ :

$$\omega_{11} = \left[ 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12(1 - \nu^2) \cdot \bar{m}}}$$

Człon  $[1 + (b/a)^2]$  obrazuje zależność  $\omega_{11}$  od proporcji długości boków

$a/b$	1	2	3	4	5	$\infty$
$1 + (b/a)^2$	2.0	1.25	1.1111	1.0625	1.04	1.0

Dla typowych „okrętowych” pól płytowych  $a/b = 2 \div 4$ , więc wyraz  $[1 + (b/a)^2]$  nie może być pominięty.

### Drgania w przypadku kontaktu z płynem

Z obserwacji wiadomo, że drgający obiekt stykający się z płynem pobudza do drgań sąsiadującą objętość płynu. Wskutek tego jego częstości drgań własnych są niższe, niż przy drganiach w próżni (dla konstrukcji okrętowych drgania w powietrzu zazwyczaj można traktować jako równoważne drganiom w próżni). Efekt ten opisuje się poprzez dodanie do masy konstrukcji pewnej dodatkowej masy – zwanej masą wody (cieczy) towarzyszącej.

Określenie masy wody towarzyszącej, nawet metodami numerycznymi, jest zadaniem trudnym. Jej wartość i rozkład na powierzchni płyty zależą nie tylko od konstrukcji, ale również od konfiguracji „przestrzeni płynu”: np. czy jest swobodna powierzchnia, czy dno akwenu lub równoległa ścianka jest blisko, jak sztywne są ścianki poprzeczne i czy są w nich otwory, itp.

Dla

- a. nieskończonego, ciągłego układu prostokątnych pól płytowych  $a \times b$  podpartych przegubowo na „liniach siatki”  $a \times b$ ,
- b. płynu:
  - idealnego (nielepkiego, nieściśliwego, potencjalnego),
  - znajdującego się po jednej stronie płyty,
  - o nieskończonej rozciągłości na kierunku prostopadłym do powierzchni płyty,
- c. oraz braku jakichkolwiek ograniczeń w ruchu płynu,

masa wody towarzyszącej (na jednostkę powierzchni płyty) jest opisana wzorem:

$$\tilde{m}_{Amn} = \frac{\rho_w \cdot b}{\pi} \left[ m^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + n^2 \right]^{-1/2}$$

$m, n$  – liczba półfal formy drgań,  $\rho_w$  – gęstość płynu.

Jeśli płyn znajduje się z obydwóch stron płyty, to masy towarzyszące sumujemy.

Każde ograniczenie w swobodnym przepływie płynu (np. brak powierzchni swobodnej lub blisko położona sztywna ścianka) powoduje zwiększenie masy wody towarzyszącej; w rzeczywistych sytuacjach trzeba to uwzględniać.

Dla najniższej częstości drgań należy w powyższym wzorze przyjąć  $m = 1$  i  $n = 1$ , co daje:

$$\tilde{m}_{A11} = \frac{1}{\sqrt{1 + (b/a)^2}} \frac{\rho_w \cdot b}{\pi}$$

Wpływ sztywnej ścianki, równoległej do płyty i umieszczonej w odległości  $d$ , wyraża się mnożnikiem:

$$\beta_{d,mn} = \left[ \operatorname{tgh} \left( \pi \frac{d}{b} \sqrt{m^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + n^2} \right) \right]^{-1}$$

dla  $m = 1$  i  $n = 1$ ,  $\beta_{d,11}$ :

$d/b =$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$a/b = 1$	1.407	1.059	1.010	1.002	1.000
$a/b = \infty$	1.796	1.176	1.047	1.013	1.004

Jak widać, wpływ głębokości akwenu lub wysokości zbiornika jest pomijalny dla  $d$  większego od szerokości pola płytowego (a tak jest niemal zawsze).

Podobnie, jeśli warstwa płynu ma swobodną powierzchnię, to wystarczy grubość warstwy  $d \approx 0.3b$ , aby była równoważna obszarowi nieskończonemu.

Źródła:

V. Bertram: Practical ship design, 2012 (2ed).

K-H. Jeong i inni: Free vibration of a rectangular plate in contact with unbounded fluid, 1999.

M.R. Haddara, S. Cao: A study of the dynamic response of submerged flat plates, 1996.

## 8.3 Drgania kadłuba statku

Długość kadłuba statku jest znacznie większa od jego szerokości i wysokości (np. dla masowców  $L/B \approx 8$ ,  $L/H \approx 15$ ), więc można go traktować jak belkę.

Modelem służącym do opisu drgań giętnych będzie belka:

- swobodna, tzn. nie podparta w jakikolwiek sposób;
- zanurzona (częściowo) w wodzie;
- o sztywności  $EI$  stałej na całej długości;
- o masie rozłożonej jednorodnie na całej długości;
- zgodna z teorią Eulera–Bernoulliego, tzn. pomijany jest efekt ścinania i bezwładności obrotowej masy, a masa przemieszcza się tylko na kierunku prostopadłym do osi belki.

Dla takiej belki

$$\omega_n = \frac{\alpha_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

$$\alpha_1 = 4.7300, \quad \alpha_2 = 7.8532, \quad \alpha_n \approx \frac{2n+1}{2} \cdot \pi$$

$n = 1$  

$n = 2$  

$\bar{m}$  – masa na jednostkę długości, wraz z masą wody towarzyszącej,

$$\bar{m} = (1 + k) \cdot \bar{m}_s$$

$\bar{m}_s$  – masa statku (wyporność) na jednostkę długości,

$k = 1.2 + \frac{B}{3T}$  – jeden z wielu wzorów szacujących masę wody towarzyszącej kadłubowi statku, dla dwuwęzłowej formy drgań ( $B$  – szerokość statku,  $T$  – zanurzenie statku).

*Uwaga:* Dla statków z dużymi otworami lukowymi, a w szczególności kontenerowców i niektórych masowców, nie można pomijać analizy drgań skrętnych i giętno-skrętnych, a dla dużych i „wiatkich” kadłubów (np. bardzo dużych kontenerowców) należy uwzględnić również ich podatność przy współpracy z płynem, ale te zagadnienia nie będą tutaj omawiane.

## Rozdział 9

### Zadania

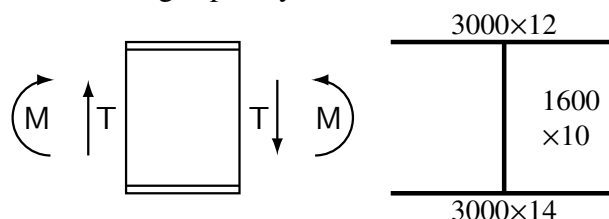
#### 9.1 Naprężenia w wiązarach i usztywnieniach bez otworów w środnikach

##### Zadanie 1.1

Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia zredukowane według hipotezy HMM.

$$M = 10.0 \text{ MNm}$$

$$T = 1.3 \text{ MN}$$



Sposób rozwiązania:

Należy w każdym punkcie przekroju wyznaczyć naprężenia zredukowane

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

i wybrać największą wartość. Aby móc to zrealizować należy w każdym punkcie przekroju wyznaczyć naprężenia normalne  $\sigma$  i styczne  $\tau$ . W tym przypadku naprężenia normalne są wywołane wyłącznie zginaniem, więc  $\sigma \equiv \sigma_M$ , a styczne tylko ścinaniem, więc  $\tau \equiv \tau_T$ . Wobec tego, należy w każdym punkcie przekroju:

- wyznaczyć naprężenia wywołane zginaniem  $\sigma_M$ ,
- wyznaczyć naprężenia wywołane ścinaniem  $\tau_T$ ,
- obliczyć naprężenia zredukowane  $\sigma_{red}$ ,

a następnie wybrać największą wartość  $\sigma_{red}$ .

A. Wybór modelu idealizacji przekroju

Sprawdzenie warunku cienkościerności

$$H / \max t_m = 1600 \text{ mm} / \max(12, 14) \text{ mm} = 114.3 > 50 \quad \Rightarrow \quad \text{można zastosować model cienkościenny „technologiczny”}.$$



## B. Naprężenia wywołane zginaniem

## (a) Charakterystyki geometryczne przekroju

jednostki: [metr]

$$A = \sum_i A_i = 3.0 \cdot 0.012 + 1.6 \cdot 0.010 + 3.0 \cdot 0.014 = 0.094 \text{ m}^2$$

$$S_{\bar{y}} = \sum_i A_i \cdot \bar{z}_i = 1.6 \cdot 0.010 \cdot \frac{1.6}{2} + 3.0 \cdot 0.014 \cdot 1.6 = 0.08 \text{ m}^3$$

$$I_y = \sum_i \left( I_i + A_i \cdot \bar{z}_i^2 \right) - \frac{S_{\bar{y}}^2}{A} = 0.010 \cdot \frac{1.6^3}{3} + 3.0 \cdot 0.014 \cdot 1.6^2 - \frac{0.08^2}{0.094} = 0.05309 \text{ m}^4$$

$$\bar{z}_C = \frac{S_{\bar{y}}}{A} = \frac{0.08}{0.094} = 0.8511 \text{ m}$$

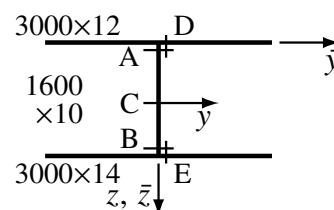
$$z = \bar{z} - \bar{z}_C, \quad W = \frac{I_y}{z}$$

$$z_A = z_D = -0.8511 \text{ m}$$

$$z_B = z_E = 1.6 - 0.8511 = 0.7489 \text{ m}$$

$$W_A = W_D = \frac{0.05309}{-0.8511} = -0.06238 \text{ m}^3$$

$$W_B = W_E = \frac{0.05309}{0.7489} = 0.07088 \text{ m}^3$$



## (b) Sprawdzenie wskaźników wytrzymałości na zginanie – model „idealny dwuteownik”

$$|W| = A_m \cdot H_s$$

jednostki: [metr]

$$|W_A| = |W_D| = 3.0 \cdot 0.012 \cdot 1.6 = 0.0576 \text{ m}^3$$

$$|W_B| = |W_E| = 3.0 \cdot 0.014 \cdot 1.6 = 0.0672 \text{ m}^3$$

Wniosek: obliczone w p.(a) wskaźniki  $W$  są zgodne z powyższym oszacowaniem, bo:

(1) wartości oszacowane są mniejsze, (2) różnice nie są duże – ok. 8%.

## (c) Naprężenia

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

$$\sigma_A = \sigma_D = \frac{10.0 \text{ MNm}}{-0.06238 \text{ m}^3} = -160.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \sigma_E = \frac{10.0 \text{ MNm}}{0.07088 \text{ m}^3} = 141.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = 0.0 \text{ MPa}$$

## C. Naprężenia wywołane ścinaniem

- (a) Wybór modelu wyznaczania naprężeń

$$A_m / A_s = (3.0 \text{ m} \cdot 0.012 \text{ m}) / (1.6 \text{ m} \cdot 0.010 \text{ m}) = 2.25 > 1.5 \Rightarrow \text{można zastosować uproszczony sposób liczenia naprężeń wywołanych ścinaniem.}$$

- (b) Charakterystyki geometryczne przekroju

$$\text{środek: } A_T = A_{\text{środek}}, \quad \text{mocniki: } A_T = 2 A_{\text{środek}} \cdot \frac{t_m}{t_s}$$

jednostki: [metr]

$$A_{T,ABC} = 1.6 \cdot 0.010 = 0.016 \text{ m}^2$$

$$A_{T,D} = 2 \cdot 0.016 \cdot \frac{0.012}{0.010} = 0.0384 \text{ m}^2$$

$$A_{T,E} = 2 \cdot 0.016 \cdot \frac{0.014}{0.010} = 0.0448 \text{ m}^2$$

- (c) Naprężenia

$$\tau = \frac{T}{A_T}$$

$$\tau_{ABC} = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.016 \text{ m}^2} = 81.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_D = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.0384 \text{ m}^2} = 33.9 \text{ MPa}$$

$$\tau_E = \frac{1.3 \text{ MN}}{0.0448 \text{ m}^2} = 29.0 \text{ MPa}$$

## D. Naprężenia zredukowane według hipotezy HMM

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2}$$

jednostki: [MPa]

$$\sigma_{red,A} = \sqrt{(-160.3)^2 + 3 \cdot (81.3)^2} = 213.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red,B} = \sqrt{(141.1)^2 + 3 \cdot (81.3)^2} = 199.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red,C} = \sqrt{0 + 3 \cdot (81.3)^2} = 140.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red,D} = \sqrt{(-160.3)^2 + 3 \cdot (33.9)^2} = 170.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red,E} = \sqrt{(141.1)^2 + 3 \cdot (33.9)^2} = 149.8 \text{ MPa}$$

## D. Maksymalne naprężenia zredukowane

$$\max \sigma_{red} = \max(\sigma_{red,A}, \dots, \sigma_{red,E}) = \max(213.4, 199.3, 140.8, 170.7, 149.8) \text{ MPa} = 213.4 \text{ MPa}$$

Odpowiedź: Maksymalne naprężenia zredukowane  $\max \sigma_{red} = 213.4 \text{ MPa}$ .

**Zadanie 1.2** Należy sprawdzić wytrzymałość (plastyczną) belki, jeśli  $\text{dop } \sigma_{red, HMM} = 220 \text{ MPa}$ . Pozostałe dane – jak w zad. 1.1.

Sposób rozwiązania:

Do oceny wytrzymałości (plastycznej) służy kryterium:

Wytrzymałość (plastyczna) jest wystarczająca, jeśli

$$\max \sigma_{red} < \text{dop } \sigma_{red}$$

Należy więc:

- wyznaczyć maksymalne naprężenia zredukowane w przekroju,
- sprawdzić, czy jest spełnione kryterium wytrzymałościowe.

Pierwszy etap rozwiązywania jest identyczny, jak w zadaniu 1.1 i dane też są identyczne, więc wykorzystamy uzyskane tam wartości.

A. Wybór modelu idealizacji przekroju

⋮

E. Maksymalne naprężenia zredukowane

$$\max \sigma_{red} = 213.3 \text{ MPa}$$

F. Ocena wytrzymałości

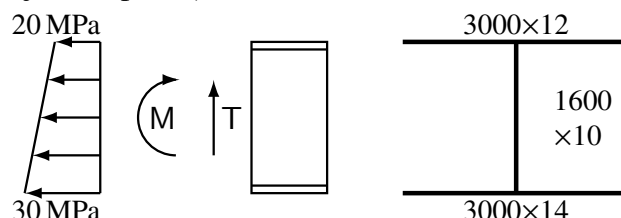
$$\max \sigma_{red} = 213.3 \text{ MPa} < \text{dop } \sigma_{red} = 220 \text{ MPa} \Rightarrow \text{wytrzymałość wystarczająca}$$

Odpowiedź: Wytrzymałość (plastyczna) belki jest wystarczająca.

**Zadanie 1.3** Należy sprawdzić wytrzymałość (plastyczną) belki, obciążonej momentem gnącym, siłą tnącą i stanem naprężenia od zgięcia ogólnego, jeśli  $\text{dop } \sigma_{red, HMM} = 220 \text{ MPa}$ .

$$M = 10.0 \text{ MNm}$$

$$T = 1.3 \text{ MN}$$



Sposób rozwiązania:

Procedura jest taka sama, jak w zad. 1.2, a sposób obliczania naprężeń analogiczny, jak w zad. 1.1, za wyjątkiem obliczania naprężeń normalnych, gdyż  $\sigma = \sigma_M + \sigma_N$ , gdzie  $\sigma_N$  jest dodatkowym, zadany stan naprężenia, o rozkładzie liniowym na wysokości belki, pochodzącym od oddziaływania struktury „wyższej”, w tym przypadku – od zgięcia ogólnego kadłuba statku.

Dane są identyczne, jak w zad. 1.1, więc zostaną wykorzystane wyniki tam uzyskane.

A. Naprężenia wywołane zginaniem (z zad. 1.1)

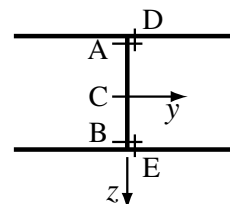
Punkt:	A	B	C	D	E
$\sigma_M$ [MPa]	-160.3	141.1	0.0	-160.3	141.1

B. Naprężenia wywołane zgięciem ogólnym

Punkt:	A	B	C	D	E
$\sigma_N$ [MPa]	20.0	30.0	$\approx 25.0$	20.0	30.0

Naprężenia są dodatnie, bo zgodnie z rysunkiem, powodują rozciąganie.

W punkcie „C” naprężenia przyjęto jako średnie z wartości w punktach „A” i „B”, bo oś obojętna zginania leży mniej-więcej w środku wysokości przekroju.



## C. Naprężenia normalne (sumaryczne)

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N$$

Punkt:	A	B	C	D	E
$\sigma$ [MPa]	-140.3	171.1	25.0	-140.3	171.1

## D. Naprężenia wywołane ścinaniem (z zad. 1.1)

Punkt	A	B	C	D	E
$\tau_T$ [MPa]	81.3	81.3	81.3	33.9	29.0

## E. Naprężenia zredukowane

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Punkt:	A	B	C	D	E
$\sigma_{red}$ [MPa]	198.8	221.6	143.0	152.1	178.3

## F. Maksymalne naprężenia zredukowane

$$\max \sigma_{red} = \max(\sigma_{red,A}, \dots, \sigma_{red,E}) = 221.6 \text{ MPa}$$

## G. Ocena wytrzymałości

$$\max \sigma_{red} = 221.6 \text{ MPa} > \text{dop } \sigma_{red} = 220 \text{ MPa} \Rightarrow \text{wytrzymałość niewystarczająca}$$

Odpowiedź: Wytrzymałość (plastyczna) belki jest niewystarczająca, ale przekroczenie dop  $\sigma_{red}$  wynosi tylko 0.7%.

**Zadanie 1.4** Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia normalne i styczne w przekroju obliczeniowym usztywnienia, utworzonym z pasa poszycia 500 mm × 12 mm i kształtownika łebkowego 260 × 10 z normy PN-EN 10076:1996.

Siły wewnętrzne w przekroju:

moment gnący  $M = 55 \text{ kNm}$

siła tnąca  $T = 95 \text{ kN}$

Sposób rozwiązania:

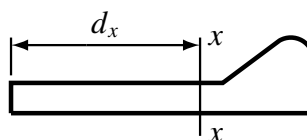
Procedura rozwiązania i sposób obliczania naprężeń są analogiczne, jak w zad. 1.1, ale należy sprawdzić, czy przekrój jest cienkościenny, oraz zwrócić uwagę na fakt, że pas poszycia jest dużo większy od mocnika. Ponadto parametry geometryczne kształtownika należy odczytać z odpowiedniej normy.

Z normy PN-EN 10076:1996

$$A = 36.11 \text{ cm}^2$$

$$d_x = 16.22 \text{ cm}$$

$$I_x = 2434 \text{ cm}^4$$



## A. Sprawdzenie warunku cienkościenności – stosunek wysokości usztywnienia do grubości pasa poszycia

$$h_u / t_p = 260 / 12 = 21.67 < 40 \Rightarrow \text{należy zastosować model grubościenny.}$$

B. Charakterystyki geometryczne zginania, jednostki: [centymetr]

$$A = 50.0 \cdot 1.2 + 36.11 = 96.11 \text{ cm}^2$$

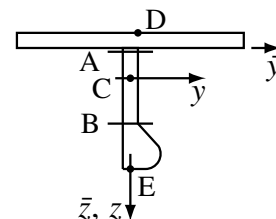
$$S_{\bar{y}} = 50.0 \cdot 1.2 \cdot \left(-\frac{1.2}{2}\right) + 36.11 \cdot 16.22 = 549.7 \text{ cm}^3$$

$$\bar{z}_C = \frac{549.7}{96.11} = 5.72 \text{ cm}$$

$$I_y = \frac{50.0 \cdot 1.2^3}{3} + 2434 + 36.11 \cdot 16.22^2 - \frac{549.7^2}{96.11} = 8819 \text{ cm}^4$$

$$\bar{z}_D = -1.2 - 5.72 = -6.92 \text{ cm}, \quad W_D = \frac{8819}{-6.92} = -1274 \text{ cm}^3$$

$$\bar{z}_E = 26.0 - 5.72 = 20.28 \text{ cm}, \quad W_E = \frac{8819}{20.28} = 434.9 \text{ cm}^3$$



C. Charakterystyki geometryczne ścinania, jednostki: [centymetr]

$$A_T \approx 0.8 \cdot 26.0 \cdot 1.0 = 20.8 \text{ cm}^2$$

D. Maksymalne naprężenia normalne

$$\max \sigma \equiv \max \sigma_M = \frac{M}{W_E} = \frac{55.0 \text{ kNm}}{434.9 \text{ cm}^3} = \frac{55.0 \text{ kNm}}{434.9 \cdot (10^{-2})^3 \text{ m}^3} = 126466 \text{ kPa} = 126.5 \text{ MPa}$$

E. Maksymalne naprężenia styczne

$$\max \tau \equiv \max \tau_T = \frac{T}{A_T} = \frac{95.0 \text{ kN}}{20.8 \text{ cm}^2} = \frac{95.0 \text{ kN}}{20.8 \cdot (10^{-2})^2 \text{ m}^2} = 45673 \text{ kPa} = 45.7 \text{ MPa}$$

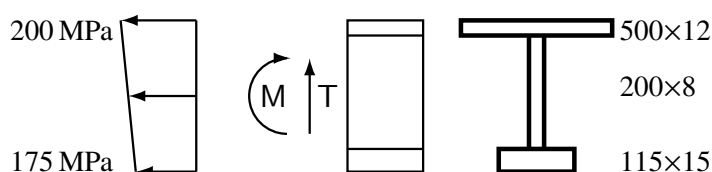
Odpowiedź: Maksymalne naprężenia  $\max \sigma = 126.5 \text{ MPa}$ ,  $\max \tau = 45.7 \text{ MPa}$ .

Zadanie 1.5 Należy wyznaczyć maksymalne co do wartości bezwzględnej naprężenia normalne  $\max |\sigma|$ .

Siły wewnętrzne w przekroju:

moment gnący  $M = -50 \text{ kNm}$

siła tnąca  $T = 70 \text{ kN}$



Sposób rozwiązania:

Naprężenia normalne  $\sigma$  są sumą naprężeń wywołanych zginaniem  $\sigma_M$  i naprężeń pochodzących od zgięcia ogólnego i strefowego  $\sigma_N$ :  $\sigma = \sigma_N + \sigma_M$ . Rozkłady obydwóch naprężeń składowych są liniowe, więc wystarczy sprawdzić naprężenia „w skrajnych włóknach”, czyli w punktach D i E. (Nie trzeba liczyć pól  $A_T$  i naprężeń  $\tau_T$ , bo naprężenia  $\sigma$  nie zależą od  $\tau_T$ ). Procedura rozwiązywania jest analogiczna, jak w zad. 1.1.

A. Wybór modelu idealizacji przekroju – sprawdzenie warunku cienkościowości

$$h_s / \max t_m = 200 \text{ mm} / 15 \text{ mm} = 13.33 < 50 \Rightarrow \text{należy zastosować model grubościenny.}$$

B. Charakterystyki geometryczne zginania, jednostki: [centymetr]

$$A = \sum_i A_i = 50.0 \cdot 1.2 + 20.0 \cdot 0.8 + 11.5 \cdot 1.5 = 93.25 \text{ cm}^2$$

$$S_{\bar{y}} = \sum_i A_i \cdot \bar{z}_i = 50.0 \cdot 1.2 \cdot \frac{-1.2}{2} + 0.8 \cdot \frac{20.0^2}{2} + 11.5 \cdot 1.5 \cdot \left(20.0 + \frac{1.5}{2}\right) = 481.9 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} I_y &= \sum_i \left( I_i + A_i \cdot \bar{z}_i^2 \right) - \frac{S_{\bar{y}}^2}{A} \\ &= 50.0 \cdot \frac{1.2^3}{3} + 0.8 \cdot \frac{20.0^3}{3} + 11.5 \cdot \frac{1.5^3}{12} + 11.5 \cdot 1.5 \cdot \left(20.0 + \frac{1.5}{2}\right)^2 - \frac{481.9^2}{93.25} \\ &= 7102 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\bar{z}_C = \frac{S_{\bar{y}}}{A} = \frac{481.9}{93.25} = 5.168 \text{ cm}$$

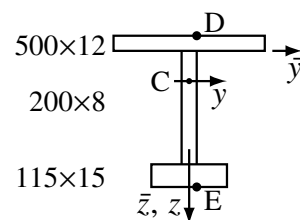
$$z = \bar{z} - \bar{z}_C, \quad W = \frac{I_y}{z}$$

$$z_D = -1.2 - 5.168 = -6.368 \text{ cm}$$

$$z_E = 20.0 + 1.5 - 5.168 = 16.33 \text{ cm}$$

$$W_D = \frac{7102}{-6.368} = -1115 \text{ cm}^3$$

$$W_E = \frac{7102}{16.33} = 434.9 \text{ cm}^3$$



C. Sprawdzenie wskaźników wytrzymałości na zginanie – model „idealny dwuteownik”

$$|W| = A_m \cdot h_s$$

jednostki: [centymetr]

$$|W_D| = 50.0 \cdot 1.2 \cdot 20.0 = 1200 \text{ cm}^3$$

$$|W_E| = 11.5 \cdot 1.5 \cdot 20.0 = 345 \text{ cm}^3$$

Wniosek: obliczone w p. B wskaźniki  $W$  są zgodne z powyższym oszacowaniem, bo:

(1) dla mniejszych wskaźników wartości oszacowane są mniejsze, (2) różnice nie są duże – ok. 20%.

D. Naprężenia

$$\sigma_M = \frac{M}{W}, \quad \sigma = \sigma_N + \sigma_M$$

$$\text{punkt D: } \sigma_{M,D} = \frac{-50.0 \text{ kNm}}{-1115 \text{ cm}^3} = 44.8 \text{ MPa}, \quad \sigma_D = 200 \text{ MPa} + 44.8 \text{ MPa} = 244.8 \text{ MPa}$$

$$\text{punkt E: } \sigma_{M,E} = \frac{-50.0 \text{ kNm}}{434.9 \text{ cm}^3} = -115.0 \text{ MPa}, \quad \sigma_E = 175 \text{ MPa} + (-115.0) \text{ MPa} = 60.0 \text{ MPa}$$

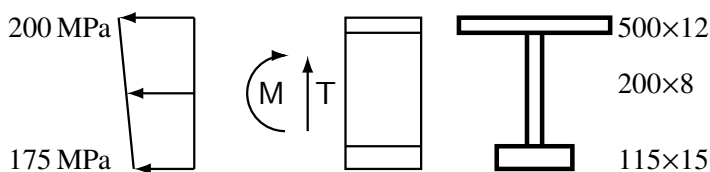
E. Naprężenia maksymalne

$$\max |\sigma| = \max(|\sigma_D|, |\sigma_E|) = \max(244.8, 60.0) \text{ MPa} = 244.8 \text{ MPa}$$

Odpowiedź: Maksymalne naprężenia normalne  $\max |\sigma| = 244.8 \text{ MPa}$ .

Zadanie 1.6 (poznawcze)

Należy wyznaczyć maksymalny dopuszczalny przedział zmienności momentu gnącego  $M$ , jeśli naprężenia normalne muszą zawierać się w granicach  $\pm 220$  MPa.



Sposób rozwiązania:

W każdym punkcie przekroju musi być spełniony warunek  $-\sigma_d < \sigma < +\sigma_d$ , gdzie  $\sigma_d = 220$  MPa. Naprężenia normalne  $\sigma = \sigma_N + \sigma_M$ , a  $\sigma_M = M/W$ , więc:

$$-\sigma_d < \sigma_N + M/W < +\sigma_d \Rightarrow -\sigma_d - \sigma_N < M/W < \sigma_d - \sigma_N.$$

Rozkład naprężeń  $\sigma$  w przekroju jest liniowy, więc wystarczy wykonać obliczenia dla dwóch „skrajnych punktów” – maksymalnie odległych od osi obojętnej zginania i położonych po jej przeciwnych stronach.

A. Wybór modelu idealizacji przekroju – sprawdzenie warunku cienkościowości

$$h_s / \max t_m = 200 \text{ mm} / 15 \text{ mm} = 13.33 < 50 \Rightarrow \text{należy zastosować model grubościenny.}$$

B. Charakterystyki geometryczne zginania

Dane geometryczne przekroju są identyczne jak w zad. 1.5, więc wykorzystamy tam uzyskane wyniki:  $W_D = -1115 \text{ cm}^3$ ,  $W_E = 434.9 \text{ cm}^3$

C. Wyznaczenie dopuszczalnego zakresu zmienności momentu  $M$

(a) punkt D

$$-220 \text{ MPa} - 200 \text{ MPa} < \frac{M}{-1115 \text{ cm}^3} < 220 \text{ MPa} - 200 \text{ MPa}$$

$$468.3 \text{ kNm} > M > -22.3 \text{ kNm}$$

(b) punkt E

$$-220 \text{ MPa} - 175 \text{ MPa} < \frac{M}{434.9 \text{ cm}^3} < 220 \text{ MPa} - 175 \text{ MPa}$$

$$-171.8 \text{ kNm} < M < 19.57 \text{ kNm}$$

(c) cały przekrój

$$\max(\min M^{(D)}, \min M^{(E)}) < M < \min(\max M^{(D)}, \max M^{(E)})$$

$$\max(-22.3, -171.8) \text{ kNm} < M < \min(468.3, 19.57) \text{ kNm}$$

$$-22.3 \text{ kNm} < M < 19.57 \text{ kNm}$$

Odpowiedź: Moment gnący  $M \in \langle -22.3, 19.57 \rangle \text{ kNm}$ .

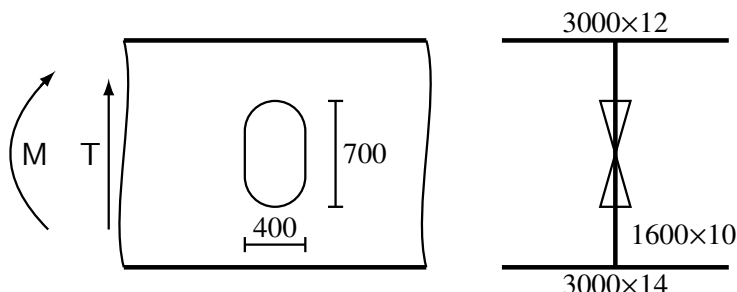
## 9.2 Naprężenia w wiązarach z otworami w środnikach

### Zadanie 2.1

Należy sprawdzić wytrzymałość (plastyczną) belki, jeśli  $\text{dop } \sigma_{red, HMH} = 220 \text{ MPa}$ .

$$M = 10 \text{ MNm}$$

$$T = 1.3 \text{ MN}$$



Sposób rozwiązania:

Do oceny wytrzymałości (plastycznej) służy kryterium:

Wytrzymałość (plastyczna) jest wystarczająca, jeśli w każdym punkcie przekroju

$$\sigma_{red} < \text{dop } \sigma_{red}$$

Należy więc:

- wyznaczyć maksymalne naprężenia zredukowane w przekroju,
- sprawdzić, czy jest spełnione kryterium wytrzymałościowe.

Zadanie jest analogiczne, jak zad. 1.2, a dane, za wyjątkiem otworu w środniku, są identyczne jak w zad. 1.1. Trzeba więc ocenić, jak otwór w środniku wpływa na stan naprężenia wywołany zginaniem i ścinaniem.

Można zauważyć, że:

- (a) naprężenia należy wyznaczać w przekroju, w którym występuje otwór, bo tam naprężenia styczne są większe niż w przekroju bez otworu;
- (b) w środniku jest tylko jeden otwór, więc nie trzeba sprawdzać ścinania na kierunku poziomym;
- (c) pasy poszycia są grubsze niż środnik, więc naprężenia styczne w mocnikach będą mniejsze niż w środniku;
- (d) mocnik górny ma mniejsze pole niż mocnik dolny, więc wystarczy tylko w p. A wyznaczyć wskaźnik wytrzymałości na zginanie.

Wobec tego wystarczy sprawdzić wytrzymałość tylko w p. A.

Pierwszy etap rozwiązywania jest identyczny, jak w zadaniu 1.1 i dane też są identyczne, więc wykorzystamy uzyskane tam wartości.

#### A. Wybór modelu idealizacji przekroju

Sprawdzenie warunku cienkościowości

$$H / \max t_m = 1600 \text{ mm} / \max(12, 14) \text{ mm} = 114.3 > 50 \Rightarrow \text{można zastosować model cienkościenny „technologiczny”}.$$

#### B. Charakterystyki geometryczne zginania

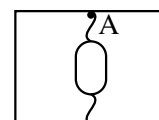
Pomijamy wpływ otworu na zginanie i wykorzystujemy wyniki uzyskane w zad. 1.1:

$$W_A = -0.06238 \text{ m}^3.$$

#### C. Obliczenie naprężeń w p. A

##### (a) Naprężenia wywołane zginaniem

$$\sigma_M = M / W = 10 \text{ MNm} / (-0.06238 \text{ m}^3) = -160.3 \text{ MPa}$$





## (b) Naprężenia wywołane ścinaniem

W przypadku ścinania na kierunku pionowym, w przekroju z otworem:

$$\tau_{v,o} = \frac{T}{h t} \frac{1}{1 - h_o/h}$$

$$h = 1600 \text{ mm}, h_o = 700 \text{ mm} \Rightarrow h_o/h = 0.4375$$

$$\tau_{v,o} = \frac{1.3 \text{ MN}}{1.6 \text{ m} \cdot 0.010 \text{ m}} \frac{1}{1 - 0.4375} = 144.4 \text{ MPa}$$

## (c) Naprężenia zredukowane

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3 \tau_T^2} = \sqrt{(-160.3)^2 + 3 \cdot (144.4)^2} \text{ MPa} = 297.1 \text{ MPa}$$

## D. Ocena wytrzymałości

$$\max \sigma_{red} = 297.1 \text{ MPa} > \text{dop } \sigma_{red} = 220 \text{ MPa} \Rightarrow \text{wytrzymałość niewystarczająca}$$

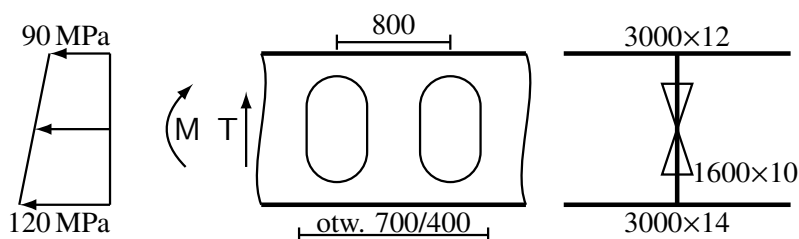
Odpowiedź: Wytrzymałość (plastyczna) belki jest niewystarczająca.

Zadanie 2.2

Należy wyznaczyć maksymalne co do wartości bezwzględnej naprężenia normalne, styczne i zredukowane (wg hipotezy HMM) we wzdłużniku obciążonym momentem gnącym, siłą tnącą i naprężeniami od zgięcia ogólnego.

$$M = 7.5 \text{ MNm}$$

$$T = 0.8 \text{ MN}$$



Sposób rozwiązania:

Zadanie jest analogiczne, jak zad. 1.1; dane, za wyjątkiem otworów w środniku, są też identyczne. Trzeba więc ocenić, w jakim stopniu wpływają na stan naprężenia blisko siebie położone otwory w środniku.

Można zauważyć, że:

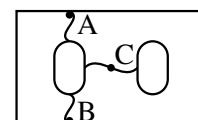
- (a) naprężenia należy wyznaczać w przekroju pionowym, w którym występuje otwór (bo tam naprężenia styczne są większe niż w przekroju bez otworu) oraz w przekroju poziomym między otworami;
- (b) pasy poszycia są grubsze niż środnik, więc naprężenia styczne w mocnikach będą mniejsze niż w środniku;
- (c) mimo że mocnik górny ma mniejsze pole niż mocnik dolny, to ze względu na występowanie naprężeń od zgięcia ogólnego trudno jest z góry przewidzieć, bliżej którego mocnika będą większe naprężenia  $\sigma$ , więc bezpieczniej jest sprawdzić obydwa punkty;
- (d) również trudno jest przewidzieć, czy naprężenia styczne będą większe w przekroju pionowym, czy w poziomym, więc należy wykonać obliczenia w obydwóch przekrojach.

Wobec tego należy wyznaczyć naprężenia w punktach A, B i C.

Pierwszy etap rozwiązywania jest identyczny, jak w zadaniu 1.1 i dane też są identyczne, więc wykorzystamy uzyskane tam wartości.

## A. Wybór modelu idealizacji przekroju

Sprawdzenie warunku cienkościerności



$H / \max t_m = 1600 \text{ mm} / \max(12, 14) \text{ mm} = 114.3 > 50 \Rightarrow$  można zastosować model cienkościenny „technologiczny”.

B. Charakterystyki geometryczne zginania

Pomijamy wpływ otworów na zginanie i wykorzystujemy wyniki uzyskane w zad. 1.1:

$$W_A = -0.06238 \text{ m}^3, W_B = 0.07088 \text{ m}^3.$$

C. Obliczenie naprężeń w p. A

(a) Naprężenia wywołane zginaniem

$$\sigma_M = M / W = 7.5 \text{ MNm} / (-0.06238 \text{ m}^3) = -120.2 \text{ MPa}$$

(b) Naprężenia normalne

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = 90 \text{ MPa} + (-120.2 \text{ MPa}) = -30.2 \text{ MPa}$$

(c) Naprężenia wywołane ścinaniem

W przypadku ścinania na kierunku pionowym, w przekroju z otworem:

$$h = 1600 \text{ mm}, h_o = 700 \text{ mm} \Rightarrow h_o/h = 0.4375$$

$$\tau_{v,o} = \frac{T}{h t} \frac{1}{1 - h_o/h} = \frac{0.8 \text{ MN}}{1.6 \text{ m} \cdot 0.010 \text{ m}} \frac{1}{1 - 0.4375} = 88.9 \text{ MPa}$$

(d) Naprężenia zredukowane

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} = \sqrt{(-30.2)^2 + 3 \cdot (88.9)^2} \text{ MPa} = 156.9 \text{ MPa}$$

D. Obliczenie naprężeń w p. B

(a) Naprężenia wywołane zginaniem

$$\sigma_M = M / W = 7.5 \text{ MNm} / 0.07088 \text{ m}^3 = 105.8 \text{ MPa}$$

(b) Naprężenia normalne

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = 120 \text{ MPa} + 105.8 \text{ MPa} = 225.8 \text{ MPa}$$

(c) Naprężenia wywołane ścinaniem, takie same, jak w p. A:  $\tau_{v,o} = 88.9 \text{ MPa}$

(d) Naprężenia zredukowane

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} = \sqrt{(225.8)^2 + 3 \cdot (88.9)^2} \text{ MPa} = 273.3 \text{ MPa}$$

E. Obliczenie naprężeń w p. C

(a) Naprężenia wywołane zginaniem:  $\sigma_M = 0$

(b) Naprężenia normalne:  $\sigma = 0$ , bo w obszarze pomiędzy otworami  $\sigma_N = 0$  – obszar ten znajduje się „w cieniu” otworów.

(c) Naprężenia wywołane ścinaniem

W przypadku ścinania na kierunku poziomym, pomiędzy otworami:

$$s = 800 \text{ mm}, b_o = 400 \text{ mm} \Rightarrow b_o/s = 0.5$$

$$\tau_{h,o} = \frac{T}{h t} \frac{1}{1 - b_o/s} = \frac{0.8 \text{ MN}}{1.6 \text{ m} \cdot 0.010 \text{ m}} \frac{1}{1 - 0.5} = 100.0 \text{ MPa}$$

(d) Naprężenia zredukowane

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} = \sqrt{0 + 3 \cdot (100.0)^2} \text{ MPa} = 173.2 \text{ MPa}$$

Odpowiedź:  $\max |\sigma| = 225.8 \text{ MPa}$  w p. B

$\max |\tau| = 100.0 \text{ MPa}$  w p. C

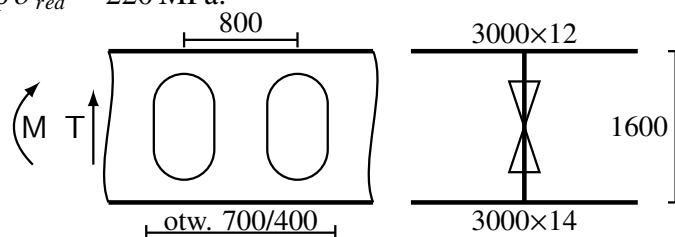
$\max \sigma_{red} = 273.3 \text{ MPa}$  w p. B

Zadanie 2.3 (projektowe)

Należy wyznaczyć minimalną wymaganą grubość blachy środnika wiązara, jeśli dopuszczalne naprężenia zredukowane (wg hipotezy HMH)  $\text{dop } \sigma_{red} = 220 \text{ MPa}$ .

$$M = 10 \text{ MNm}$$

$$T = 1.3 \text{ MN}$$



Sposób rozwiązania:

W każdym punkcie konstrukcji musi być spełnione kryterium:

$$\max \sigma_{red} < \text{dop } \sigma_{red}, \quad \text{gdzie } \sigma_{red} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3 \tau_T^2}$$

Od grubości środnika zależą zarówno naprężenia  $\sigma_M$  jak i  $\tau_T$ , ale naprężenia  $\sigma_M$  zależą w znacznie mniejszym stopniu, niż  $\tau_T$ . Można więc przyjąć następujące założenie upraszczające:

naprężenia  $\sigma_M$  nie zależą od grubości środnika

Wobec tego:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3 \tau_T^2} < \text{dop } \sigma_{red}$$

$$\sigma_M^2 + 3 \tau_T^2 < \text{dop } \sigma_{red}^2 \quad (\text{bo } \text{dop } \sigma_{red} > 0)$$

$$\tau_T^2 < \frac{\text{dop } \sigma_{red}^2 - \sigma_M^2}{3}$$

Aby to rozwiązać, trzeba spełnić dodatkowy warunek:

$$|\sigma_M| < \text{dop } \sigma_{red}, \quad \text{bo } \tau_T^2 > 0.$$

$$\tau_T < \sqrt{\frac{\text{dop } \sigma_{red}^2 - \sigma_M^2}{3}} \equiv \tau_{dop}$$

Wzór na naprężenia styczne  $\tau_T$  ma postać:  $\tau_T = \frac{T}{ht} \cdot g(h_o, b_o)$

gdzie  $h$  i  $t$  są wysokością i grubością środnika, a  $g(\dots)$  jest funkcją zależną od rozmiarów otworów, ale niezależną od grubości środnika. Wobec tego:

$$\tau_T = \frac{T}{ht} \cdot g(h_o, b_o) < \tau_{dop} \quad \Rightarrow \quad t > \frac{T}{h \cdot \tau_{dop}} \cdot g(h_o, b_o)$$

Funkcja  $g(\dots)$  zależy od rejonu wyznaczania naprężeń stycznych (poza rejonem otworów, w przekroju pionowym przez otwór, między otworami), a mocnik górny jest cieńszy niż dolny, więc wystarczy, przy założeniu, że pasy poszycia nie są cieńsze niż pół grubości środnika, wykonać obliczenia:

- w przekroju poza otworami, na styku górnego mocnika ze środnikiem,
- w przekroju przez otwór, na styku górnego mocnika ze środnikiem,
- pomiędzy otworami.

A. Wybór modelu idealizacji przekroju

Sprawdzenie warunku cienkościenności

$$H / \max t_m = 1600 \text{ mm} / \max(12, 14) \text{ mm} = 114.3 > 50 \quad \Rightarrow \quad \text{można zastosować model cienkościenny „technologiczny”}.$$

B. Charakterystyki geometryczne zginania

Nie znamy grubości środnika, więc jedynie można użyć wzoru dla modelu „idealnego dwuteownika”

$$\text{jednostki: [metr]} \quad W = 3.0 \cdot 0.012 \cdot 1.6 = 0.0576 \text{ m}^3$$

C. Rejon poza otworami

$$\sigma_M = M / W = 10 \text{ MNm} / 0.0576 \text{ m}^3 = 173.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{dop} = \sqrt{\frac{\text{dop } \sigma_{red}^2 - \sigma_M^2}{3}} = \sqrt{\frac{(220)^2 - (173.6)^2}{3}} \text{ MPa} = 78.0 \text{ MPa}$$

W rejonie poza otworami, otwory nie wpływają na wielkość naprężeń stycznych, więc

$$g(\dots) = \frac{1}{T} \\ t > \frac{T}{h \cdot \tau_{dop}} \cdot g(\dots) = \frac{1.3 \text{ MN}}{1.6 \text{ m} \cdot 78.0 \text{ MPa}} \cdot 1 = 0.01042 \text{ m} = 10.42 \text{ mm}$$

D. Rejon ponad otworami

$$\sigma_M = M / W = 10 \text{ MNm} / 0.0576 \text{ m}^3 = 173.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{dop} = \sqrt{\frac{\text{dop } \sigma_{red}^2 - \sigma_M^2}{3}} = \sqrt{\frac{(220)^2 - (173.6)^2}{3}} \text{ MPa} = 78.0 \text{ MPa}$$

W rejonie ponad otworami, dla ścinania na kierunku pionowym

$$g(\dots) = \frac{1}{1 - h_o/h} = \frac{1}{1 - (700 \text{ mm} / 1600 \text{ mm})} = 1.778$$

$$t > \frac{T}{h \cdot \tau_{dop}} \cdot g(\dots) = \frac{1.3 \text{ MN}}{1.6 \text{ m} \cdot 78.0 \text{ MPa}} \cdot 1.778 = 0.01852 \text{ m} = 18.52 \text{ mm}$$

E. Rejon między otworami

$$\sigma_M = 0$$

$$\tau_{dop} = \sqrt{\frac{\text{dop } \sigma_{red}^2 - \sigma_M^2}{3}} = \sqrt{\frac{(220)^2 - 0^2}{3}} \text{ MPa} = 127.0 \text{ MPa}$$

W rejonie między otworami dla ścinania na kierunku poziomym

$$g(\dots) = \frac{1}{1 - b_o/s} = \frac{1}{1 - (400 \text{ mm} / 800 \text{ mm})} = 2.0$$

$$t > \frac{T}{h \cdot \tau_{dop}} \cdot g(\dots) = \frac{1.3 \text{ MN}}{1.6 \text{ m} \cdot 127.0 \text{ MPa}} \cdot 2.0 = 0.01280 \text{ m} = 12.8 \text{ mm}$$

Odpowiedź: W rejonie otworów grubość netto środnika  $t \geq 18.52 \text{ mm}$  (bo nie opłaca się w niewielkim rejonie między otworami stosować cieńszej blachy), natomiast w pozostałej części środnika grubość netto  $t \geq 10.42 \text{ mm}$ .

*Uwaga:* Należy pamiętać, że powyższe obliczenia reprezentują tylko „pierwsze przybliżenie” – ale od strony bezpiecznej – bo grubość środnika jednak wpływa na wskaźnik wytrzymałości na zginanie, a tym samym na poziom naprężeń wywołanych zginaniem  $\sigma_M$  i w konsekwencji na  $\tau_{dop}$  oraz wymaganą grubość środnika  $t$ .

Obliczenia iteracyjne (a tak naprawdę metoda „prób i błędów”) prowadzą do rezultatów:

- poza otworami:  $t = 9.39 \text{ mm}$
- ponad otworami:  $t = 15.88 \text{ mm}$
- między otworami:  $t = 12.80 \text{ mm}$

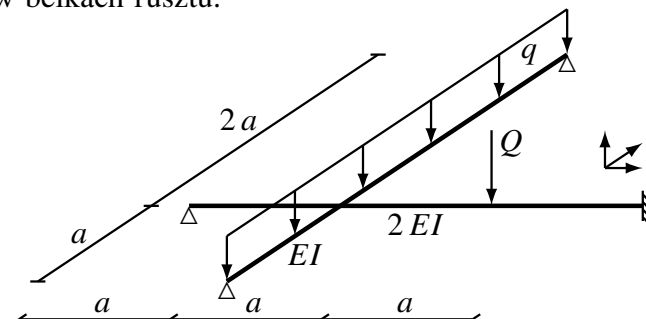
Jak widać, różnice w stosunku do zgrubnych oszacowań wynoszą  $10 \div 15\%$ .

## 9.3 Wytrzymałość rusztów płaskich

### Zadanie 3.1

Należy narysować wykresy sił wewnętrznych w belkach rusztu.

$$Q = 2qa$$



Sposób rozwiązania:

Najpierw zostanie wyznaczona siła oddziaływania pomiędzy belką wzdłużną i poprzeczną, a potem siły tnące i momenty gnące w każdej z belek niezależnie.

Obliczenia zostaną wykonane dla modelu uproszczonego, przy założeniu, że siły tnące nie wpływają na ugięcia belek zginanych.

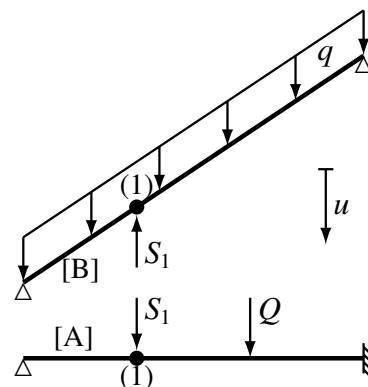
#### A. Podział rusztu na belki

Są dwie belki, oznaczono je jako „A” i „B”.

Jest tylko jedno miejsce skrzyżowania, oznaczone jako „1” i jedna nieznana siła oddziaływania  $S_1$ .

Żadna z belek po rozdzieleniu nie stała się mechanizmem. Dodatni zwrot przemieszczeń  $u$  przyjęto w dół. Równanie zgodności ugięć (jedno, bo jedno nieznane oddziaływanie):

$$u_{A,1} = u_{B,1}$$



#### B. Zależności opisujące ugięcia belek.

Będziemy posługiwali się tablicą zawierającą formuły opisujące ugięcia belek. Należy znaleźć belkę o dokładnie takich samych warunkach brzegowych i takim samym obciążeniu, jak rozpatrywana belka.

W tej tablicy oś  $x$  jest skierowana „od lewej do prawej”, dodatnie ugięcia  $w$  są skierowane w dół, dodatnie obciążenia „P” i „q” mają zwrot zgodny z dodatnim ugięciem.

#### Belka A

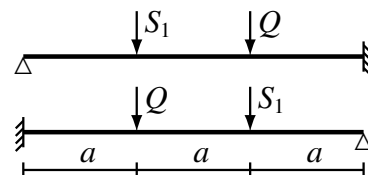
W tablicy nie ma belki dokładnie odpowiadającej belce „A”, ale jest belka jednoprzęsłowa z podporami „utwierdzenie”–„przegub”, obciążona pojedynczą siłą skupioną „P”. Wobec tego:

- „odwracamy” belkę „A”;
- wykorzystując zasadę superpozycji obciążeń ( $f(A + B) = f(A) + f(B)$ ), rozdzielamy obciążenie na dwa pojedyncze przypadki, otrzymując zależność:

$$u_{A,1} = u_{A,1}(Q) + u_{A,1}(S_1)$$

- $u_{A,1}(Q) \Rightarrow$  wzór 9

$$w(x) = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \frac{3}{2} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot (1 + \bar{b}) \cdot \bar{x}^2 - \frac{1}{2} \cdot \bar{b} \cdot (2 + \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{x}^3 + \bar{a} (\bar{x} - \bar{a})^3 \right]$$

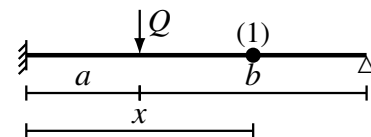


Podstawiamy:

$$P \leftarrow Q = 2qa; \quad l \leftarrow 3a; \quad EI \leftarrow 2EI;$$

$$\bar{a} = \frac{1}{3}; \quad \bar{b} = \frac{2}{3}; \quad \bar{x} = \frac{2}{3}$$

$$u_{A,1}(Q) = \frac{2qa \cdot (3a)^3}{6 \cdot 2EI} \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^3 \right] = \frac{23}{162} \frac{qa^4}{EI} \approx 0.1420 \frac{qa^4}{EI}$$



- $u_{A,1}(S_1) \Rightarrow$  wzór 9

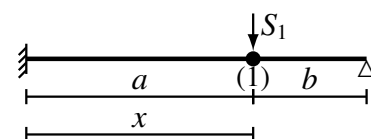
Wzór z tablic – jak wyżej

Podstawiamy:

$$P \leftarrow S_1; \quad l \leftarrow 3a; \quad EI \leftarrow 2EI;$$

$$\bar{a} = \frac{2}{3}; \quad \bar{b} = \frac{1}{3}; \quad \bar{x} = \frac{2}{3}$$

$$u_{A,1}(S_1) = \frac{S_1 \cdot (3a)^3}{6 \cdot 2EI} \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^3 \right] = \frac{10}{81} \frac{S_1 a^3}{EI} \approx 0.1235 \frac{S_1 a^3}{EI}$$



### Belka B

W tablicy nie ma belki dokładnie odpowiadającej belce „B”, ale są belki jednoprzęsłowe podparte przegubowo na końcach, obciążone albo siłą skupioną „P” albo obciążeniem ciągłym „q”.

Wobec tego wykorzystamy zasadę superpozycji obciążeń i rozdzielimy obciążenie na dwa pojedyncze przypadki, otrzymując zależność:

$$u_{B,1} = u_{B,1}(q) + u_{B,1}(S_1)$$

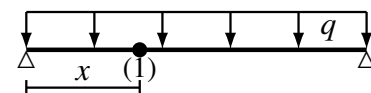
- $u_{B,1}(q) \Rightarrow$  wzór 6

$$w(x) = \frac{ql^4}{24EI} \cdot \bar{x} \cdot \left[1 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^3\right]$$

Podstawiamy:

$$q \leftarrow q; \quad l \leftarrow 3a; \quad EI \leftarrow EI; \quad \bar{x} = \frac{1}{3}$$

$$u_{B,1}(q) = \frac{q \cdot (3a)^4}{24 \cdot EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right] = \frac{11}{12} \frac{qa^4}{EI} \approx 0.9167 \frac{qa^4}{EI}$$



- $u_{B,1}(S_1) \Rightarrow$  wzór 5

$$w(x) = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \bar{b} \cdot \bar{x} \cdot \left(1 - \bar{b}^2 - \bar{x}^2\right) + \bar{a} (\bar{x} - \bar{a})^3 \right]$$

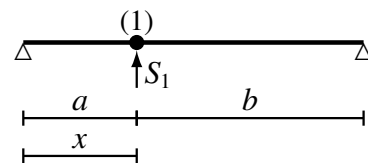
Podstawiamy:

$$P \leftarrow (-S_1); \quad l \leftarrow 3a; \quad EI \leftarrow EI;$$

$$\bar{a} = \frac{1}{3}; \quad \bar{b} = \frac{2}{3}; \quad \bar{x} = \frac{1}{3}$$

(siła  $S_1$  ma zwrot przeciwny do dodatniego zwrotu siły  $P$  w tablicach, więc ma znak „minus”);

$$u_{B,1}(S_1) = \frac{-S_1 \cdot (3a)^3}{6 \cdot EI} \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^2 - \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right)^3 \right] = -\frac{4}{9} \frac{S_1 a^3}{EI} \approx -0.4444 \frac{S_1 a^3}{EI}$$



C. Wyznaczenie oddziaływania  $S_1$  – rozwiązanie równania zgodności przemieszczeń

$$u_{A,1} = u_{B,1} \Rightarrow u_{A,1}(Q) + u_{A,1}(S_1) = u_{B,1}(q) + u_{B,1}(S_1)$$

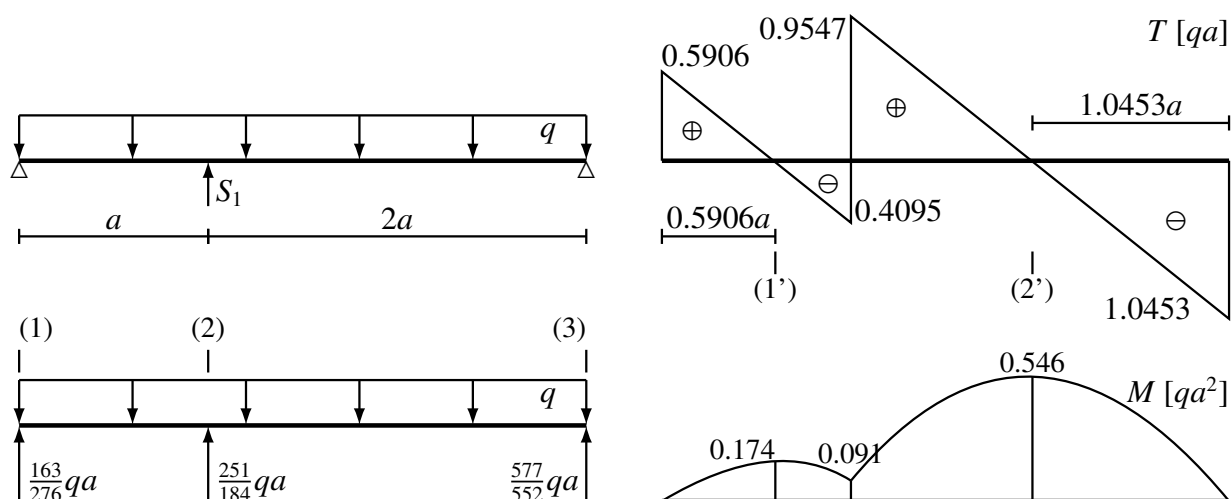
$$\frac{23}{162} \frac{qa^4}{EI} + \frac{10}{81} \frac{S_1 a^3}{EI} = \frac{11}{12} \frac{qa^4}{EI} + \left( -\frac{4}{9} \frac{S_1 a^3}{EI} \right) \Rightarrow \frac{46}{81} S_1 = \frac{251}{324} qa \Rightarrow$$

$$S_1 = \frac{251}{184} qa \approx 1.3641 qa$$

D. Wyznaczenie wykresów sił wewnętrznych

Belka „B” jest statycznie wyznaczalna, więc od niej rozpoczniemy.

### Belka B

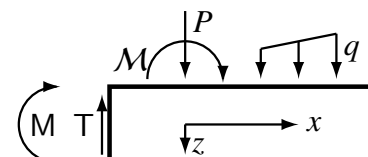


Znając wartość siły oddziaływania  $S_1$  wyznaczamy reakcje w podporach.

Wykresy sił tnących można by było narysować patrząc na rysunek, ale jako że belka jest obciążona obciążeniem ciągłym, w celu narysowania wykresu momentów gnących zapewne trzeba wykonać obliczenia. Dla jednolitości, skorzystamy w obydwóch przypadkach z tej samej metody.

$$T(x_1^+) = T(x_1^-) - P; \quad T(x > x_1) = T(x_1^+) - \int_{x_1}^x q(\xi) d\xi$$

$$M(x_1^+) = M(x_1^-) + M; \quad M(x > x_1) = M(x_1^+) + \int_{x_1}^x T(\xi) d\xi$$



Obciążenie ciągłe  $q(x)$  jest stałe, więc wystarczy wyznaczyć wartości sił tnących w charakterystycznych przekrojach (miejsca przyłożenia sił skupionych, początek i koniec obciążenia ciągłego) i połączyć tak uzyskane wartości odcinkami prostych. Na powyższym rysunku charakterystyczne przekroje zostały oznaczone jako (1)÷(3).

$$T(1^-) = 0; \quad T(1^+) = 0 - \left( -\frac{163}{276} qa \right) = \frac{163}{276} qa \approx 0.5906 qa$$

$$T(2^-) = \frac{163}{276}qa - \int_0^a q d\xi = \frac{163}{276}qa - qa = -\frac{113}{276}qa \approx -0.4094 qa$$

$$T(2^+) = -\frac{113}{276}qa - \left(-\frac{251}{184}qa\right) = \frac{527}{552}qa \approx 0.9547 qa$$

$$T(3^-) = \frac{527}{552}qa - \int_0^{2a} q d\xi = \frac{527}{552}qa - 2qa = -\frac{577}{552}qa \approx -1.0453 qa$$

$$T(3^+) = -\frac{577}{552}qa - \left(-\frac{577}{552}qa\right) = 0 \quad (\text{dobrze, wykres „zamknął się do zera”})$$

Obciążenie nie zawiera momentów skupionych, więc  $M(x_1^-) = M(x_1^+) = M(x_1)$ . Ekstrema (właściwe i niewłaściwe) na wykresie momentów są w przekrojach, gdzie siła tnąca jest równa zero lub wykres sił tnących zmienia znak. Dodamy więc dwa przekroje charakterystyczne (1') i (2') w miejscach, gdzie siła tnąca jest równa zero.

Obliczając wartości momentów, skorzystamy z tego, że całka oznaczona z funkcji  $f(x)$  jest równa polu powierzchni ograniczonej wykresem funkcji i osią  $x$ . Ponadto, jeśli dla obciążenia ciągłego  $q = \text{const}$  w przedziale  $\langle x_1, x_2 \rangle$  wykres sił tnących przechodzi przez zero, to dzieli on przedział na dwie części o długościach  $[T(x_1)]l$  i  $[T(x_2)]l$ , gdzie  $l = x_2 - x_1$  jest długością przedziału, a  $[\dots]$  oznacza mnożnik wartości  $ql$ .

$$M(1) = 0; \quad M(1') = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{163}{276} qa \cdot \frac{163}{276} a = \frac{1}{2} \left(\frac{163}{276}\right)^2 qa^2 \approx 0.1744 qa^2$$

$$M(2) = 0.1744 qa^2 + 0.5 \cdot (-0.4094 qa) \cdot 0.4094 a = 0.0906 qa^2$$

$$M(2') = 0.0906 qa^2 + 0.5 \cdot (0.9547)^2 qa^2 = 0.5463 qa^2$$

$$M(3) = 0.5463 qa^2 - 0.5 \cdot (1.0453)^2 qa^2 = 0 \quad (\text{dobrze, wykres „zamknął się do zera”})$$

### Belka A

Belka „A” jest statycznie niewyznaczalna. Reakcje w podporach można by było wyznaczyć stosując np. metodę Maxwella-Mohra, ale zastosujemy technikę wykorzystującą funkcję opisującą kształt ugiętej belki i zależności słuszne dla belki pryzmatycznej:

$$M(x) = -EI \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad T(x) = -EI \cdot \frac{d^3 w(x)}{dx^3}$$

gdzie  $w(x)$  to funkcja opisująca linię ugięcia belki.

Belka „A” jest obciążona dwiema siłami skupionymi ( $Q$  i  $S_1$ ), a w tablicach są linie ugięcia dla pojedynczych sił, więc wykorzystując zasadę superpozycji obciążeń, możemy napisać:  $w(x) = w(x, Q) + w(x, S_1)$ ;  $M(x) = M(x, Q) + M(x, S_1)$ ;  $T(x) = T(x, Q) + T(x, S_1)$ .

Wzór ogólny opisujący linię ugięcia jest dla obydwóch przypadków obciążenia taki sam (bo obydwa obciążenia są siłami skupionymi) – wzór nr 9. Wobec tego różniczkujemy:

$$w(x) = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \frac{3}{2} \bar{a} \bar{b} (1 + \bar{b}) \bar{x}^2 - \frac{1}{2} \bar{b} (2 + \bar{a} + \bar{a} \bar{b}) \bar{x}^3 + \parallel_a (\bar{x} - \bar{a})^3 \right]$$

$$w'(x) = \frac{Pl^2}{6EI} \left[ 3 \bar{a} \bar{b} (1 + \bar{b}) \bar{x} - \frac{3}{2} \bar{b} (2 + \bar{a} + \bar{a} \bar{b}) \bar{x}^2 + \parallel_a 3 (\bar{x} - \bar{a})^2 \right]$$

$$w''(x) = \frac{Pl}{6EI} \left[ 3 \bar{a} \bar{b} (1 + \bar{b}) - 3 \bar{b} (2 + \bar{a} + \bar{a} \bar{b}) \bar{x} + \parallel_a 6 (\bar{x} - \bar{a}) \right]$$

$$w'''(x) = \frac{P}{6EI} \left[ -3 \bar{b} (2 + \bar{a} + \bar{a} \bar{b}) + \parallel_a 6 \right]$$

Należy zwrócić uwagę, że w mnożniku  $\frac{Pl^m}{6EI}$  każde kolejne różniczkowanie prowadzi do zmniej-



szenia wykładnika  $m$ , bo funkcja  $w(x)$  jest funkcją złożoną, zależną od  $\bar{x} = \frac{x}{l}$ , więc za każdym razem różniczkujemy „funkcję wewnętrzną”:  $\bar{x}' = \frac{d}{dx} \frac{x}{l} = \frac{1}{l}$

Wobec tego wykresy momentów gnących i sił tnących są opisane wyrażeniami:

$$M(x) = -\frac{Pl}{6} \left[ 3\bar{a}\bar{b}(1 + \bar{b}) - 3\bar{b}(2 + \bar{a} + \bar{a}\bar{b})\bar{x} + \frac{1}{6}(\bar{x} - \bar{a}) \right]$$

$$T(x) = -\frac{P}{6} \left[ -3\bar{b}(2 + \bar{a} + \bar{a}\bar{b}) + \frac{1}{6} \right]$$

Dalszy tok postępowania może być różny:

- można wprost wyznaczyć wykresy z powyższych wyrażeń;
- zauważając, że wartości  $M(x=0)$  i  $T(x=0)$  są równe reakcjom w lewej podporze, można belkę zamienić na statycznie wyznaczalną i dalej postępować w znany, standardowy sposób; proszę zauważyć, że wystarczy wyznaczyć albo  $M(x=0)$  albo  $T(x=0)$ , bo belka jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna.

Zastosujemy sposób drugi.

Dla  $P = Q$ :  $P \leftarrow 2qa$ ,  $l \leftarrow 3a$ ,  $\bar{a} = \frac{1}{3}$ ;  $\bar{b} = \frac{2}{3}$

$$M(x=0) = -\frac{2qa \cdot 3a}{6} \left[ 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \right) \right] = -\frac{10}{9} qa^2 \approx -1.1111 qa^2$$

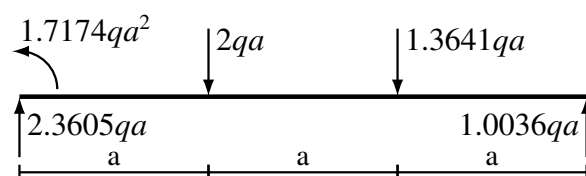
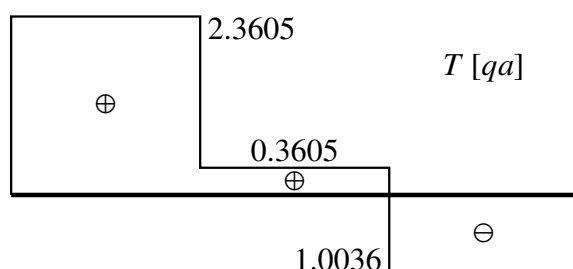
$$T(x=0) = -\frac{2qa}{6} \left[ -3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left( 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) \right] = \frac{46}{27} qa \approx 1.7037 qa$$

Dla  $P = S_1$ :  $P \leftarrow \frac{251}{184} qa$ ,  $l \leftarrow 3a$ ,  $\bar{a} = \frac{2}{3}$ ;  $\bar{b} = \frac{1}{3}$

$$M(x=0) = -\frac{251}{184} qa \cdot \frac{3a}{6} \left[ 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \right] = -\frac{251}{414} qa^2 \approx -0.6063 qa^2$$

$$T(x=0) = -\frac{251}{184} \frac{qa}{6} \left[ -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left( 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{3263}{4968} qa \approx 0.6568 qa$$

Sumując wartości w lewej podporze i wyznaczając z równania równowagi reakcję w prawej podporze, otrzymujemy stan obciążenia, który prowadzi do wykresów sił wewnętrznych:



Obserwacje:

- Świadectwem współpracy belek rusztu są niezerowe siły oddziaływania w miejscach skrzyżowania.

- Efektem współpracy są odmienne wykresy sił wewnętrznych w belkach rusztu w stosunku do stanu ich niezależnej pracy:

	max $ M  [qa^2]$			max $ T  [qa]$		
	niezależne	ruszt	$\delta\%$	niezależne	ruszt	$\delta\%$
Belka A	1.1111	1.7174	+35%	1.7037	2.3605	+28%
Belka B	1.125	0.5463	-106%	1.5	1.0453	-43%

$$[\delta\% = (V_{ruszt} - V_{niezal}) / (V_{ruszt}) \cdot 100\%]$$

Jak widać, maksymalne wartości sił wewnętrznych w belce „A” wzrosły, a w belce „B” zmalały, co świadczy o tym, że belka „A” przejmuje część obciążenia z belki „B”.

- Gdyby wytrzymałość belek została sprawdzona dla stanu pracy niezależnej, to wyężenie belki „A” by było niedoszacowane (o ok. 35%), co niesie niebezpieczeństwo przeciążenia konstrukcji podczas eksploatacji.

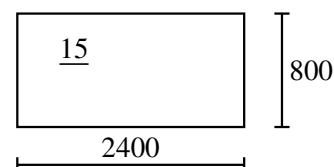
## 9.4 Wytrzymałość płyt prostokątnych

Zadanie 4.1 (wytrzymałość lokalna, obliczenia sprawdzające)

Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia zredukowane  $\max \sigma_{red,HMH}$  w poszyciu dna zewnętrznego statku morskiego.

zanurzenie:  $T = 9.6$  m

materiał: stal



Sposób rozwiązania:

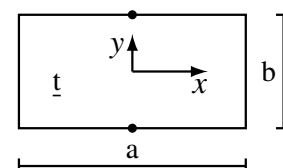
- Temat nie zawiera wszystkich danych liczbowych (brak stałych materiałowych i gęstości wody), więc trzeba je uzupełnić.
- Następnie należy przyjąć oznaczenia, układ współrzędnych i dobrać model obliczeniowy.
- Obciążenie nie jest dane bezpośrednio, więc trzeba wyznaczyć jego wartość.
- Wyznaczyć naprężenia w charakterystycznych punktach i wartość maksymalną.

A. Uzupełnienie danych

- stałe materiałowe stali:  $E = 206$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,
- gęstość wody morskiej:  $\rho = 1.025$  t/m<sup>3</sup>,
- przyspieszenie ziemskie:  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>

B. Oznaczenia, układ współrzędnych, model obliczeniowy

- dane liczbowe:  
 $a = 2400$  mm,  $b = 800$  mm,  $t = 15$  mm
- układ współrzędnych: oś  $y$  równoległa do boku „b”
- model obliczeniowy:



- płyta prostokątna, utwierdzona na brzegu, obciążona stałym ciśnieniem,
- $a/b = 2400 \text{ mm} / 800 \text{ mm} = 3.0 > 2 \Rightarrow$  zgięcie cylindryczne

## C. Obciążenie

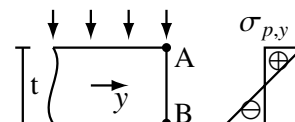
$$p = \rho g T = 1.025 \text{ t/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 9.6 \text{ m} = 1.025 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 9.6 \text{ m} =$$

$$= 9.653 \cdot 10^4 \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} \right] = 9.653 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 9.653 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 96.53 \text{ kPa} = 0.09653 \text{ MPa}$$

## D. Naprężenia wywołane zginaniem, w punktach A i B

$$\sigma_{p,y} = \pm \frac{1}{2} p \left( \frac{b}{t} \right)^2 = \pm \frac{1}{2} \cdot 0.09653 \text{ MPa} \cdot \left( \frac{800 \text{ mm}}{15 \text{ mm}} \right)^2 = \pm 137.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p,x} = \nu \sigma_{p,y} = 0.3 \cdot (\pm 137.3 \text{ MPa}) = \pm 41.2 \text{ MPa}$$



## E. Naprężenia zredukowane

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{p,x}^2 + \sigma_{p,y}^2 - \sigma_{p,x} \cdot \sigma_{p,y}}$$

(a) strona obciążona ciśnieniem (rozciągana) – punkt A

$$\sigma_{red,A} = \sqrt{(+41.2)^2 + (+137.3)^2 - (+41.2) \cdot (+137.3)} \text{ MPa} = 122.0 \text{ MPa}$$

(b) strona nie obciążona ciśnieniem (ściskana) – punkt B

$$\sigma_{red,B} = \sqrt{(-41.2)^2 + (-137.3)^2 - (-41.2) \cdot (-137.3)} \text{ MPa} = 122.0 \text{ MPa}$$

(c) maksymalne naprężenia zredukowane

$$\max \sigma_{red} = \max(\sigma_{red,A}, \sigma_{red,B}) = \max(122.0, 122.0) \text{ MPa} = 122.0 \text{ MPa}$$

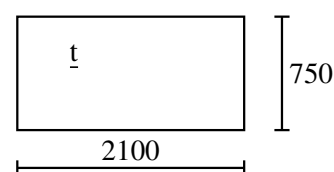
Odpowiedź: Maksymalne naprężenia zredukowane  $\max \sigma_{red,HMH} = 122.0 \text{ MPa}$ .

## Zadanie 4.2 (wytrzymałość lokalna, zadanie projektowe)

Należy wyznaczyć minimalną wymaganą grubość poszycia dna zewnętrznego statku morskiego, jeśli dopuszczalne naprężenia zredukowane dop  $\sigma_{red,HMH} = 160 \text{ MPa}$ .

zanurzenie:  $T = 7.8 \text{ m}$ 

materiał: stal



Sposób rozwiązania:

– Temat nie zawiera wszystkich danych liczbowych (brak stałych materiałowych i gęstości wody), więc trzeba je uzupełnić.

- Następnie należy przyjąć oznaczenia, układ współrzędnych i dobrać model obliczeniowy.
- Dla przyjętego modelu, należy wyznaczyć wzór na grubość płyty.
- Obciążenie nie jest dane bezpośrednio, więc trzeba wyznaczyć jego wartość.
- Wyznaczyć wymaganą grubość.

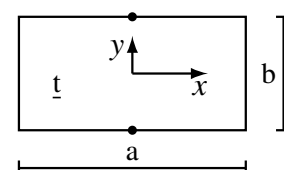
## A. Uzupełnienie danych

(a) stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,(b) gęstość wody morskiej:  $\rho = 1.025 \text{ t/m}^3$ ,(c) przyspieszenie ziemskie:  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 

## B. Oznaczenia, układ współrzędnych, model obliczeniowy

(a) dane liczbowe:

$$a = 2100 \text{ mm}, \quad b = 750 \text{ mm}$$

(b) układ współrzędnych: oś  $y$  równoległa do boku „b”

(c) model obliczeniowy:

- płyta prostokątna, utwierdzona na brzegu, obciążona stałym ciśnieniem,
- $a/b = 2100 \text{ mm} / 750 \text{ mm} = 2.8 > 2 \Rightarrow$  zgięcie cylindryczne

C. Wyprowadzenie wzorów

$$\begin{aligned} \max \sigma_{red} &\leq \text{dop } \sigma_{red}, \quad \max \sigma_{red} = |\sigma_{p,y}| \sqrt{1 - \nu + \nu^2}, \quad |\sigma_{p,y}| = \frac{1}{2} p \left( \frac{b}{t} \right)^2 \\ \frac{1}{2} p \left( \frac{b}{t} \right)^2 \sqrt{1 - \nu + \nu^2} &\leq \text{dop } \sigma_{red} \Rightarrow \left( \frac{b}{t} \right)^2 \leq \frac{2}{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \frac{\text{dop } \sigma_{red}}{p} \Rightarrow \\ t^2 &\geq b^2 \frac{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}{2} \frac{p}{\text{dop } \sigma_{red}} \Rightarrow t \geq b \sqrt{\frac{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}{2}} \sqrt{\frac{p}{\text{dop } \sigma_{red}}} \end{aligned}$$

D. Obciążenie

$$p = \rho g T = 1.025 \text{ t/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 7.8 \text{ m} = 78.43 \text{ kPa}$$

E. Wymagana grubość płyty

$$t \geq 750 \text{ mm} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 - 0.3 + 0.3^2}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{0.07843 \text{ MPa}}{160 \text{ MPa}}} = 11.07 \text{ mm}$$

Odpowiedź: Minimalna wymagana grubość płyty poszycia dna zewnętrznego wynosi 11.07 mm. (0.07 mm / 11.07 mm · 100% = 0.63%, więc zapewne  $t = 11.0 \text{ mm}$  zostałyby dopuszczone)

Zadanie 4.3 (wytrzymałość globalna, obliczenia sprawdzające)

Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia zredukowane  $\max \sigma_{red, HMH}$  w poszyciu dna zewnętrznego statku morskiego.

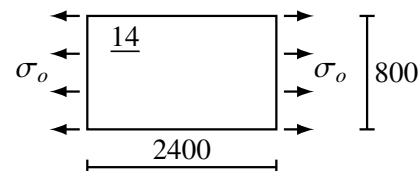
zanurzenie:  $T = 8.8 \text{ m}$

naprężenia tarczowe:  $\sigma_o = 80 \text{ MPa}$

materiał: stal

Sposób rozwiązania:

- Temat nie zawiera wszystkich danych liczbowych (brak stałych materiałowych i gęstości wody), więc trzeba je uzupełnić.
- Należy przyjąć oznaczenia, układ współrzędnych i dobrać model obliczeniowy.
- Obciążenie nie jest dane bezpośrednio, więc trzeba wyznaczyć jego wartość.
- Należy wyznaczyć naprężenia wywołane zginaniem.
- W charakterystycznych punktach należy wyznaczyć sumaryczne naprężenia normalne, naprężenia zredukowane i wartość maksymalną.



A. Uzupełnienie danych

- (a) stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,
- (b) gęstość wody morskiej:  $\rho = 1.025 \text{ t/m}^3$ ,
- (c) przyspieszenie ziemskie:  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

## B. Oznaczenia, układ współrzędnych, model obliczeniowy

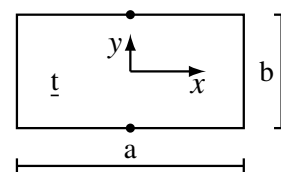
(a) dane liczbowe:

$$a = 2400 \text{ mm}, \quad b = 800 \text{ mm}, \quad t = 14 \text{ mm}$$

(b) układ współrzędnych: oś y równoległa do boku „b”

(c) model obliczeniowy:

- płyta prostokątna, utwierdzona na brzegu, obciążona stałym ciśnieniem,
- $a/b = 2400 \text{ mm} / 800 \text{ mm} = 3.0 > 2 \Rightarrow$  zgięcie cylindryczne



## C. Obciążenie

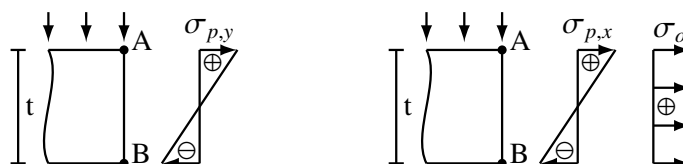
$$p = \rho g T = 1.025 \text{ t/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 8.8 \text{ m} = 88.49 \text{ kPa}$$

## D. Naprężenia wywołane zginaniem, środek dłuższego boku

$$\sigma_{p,y} = \pm \frac{1}{2} p \left( \frac{b}{t} \right)^2 = \pm \frac{1}{2} \cdot 0.08849 \text{ MPa} \cdot \left( \frac{800 \text{ mm}}{14 \text{ mm}} \right)^2 = \pm 144.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p,x} = \nu \sigma_{p,y} = 0.3 \cdot (\pm 144.5 \text{ MPa}) = \pm 43.4 \text{ MPa}$$

## E. Naprężenia sumaryczne, środek dłuższego boku



(a) strona obciążona ciśnieniem – punkt A (rozciąganie)

$$\sigma_x = \sigma_{p,x} + \sigma_o = (+43.4 \text{ MPa}) + (+80 \text{ MPa}) = 123.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_{p,y} = +144.5 \text{ MPa}$$

(b) strona nieobciążona ciśnieniem – punkt B (ściskanie)

$$\sigma_x = \sigma_{p,x} + \sigma_o = (-43.4 \text{ MPa}) + (+80 \text{ MPa}) = 36.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_{p,y} = -144.5 \text{ MPa}$$

## F. Naprężenia zredukowane, środek dłuższego boku

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

(a) strona obciążona ciśnieniem (rozciągana) – punkt A

$$\sigma_{red,A} = \sqrt{(123.4)^2 + (144.5)^2 - (123.4) \cdot (144.4)} \text{ MPa} = 135.2 \text{ MPa}$$

(b) strona nie obciążona ciśnieniem (ściskana) – punkt B

$$\sigma_{red,B} = \sqrt{(36.6)^2 + (-144.5)^2 - (36.6) \cdot (-144.5)} \text{ MPa} = 165.9 \text{ MPa}$$

(c) maksymalne naprężenia zredukowane

$$\max \sigma_{red} = \max(\sigma_{red,A}, \sigma_{red,B}) = \max(135.2, 165.9) \text{ MPa} = 165.9 \text{ MPa}$$

G.  $\sigma_{t,x} / \sigma_{p,y} = 80 \text{ MPa} / 144.5 \text{ MPa} = 0.5536 < 0.6$  i  $\sigma_{t,y} = 0$ , więc nie trzeba sprawdzać naprężeń w środku długości krótszego boku.

Odpowiedź: Maksymalne naprężenia zredukowane  $\max \sigma_{red,HMH} = 165.9 \text{ MPa}$ .

Obserwacja: Jeśli naprężenia  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  są tego samego znaku, to naprężenia zredukowane są mniejsze, niż większe z naprężeń składowych, natomiast gdy naprężenia  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  mają różne znaki, to naprężenia zredukowane są większe od największego z nich.

Zadanie 4.4 (wytrzymałość globalna, obliczenia sprawdzające)  
Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia zredukowane  $\max \sigma_{red, HMM}$  w poszyciu dna zewnętrznego statku morskiego.

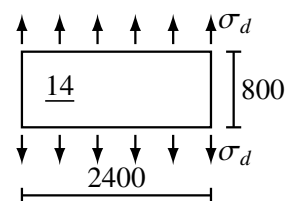
zanurzenie:  $T = 8.8 \text{ m}$

naprężenia tarczowe:  $\sigma_d = 95 \text{ MPa}$

materiał: stal

Sposób rozwiązania:

Zadanie jest analogiczne do zadania 4.3.

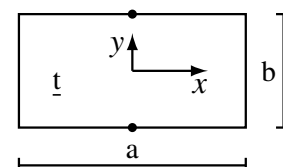


#### A. Uzupełnienie danych

- (a) stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,
- (b) gęstość wody morskiej:  $\rho = 1.025 \text{ t/m}^3$ ,
- (c) przyspieszenie ziemskie:  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

#### B. Oznaczenia, układ współrzędnych, model obliczeniowy

- (a) dane liczbowe:  
 $a = 2400 \text{ mm}$ ,  $b = 800 \text{ mm}$ ,  $t = 14 \text{ mm}$
- (b) układ współrzędnych: oś  $y$  równoległa do boku „ $b$ ”
- (c) model obliczeniowy:
  - płyta prostokątna, utwierdzona na brzegu, obciążona stałym ciśnieniem,
  - $a/b = 2400 \text{ mm} / 800 \text{ mm} = 3.0 > 2 \Rightarrow$  zgięcie cylindryczne



#### C. Obciążenie

$$p = \rho g T = 1.025 \text{ t/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 8.8 \text{ m} = 88.49 \text{ kPa}$$

#### D. Naprężenia wywołane zginaniem, środek dłuższego boku

$$\sigma_{p,y} = \pm \frac{1}{2} p \left( \frac{b}{t} \right)^2 = \pm \frac{1}{2} \cdot 0.08849 \text{ MPa} \cdot \left( \frac{800 \text{ mm}}{14 \text{ mm}} \right)^2 = \pm 144.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p,x} = \nu \sigma_{p,y} = 0.3 \cdot (\pm 144.5 \text{ MPa}) = \pm 43.4 \text{ MPa}$$

#### E. Naprężenia sumaryczne, środek dłuższego boku

- (a) strona obciążona ciśnieniem – punkt A (rozciąganie)

$$\sigma_x = \sigma_{p,x} = +43.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_{p,y} + \sigma_d = (+144.5 \text{ MPa}) + (95 \text{ MPa}) = +239.5 \text{ MPa}$$

- (b) strona nieobciążona – punkt B (ściskanie)

$$\sigma_x = \sigma_{p,x} = -43.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_{p,y} + \sigma_d = (-144.5 \text{ MPa}) + (95 \text{ MPa}) = -49.5 \text{ MPa}$$

#### F. Naprężenia zredukowane, środek dłuższego boku

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

- (a) strona obciążona ciśnieniem (rozciągana) – punkt A

$$\sigma_{red,A} = \sqrt{(43.4)^2 + (239.5)^2 - (43.4) \cdot (239.5)} \text{ MPa} = 221.0 \text{ MPa}$$

- (b) strona nie obciążona ciśnieniem (ściskana) – punkt B

$$\sigma_{red,B} = \sqrt{(-43.4)^2 + (-49.5)^2 - (-43.4) \cdot (-49.5)} \text{ MPa} = 46.7 \text{ MPa}$$

(c) maksymalne naprężenia zredukowane

$$\max \sigma_{red} = \max(\sigma_{red,A}, \sigma_{red,B}) = \max(221.0, 46.7) \text{ MPa} = 221.0 \text{ MPa}$$

G.  $\sigma_{t,x} = 0$ , więc nie trzeba sprawdzać naprężeń w środku długości krótszego boku.

Odpowiedź: Maksymalne naprężenia zredukowane  $\max \sigma_{red,HMH} = 221.0 \text{ MPa}$ .

Zadanie 4.5 (wytrzymałość globalna, zadanie projektowe)

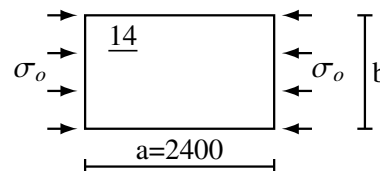
Należy wyznaczyć maksymalną, dopuszczalną szerokość pola płytowego dna wewnętrznego, jeśli:

ciśnienie:  $p = 90 \text{ kPa}$

naprężenia tarczowe:  $\sigma_o = 80 \text{ MPa}$

naprężenia dopuszczalne:  $\text{dop } \sigma_{red,HMH} = 145 \text{ MPa}$

materiał: stal



Sposób rozwiązania:

Modelem będzie płyta prostokątna utwierdzona na brzegu.

Przyjmujemy wstępne założenia (potem trzeba będzie je sprawdzić):

1.  $a/b \geq 2$

2.  $\max \sigma_{red}$  są w środku dłuższego boku.

Przyjmując oś  $x$  równoległą do boku  $a$ , warunek  $\max \sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y} < \text{dop } \sigma_{red}$ , w którym  $\sigma_x = \nu \sigma_{p,y}$ ,  $\sigma_y = \sigma_{p,y}$  oraz  $\sigma_{p,y} = \pm 0.5p(b/t)^2$ , przekształcamy tak, aby parametr „ $b$ ” znalazł się po jednej stronie nierówności, a reszta po drugiej. Obliczenia trzeba będzie wykonać dla punktów A i B, bo naprężenia  $\sigma_{p,y}$  mają tam różne znaki.

Rezultat końcowy:  $\max b = \min(b_A, b_B)$ .

A. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,

B. Rozwinięcie warunku „ $\max \sigma_{red}$  są w środku dłuższego boku”.

Warunek ten jest spełniony, jeśli  $\sigma_{p,y} > 0.6 \cdot \sigma_o$ , więc:

$$\frac{1}{2}p\left(\frac{b}{t}\right)^2 > 0.6\sigma_o \Rightarrow \left(\frac{b}{t}\right)^2 > 1.2\frac{\sigma_o}{p} \Rightarrow \frac{b}{t} > \sqrt{1.2\frac{\sigma_o}{p}}$$

podstawiając dane, otrzymamy:

$$\frac{b}{t} > \sqrt{1.2 \cdot \frac{80 \text{ MPa}}{90 \text{ kPa}}} = 32.66$$

C. Strona rozciągana – punkt A

oznaczamy  $x \equiv \left(\frac{b}{t}\right)^2$  (zmienna bezwymiarowa)

$$\sigma_{p,y} = 0.5p \cdot x; \quad \sigma_{p,x} = 0.5\nu p \cdot x; \quad \sigma_x = 0.5\nu p \cdot x - \sigma_o; \quad \sigma_y = 0.5p \cdot x$$

$$\max \sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y} < \text{dop } \sigma_{red} = \sigma_d \Rightarrow \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y < \sigma_d^2$$

$$(0.5\nu p \cdot x - \sigma_o)^2 + (0.5p \cdot x)^2 - (0.5\nu p \cdot x - \sigma_o) \cdot (0.5p \cdot x) < \sigma_d^2$$

$$0.25p^2\nu^2 \cdot x^2 - p\nu\sigma_o \cdot x + \sigma_o^2 + 0.25p^2 \cdot x^2 - 0.25p^2\nu \cdot x^2 + 0.5p\sigma_o \cdot x < \sigma_d^2$$

$$0.25p^2(1 - \nu + \nu^2) \cdot x^2 + p\sigma_o(0.5 - \nu) \cdot x - (\sigma_d^2 - \sigma_o^2) < 0$$

dzielimy obie strony przez  $\sigma_o^2$ , aby wyrażenie stało się bezwymiarowe

$$0.25(p/\sigma_o)^2(1 - \nu + \nu^2) \cdot x^2 + (p/\sigma_o)(0.5 - \nu) - [(\sigma_d/\sigma_o)^2 - 1] < 0$$

podstawiamy dane liczbowe

$$0.25(p/\sigma_o)^2(1 - \nu + \nu^2) = 0.25(0.090 \text{ MPa} / 80 \text{ MPa})^2 \cdot (1 - 0.3 + 0.3^2) = 2.4996 \cdot 10^{-7}$$

$$(p/\sigma_o)(0.5 - \nu) = (0.090 \text{ MPa} / 80 \text{ MPa}) \cdot (0.5 - 0.3) = 2.25 \cdot 10^{-4}$$

$$[(\sigma_d/\sigma_o)^2 - 1] = [(145 \text{ MPa} / 80 \text{ MPa})^2 - 1] = 2.2852$$

rozwiązujemy wyrażenie kwadratowe

$$x^2 + 900.14 \cdot x - 9.1421 \cdot 10^6 < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 6113.81; \quad x_1 = -3507.0; \quad x_2 = 2606.8$$

pierwiastek  $x_1$  odrzucamy, gdyż musi być  $x > 0$ . Nierówność kwadratowa jest spełniona dla  $x < x_2$ , więc

$$x \equiv \left(\frac{b}{t}\right)^2 < 2606.8 \Rightarrow \frac{b}{t} < 51.057 \Rightarrow b < 51.057 \cdot 14 \text{ mm} = 714.80 \text{ mm}$$

Sprawdzenie, czy wynik spełnia założenia:

$$a/b = 2400 \text{ mm} / 714.80 \text{ mm} = 3.358 > 2 \Rightarrow \text{założenie spełnione}$$

$$b/t = 51.06 > 32.66 \Rightarrow \text{założenie spełnione}$$

Wobec tego:  $\max b_A = 714.8 \text{ mm}$ .

#### D. Strona ściskana – punkt B

oznaczamy  $x \equiv \left(\frac{b}{t}\right)^2$  (zmienna bezwymiarowa)

$$\sigma_{p,y} = -0.5p \cdot x; \quad \sigma_{p,x} = -0.5p\nu \cdot x; \quad \sigma_x = -0.5p\nu \cdot x - \sigma_o; \quad \sigma_y = -0.5p \cdot x$$

$$\max \sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y} < \text{dop } \sigma_{red} = \sigma_d \Rightarrow \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y < \sigma_d^2$$

$$(-0.5p\nu \cdot x - \sigma_o)^2 + (-0.5p \cdot x)^2 - (-0.5p\nu \cdot x - \sigma_o) \cdot (-0.5p \cdot x) < \sigma_d^2$$

$$0.25p^2\nu^2 \cdot x^2 + p\nu\sigma_o \cdot x + \sigma_o^2 + 0.25p^2 \cdot x^2 - 0.25p^2\nu \cdot x^2 - 0.5p\sigma_o \cdot x < \sigma_d^2$$

$$0.25p^2(1 - \nu + \nu^2) \cdot x^2 - p\sigma_o(0.5 - \nu) \cdot x - (\sigma_d^2 - \sigma_o^2) < 0$$

dzielimy obie strony przez  $\sigma_o^2$ , aby wyrażenie stało się bezwymiarowe

$$0.25(p/\sigma_o)^2(1 - \nu + \nu^2) \cdot x^2 - (p/\sigma_o)(0.5 - \nu) - [(\sigma_d/\sigma_o)^2 - 1] < 0$$

podstawiamy dane liczbowe; wyniki są takie same, jak dla p. A

rozwiązujemy wyrażenie kwadratowe

$$x^2 - 900.14 \cdot x - 9.1421 \cdot 10^6 < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 6113.81; \quad x_1 = -2606.8; \quad x_2 = 3507.0$$

pierwiastek  $x_1$  odrzucamy, gdyż musi być  $x > 0$ . Nierówność kwadratowa jest spełniona dla  $x < x_2$ , więc

$$x \equiv \left(\frac{b}{t}\right)^2 < 3507.0 \Rightarrow \frac{b}{t} < 59.220 \Rightarrow b < 59.220 \cdot 14 \text{ mm} = 829.08 \text{ mm}$$

Sprawdzenie, czy wynik spełnia założenia:

$$a/b = 2400 \text{ mm} / 829.08 \text{ mm} = 2.895 > 2 \Rightarrow \text{założenie spełnione}$$

$$b/t = 59.22 > 32.66 \Rightarrow \text{założenie spełnione}$$

Wobec tego:  $\max b_B = 829.1 \text{ mm}$ .

#### E. Maksymalne, dopuszczalne $b$

$$\max b = \min(b_A, b_B) = \min(714.8, 829.1) \text{ mm} = 714.8 \text{ mm}$$

Odpowiedź: Maksymalna, dopuszczalna szerokość pola płytowego  $\max b = 714.8 \text{ mm}$ .



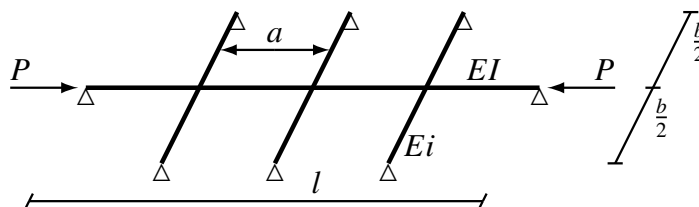
## 9.5 Stateczność rusztów z jednym wzdłużnikiem

### Zadanie 5.1 (obliczenia sprawdzające)

Należy sprawdzić, czy belka wzdłużna przeniesie siłę ściskającą  $P$  nie tracąc stateczności.

$$l/a = 4; \quad l/b = 3; \quad EI/Ei = 3$$

$$P = 11 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



Sposób rozwiązania:

Wykorzystując model belki na sprężynach należy wprost sprawdzić kryteria stateczności lokalnej i ogólnej.

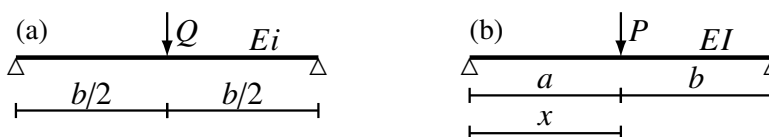
#### A. Sprawdzenie stateczności lokalnej

$$P_E^o = \frac{\pi^2 EI}{a^2} = \frac{\pi^2 EI}{(l/4)^2} = 16 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \Rightarrow \lambda = \frac{P}{P_E^o} = \frac{11 \pi^2 EI / l^2}{16 \pi^2 EI / l^2} = \frac{11}{16} = 0.6875$$

$\lambda = 0.6875 < 1 \Rightarrow$  kryterium stateczności lokalnej spełnione (belka wzdłużna nie traci stateczności pomiędzy belkami poprzecznymi), należy sprawdzić stateczność ogólną.

#### B. Rzeczywista sztywność sprężyn

(a) model obliczeniowy belki poprzecznej, szkic (a)



(b) wzór na ugięcie w miejscu skrzyżowania z belką wzdłużną  
belka poprzeczna to w tablicy belek belka nr 5 – szkic (b):

$$w(x) = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \bar{b} \cdot \bar{x} \cdot \left( 1 - \bar{b}^2 - \bar{x}^2 \right) + \parallel_a (\bar{x} - \bar{a})^3 \right]$$

$$f = w(x = b/2), \text{ więc dla: } \bar{a} = 1/2; \quad \bar{b} = 1/2; \quad \bar{x} = 1/2$$

$$f = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right) + 0 \right] = \frac{Pl^3}{48EI}$$

(c) sztywność sprężyny zastępującej belkę poprzeczną

podstawiając  $P \leftarrow Q$ ;  $l \leftarrow b$ ;  $EI \leftarrow Ei$ , otrzymujemy:

$$K_{rzecz} = \frac{Q}{f} = \frac{Q}{Q b^3 / (48 Ei)} = 48 \frac{Ei}{b^3}$$

zastępując parametry opisujące belkę poprzeczną, parametrami belki wzdłużnej, otrzymujemy:

$$K_{rzecz} = 48 \frac{Ei}{b^3} = 48 \frac{EI/3}{(l/3)^3} = 48 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \frac{27}{l^3} = 432 \frac{EI}{l^3} \quad \P (\text{Sprawdzić jednostki})$$

#### C. Wymagana sztywność sprężyn

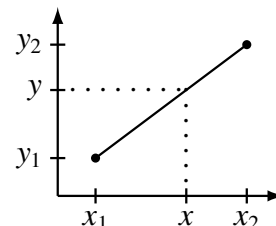
$$K_{wym} = \frac{\pi^4 EI}{a^3} \chi_{j \max}(\lambda)$$

Należy odczytać wartość funkcji  $\chi_{j \max}$  dla  $n = 3$  sprężyn i  $\lambda = 0.6875$ , ale w tablicy wartości

funkcji  $\chi_{j\max}$  nie ma pozycji  $\lambda = 0.6875$ , należy więc dokonać interpolacji sąsiadujących wartości; wystarczającą dokładność zapewni najprostsza interpolacja – liniowa.

Równanie prostej przechodzącej przez punkty  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ :

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$



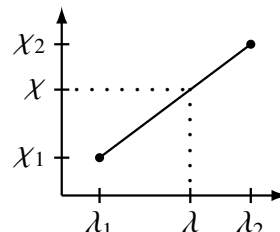
dla  $n = 3$  odczytujemy:

$$\chi_{j\max}(\lambda = 0.65) = 0.1033; \quad \chi_{j\max}(\lambda = 0.70) = 0.1168$$

i wyznaczamy:

$$\chi_{j\max}(\lambda = 0.6875) = \frac{0.1168 - 0.1033}{0.70 - 0.65} \cdot (0.6875 - 0.65) + 0.1033 = 0.1134$$

¶ (Sprawdzić, czy wynik nie jest bzdurny)



Wobec tego:

$$K_{wym} = \frac{\pi^4 EI}{(l/4)^3} \cdot 0.1134 = \frac{\pi^4 EI \cdot 4^3}{l^3} \cdot 0.1134 = 707.0 \frac{EI}{l^3} \quad \text{¶ (Sprawdzić jednostki)}$$

D. Sprawdzenie stateczności ogólnej

$$K_{rzecz} = 432 \frac{EI}{l^3} < K_{wym} = 707.0 \frac{EI}{l^3} \Rightarrow \text{belka nie przeniesie siły } P \text{ nie tracąc stateczności (stateczność niewystarczająca)}$$

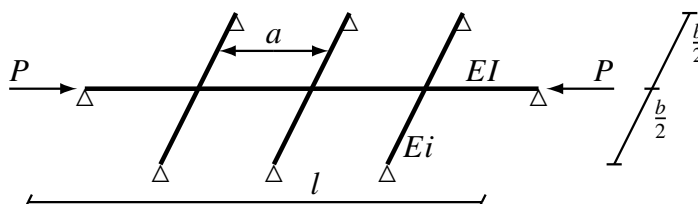
Odpowiedź: Belka wzdłużna nie przeniesie siły ściskającej  $P$  nie tracąc stateczności.

Uwaga: Obliczona bezpośrednio wartość  $\chi_{j\max}(0.6875) = 0.11365$  i  $K_{wym} = 708.5 \frac{EI}{l^3}$ .

### Zadanie 5.2 (poznawcze)

Należy wyznaczyć, jaką maksymalną siłę ściskającą  $P$  przeniesie belka wzdłużna nie tracąc stateczności oraz naszkicować formę utraty stateczności.

$$l/a = 4; \quad l/b = 3; \quad EI/Ei = 3$$



Sposób rozwiązania:

Wykorzystujemy model belki na sprężynach oraz kryteria stateczności lokalnej i ogólnej. Dla każdego z tych kryteriów niezależnie wyznaczamy  $\max P$ :  $P_{lok}$  i  $P_{og}$ . Wynik końcowy, to  $P = \min(P_{lok}, P_{og})$ .

A. Kryterium stateczności lokalnej

$$\lambda = \frac{P}{P_E^o} < 1 \quad \text{gdzie} \quad P_E^o = \frac{\pi^2 EI}{a^2} = \frac{\pi^2 EI}{(l/4)^2} = 16 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Wielkość  $P$  nie jest uwikłana, więc

$$P < P_E^o = 16 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

B. Kryterium stateczności ogólnej

$$K_{rzecz} > K_{wym} \quad \text{gdzie} \quad K_{wym} = \frac{\pi^4 EI}{a^3} \chi_{j\max}(\lambda)$$

Siła  $P$  nie występuje wprost, ale jest „ukryta” w parametrze  $\lambda$ , który jest argumentem stabilizowanej funkcji  $\chi_{j\max}$ . Należy więc najpierw wyznaczyć dopuszczalne  $\chi_{j\max}$ , następnie  $\lambda$ , a dopiero wtedy  $P$ .

- Sztywność sprężyn zastępujących belki poprzeczne  $K_{rzecz}$  może być wyznaczona według algorytmu podanego w zad. 5.1, a wobec tego, że ruszt jest identyczny, wykorzystamy uzyskany tam wynik:  $K_{rzecz} = 432 \frac{EI}{l^3}$ .

- Dopuszczalne  $\chi_{j\max}$

$$K_{rzecz} > K_{wym} = \frac{\pi^4 EI}{a^3} \chi_{j\max}(\lambda) \Rightarrow \chi_{j\max} < K_{rzecz} \cdot \frac{a^3}{\pi^4 EI}$$

Podstawiamy wartości liczbowe i otrzymujemy:

$$\chi_{j\max} < 432 \frac{EI}{l^3} \cdot \frac{l^3}{4^3 \pi^4 EI} = 0.06930$$

- Wartość  $\lambda$

Należałoby w tablicy  $\chi_{j\max}(n, \lambda)$  odnaleźć w kolumnie  $n = 3$  wartość  $\chi_{j\max} = 0.06930$  i odczytać dla niej wartość  $\lambda$  oraz liczbę półfal formy utraty stateczności „ $j$ ”. Ale taka wartość nie występuje, należy więc dokonać interpolacji liniowej z wartości „sąsiednich” w kolumnie  $n = 3$ :

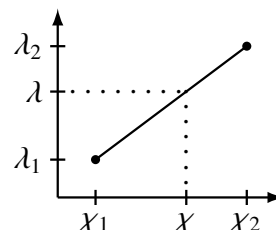
$$\text{dla } n = 3 \quad \text{i} \quad \lambda = 0.5 \quad \chi_{j\max} = 0.0637, \quad j = 2$$

$$\text{dla } n = 3 \quad \text{i} \quad \lambda = 0.55 \quad \chi_{j\max} = 0.0767, \quad j = 2$$

i wyznaczamy:

$$\lambda(\chi_{j\max} = 0.06930) = \frac{0.55 - 0.5}{0.0767 - 0.0637} \cdot (0.06930 - 0.0637) + 0.5 = 0.5215$$

¶ (Sprawdzić, czy wynik nie jest bzdurny)



- Siła  $P$

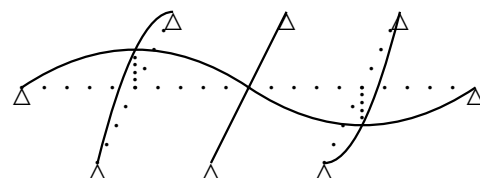
$$\lambda = \frac{P}{P_E^o} \Rightarrow P = P_E^o \cdot \lambda = 16 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot 0.5215 = 8.344 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

### C. Maksymalna siła ściskająca

$$\max P = \min(16; 8.344) \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 8.344 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 82.35 \frac{EI}{l^2}$$

### D. Forma utraty stateczności

Na belce wzdłużnej tworzą się  $j = 2$  półfale sinusoidy, a belki poprzeczne zginają się zgodnie z warunkami brzegowymi i warunkami zgodności przemieszczeń.



Odpowiedź: Maksymalna siła ściskająca, którą może przenieść belka wzdłużna nie tracąc stateczności  $P = 8.344 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 82.35 \frac{EI}{l^2}$

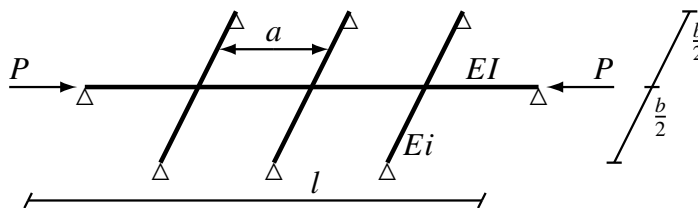
*Uwaga:* Formę utraty stateczności dało się określić dzięki temu, że dla obu „sąsiadujących” wartości  $\chi_{j\max}$  była ta sama wartość  $j = 2$ . Obliczona bezpośrednio wartość  $\lambda = 0.5216$ .

Zadanie 5.3 (projektowe)

Należy wyznaczyć taką minimalną sztywność  $Ei$  belek poprzecznych, aby belka wzdłużna przeniosła siłę ściskającą  $P$  nie tracąc stateczności.

$$l/a = 4; \quad l/b = 3$$

$$P = 11 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



Sposób rozwiązania:

Wykorzystując model belki na sprężynach oraz kryteria stateczności lokalnej i ogólnej, problem rozwiązujemy tak:

(1) Korzystając z kryterium wytrzymałości lokalnej sprawdzamy, czy belka wzdłużna, niezależnie od tego, jak sztywne są belki poprzeczne, nie straci stateczności lokalnie; jeśli straci, to postawione problemu nie da się rozwiązać.

(2) Znając postać konstrukcji belek poprzecznych wyznaczamy  $K_{rzecz}$  jako funkcję na razie nieznanej sztywności  $Ei$ .

(3) Wyznaczamy wymaganą sztywność sprężyn  $K_{wym}$ , a następnie z kryterium stateczności ogólnej  $K_{rzecz} > K_{wym}$  wyznaczamy wymaganą sztywność belek poprzecznych  $Ei$ .

## A. Sprawdzenie stateczności lokalnej

$$P_E^o = \frac{\pi^2 EI}{a^2} = \frac{\pi^2 EI}{(l/4)^2} = 16 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \Rightarrow \lambda = \frac{P}{P_E^o} = \frac{11 \pi^2 EI / l^2}{16 \pi^2 EI / l^2} = \frac{11}{16} = 0.6875$$

$\lambda = 0.6875 < 1 \Rightarrow$  kryterium stateczności lokalnej spełnione (belka wzdłużna nie traci stateczności pomiędzy belkami poprzecznymi); kontynuujemy obliczenia, bo istnieje rozwiązanie.

## B. Rzeczywista sztywność sprężyn

Sztywność sprężyn zastępujących belki poprzeczne  $K_{rzecz}$  może być wyznaczona według algorytmu podanego w zad. 5.1, a jako że ruszt jest identyczny, wykorzystamy uzyskany tam wynik:  $K_{rzecz} = 48 \frac{Ei}{b^3}$ . Jak widać, wykorzystaliśmy postać zawierającą parametry opisujące belkę poprzeczną, bo jeszcze nie znamy wartości liczbowej  $Ei$ .

## C. Wymagana sztywność sprężyn

$$K_{wym} = \frac{\pi^4 EI}{a^3} \chi_{j \max}(\lambda)$$

Ruszt jest identyczny, jak w zadaniu 5.1, więc ponownie wykorzystamy uzyskany tam rezultat:

$$K_{wym} = 707.0 \frac{EI}{l^3}$$

D. Wyznaczenie  $Ei$  z kryterium stateczności ogólnej

$$K_{rzecz} > K_{wym} \Rightarrow K_{rzecz} = 48 \frac{Ei}{b^3} > K_{wym} = 707.0 \frac{EI}{l^3}$$

$$Ei > \frac{b^3}{48} \cdot 707.0 \frac{EI}{l^3} = \frac{707.0}{48} \cdot \frac{1}{(l/b)^3} EI = \frac{707.0}{48} \cdot \frac{1}{3^3} EI = 0.5455 EI$$

Odpowiedź: Minimalna, wymagana sztywność giętna belek poprzecznych, to  $Ei = 0.5455 EI$ .

Uwaga: Z obliczeń bezpośrednich:  $\chi_{j \max}(0.6875) = 0.11365$ ,  $K_{wym} = 708.5 EI/l^3$ , wymagane  $Ei > 0.5467 EI$ .

## 9.6 Stateczność płyt prostokątnych

### Zadanie 6.1

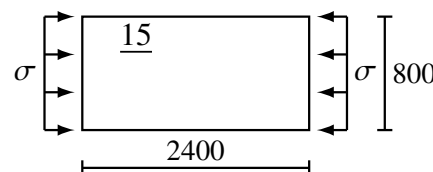
Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia ściskające  $\max \sigma$ , które może przenieść płyta poszycia dna zewnętrznego nie tracąc stateczności oraz naszkicować formę utraty stateczności

zanurzenie:  $T = 8.8 \text{ m}$

materiał: stal

Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. Przyjmujemy, że obciążenie poprzeczne nie ma wpływu na stateczność. W przypadku ściskania i zagrożenia utratą stateczności,  $\max \sigma = \sigma_E$ , więc można wprost wykorzystać stosowny wzór.



#### A. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

#### B. Oznaczenia

Zgodnie z oznaczeniami we wzorze, bok „ $a$ ” ma być równoległy do kierunku naprężeń ściskających, więc

$a = 2400 \text{ mm}$ ,  $b = 800 \text{ mm}$ ,  $t = 15 \text{ mm}$

#### C. Maksymalne naprężenia ściskające nie powodujące utraty stateczności

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{a/m} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{a/m}{b} \right)^2 \right]^2$$

(a) liczba półfal na kierunku boku  $a$ :

$$a/b = 2400 \text{ mm} / 800 \text{ mm} = 3.0 \Rightarrow m = 3$$

(b) naprężenia eulerowskie

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left( \frac{15 \text{ mm}}{2400 \text{ mm} / 3} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{2400 \text{ mm} / 3}{800 \text{ mm}} \right)^2 \right]^2 = 65.46 \text{ MPa} \cdot 4 = 261.8 \text{ MPa}$$

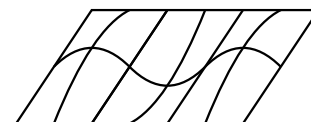
(c) maksymalne, dopuszczalne naprężenia

$$\max \sigma = \sigma_E = 261.8 \text{ MPa}$$

#### D. Forma utraty stateczności

na kierunku boku  $a$ :  $m=3$  półfale

na kierunku boku  $b$ : 1 półfala



Odpowiedź: Maksymalne naprężenia ściskające, które może przenieść płyta nie tracąc stateczności, to  $\max \sigma = 261.8 \text{ MPa}$ .

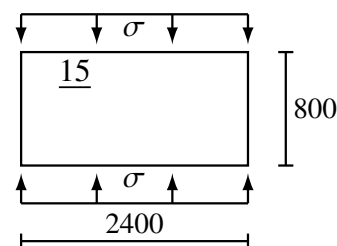
*Uwaga:* Wyznaczone  $\max \sigma$  są większe od granicy plastyczności stali NW, więc w przypadku płyty wykonanej z takiej stali, wcześniej nastąpi uplastycznienie i dalszych zjawisk już nie opisuje zastosowany wyżej wzór.

Zadanie 6.2

Należy sprawdzić stateczność płyty poszycia pokładu

naprężenia ściskające:  $\sigma = 90 \text{ MPa}$

materiał: stal



Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. W przypadku ściskania płyta nie traci stateczności, jeśli  $\sigma < \sigma_E$ , a do wyznaczenia naprężeń  $\sigma_E$  można wprost wykorzystać stosowny wzór.

A. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

B. Oznaczenia

Zgodnie z oznaczeniami we wzorze, bok „a” ma być równoległy do kierunku naprężeń ściskających, więc

$a = 800 \text{ mm}$ ,  $b = 2400 \text{ mm}$ ,  $t = 15 \text{ mm}$

C. Wyznaczenie  $\sigma_E$

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{a/m} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{a/m}{b} \right)^2 \right]^2$$

(a) liczba półfal na kierunku boku  $a$ :

$$a/b = 800 \text{ mm} / 2400 \text{ mm} \approx 0.3333 < \sqrt{2} \Rightarrow m = 1$$

(b) naprężenia eulerowskie

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left( \frac{15 \text{ mm}}{800 \text{ mm} / 1} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{800 \text{ mm} / 1}{2400 \text{ mm}} \right)^2 \right]^2 = 65.46 \text{ MPa} \cdot 1.235 = 80.8 \text{ MPa}$$

D. Ocena stateczności

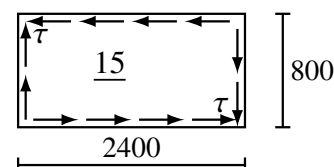
$\sigma = 90 \text{ MPa} > \sigma_E = 80.8 \text{ MPa} \Rightarrow$  stateczność niewystarczająca

Odpowiedź: Stateczność płyty niewystarczająca.

Zadanie 6.3

Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia styczne  $\max \tau$ , które może przenieść płyta środnika wężara nie tracąc stateczności

materiał: stal



Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. W przypadku ścinania i zagrożenia utratą stateczności,  $\max \tau = \tau_E$ , więc można wprost wykorzystać stosowny wzór.

A. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

## B. Oznaczenia

Zgodnie z oznaczeniami we wzorze, musi być  $a/b \geq 1$ , więc

$$a = 2400 \text{ mm}, \quad b = 800 \text{ mm}, \quad t = 15 \text{ mm}$$

## C. Maksymalne naprężenia styczne nie powodujące utraty stateczności

$$\tau_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}, \quad \bar{K} = 5.35 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad \text{dla } \frac{a}{b} \geq 1$$

(a) współczynnik  $\bar{K}$ :

$$\bar{K} = 5.35 + 4 \cdot \left(\frac{800 \text{ mm}}{2400 \text{ mm}}\right)^2 = 5.794$$

(b) naprężenia eulerowskie

$$\tau_E \approx \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1-0.3^2)} \cdot \left(\frac{15 \text{ mm}}{800 \text{ mm}}\right)^2 \cdot 5.794 = 65.46 \text{ MPa} \cdot 5.794 = 379.3 \text{ MPa}$$

(c) maksymalne, dopuszczalne naprężenia

$$\max \tau = \tau_E = 379.3 \text{ MPa}$$

Odpowiedź: Maksymalne naprężenia styczne, które może przenieść płyta nie tracąc stateczności, to  $\max \tau = 379.3 \text{ MPa}$ .

*Uwaga:* Dla wyznaczonych  $\max \tau$ , naprężenia zredukowane  $\sigma_{red} = \sqrt{3} \cdot \tau = 657 \text{ MPa}$  są dużo większe od granicy plastyczności typowych stali stosowanych na kadłuby statków, więc zapewne wcześniej nastąpi uplastycznienie i dalszych zjawisk już nie będzie opisywać zastosowany wyżej wzór.

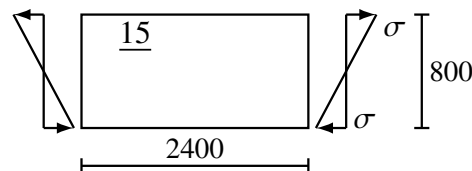
Zadanie 6.4

Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia  $\max \sigma$ , które może przenieść zginana tarczowo płyta środnika wzdłużnika nie tracąc stateczności

materiał: stal

Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. W przypadku zagrożenia utratą stateczności płyty zginanej tarczowo,  $\max \sigma = \sigma_E$ , więc można wprost wykorzystać stosowny wzór.



## A. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

## B. Oznaczenia

Zgodnie z oznaczeniami we wzorze, bok „a” ma być równoległy do kierunku naprężeń ścisających, więc

$$a = 2400 \text{ mm}, \quad b = 800 \text{ mm}, \quad t = 15 \text{ mm}$$

## C. Maksymalne naprężenia nie powodujące utraty stateczności

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}, \quad \bar{K} = \begin{cases} 15.87 + 1.87(b/a)^2 + 8.6(a/b)^2 & \text{dla } a/b < 2/3 \\ 23.9 & \text{dla } a/b \geq 2/3 \end{cases}$$

(a) współczynnik  $\bar{K}$ :

$$a/b = 2400 \text{ mm} / 800 \text{ mm} = 3.0 > 2/3 \Rightarrow \bar{K} = 23.9$$

(b) naprężenia eulerowskie

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left( \frac{15 \text{ mm}}{800 \text{ mm}} \right)^2 \cdot 23.9 = 65.46 \text{ MPa} \cdot 23.9 = 1564.5 \text{ MPa}$$

(c) maksymalne, dopuszczalne naprężenia

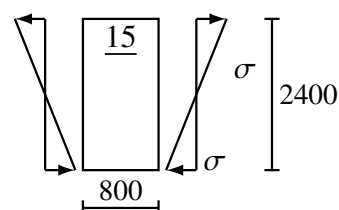
$$\max \sigma = \sigma_E = 1564.5 \text{ MPa}$$

Odpowiedź: Maksymalne naprężenia wywołane zginaniem tarczowym, które może przenieść płyta nie tracąc stateczności, to  $\max \sigma = 1564.5 \text{ MPa}$ .

*Uwaga:* Wyznaczone naprężenia  $\max \sigma = 1564.5 \text{ MPa}$  są dużo większe od granicy plastyczności jakiegokolwiek stali stosowanej na kadłuby statków, więc płyta nie jest zagrożona utratą stateczności w zakresie pracy liniowo-sprężystej.

### Zadanie 6.5

Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia  $\max \sigma$ , które może przenieść zginana tarczowo płyta burty nie tracąc stateczności  
materiał: stal



Sposób rozwiązania:

Zadanie jest analogiczne do zad. 6.4.

A. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

B. Oznaczenia

Zgodnie z oznaczeniami we wzorze, bok „a” ma być równoległy do kierunku naprężeń ścisających, więc

$$a = 800 \text{ mm}, \quad b = 2400 \text{ mm}, \quad t = 15 \text{ mm}$$

C. Maksymalne naprężenia nie powodujące utraty stateczności

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \cdot \bar{K}, \quad \bar{K} = \begin{cases} 15.87 + 1.87(b/a)^2 + 8.6(a/b)^2 & \text{dla } a/b < 2/3 \\ 23.9 & \text{dla } a/b \geq 2/3 \end{cases}$$

(a) współczynnik  $\bar{K}$ :

$$a/b = 800 \text{ mm} / 2400 \text{ mm} = 1/3 < 2/3 \Rightarrow \bar{K} = 15.87 + 1.87 \cdot \left( \frac{3}{1} \right)^2 + 8.6 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^2 = 33.66$$

(b) naprężenia eulerowskie

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left( \frac{15 \text{ mm}}{2400 \text{ mm}} \right)^2 \cdot 33.66 = 7.723 \text{ MPa} \cdot 33.66 = 244.8 \text{ MPa}$$

(c) maksymalne, dopuszczalne naprężenia

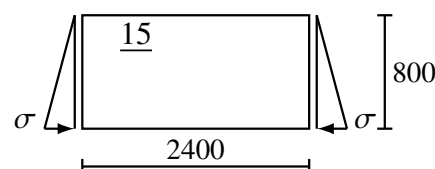
$$\max \sigma = \sigma_E = 244.8 \text{ MPa}$$

Odpowiedź: Maksymalne naprężenia wywołane zginaniem tarczowym, które może przenieść płyta nie tracąc stateczności, to  $\max \sigma = 244.8 \text{ MPa}$ .

### Zadanie 6.6

Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia  $\max \sigma$ , które może przenieść pole płytowe środnika wzdłużnika nie tracąc stateczności

materiał: stal





Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. W przypadku zagrożenia utratą stateczności płyty ściskanej tarczowo obciążeniem „trójkątnym”  $\max \sigma = \sigma_E$ , więc można wprost wykorzystać stosowny wzór.

A. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

B. Oznaczenia

Zgodnie z oznaczeniami we wzorze, bok „a” ma być równoległy do kierunku naprężeń ściskających, więc

$a = 2400 \text{ mm}$ ,  $b = 800 \text{ mm}$ ,  $t = 15 \text{ mm}$

C. Maksymalne naprężenia nie powodujące utraty stateczności

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}, \quad \bar{K} = \begin{cases} 5.02 + 1.56(b/a)^2 + 1.23(a/b)^2 & \text{dla } a/b < 1 \\ 7.81 & \text{dla } a/b \geq 1 \end{cases}$$

(a) współczynnik  $\bar{K}$ :

$$a/b = 2400 \text{ mm} / 800 \text{ mm} = 3.0 > 1 \Rightarrow \bar{K} = 7.81$$

(b) naprężenia eulerowskie

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1-0.3^2)} \cdot \left(\frac{15 \text{ mm}}{800 \text{ mm}}\right)^2 \cdot 7.81 = 65.46 \text{ MPa} \cdot 7.81 = 511.2 \text{ MPa}$$

(c) maksymalne, dopuszczalne naprężenia

$$\max \sigma = \sigma_E = 511.2 \text{ MPa}$$

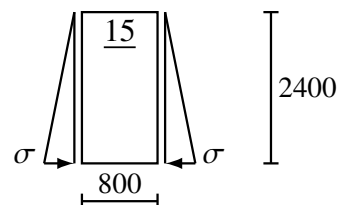
Odpowiedź: Maksymalne naprężenia które może przenieść pole płytowe nie tracąc stateczności, to  $\max \sigma = 511.2 \text{ MPa}$ .

*Uwaga:* Naprężenia  $\max \sigma = 511.2 \text{ MPa}$  są dużo większe od granicy plastyczności typowych stali stosowanych na kadłuby statków, więc zapewne płyta wcześniej ulegnie uplastycznieniu i wyżej użyte zależności już nie będą prawdziwe.

### Zadanie 6.7

Należy wyznaczyć maksymalne naprężenia  $\max \sigma$ , które może przenieść pole płytowe ściany zbiornika nie tracąc stateczności

materiał: stal



Sposób rozwiązania:

Zadanie jest analogiczne, jak poprzednie zad. 6.6.

A. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

B. Oznaczenia

Zgodnie z oznaczeniami we wzorze, bok „a” ma być równoległy do kierunku naprężeń ściskających, więc

$a = 800 \text{ mm}$ ,  $b = 2400 \text{ mm}$ ,  $t = 15 \text{ mm}$

C. Maksymalne naprężenia nie powodujące utraty stateczności

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}, \quad \bar{K} = \begin{cases} 5.02 + 1.56(b/a)^2 + 1.23(a/b)^2 & \text{dla } a/b < 1 \\ 7.81 & \text{dla } a/b \geq 1 \end{cases}$$

(a) współczynnik  $\bar{K}$ :

$$a/b = 800 \text{ mm} / 2400 \text{ mm} = 1/3 < 1 \Rightarrow \bar{K} = 5.02 + 1.56\left(\frac{3}{1}\right)^2 + 1.23\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 19.20$$

(b) naprężenia eulerowskie

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1-0.3^2)} \cdot \left(\frac{15 \text{ mm}}{2400 \text{ mm}}\right)^2 \cdot 19.20 = 7.723 \text{ MPa} \cdot 19.20 = 139.6 \text{ MPa}$$

(c) maksymalne, dopuszczalne naprężenia

$$\max \sigma = \sigma_E = 139.6 \text{ MPa}$$

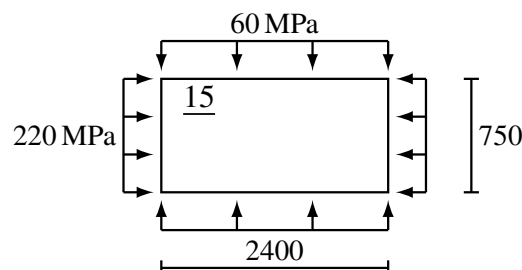
Odpowiedź: Maksymalne naprężenia które może przenieść pole płytowe nie tracąc stateczności, to  $\max \sigma = 139.6 \text{ MPa}$ .

### Zadanie 6.8

Należy sprawdzić stateczność płyty poszycia dna zewnętrznego.

zanurzenie:  $T = 8.6 \text{ m}$

materiał: stal



Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. Przyjmujemy, że obciążenie poprzeczne nie ma wpływu na stateczność. Należy zastosować formułę dla dwukierunkowego ściskania.

A. Uzupełnienie danych

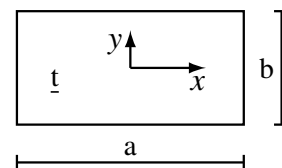
stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

B. Oznaczenia

Przyjmujemy, że „a” oznacza długość dłuższego boku oraz, zgodnie z oznaczeniami we wzorze, oś „x” do niego równoległą, więc:

$$a = 2400 \text{ mm}, \quad b = 750 \text{ mm}, \quad t = 15 \text{ mm},$$

$$\sigma_x = 220 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 60 \text{ MPa}$$



C. Sprawdzenie stateczności

$$\underline{L} \equiv m^2 \sigma_x + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sigma_y < \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left[ m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]^2 \equiv \underline{P}$$

(a) określenie kombinacji  $(m, n)$ , dla których należy sprawdzić stateczność

liczba półfal przy ściskaniu na kierunku x:

$$a/b = 2400 \text{ mm} / 750 \text{ mm} = 3.2 \Rightarrow \bar{m} = 3$$

więc trzeba sprawdzić co najwyżej kombinacje:  $(m = 1, 2, 3; n = 1)$

(b) sprawdzenie  $(m = 1, n = 1)$

$$\underline{L} = 1^2 \cdot 220 \text{ MPa} + 1^2 \cdot \left(\frac{2400 \text{ mm}}{750 \text{ mm}}\right)^2 \cdot 60 \text{ MPa} \approx 220 \text{ MPa} + 614.4 \text{ MPa} = 834.4 \text{ MPa}$$

$$\underline{P} = \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left(\frac{15 \text{ mm}}{2400 \text{ mm}}\right)^2 \cdot \left[1^2 + 1^2 \left(\frac{2400 \text{ mm}}{750 \text{ mm}}\right)^2\right]^2$$

$$\approx 7.273 \text{ MPa} \cdot [1 + 10.24]^2 = 918.9 \text{ MPa}$$

$$\underline{L} < \underline{P} \quad \text{i} \quad m < \bar{m} \Rightarrow \text{liczymy dalej}$$

(c) sprawdzenie ( $m = 2, n = 1$ )

$$\underline{L} = 2^2 \cdot 220 \text{ MPa} + 614.4 \text{ MPa} = 1494.4 \text{ MPa}$$

$$\underline{P} = 7.273 \text{ MPa} \cdot [2^2 + 10.24]^2 = 1474.8 \text{ MPa}$$

$$\underline{L} > \underline{P} \Rightarrow \text{płyta traci stateczność}$$

(d) dla przypadku ( $m = 3, n = 1$ ) nie trzeba wykonywać obliczeń.

Odpowiedź: Płyta straci stateczność (stateczność niewystarczająca).

*Uwaga:* Dwukierunkowo ściskana płyta straciła stateczność, chociaż każde z obciążeń  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ , działając „samodzielnie”, do utraty stateczności nie doprowadzi:

ściskanie tylko na kierunku  $x$  (3 półfale):

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left(\frac{15 \text{ mm}}{2400 \text{ mm}/3}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{2400 \text{ mm}/3}{750 \text{ mm}}\right)^2\right]^2 = 65.46 \text{ MPa} \cdot 4.570$$

$$= 299.2 \text{ MPa} > \sigma_x = 220 \text{ MPa}$$

ściskanie tylko na kierunku  $y$  (1 półfala):

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left(\frac{15 \text{ mm}}{750 \text{ mm}/1}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{750 \text{ mm}/1}{2400 \text{ mm}}\right)^2\right]^2 = 74.47 \text{ MPa} \cdot 1.205$$

$$= 89.7 \text{ MPa} > \sigma_y = 60 \text{ MPa}$$

### Zadanie 6.9 (poznawcze)

Należy określić, ilukrotnie większe bądź mniejsze naprężenia tarczowe, w stosunku do zadanych, może przenieść płyta nie tracąc stateczności; ponadto należy naszkicować formę utraty stateczności. Pozostałe dane: jak w zad. 6.8

Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. Przyjmujemy, że obciążenie poprzeczne nie ma wpływu na stateczność. Należy zastosować formułę dla dwukierunkowego ściskania, ale obliczenia należy wykonać dla wszystkich  $m = 1, \dots, \bar{m}$ , gdyż rozwiązaniem jest ta wartość  $m$ , dla której  $\underline{P}/\underline{L} = \min$ .

Zadanie jest analogiczne do zad. 6.8, więc wykorzystamy wyniki tam uzyskane.

A. Uzupełnienie danych ...

B. Oznaczenia ...

C. Sprawdzenie stateczności

$$\underline{L} \equiv m^2 \sigma_x + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sigma_y < \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left[m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2 \equiv \underline{P}$$

(a) określenie kombinacji ( $m, n$ ), dla których należy sprawdzić stateczność  
... trzeba sprawdzić kombinacje: ( $m = 1, 2, 3; n = 1$ )

(b) obliczenia dla ( $m = 1, n = 1$ )

$$\underline{L} = \dots = 220 \text{ MPa} + 614.4 \text{ MPa} = 834.4 \text{ MPa}$$

$$\underline{P} = \dots = 7.273 \text{ MPa} \cdot [1 + 10.24]^2 = 918.9 \text{ MPa}$$

$$\beta_1 = \underline{P} / \underline{L} = 918.9 \text{ MPa} / 834.4 \text{ MPa} = 1.101$$

(c) obliczenia dla ( $m = 2, n = 1$ )

$$\underline{L} = 2^2 \cdot 220 \text{ MPa} + 614.4 \text{ MPa} = 1494.4 \text{ MPa}$$

$$\underline{P} = 7.273 \text{ MPa} \cdot [2^2 + 10.24]^2 = 1474.8 \text{ MPa}$$

$$\beta_2 = \underline{P} / \underline{L} = 0.9869$$

(d) obliczenia dla ( $m = 3, n = 1$ )

$$\underline{L} = 3^2 \cdot 220 \text{ MPa} + 614.4 \text{ MPa} = 2594.4 \text{ MPa}$$

$$\underline{P} = 7.273 \text{ MPa} \cdot [3^2 + 10.24]^2 = 2692.3 \text{ MPa}$$

$$\beta_3 = \underline{P} / \underline{L} = 1.038$$

D. Określenie mnożnika obciążenia

Mnożnikiem obciążenia jest minimalna wartość  $\beta$ , więc

$$\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \min(1.101, 0.9869, 1.038) = 0.9869$$

Oznacza to, że dopuszczalne naprężenia tarczowe wynoszą:

$$\sigma_x = 0.9869 \cdot 220 \text{ MPa} = 217.1 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 0.9869 \cdot 60 \text{ MPa} = 59.2 \text{ MPa}$$

E. Określenie formy utraty stateczności.

Formę utraty stateczności opisuje ta para ( $m, n$ ), dla której  $\beta = \min$ , więc formą utraty stateczności są  $m = 2$  półfale na kierunku  $x$  i  $n = 1$  półfala na kierunku  $y$ .

Odpowiedź: Płyta może przenieść co najwyżej 0.9869 zadanego obciążenia tarczowego nie tracąc stateczności; forma utraty stateczności to ( $m = 2, n = 1$ ) półfale.

### Zadanie 6.10

Należy sprawdzić stateczność pola płytowego wzdłużnika.

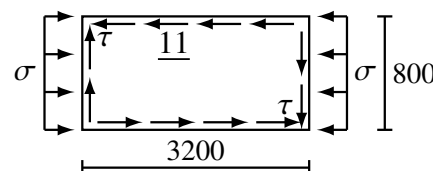
$$\sigma = 120 \text{ MPa}$$

$$\tau = 80 \text{ MPa}$$

materiał: stal

Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. Aby móc zastosować formułę dla jednokierunkowego ściskania ze ścinaniem należy wcześniej wyznaczyć naprężenia  $\sigma_E$  i  $\tau_E$  dla prostych stanów ściskania i ścinania. Wykonując te wstępne obliczenia należy na bieżąco sprawdzać, czy płyta nie traci stateczności pod wpływem „pojedynczych” obciążeń.



A. Uzupełnienie danych

$$\text{stałe materiałowe stali: } E = 206 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3$$

B. Jednokierunkowe ściskanie

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{a/m} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{a/m}{b} \right)^2 \right]$$

(a) oznaczenia

zgodnie z oznaczeniami we wzorze, bok „ $a$ ” ma być równoległy do kierunku naprężeń ściskających, więc

$$a = 3200 \text{ mm}, \quad b = 800 \text{ mm}, \quad t = 11 \text{ mm}$$

(b) liczba półfal na kierunku boku  $a$ :

$$a/b = 3200 \text{ mm} / 800 \text{ mm} = 4.0 \Rightarrow m = 4$$

(c) naprężenia eulerowskie

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left( \frac{11 \text{ mm}}{3200 \text{ mm}/4} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{3200 \text{ mm}/4}{800 \text{ mm}} \right)^2 \right]^2 = 35.20 \text{ MPa} \cdot 4.0 = 140.8 \text{ MPa}$$

(d) sprawdzenie, czy płyta nie traci stateczności

$$\sigma_E = 140.8 \text{ MPa} > \sigma = 120.0 \text{ MPa} \Rightarrow \text{płyta nie traci stateczności wskutek samego ściskania.}$$

C. Ścinanie tarczowe

$$\tau_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \cdot \bar{K}, \quad \bar{K} = 5.35 + 4 \left( \frac{b}{a} \right)^2, \quad \text{dla } \frac{a}{b} \geq 1$$

(a) oznaczenia

zgodnie z oznaczeniami we wzorze, musi być  $a/b \geq 1$ , więc  
 $a = 3200 \text{ mm}$ ,  $b = 800 \text{ mm}$ ,  $t = 11 \text{ mm}$

(b) współczynnik  $\bar{K}$ :

$$\bar{K} = 5.35 + 4 \cdot \left( \frac{800 \text{ mm}}{3200 \text{ mm}} \right)^2 = 5.6$$

(c) naprężenia eulerowskie

$$\tau_E \approx \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left( \frac{11 \text{ mm}}{800 \text{ mm}} \right)^2 \cdot 5.6 = 35.2 \text{ MPa} \cdot 5.6 = 197.1 \text{ MPa}$$

(d) sprawdzenie, czy płyta nie traci stateczności

$$\tau_E = 197.1 \text{ MPa} > \tau = 80.0 \text{ MPa} \Rightarrow \text{płyta nie traci stateczności wskutek samego ścinania.}$$

D. Sprawdzenie stateczności przy równoczesnym działaniu  $\sigma$  i  $\tau$

$$\frac{\sigma}{\sigma_E} + \left( \frac{\tau}{\tau_E} \right)^2 = \frac{120 \text{ MPa}}{140.8 \text{ MPa}} + \left( \frac{80 \text{ MPa}}{197.1 \text{ MPa}} \right)^2 = 0.8523 + 0.1647 = 1.017 > 1 \Rightarrow \text{stateczność niewystarczająca}$$

Odpowiedź: Płyta straci stateczność (stateczność niewystarczająca).

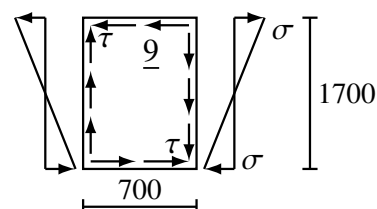
### Zadanie 6.11

Należy sprawdzić stateczność pola płytowego dennika.

$$\sigma = 140 \text{ MPa}$$

$$\tau = 80 \text{ MPa}$$

materiał: stal



Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. Aby móc zastosować formułę dla zginania tarczowego ze ścinaniem należy wcześniej wyznaczyć naprężenia  $\sigma_E$  i  $\tau_E$  dla prostych stanów zginania i ścinania. Wykonując te wstępne obliczenia należy na bieżąco sprawdzać, czy płyta nie traci stateczności pod wpływem „pojedynczych” obciążeń.

A. Uzupełnienie danych

$$\text{stałe materiałowe stali: } E = 206 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3$$

## B. Zginanie tarczowe

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}, \quad \bar{K} = \begin{cases} 15.87 + 1.87(b/a)^2 + 8.6(a/b)^2 & \text{dla } a/b < 2/3 \\ 23.9 & \text{dla } a/b \geq 2/3 \end{cases}$$

## (a) oznaczenia

zgodnie z oznaczeniami we wzorze, bok „a” ma być równoległy do kierunku naprężeń ściskających, więc

$$a = 700 \text{ mm}, \quad b = 1700 \text{ mm}, \quad t = 9 \text{ mm}$$

(b) współczynnik  $\bar{K}$ :

$$a/b = 700 \text{ mm} / 1700 \text{ mm} = 0.4118 < 2/3 \Rightarrow$$

$$\bar{K} = 15.87 + 1.87/0.4118^2 + 8.6 \cdot 0.4118^2 = 28.36$$

## (c) naprężenia eulerowskie

$$\sigma_E \approx \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1-0.3^2)} \cdot \left(\frac{9 \text{ mm}}{1700 \text{ mm}}\right)^2 \cdot 28.36 = 5.218 \text{ MPa} \cdot 28.36 = 148.0 \text{ MPa}$$

## (d) sprawdzenie, czy płyta nie traci stateczności

$$\sigma_E = 148.0 \text{ MPa} > \sigma = 140.0 \text{ MPa} \Rightarrow \text{płyta nie traci stateczności wskutek samego zginania.}$$

## C. Ścinanie tarczowe

$$\tau_E \approx \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}, \quad \bar{K} = 5.35 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad \text{dla } \frac{a}{b} \geq 1$$

## (a) oznaczenia

zgodnie z oznaczeniami we wzorze, musi być  $a/b \geq 1$ , więc

$$a = 1700 \text{ mm}, \quad b = 700 \text{ mm}, \quad t = 9 \text{ mm}$$

(b) współczynnik  $\bar{K}$ :

$$\bar{K} = 5.35 + 4 \cdot \left(\frac{700 \text{ mm}}{1700 \text{ mm}}\right)^2 = 6.028$$

## (c) naprężenia eulerowskie

$$\tau_E \approx \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1-0.3^2)} \cdot \left(\frac{9 \text{ mm}}{700 \text{ mm}}\right)^2 \cdot 6.028 = 30.78 \text{ MPa} \cdot 6.028 = 185.5 \text{ MPa}$$

## (d) sprawdzenie, czy płyta nie traci stateczności

$$\tau_E = 185.5 \text{ MPa} > \tau = 80.0 \text{ MPa} \Rightarrow \text{płyta nie traci stateczności wskutek samego ścinania.}$$

D. Sprawdzenie stateczności przy równoczesnym działaniu  $\sigma$  i  $\tau$ 

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_E}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_E}\right)^2 = \left(\frac{140 \text{ MPa}}{148.0 \text{ MPa}}\right)^2 + \left(\frac{80 \text{ MPa}}{185.5 \text{ MPa}}\right)^2 = 0.8948 + 0.1860 = 1.0808 > 1 \Rightarrow$$

stateczność niewystarczająca

Odpowiedź: Płyta straci stateczność (stateczność niewystarczająca).

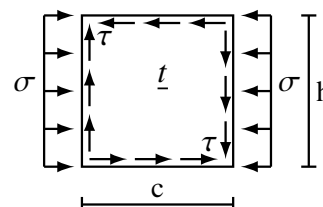
Zadanie 6.12 (projektowe)

Należy wyznaczyć maksymalną, dopuszczalną ze względu na kryterium stateczności, szerokość pola płytowego wzdłużnika.

$$h = 1800 \text{ mm}, \quad t = 13 \text{ mm}$$

$$\sigma = 100 \text{ MPa}, \quad \tau = 65 \text{ MPa}$$

materiał: stal



Sposób rozwiązania:

Modelem obliczeniowym jest płaska płyta prostokątna podparta przegubowo na konturze. Chcąc spełnić kryterium  $\frac{\sigma}{\sigma_E} + \left(\frac{\tau}{\tau_E}\right)^2 < 1$ , muszą być spełnione warunki  $\sigma/\sigma_E < 1$  i  $\tau/\tau_E < 1$ . Płyta jest bardziej odporna na utratę stateczności wskutek ścinania niż wskutek ściskania i, jak wynika z danych,  $\tau < \sigma$ , więc  $\tau/\tau_E < \sigma/\sigma_E$ . Ponadto czynnik  $\tau/\tau_E$  jest podnoszony do kwadratu (co jeszcze dodatkowo zmniejszy jego udział), więc wyraz  $\sigma/\sigma_E$  ma zdecydowanie większy wpływ na spełnienie kryterium.

Wobec tego zostanie zastosowana metoda kolejnych przybliżeń:

- (1)  $k = 0$ ;
  - (2) z kryterium  $\sigma/\sigma_E < 1$  zostanie wyznaczone  $c^{(0)}$ ;
  - (3) znając  $c^{(k)}$  zostanie wyznaczona wartość  $(\tau/\tau_E)^2$ ;
  - (4)  $k = k + 1$ ;
  - (5) z kryterium  $\sigma/\sigma_E < 1 - (\tau/\tau_E)^2$  zostanie wyznaczona wartość  $c^{(k)}$ ;
  - (6) jeśli  $|c^{(k)} - c^{(k-1)}| > \varepsilon_c$ , to wracamy do (3).
- $\varepsilon_c$  przyjmujemy arbitralnie, ale jako niewielką wartość, np.  $\varepsilon_c = 2 \text{ mm}$ .

#### A. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe stali:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

#### B. Ściskanie – wyprowadzenie wzorów

$$\sigma/\sigma_E < 1 - (\tau/\tau_E)^2 \Rightarrow \sigma < [1 - (\tau/\tau_E)^2] \cdot \sigma_E = \beta \cdot \sigma_E, \quad \text{gdzie } \beta = 1 - (\tau/\tau_E)^2$$

$$\beta \cdot \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{c/m}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{c/m}{h}\right)^2\right]^2 > \sigma \Rightarrow \left(\frac{t}{c/m}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{c/m}{h}\right)^2\right]^2 > \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 \beta} \frac{\sigma}{E}$$

wyrazy po lewej i prawej stronie są dodatnie, więc wynikiem pierwiastkowania są liczby dodatnie

$$\frac{t}{c/m} \left[1 + \left(\frac{c/m}{h}\right)^2\right] > \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 \beta} \frac{\sigma}{E}} \equiv \alpha$$

wyrażenie po prawej stronie nie zawiera niewiadomej  $c$ , więc zostało oznaczone jako  $\alpha$ ; ponadto wprowadzając oznaczenie dla zmiennej  $x \equiv \frac{c}{mh}$ , aby zmienna była bezwymiarowa, otrzymamy:

$$\frac{t}{hx} [1 + x^2] > \alpha \Rightarrow 1 + x^2 > \frac{h}{t} \alpha \cdot x \Rightarrow x^2 - \frac{h}{t} \alpha \cdot x + 1 > 0$$

powyższy trójmian kwadratowy ma pierwiastki rzeczywiste, jeśli  $\Delta \geq 0$ :

$$\Delta = \left(\frac{h}{t} \alpha\right)^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow \frac{h}{t} \alpha \geq 2$$

#### C. Ściskanie – obliczenia dla $\beta = 1$

$$\alpha = \sqrt{\frac{12(1-0.3^2)}{\pi^2 \cdot 1} \cdot \frac{100 \text{ MPa}}{2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}} = 0.023175$$

$$\frac{h}{t} \alpha = \frac{1800 \text{ mm}}{13 \text{ mm}} \cdot 0.023175 = 3.2088 > 2 \Rightarrow \text{jest rozwiązanie}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2.5093; \quad x_1 = 0.5(3.2088 - 2.5093) = 0.34975; \quad x_2 = 0.5(3.2088 + 2.5093) = 2.8591$$

Analizowana nierówność kwadratowa jest spełniona dla  $x < x_1$  lub  $x > x_2$ .

Pamiętając, że parametr  $m$  jest powiązany z  $c/h$  (np.  $m = 1$  dla  $c/h \leq \sqrt{2}$ ,  $m = 2$  dla  $\sqrt{2} < c/h \leq \sqrt{6}$ , itd.), stwierdzamy, że wyrażenie  $x = \frac{c}{mh} < x_1 = 0.34975$  jest spełnione tylko dla  $m = 1$ , a wyrażenie  $x = \frac{c}{mh} > x_2 = 2.8591$  nie ma rozwiązań. Wobec tego

$$\frac{c}{h} < 0.34975 \Rightarrow c < 0.34975 \cdot h \Rightarrow c < 0.34975 \cdot 1800 \text{ mm} = 629.55 \text{ mm} \equiv c^{(0)}$$

## D. Ścinanie

$$a = h = 1800 \text{ mm}, \quad b = c = 629.55 \text{ mm}, \quad t = 13 \text{ mm}$$

$$\bar{K} = 5.35 + 4 \cdot (629.55 \text{ mm} / 1800 \text{ mm})^2 = 5.8393$$

$$\tau_E = \frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{12(1 - 0.3^2)} \cdot \left( \frac{13 \text{ mm}}{629.55 \text{ mm}} \right)^2 \cdot 5.8393 = 463.6 \text{ MPa}$$

$$(\tau/\tau_E)^2 = \left( \frac{65 \text{ MPa}}{463.6 \text{ MPa}} \right)^2 = 0.019658 \Rightarrow \beta = 1 - 0.019658 = 0.98034$$

E. Ściskanie – obliczenia dla  $\beta = 0.98034$ 

$$\alpha = 0.023407; \quad \frac{h}{t}\alpha = 3.24097 > 2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2.55027; \quad x_1 = 0.34535; \quad x_2 = 2.89562$$

$$x < x_1: \quad \text{dla } m = 1, \quad c < 0.34535 \cdot 1800 \text{ mm} = 621.63 \text{ mm} \equiv c^{(1)}$$

$$|c^{(1)} - c^{(0)}| = |621.63 \text{ mm} - 629.55 \text{ mm}| = 7.92 \text{ mm} > \varepsilon_c = 2 \text{ mm} \Rightarrow \text{liczymy dalej}$$

## F. Ścinanie

$$b = 621.63 \text{ mm}; \quad \bar{K} = 5.827; \quad \tau_E = 474.5 \text{ MPa}$$

$$(\tau/\tau_E)^2 = 0.018765 \Rightarrow \beta = 0.98123$$

G. Ściskanie – obliczenia dla  $\beta = 0.98123$ 

$$\alpha = 0.023396; \quad \frac{h}{t}\alpha = 3.2395 > 2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2.5483; \quad x_1 = 0.3456; \quad x_2 = 2.8939$$

$$x < x_1: \quad \text{dla } m = 1, \quad c < 0.3456 \cdot 1800 \text{ mm} = 622.08 \text{ mm} \equiv c^{(2)}$$

$$|c^{(2)} - c^{(1)}| = |622.08 \text{ mm} - 621.63 \text{ mm}| = 0.45 \text{ mm} < \varepsilon_c = 2 \text{ mm} \Rightarrow \text{koniec obliczeń}$$

Odpowiedź: Maksymalna dopuszczalna szerokość pola płytowego  $c = 622.08 \text{ mm}$ .

Uwaga: Z obliczeń bezpośrednich (metoda prób i błędów) uzyskano  $c = 622.0 \text{ mm}$ .

## 9.7 Metoda Elementów Skończonych

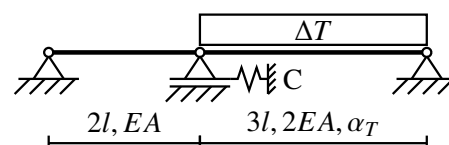
### Zadanie 7.1

Wykorzystując MES, należy wyznaczyć siłę podłużną  $N$  w prawym pręcie.

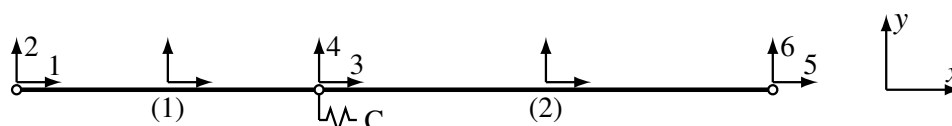
$$C = EA/l$$

Sposób rozwiązania:

Konstrukcja składa się z dwóch prętów, więc zostanie zamodelowana elementami prętowymi. Pręty leżą wzdłuż jednej prostej, środkowa podpora może przesuwac się równoelgle do osi prętów, więc oś  $x$  globalnego układu współrzędnych będzie pokrywać się z osią prętów. Źródłem obciążenia jest różnica temperatur  $\Delta T$ ; jest to obciążenie elementowe, więc trzeba będzie wyznaczyć statycznie równoważne siły węzłowe.



A. Podział na elementy, wybór układów współrzędnych, stopnie swobody konstrukcji.





## B. Macierze sztywności elementów.

Osie lokalnych układów współrzędnych elementów są równoległe do odpowiednich osi globalnych i zwroty są zgodne, więc lokalne i globalne macierze sztywności elementów są identyczne.

$$K_G^{(1)} = K_L^{(1)} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad K_G^{(2)} = K_L^{(2)} = \frac{2EA}{3l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## C. Globalna macierz sztywności

$$K^G = K_G^{(1)} \langle 1, 2, 3, 4 \rangle \oplus K_G^{(2)} \langle 3, 4, 5, 6 \rangle \oplus C \langle 3 \rangle$$

$$K^G = \frac{EA}{6l} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3+4+6 & 0+0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0+0 & 0+0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

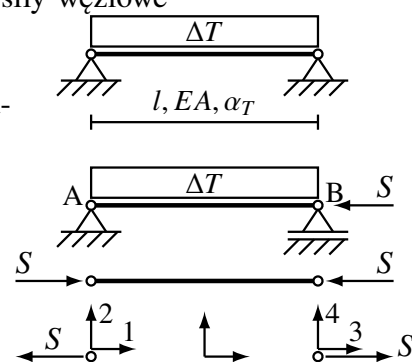
## D. Wektor obciążeń

(a) Zamiana różnicy temperatur  $\Delta T = \text{const}$  na równoważne siły węzłowe

Wykorzystujemy metodę parametrów hiperstatycznych i zasadę superpozycji

$$u_B = l \cdot \alpha_T \cdot \Delta T - \frac{S \cdot l}{EA} = 0 \Rightarrow S = EA \alpha_T \Delta T$$

$$\bar{Q}_L = [-S; 0; S; 0]^T = EA \alpha_T \Delta T [-1; 0; 1; 0]^T$$



(b) Wektor sił węzłowych obciążenia elementu 2

$$EA \leftarrow 2EA, \quad \bar{Q}_G^{(2)} = \bar{Q}_L^{(2)} = 2EA \alpha_T \Delta T [-1; 0; 1; 0]^T$$

(c) Globalny wektor obciążeń

$$Q^G = \bar{Q}_G^{(2)} \langle 3, 4, 5, 6 \rangle = 2EA \alpha_T \Delta T [0; 0; -1; 0; 1; 0]^T$$

## E. Warunki brzegowe

$$u^G \langle 1, 2, 4, 5, 6 \rangle = 0$$

## F. Rozwiązanie układu równań

$$\frac{EA}{6l} [13] \cdot u_3 = -2EA \alpha_T \Delta T \Rightarrow u_3 = -\frac{12}{13} l \alpha_T \Delta T$$

## G. Globalny wektor przemieszczeń

$$u^G = \frac{12}{13} l \alpha_T \Delta T [0; 0; -1; 0; 0; 0]^T$$

## H. Siła w pręcie 2

Najpierw wyznaczamy siły węzłowe  $Q_L = K_L \cdot u_L - \bar{Q}_L$ , a następnie siły wewnętrzne  $N$ .

$$u_L^{(2)} = u_G^{(2)} = u^G \langle 3, 4, 5, 6 \rangle = \frac{12}{13} l \alpha_T \Delta T [-1; 0; 0; 0]^T$$

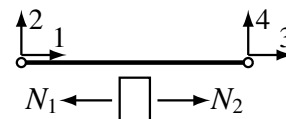
$$Q_L^{(2)} = K_L^{(2)} \cdot u_L^{(2)} - \bar{Q}_L^{(2)} = \frac{2EA}{3l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{12}{13} l \alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2EA \alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{2}{13} EA \alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} -4 - (-13) \\ 0 - 0 \\ 4 - 13 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{13} EA \alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{18}{13} EA \alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = -Q_L^{(2)}(1) = -\frac{18}{13} EA \alpha_T \Delta T$$

$$N_2 = Q_L^{(2)}(3) = -\frac{18}{13} EA \alpha_T \Delta T$$

$$N^{(2)} = -\frac{18}{13} EA \alpha_T \Delta T$$

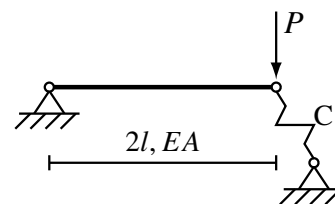


Odpowiedź: Pręt jest ściskany siłą  $N = \frac{18}{13} EA \alpha_T \Delta T$

### Zadanie 7.2

Wykorzystując MES, należy wyznaczyć siłę w pręcie i siłę w sprężynie.

Sprężyna o sztywności  $C = 2 \frac{EA}{l}$  jest odchylona o kąt  $\varphi = 30^\circ$  od linii prostopadłej do osi pręta.

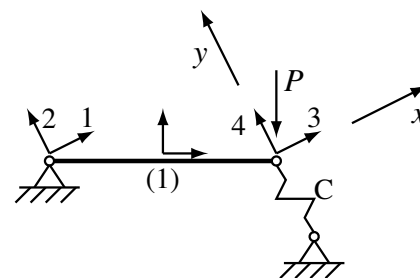


Sposób rozwiązania:

Konstrukcja zostanie zamodelowana elementem prętowym. Układ globalny trzeba przyjąć tak, aby jedna z jego osi była równoległa do sprężyny.

A. Podział na elementy, wybór układów współrzędnych, stopnie swobody konstrukcji.

Oś  $y$  globalnego układu współrzędnych leży na osi sprężyny. Pomiędzy osią  $x$  globalnego układu współrzędnych, a osią  $x$  lokalnego układu współrzędnych pręta jest kąt  $\alpha = 360^\circ - \varphi$ .



B. Macierze sztywności i transformacji elementów.

$$K_L^{(1)} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^{(1)} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

gdzie:  $c = \cos \alpha = \cos(360^\circ - \varphi) = \cos(-\varphi) = \cos(\varphi) = \sqrt{3}/2$ ,  
 $s = \sin \alpha = \sin(360^\circ - \varphi) = \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi) = -1/2$ .

$$\begin{aligned}
K_G^{(1)} &= (A^{(1)})^T \cdot K_L^{(1)} \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A^{(1)} \\
&= \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} c & 0 & -c & 0 \\ s & 0 & -s & 0 \\ -c & 0 & c & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych za  $s$  i  $c$ , otrzymujemy:

$$K_G^{(1)} = \frac{EA}{8l} \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & -1 \\ -3 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

C. Globalna macierz sztywności

$$K^G = K_G^{(1)} \langle 1, 2, 3, 4 \rangle \oplus C \langle 4 \rangle = \frac{EA}{8l} \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & -1 \\ -3 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 1 + 16 \end{bmatrix}$$

D. Globalny wektor obciążeń

$$Q^G = [0; 0; -P \sin \varphi; -P \cos \varphi]^T = \frac{P}{2} [0; 0; -1; -\sqrt{3}]^T$$

E. Warunki brzegowe

$$u^G \langle 1, 2 \rangle = 0$$

F. Rozwiązanie układu równań

$$\widehat{K} \cdot \widehat{u} = \widehat{Q} \Rightarrow \widehat{u} = \widehat{K}^{-1} \cdot \widehat{Q}$$

$$\frac{EA}{8l} \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{P}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{K}^{-1} = \left( \frac{8l}{EA} \right)^2 \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{EA}{8l} \begin{bmatrix} 17 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{6l} \begin{bmatrix} 17 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{6l} \begin{bmatrix} 17 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{P}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{Pl}{12EA} \begin{bmatrix} 17 \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) \\ \sqrt{3} \cdot (-1) + 3 \cdot (-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \frac{Pl}{3EA} \begin{bmatrix} -5 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

G. Globalny wektor przemieszczeń

$$u^G = \frac{Pl}{3EA} [0; 0; -5; -\sqrt{3}]^T$$

H. Siła w pręcie

(a) siły węzłowe

$$Q_L^{(1)} = K_L^{(1)} \cdot u_L^{(1)} - \overline{Q}_L^{(1)}; \quad u_L^{(1)} = A^{(1)} \cdot u_G^{(1)}; \quad u_G^{(1)} = u^G \langle 1, 2, 3, 4 \rangle = \frac{Pl}{3EA} [0; 0; -5; -\sqrt{3}]^T$$

$$u_L^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \frac{Pl}{3EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{Pl}{6EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ -5 - 3 \end{bmatrix} = \frac{2Pl}{3EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ -2 \end{bmatrix}$$

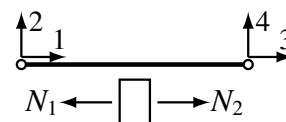
$$Q_L^{(1)} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{2Pl}{3EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{P}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) siły wewnętrzne

$$N_1 = -Q_L^{(1)}(1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}P$$

$$N_2 = Q_L^{(1)}(3) = -\frac{\sqrt{3}}{3}P$$

$$N^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}P$$



I. Siła w sprężynie (I sposób)

$$|S| = |u^G \langle 4 \rangle| \cdot C = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{Pl}{EA} \cdot 2 \frac{EA}{l} = \frac{2\sqrt{3}}{3}P$$

J. Siła w sprężynie (II sposób)

$$|S| = |R^G \langle 4 \rangle|$$

$$R^G = \tilde{K}^G \cdot u^G - Q^G = \frac{EA}{8l} \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & -1 \\ -3 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pl}{3EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} - \frac{P}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{P}{24} \begin{bmatrix} (-3) \cdot (-5) + (\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) \\ (\sqrt{3}) \cdot (-5) + (-1) \cdot (-\sqrt{3}) \\ (3) \cdot (-5) + (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) \\ (-\sqrt{3}) \cdot (-5) + (1) \cdot (-\sqrt{3}) \end{bmatrix} - \frac{P}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{P}{24} \begin{bmatrix} 12 - 0 \\ -4\sqrt{3} - 0 \\ -12 - (-12) \\ 4\sqrt{3} - (-12\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \frac{P}{6} \begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \\ 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

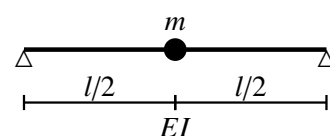
¶ (Sprawdzić  $R(3)$ )

Odpowiedź: Pręt jest ściskany siłą  $N = \frac{\sqrt{3}}{3}P$ , a sprężyna jest ściskana siłą  $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}P$ .

## 9.8 Drgania giętne konstrukcji kadłuba statku

### Zadanie 8.1

Masa skupiona  $m$  jest zamocowana na nieważkiej belce o sztywności giętnej  $EI$  (masa w środku długości, belka podparta przegubowo). Należy wyznaczyć najniższą częstotliwość drgań własnych układu.



Sposób rozwiązania:

Belka jest nieważka, więc można zastosować model „masa na sprężynie”; ma on tylko jedną częstotliwość drgań własnych.

Najpierw należy wyznaczyć sztywność  $k$  sprężyny równoważnej belce zginanej, a następnie wprost użyć wzorów  $\omega = \sqrt{k/m}$  oraz  $f = \omega/(2\pi)$ .

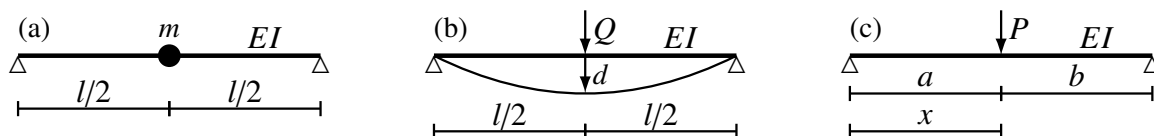
A. Zamiana belki na sprężynę

$$k = \frac{Q}{d} \quad Q - \text{siła}, \quad d - \text{ugięcie}$$

Powyższy wzór jest prawdziwy zarówno dla belki zginanej, jak i dla rozciąganej/ściskanej sprężyny.

(a) model

W miejscu, gdzie jest masa skupiona  $m$  – szkic (a), zostanie przyłożona siła  $Q$  i wyznaczone ugięcie  $d$  – szkic (b).



(b) wzór na ugięcie

Jest to w tablicy belek belka nr 5 – szkic (c), o linii ugięcia:

$$w(x) = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \bar{b} \cdot \bar{x} \cdot \left( 1 - \bar{b}^2 - \bar{x}^2 \right) + \bar{a} (\bar{x} - \bar{a})^3 \right]$$

$$d = w(x = l/2), \text{ więc dla: } \bar{a} = 1/2; \quad \bar{b} = 1/2; \quad \bar{x} = 1/2$$

$$d = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right) + 0 \right] = \frac{Pl^3}{48EI}$$

(c) sztywność sprężyny zastępującej belkę

Podstawiając  $P \leftarrow Q$ ;  $l \leftarrow l$ ;  $EI \leftarrow EI$ , otrzymujemy:

$$k = \frac{Q}{d} = \frac{Q}{Pl^3/(48EI)} = 48 \frac{EI}{l^3}$$

B. Częstość drgań własnych

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{48 \frac{EI}{l^3 \cdot m}} \approx 6.9282 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

C. Częstotliwość

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6.9282}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \approx 1.103 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

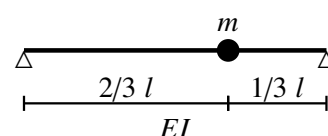
Odpowiedź: Najniższa (i jedyna) częstotliwość drgań własnych układu  $f = 1.103 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ .

### Zadanie 8.2

Masa skupiona  $m$  jest zamocowana na nieważkiej belce o sztywności giętej  $EI$  (masa bliżej jednej z podpór, belka podparta przegubowo). Należy wyznaczyć najniższą częstotliwość drgań własnych układu.

Sposób rozwiązania:

Analogiczny, jak w zadaniu 8.1.



A. Zamiana belki na sprężynę

(a) model analogiczny jak w zadaniu 8.1

(b) wzór na ugięcie

Jest to w tablicy belek belka nr 5 – szkic (c) w zad. 8.1, o linii ugięcia:

$$w(x) = \frac{Pl^3}{6EI} \left[ \bar{b} \cdot \bar{x} \cdot \left( 1 - \bar{b}^2 - \bar{x}^2 \right) + \bar{a} (\bar{x} - \bar{a})^3 \right]$$

$$d = w(x = 2/3 l), \text{ więc dla: } \bar{a} = 2/3; \quad \bar{b} = 1/3; \quad \bar{x} = 2/3$$

$$d = \frac{P l^3}{6 EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^2 - \left( \frac{2}{3} \right)^2 \right) + 0 \right] = \frac{4}{243} \frac{P l^3}{EI}$$

(c) sztywność sprężyny zastępującej belkę

Podstawiając  $P \leftarrow Q$ ;  $l \leftarrow l$ ;  $EI \leftarrow EI$ , otrzymujemy:

$$k = \frac{Q}{d} = \frac{Q}{4Q l^3 / (243 EI)} = \frac{243}{4} \frac{EI}{l^3}$$

B. Częstość drgań własnych

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{243}{4} \frac{EI}{l^3 \cdot m}} \approx 7.7942 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

C. Częstotliwość

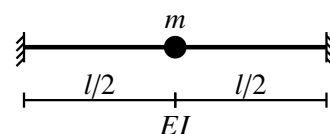
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7.7942}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \approx 1.240 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

Odpowiedź: Najniższa (i jedyna) częstotliwość drgań własnych układu  $f = 1.240 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ .

*Obserwacja:* Mimo że nie zmieniła się ani belka, ani masa, ani warunki brzegowe, to przesunięcie masy bliżej jednej z podpór spowodowało wzrost częstości drgań własnych w stosunku do wyniku z zadania 8.1.

### Zadanie 8.3

Masa skupiona  $m$  jest zamocowana na nieważkiej belce o sztywności giętej  $EI$  (masa w środku długości, belka obustronnie utwierdzona). Należy wyznaczyć najniższą częstotliwość drgań własnych układu.



Sposób rozwiązania:

Analogiczny, jak w zadaniu 8.1.

A. Zamiana belki na sprężynę

(a) model analogiczny jak w zadaniu 8.1

(b) wzór na ugięcie

Jest to w tablicy belek belka nr 13 – oznaczenia jak na szkicu (c) w zad. 8.1, o linii ugięcia:

$$w(x) = \frac{P l^3}{6 EI} \left[ \bar{b}^2 \cdot \bar{x}^2 \cdot (3\bar{a} - (2\bar{a} + 1) \cdot \bar{x}) + \bar{a} (\bar{x} - \bar{a})^3 \right]$$

$$d = w(x = l/2), \text{ więc dla: } \bar{a} = 1/2; \quad \bar{b} = 1/2; \quad \bar{x} = 1/2$$

$$d = \frac{P l^3}{6 EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left( 3 \cdot \frac{1}{2} - \left( 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \right) + 0 \right] = \frac{P l^3}{192 EI}$$

(c) sztywność sprężyny zastępującej belkę

Podstawiając  $P \leftarrow Q$ ;  $l \leftarrow l$ ;  $EI \leftarrow EI$ , otrzymujemy:

$$k = \frac{Q}{d} = \frac{Q}{Q l^3 / (192 EI)} = 192 \frac{EI}{l^3}$$

B. Częstość drgań własnych

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{192 \frac{EI}{l^3 \cdot m}} \approx 13.856 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

## C. Częstotliwość

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{13.856}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \approx 2.205 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

Odpowiedź: Najniższa (i jedyna) częstotliwość drgań własnych układu  $f = 2.205 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ .

*Obserwacja:* Porównując rezultat z zadaniem 8.1 widać, że mimo iż nie zmieniła się ani belka, ani masa, ani położenie masy, to zmiana warunków brzegowych spowodowała zmianę częstości drgań własnych – w tym przypadku częstość wzrosła, bo belka utwierdzona jest mniej podatna na zginanie, niż belka podparta przegubowo.

*Spostrzeżenia:* Częstości drgań własnych zależą od:

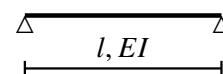
- sztywności belek  $EI$ :  $\omega \sim \sqrt{EI}$   
 dla  $EI' = 2EI \rightarrow \omega' = 1.414 \omega$   
 dla  $EI' = 1/2 EI \rightarrow \omega' = 0.707 \omega$
- długości belek  $l$ :  $\omega \sim 1/l^{3/2}$   
 dla  $l' = 2l \rightarrow \omega' = 0.354 \omega$   
 dla  $l' = 1/2 l \rightarrow \omega' = 2.828 \omega$
- masy  $m$  „zawieszonych” na belce:  $\omega \sim 1/\sqrt{m}$   
 dla  $m' = 2m \rightarrow \omega' = 0.707 \omega$   
 dla  $m' = 1/2 m \rightarrow \omega' = 1.414 \omega$
- położenia masy  $m$  na konstrukcji,
- sposobu podparcia belek (warunków brzegowych).

Ponadto częstości drgań własnych zależą jeszcze od wielkości naprężeń wywołujących rozciąganie/ściskanie belki:

- przy rozciąganiu częstości drgań własnych wzrastają,
- przy ściskaniu częstości drgań własnych maleją, aż do zera przy  $\sigma_N = \sigma_E$ .

Zadanie 8.4

Należy wyznaczyć najniższą częstotliwość drgań własnych belki o masie  $m$  rozmieszczonej równomiernie na długości belki.



Sposób rozwiązania:

Masa jest rozmieszczona równomiernie, więc można wprost zastosować wzór na częstość drgań własnych podpartej przegubowo belki jednoprzęsłowej, a następnie wyznaczyć  $f = \omega/(2\pi)$ .

## A. Wyznaczenie „masy liniowej” belki

$$\bar{m} = m/l$$

## B. Częstość drgań własnych

$$\omega_n = \frac{\alpha_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

dla najniższej częstości drgań własnych,  $n = 1$  i  $\alpha_n = \alpha_1 = \pi$ , więc

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m/l}} = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^3}}$$

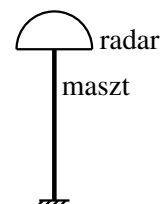
C. Częstotliwość  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \approx 1.571 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$

Odpowiedź: Najniższa częstotliwość drgań własnych belki  $f = 1.571 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ .

*Obserwacja:* W porównaniu z zad. 8.1 (masa belki skupiona w środku długości) częstość drgań własnych jest wyższa.

### Zadanie 8.5

Na maszcie o długości  $l = 3$  m, wykonanym z rury  $\phi 120 \times 4$  (materiał: stop Al), jest zamocowany radar o masie  $m_r = 40$  kg. Należy wyznaczyć najniższą częstotliwość drgań własnych układu.



Sposób rozwiązania:

Najpierw trzeba uzupełnić dane opisujące maszt. Następnie należy przyjąć model obliczeniowy („masa na sprężynie” lub „belka+masa”) i wyznaczyć częstość  $\omega$  oraz częstotliwość  $f$ .

#### A. Uzupełnienie danych opisujących maszt

##### (a) stałe materiałowe

moduł Younga  $E = 70$  GPa, liczba Poissona  $\nu = 0.33$ , gęstość  $\rho = 2.7$  t/m<sup>3</sup>

##### (b) charakterystyki geometryczne przekroju

dla przekroju cienkościennego  $d \times t$  ( $d$  – średnica rury,  $t$  – grubość ścianki), pole przekroju  $A$  i moment bezwładności zginania  $I$ :

$$A = \pi d t, \quad I = \pi d^3 t / 8$$

$$A = \pi \cdot 12.0 \text{ cm} \cdot 0.4 \text{ cm} = 15.08 \text{ cm}^2$$

$$I = \pi \cdot (12.0 \text{ cm})^3 \cdot 0.4 \text{ cm} / 8 = 271.4 \text{ cm}^4$$

#### B. Częstość i częstotliwość drgań własnych – model: „belka wspornikowa + masa na końcu swobodnym”

##### (a) masa masztu

$$\bar{m}_m = A \cdot \rho = 15.08 \text{ cm}^2 \cdot 2.7 \text{ t/m}^3 = 15.08 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2700 \text{ kg/m}^3 = 4.072 \text{ kg/m}$$

##### (b) częstość drgań własnych

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{3EI}{\left(m_r + \frac{33}{140}\bar{m}_m l\right)l^3}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 70 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 271.4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4}{\left(40 \text{ kg} + \frac{33}{140} \cdot 4.072 \text{ kg/m} \cdot 3 \text{ m}\right) \cdot (3 \text{ m})^3}} = 22.19 \text{ rad/s}$$

(c) częstotliwość  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{22.19 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 3.531 \text{ Hz}$

#### C. Częstość i częstotliwość drgań własnych – model: „masa na sprężynie”

##### (a) w tym przypadku maszt traktujemy jako „nieważką belkę zginaną”

##### (b) wyznaczenie sztywności sprężyny zastępującej belkę

ugięcie belki wspornikowej o długości  $l$  i sztywności giętej  $EI$ , obciążonej siłą skupioną  $Q$  na swobodnym końcu:

$$u = \frac{Ql^3}{3EI}$$



sztywność sprężyny

$$k = \frac{Q}{u} = 3 \frac{EI}{l^3}$$

(c) częstość drgań własnych

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{m_r l^3}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 70 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 271.4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4}{40 \text{ kg} \cdot (3 \text{ m})^3}} = 22.97 \text{ rad/s}$$

(d) częstotliwość

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{22.97 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 3.656 \text{ Hz}$$

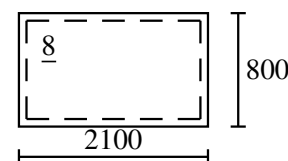
Odpowiedź: W zależności od zastosowanego modelu, najniższa częstotliwość drgań własnych układu to  $f = 3.531 \text{ Hz}$  („belka+masa”) lub  $f = 3.656 \text{ Hz}$  („masa na sprężynie”).

*Uwaga 1:* Bliższy rzeczywistości jest model „belka+masa”, bo nie pomija masy masztu. Ale należy zwrócić uwagę na „przyjęte milcząco” założenia: (a) środek masy radaru jest na styku radaru z masztem, (b) zerowy masowy moment bezwładności radaru, (c) model belki Eulera–Bernoulliego dla masztu.

*Uwaga 2:* W przypadku zastosowania rury stalowej ( $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7.86 \text{ t/m}^3$ ), otrzymujemy  $f = 5.703 \text{ Hz}$  („belka+masa”) lub  $f = 6.272 \text{ Hz}$  („masa na sprężynie”). Wartości  $f$  są, oczywiście, wyższe (bo moduł Younga jest znacząco wyższy), ale większa jest również rozbieżność wynikająca z przyjętego modelu, bo masa masztu wzrosła w stosunku do masy radaru.

### Zadanie 8.6

Należy wyznaczyć najniższą częstotliwość drgań własnych stalowej płyty poszycia dna wewnętrznego, położonej w siłowni nad przedziałem izolacyjnym.



Sposób rozwiązania:

Najpierw trzeba zidentyfikować oddziaływania i wymiary płyty.

Następnie trzeba uzupełnić dane opisujące płytę: stałe materiałowe i charakterystyki masowe.

Teraz dla modelu obliczeniowego „płyty prostokątnej podpartej przegubowo na konturze” można wyznaczyć częstość  $\omega$  oraz częstotliwość  $f$ .

#### A. Identyfikacja oddziaływań i wymiarów płyty.

(a) Przyjmując założenie, że na płycie nie jest umieszczony ładunek oraz wiedząc, że płyta nie styka się z cieczą (bo przedział izolacyjny jest pusty), stwierdzamy, że masa pochodzi tylko z materiału płyty.

(b) Wymiary płyty:

$$a = 2100 \text{ mm}, \quad b = 800 \text{ mm}, \quad t = 8 \text{ mm}$$

#### B. Uzupełnienie danych opisujących płytę

(a) stałe materiałowe

$$\text{moduł Younga } E = 206 \text{ GPa}, \quad \text{liczba Poissona } \nu = 0.3, \quad \text{gęstość } \rho = 7.86 \text{ t/m}^3$$

(b) charakterystyki masowe

$$\text{„masa powierzchniowa” } \tilde{m} = t \cdot \rho = 8 \text{ mm} \cdot 7.86 \text{ t/m}^3 = 62.88 \text{ kg/m}^2$$

C. Częstość drgań własnych

$$\omega_{11} = \left[ 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12(1 - \nu^2) \cdot \tilde{m}}}$$

$$\omega_{11} = \left[ 1 + \left( \frac{0.8 \text{ m}}{2.1 \text{ m}} \right)^2 \right] \frac{\pi^2}{(0.8 \text{ m})^2} \sqrt{\frac{206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot (0.008 \text{ m})^3}{12(1 - 0.3^2) \cdot 62.88 \text{ kg/m}^2}} = 1.1451 \cdot 191.13 \text{ rad/s} = 218.86 \text{ rad/s}$$

D. Częstotliwość

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{218.86 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 34.83 \text{ Hz}$$

Odpowiedź: Najniższa częstotliwość drgań własnych płyty dna wewnętrznego  $f = 34.83 \text{ Hz}$ .Zadanie 8.7

Należy wyznaczyć najniższą częstotliwość drgań własnych stalowej płyty poszycia dna zewnętrznego; przestrzeń w dnie podwójnym jest pusta. Pozostałe dane – jak w zadaniu 8.6.

Sposób rozwiązania:

Analogiczny, jak w zadaniu 8.6.

A. Identyfikacja oddziaływań i wymiarów płyty oraz przyjęcie modelu obliczeniowego.

- (a) Płyta styka się z jednej strony z płynem (wodą zaburtową), więc masa będzie pochodzić od masy płyty i „masy towarzyszącej”.
- (b) Wymiary płyty:  
 $a = 2100 \text{ mm}$ ,  $b = 800 \text{ mm}$ ,  $t = 8 \text{ mm}$
- (c) Model obliczeniowy  
 wykorzystamy model „płyty prostokątnej podpartej przegubowo na konturze” oraz płynu idealnego w nieograniczonej przestrzeni.

B. Uzupełnienie danych

- (a) gęstość wody zaburtowej  
 $\rho_w = 1.025 \text{ t/m}^3$
- (b) stałe materiałowe materiału płyty  
 moduł Younga  $E = 206 \text{ GPa}$ , liczba Poissona  $\nu = 0.3$ , gęstość  $\rho_p = 7.86 \text{ t/m}^3$
- (c) charakterystyki masowe
  - i. masa płyty  
 $\tilde{m}_p = t \cdot \rho_p = 8 \text{ mm} \cdot 7.86 \text{ t/m}^3 = 62.88 \text{ kg/m}^2$
  - ii. masa wody towarzyszącej  
 $\tilde{m}_A = \tilde{m}_{A11} = \frac{\rho_w \cdot b / \pi}{\sqrt{1 + (b/a)^2}} = \frac{1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.8 \text{ m} / \pi}{\sqrt{1 + (0.8 \text{ m} / 2.1 \text{ m})^2}} = \frac{261.0 \text{ kg/m}^2}{1.070} = 243.9 \text{ kg/m}^2$
  - iii. łączna masa pobudzana do drgań  
 $\tilde{m} = \tilde{m}_p + \tilde{m}_A = 62.88 \text{ kg/m}^2 + 243.9 \text{ kg/m}^2 = 306.78 \text{ kg/m}^2$

C. Częstość drgań własnych

$$\omega_{11} = \left[ 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12(1 - \nu^2) \cdot \tilde{m}}}$$

$$\omega_{11} = \left[ 1 + \left( \frac{0.8 \text{ m}}{2.1 \text{ m}} \right)^2 \right] \frac{\pi^2}{(0.8 \text{ m})^2} \sqrt{\frac{206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot (0.008 \text{ m})^3}{12(1 - 0.3^2) \cdot 306.78 \text{ kg/m}^2}} = 99.09 \text{ rad/s}$$

D. Częstotliwość

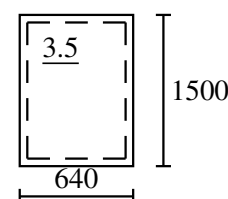
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{99.09 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 15.77 \text{ Hz}$$

Odpowiedź: Najniższa częstotliwość drgań własnych płyty dna zewnętrznego  $f = 15.77 \text{ Hz}$ .

*Obserwacja:* Porównując wyniki otrzymane w zadaniach 8.6 i 8.7 widzimy, że jednostronne oddziaływanie płyty z wodą spowodowało ponaddwukrotne zmniejszenie podstawowej częstości drgań własnych (o czynnik 2.2), co jest skutkiem zwiększenia „masy drgającej” – „masa wody towarzyszącej” jest niemal czterokrotnie większa (3.88) od masy płyty. Gdyby ponadto zbiornik w dnie podwójnym był wypełniony wodą morską, to częstotliwość drgań własnych by wyniosła  $f = 11.77 \text{ Hz}$ , czyli by była niższa o czynnik 2.96 w stosunku do płyty drgającej w powietrzu (w próżni).

### Zadanie 8.8 (projektowe)

Po próbach w morzu stwierdzono, że najniższa częstotliwość drgań własnych stalowej ścianki powinna zostać obniżona o co najmniej 2 Hz. Można to osiągnąć naklejając arkusze filcu o gramaturze  $gr_f = 1600 \text{ g/m}^2$ . Ile co najmniej  $[\text{m}^2]$  filcu zostanie zużyte?



Sposób rozwiązania:

Naklejony filc zwiększy drgającą masę, ale nie wpłynie na sztywność. Najpierw należy wyznaczyć częstotliwość drgań przed modyfikacją. Potem, przekształcając wzór na  $\omega$ , należy wyznaczyć wymaganą masę  $\tilde{m}$  i masę filcu  $\tilde{m}_f$ . W końcu, wyznaczając wymaganą powierzchnię  $A_f$  arkuszy filcu, należy pamiętać, że przyklejana będzie całkowita liczba warstw filcu.

A. Wykorzystywane wzory:

$$\omega_{11} = \left[ 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12(1 - \nu^2) \cdot \tilde{m}}}; \quad f = \omega_{11} / (2\pi)$$

B. Identyfikacja wymiarów płyty i uzupełnienie danych

(a) wymiary płyty:

$$a = 1500 \text{ mm}, \quad b = 640 \text{ mm}, \quad t = 3.5 \text{ mm}$$

$$\text{ponadto oznaczmy } \beta = 1 + (b/a)^2 = 1 + (640 \text{ mm} / 1500 \text{ mm})^2 = 1.1820$$

(b) uzupełnienie danych – stałe materiałowe materiału płyty

$$\text{moduł Younga } E = 206 \text{ GPa}, \quad \text{liczba Poissona } \nu = 0.3, \quad \text{gęstość } \rho_p = 7.86 \text{ t/m}^3$$

C. Częstotliwość drgań przed zmianami

$$(a) \text{ masa: } \tilde{m} = \tilde{m}_p = t \cdot \rho_p = 3.5 \text{ mm} \cdot 7.86 \text{ t/m}^3 = 27.51 \text{ kg/m}^2$$

(b) częstość drgań własnych

$$\omega'_{11} = 1.1820 \cdot \frac{\pi^2}{(0.64 \text{ m})^2} \sqrt{\frac{206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot (0.0035 \text{ m})^3}{12(1 - 0.3^2) \cdot 27.51 \text{ kg/m}^2}} = 154.44 \text{ rad/s}$$

(c) częstotliwość

$$f' = \frac{\omega'_{11}}{2\pi} = \frac{154.44 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 24.58 \text{ Hz}$$

D. Maksymalna dopuszczalna częstotliwość

$$f'' = f' - 2 \text{ Hz} = 24.58 \text{ Hz} - 2 \text{ Hz} = 22.58 \text{ Hz}$$

E. Minimalna wymagana masa naklejonego filcu

$$\omega_{11} = \beta \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12(1-\nu^2) \cdot \bar{m}}} \Rightarrow \omega_{11}^2 \frac{b^4}{\pi^4 \beta^2} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2) \cdot \bar{m}} \Rightarrow$$

$$\bar{m} = \frac{\pi^4 \beta^2 E t^3}{12(1-\nu^2) \omega_{11}^2 b^4} \quad \text{i} \quad \bar{m} = \bar{m}_p + \bar{m}_f \quad \text{oraz} \quad \omega_{11} = \omega''_{11} = 2\pi f''$$

$$\bar{m}_p + \bar{m}_f = \frac{\pi^4 \beta^2 E t^3}{12(1-\nu^2) \cdot 4\pi^2 (f'')^2 b^4} \Rightarrow \bar{m}_f = \frac{\pi^2 \beta^2 E t^3}{48(1-\nu^2) \cdot (f'')^2 b^4} - \bar{m}_p$$

$$\bar{m}_f = \frac{\pi^2 \cdot 1.1820^2 \cdot 206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot (0.0035 \text{ m})^3}{48(1-0.3^2) \cdot (22.58 \text{ Hz})^2 \cdot (0.64 \text{ m})^4} - 27.51 \text{ kg/m}^2 = 5.089 \text{ kg/m}^2$$

F. Wymagana ilość filcu

(a) liczba warstw

$$n_f = \left\lceil \frac{\bar{m}_f}{\text{gr}_f} \right\rceil = \left\lceil \frac{5.089 \text{ kg/m}^2}{1.6 \text{ kg/m}^2} \right\rceil = \lceil 3.181 \rceil = 4$$

(b) ilość filcu

$$A_f = n_f \cdot a \cdot b = 4 \cdot 1.5 \text{ m} \cdot 0.64 \text{ m} = 3.84 \text{ m}^2$$

G. Częstotliwość drgań po zmianach

(a) masa filcu:  $\bar{m}_f = n_f \cdot \text{gr}_f = 4 \cdot 1.6 \text{ kg/m}^2 = 6.4 \text{ kg/m}^2$

(b) łączna masa:  $\bar{m} = \bar{m}_p + \bar{m}_f = 27.51 \text{ kg/m}^2 + 6.4 \text{ kg/m}^2 = 33.91 \text{ kg/m}^2$

(c) częstość

$$\omega_{11} = 1.1820 \cdot \frac{\pi^2}{(0.64 \text{ m})^2} \sqrt{\frac{206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot (0.0035 \text{ m})^3}{12(1-0.3^2) \cdot 33.91 \text{ kg/m}^2}} = 139.10 \text{ rad/s}$$

(d) częstotliwość

$$f = \frac{\omega_{11}}{2\pi} = \frac{139.10 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 22.14 \text{ Hz}$$

Odpowiedź: Zostanie zużyte 3.84 m<sup>2</sup> filcu.

(Przyklejenie 4 warstw filcu spowoduje obniżenie najniższej częstotliwości drgań własnych do  $f_1 = 22.14 \text{ Hz}$ , czyli o 2.44 Hz).

### Zadanie 8.9

Należy oszacować najniższe częstotliwości giętych drgań własnych stalowego kadłuba statku w stanie pełnego załadowania i w stanie balastowym.

Dane:

wymiary główne:  $L = 302.0 \text{ m}$ ,  $B = 50.4 \text{ m}$ ,  $H = 24.3 \text{ m}$

moment bezwładności zginania w płaszczyźnie pionowej:  $I = 627.8 \text{ m}^4$

zanurzenie i wyporność

w stanie pełnego załadowania:  $T_z = 18.44 \text{ m}$ ,  $D_z = 236250 \text{ t}$

w stanie balastowym:  $T_b = 6.17 \text{ m}$ ,  $D_b = 62400 \text{ t}$

Sposób rozwiązania:

Najniższą częstość drgań własnych kadłuba statku można określić w sposób szacunkowy wykorzystując rozwiązanie dla drgań giętnych swobodnej, jednorodnej belki pryzmatycznej oraz przybliżony wzór na wielkość masy wody towarzyszącej.

A. Model obliczeniowy i wzory

Częstość drgań własnych najniższej (dwuwzłowej) formy drgań giętnych swobodnej (niepodpartej) belki pryzmatycznej, spełniającej warunki Eulera–Bernoulliego, o masie rozmieszczonej równomiernie na długości belki:

$$\omega_1 = \frac{(4.7300)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

masa  $\bar{m} = (1 + k)\bar{m}_s$ , gdzie  $k = 1.2 + \frac{B}{3T}$ , a  $\bar{m}_s$  – masa statku (wyporność) na jednostkę długości.

B. Uzupełnienie danych

stałe materiałowe:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$

C. Stan pełnego załadowania

(a) masa

$$\bar{m}_s = \frac{236250 \text{ t}}{302.0 \text{ m}} = 782.3 \text{ t/m}, \quad k = 1.2 + \frac{50.4 \text{ m}}{3 \cdot 18.44 \text{ m}} = 2.111$$

$$\bar{m} = (1 + 2.111) \cdot 782.3 \text{ t/m} = 2434 \text{ t/m}$$

(b) częstość drgań własnych

$$\omega_1 = \frac{(4.7300)^2}{(302.0 \text{ m})^2} \sqrt{\frac{206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 627.8 \text{ m}^4}{2434 \cdot 10^3 \text{ kg/m}}} = 1.787 \text{ rad/s}$$

(c) częstotliwość

$$f_z = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1.787 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 0.2845 \text{ Hz}$$

D. Stan balastowy

(a) masa

$$\bar{m}_s = \frac{62400 \text{ t}}{302.0 \text{ m}} = 206.6 \text{ t/m}, \quad k = 1.2 + \frac{50.4 \text{ m}}{3 \cdot 6.17 \text{ m}} = 3.923$$

$$\bar{m} = (1 + 3.923) \cdot 206.6 \text{ t/m} = 1017 \text{ t/m}$$

(b) częstość drgań własnych

$$\omega_1 = \frac{(4.7300)^2}{(302.0 \text{ m})^2} \sqrt{\frac{206 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 627.8 \text{ m}^4}{1017 \cdot 10^3 \text{ kg/m}}} = 2.766 \text{ rad/s}$$

(c) częstotliwość

$$f_b = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.766 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 0.4403 \text{ Hz}$$

Odpowiedź: Najniższa częstotliwość drgań własnych kadłuba statku w stanie pełnego załadowania  $f_z = 0.2845 \text{ Hz}$ , a w stanie balastowym  $f_b = 0.4403 \text{ Hz}$ .

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie – dlaczego obliczenia i jakie</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Zasady wykonywania obliczeń „ręcznych”</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Konstrukcja, modele</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Obliczanie naprężeń w belkach cienkościennych obciążonych obciążeniem poprzecznym i dodatkowymi naprężeniami „osiowymi”</b>	<b>7</b>
4.1	Obliczanie naprężeń . . . . .	8
4.1.1	Naprężenia wywołane zginaniem . . . . .	8
4.1.2	Naprężenia wynikające ze współpracy z „wyższymi” strukturami . . . . .	8
4.1.3	Naprężenia wywołane ścinaniem . . . . .	9
4.1.4	Sumaryczne naprężenia normalne . . . . .	9
4.1.5	Naprężenia zredukowane . . . . .	9
4.1.6	Obliczenia „inżynierskie” . . . . .	9
4.2	Charakterystyki geometryczne przekrojów . . . . .	10
4.3	Belki dwuteowe modelujące wiązary . . . . .	11
4.3.1	Zginanie . . . . .	11
4.3.2	Ścinanie . . . . .	14
4.3.3	Uwagi . . . . .	17
4.3.4	Naprężenia . . . . .	19
4.4	Belki dwuteowe modelujące usztywnienia . . . . .	21
4.4.1	Kształtownik walcowany – płaskownik łebkowy . . . . .	21
4.4.2	Kształtownik walcowany – kątownik . . . . .	24
4.4.3	Usztywnienie prefabrykowane – teownik . . . . .	24
4.5	Naprężenia w wiązarach z otworami w środnikach . . . . .	25
4.5.1	Wpływ otworów na naprężenia wywołane zginaniem . . . . .	25
4.5.2	Wpływ otworów na naprężenia wywołane ścinaniem . . . . .	26
4.5.3	Wpływ otworów na rozkład naprężeń od zgięcia ogólnego . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Rusztzy płaskie</b>	<b>29</b>
5.1	Wytrzymałość rusztu . . . . .	30
5.1.1	Algorytm . . . . .	30
5.1.2	Współpraca belek rusztu . . . . .	31
5.2	Stateczność rusztu z jednym wzdłużnikiem . . . . .	32
5.2.1	Stateczność giętna ściskanej belki jednoprzęsłowej . . . . .	33
5.2.2	Ruszt z jednym wzdłużnikiem . . . . .	34

<b>6</b>	<b>Płyty prostokątne</b>	<b>37</b>
6.1	Wytrzymałość płyt . . . . .	37
6.1.1	Równanie zginania . . . . .	37
6.1.2	Model obliczeniowy . . . . .	38
6.1.3	Wzory inżynierskie . . . . .	40
6.2	Stateczność płyt prostokątnych . . . . .	43
6.2.1	Proste stany obciążenia . . . . .	44
6.2.2	Złożone stany obciążenia . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Metoda Elementów Skończonych</b>	<b>47</b>
7.1	Algorytm rozwiązywania zadania metodą MES . . . . .	48
<b>8</b>	<b>Drgania własne konstrukcji kadłuba statku</b>	<b>57</b>
8.1	Uwagi ogólne . . . . .	57
8.1.1	Dlaczego należy zajmować się drganiami własnymi . . . . .	58
8.1.2	Ogólna zależność opisująca częstość drgań własnych . . . . .	59
8.2	Drgania lokalne elementów konstrukcji kadłuba statku . . . . .	59
8.2.1	Model podstawowy . . . . .	59
8.2.2	Konstrukcje belkowe . . . . .	59
8.2.3	Płyty poszycia . . . . .	61
8.3	Drgania kadłuba statku . . . . .	63
<b>9</b>	<b>Zadania</b>	<b>64</b>
9.1	Naprężenia w wiązarach i usztywnieniach bez otworów w środnikach . . . . .	64
9.2	Naprężenia w wiązarach z otworami w środnikach . . . . .	72
9.3	Wytrzymałość rusztów płaskich . . . . .	77
9.4	Wytrzymałość płyt prostokątnych . . . . .	82
9.5	Stateczność rusztów z jednym wzdłużnikiem . . . . .	89
9.6	Stateczność płyt prostokątnych . . . . .	93
9.7	Metoda Elementów Skończonych . . . . .	104
9.8	Drgania giętne konstrukcji kadłuba statku . . . . .	108