Analiza Matematyczna 2

prof. dr hab. inż Aleksander Lasecki
Na podstawie wykładu prof. dr hab. Pawła Krupskiego

Spis treści

1 Przestrzenie Euklidesowe **3**
1.1 Podstawowe zagadnienia 3
1.2 Iloczyn skalarny 3
1.3 Nierówność Cauchy'ego-Schwarza 3
1.4 Nierówność trójkąta 3
1.5 Własności odległości 3
1.6 Odległość Euklidesowa 3

2 Ciągi w $\mathbb{R}^n$ **3**
2.1 Definicja granicy ciągu 3
2.2 Zbieżność po współrzędnych 4
2.3 Warunek Cauchy'ego 4
2.4 Własności ciągów zbieżnych 4
2.5 Punkty skupienia 4
2.6 Zbiory zwarte 4

3 Funkcje z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$ **4**
3.1 Definicja 4
3.2 Granica odwzorowania 5
3.3 Ciągłość 5
3.4 Twierdzenie o ciągłości po współrzędnych 5
3.5 Twierdzenie o niezmienności zwartości 5

4 Pochodne cząstkowe **5**
4.1 Definicja 5
4.2 Pochodna kierunkowa 5
4.3 Pochodne cząstkowe wyższego stopnia 5
4.4 Gradient funkcji 6
4.5 Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych 6
4.6 Własności funkcji różniczkowalnej 6
4.7 Pochodna funkcji wektorowej 6
4.8 Wektor styczny jednostkowy 6
4.9 Pochodna pola wektorowego 7

4.10 Pochodna cząstkowa funkcji złożonej . . . 7
4.11 Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej . . . 7
4.12 Wzór Taylora dla funkcji mającej ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu . . . 7
4.13 Aproksymacja funkcji wielu zmiennych . . . 8

5 Ekstrema funkcji 8
5.1 Ekstrema funkcji . . . 8
5.2 Kryterium na ekstrema lokalne . . . 8
5.3 Warstwica funkcji . . . 8
5.4 Prostopadłość gradientu do warstwicy . . . 8
5.5 Równanie płaszczyzny stycznej . . . 8
5.6 Ekstrema warunkowe . . . 8

6 Całki podwójne 9
6.1 Definicja . . . 9
6.2 Własności . . . 9
6.3 Całki iterowane . . . 10
6.4 Inne zbiory całkowania . . . 10
6.5 Niezależność w sensie Jordana . . . 10
6.6 Kryterium niezależności w sensie Jordana dla zbioru płaskiego . . . 10
6.7 Objętość bryły . . . 10
6.8 Pole płata powierzchni . . . 10

7 Całki potrójne 10
7.1 Definicja . . . 10

8 Całkowanie przez podstawienie i Jakobian przejścia 11
8.1 Twierdzenie o podstawianiu . . . 11
8.2 Współrzędne biegunowe . . . 11
8.3 Współrzędne sferyczne . . . 11
8.4 Współrzędne cylindryczne . . . 12

1 Przestrzenie Euklidesowe

1.1 Podstawowe zagadnienia

$\mathbb{R}^n$ - przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{R}$
Odległość między wektorami: $\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1; b_2 - a_2; \ldots; b_n - a_n]$
Wektor zerowy: $\mathcal{O} = (0, 0, \ldots, 0)$ Jeśli wektory $\overrightarrow{x}$ oraz $\overrightarrow{y}$ są równoległe to $t\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$
Kula o środku w punkcie $\overrightarrow{x}$ i promieniu r: $\mathcal{K}(\overrightarrow{x}, r) = \overrightarrow{x} + \mathcal{K}(\mathcal{O}, r)$

1.2 Iloczyn skalarny

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

1.3 Nierówność Cauchy'ego-Schwarza

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

1.4 Nierówność trójkąta

$$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leqslant \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$$

1.5 Własności odległości

1. $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| = 0 \iff \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$
2. $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\|$
3. $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| \leqslant \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z}\| + \|\overrightarrow{z} - \overrightarrow{y}\|$

1.6 Odległość Euklidesowa

Odległość euklidesowa definiuje funkcję:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$$

Funkcja d nazywa się metryką euklidesową. Ogólnie każdą funkcję $d : \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^n \to [0, \infty)$ spełniającą warunki z **1.5** nazywamy **metryką**, a zbiór $\mathcal{X}$ na którym ta funkcja działa **przestrzenią metryczną** z metryką d.
Uwaga: $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\| \cos\alpha,\ \alpha[0; \pi]$

2 Ciągi w $\mathbb{R}^n$

2.1 Definicja granicy ciągu

$$\lim_{k\to\infty} P_k = P \iff \lim_{k\to\infty} \|P_k - P\| = 0$$

2.2 Zbieżność po współrzędnych

Niech $P_k = (p_{k_1}, \ldots, p_{k_n})$ oraz $P = (p_1, \ldots, p_n)$ wtedy:

$$\lim_{k\to\infty} P_k = P \iff (\forall i \in [n]) \left(\lim_{k\to\infty} p_{k_i} = p_i \right)$$

2.3 Warunek Cauchy'ego

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists k_0)\, (\forall m, l \geqslant k_o)\, (\|P_m - P_l\| < \varepsilon)$$

Czyli dla zbieżności po współrzędnych mamy:

$$(\forall i \in [n]) \left(|p_{m_i} - p_{l_i}| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(p_{m_j} - p_{l_j}\right)^2} < \varepsilon \right)$$

2.4 Własności ciągów zbieżnych

1. Jest tylko jedna granica
2. Podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy
3. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony
4. Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny
5. $\lim (A_k + B_k) = A + B$
6. $\lim (A_k - B_k) = A - B$
7. $\lim (A_k \cdot B_k) = A \cdot B$
8. **Podciąg podciągu jest podciągiem ciągu**

2.5 Punkty skupienia

Punkt zbioru $\mathcal{D}$, taki, że istnieje ciąg postaci $\left\{\overrightarrow{P_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ do niego zbieżny.

2.6 Zbiory zwarte

Zbiór $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ jest **domknięty** $\iff$ każdy ciąg zbieżny postaci $\left\{\overrightarrow{P_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ ma granicę w $\mathcal{D}$.
Zbiór jest **ograniczony** jeśli zawiera się właściwie w pewnej kuli.
Zbiór jest **zwarty** jeśli jest domknięty oraz ograniczony.
Suma skończonej ilości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.
Suma skończonej ilości zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym.

3 Funkcje z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$

3.1 Definicja

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m,\ \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$$

3.2 Granica odwzorowania

Jeśli $\overrightarrow{x_0}$ jest punktem skupienia $\mathcal{D}$ to:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n \iff \left(\forall \text{ ciąg } \overrightarrow{x_k} \to \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_k} \in \mathcal{D}\right) \left(\lim_{k\to\infty} f\left(\overrightarrow{x_k}\right) = \overrightarrow{p}\right)$$

3.3 Ciągłość

$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła w $\overrightarrow{x_0} \in \mathcal{D}$ gdy $\lim_k f\left(\overrightarrow{x_k}\right) = f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$ dla każdego ciągu $\overrightarrow{x_k} \to \overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{x_k} \in \mathcal{D}$.

3.4 Twierdzenie o ciągłości po współrzędnych

$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ jest ciągła w $\overrightarrow{x_0}$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$f\left(\overrightarrow{x}\right) = \left(f_1\left(\overrightarrow{x}\right), f_2\left(\overrightarrow{x}\right), \ldots, f_m\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$$

$$\left(\forall i \leqslant m\right)\left(f_i\left(\overrightarrow{x}\right) \text{ jest ciągła w } \overrightarrow{x_0}\right)$$

3.5 Twierdzenie o niezmienności zwartości

Jeśli $\mathcal{D}$ jest zbiorem zwartym (gdzie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$) oraz $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła, to $f\left[\mathcal{D}\right]$ jest zwarty w $\mathbb{R}^m$.
Wniosek: Każda funkcja ciągła $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, gdzie $\mathcal{D}$ jest zwarty w $\mathbb{R}^n$ ma wartość najmniejszą i największą.

4 Pochodne cząstkowe

4.1 Definicja

Niech $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, gdzie $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz niech $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n$ będzie ustalonym punktem skupienia dziedziny. Wtedy:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overrightarrow{p}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(p_0, \ldots, p_{i-1}, p_i + h, p_{i+1}, \ldots, p_n\right) - f\left(p_0, \ldots, p_n\right)}{h}$$

nazywamy pochodną cząstkową f po x_i w punkcje $\overrightarrow{p}$, oznaczaną również $f_{x_i}\left(\overrightarrow{p}\right)$.

4.2 Pochodna kierunkowa

Niech $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ gdzie $\|\overrightarrow{a}\| = 1$. Pochodna kierunkowa w kierunku wektora $\overrightarrow{a}$ to:

$$f_{\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{p}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{p} + h\overrightarrow{a}\right) - f\left(\overrightarrow{p}\right)}{h}$$

Inne oznaczenie:

$$D_{\overrightarrow{a}} f\left(\overrightarrow{p}\right)$$

4.3 Pochodne cząstkowe wyższego stopnia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_i^{k-1}}$$

Pochodne cząstkowe mieszane to np ($i \neq j$):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Dla funkcja z $\mathbb{R}^2$ jeśli pochodne mieszane są ciągłe to:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

4.4 Gradient funkcji

Jeśli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ to gradientem funkcji f w punkcie $\overrightarrow{p}$ nazywamy wektor:

$$\nabla f\left(\overrightarrow{p}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{p}\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{p}\right)\right)$$

4.5 Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Niech $\overrightarrow{p}$ będzie punktem wewnętrznym dziedziny, wtedy funkcja f jest różniczkowalna w $\overrightarrow{p}$ gdy:

1. Istnieją wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w $\overrightarrow{p}$
2. $\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{h}\right) - f\left(\overrightarrow{p}\right) - \nabla f\left(\overrightarrow{p}\right) \cdot \overrightarrow{h}}{\|h\|} = 0$

Jest to uogólnienie różniczkowalności funkcji jednej zmiennej, wtedy mamy:

1. $f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$
2. $\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - f'(p) \cdot h}{h} = 0$

4.6 Własności funkcji różniczkowalnej

1. Jeśli funkcja ma ciągłe pierwsze pochodne w $\overrightarrow{p}$-wewnętrznym to jest różniczkowalna w $\overrightarrow{p}$
2. Jeśli f jest różniczkowalna w $\overrightarrow{p}$ to ma pochodną kierunkową $f_{\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{p}\right)$ dla każdego wektora $\overrightarrow{a}$, gdzie $\|a\| = 1$

4.7 Pochodna funkcji wektorowej

Niech $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$-przedział. Wtedy f nazywamy krzywą parametryczną (Obraz $f[\mathcal{D}]$ również nazywamy krzywą):

1. Ciągłą jeśli f jest ciągła
2. Różniczkowalną gdy $f'(\mathcal{D})$ istnieje dla każdego $t \in \mathcal{D}$
3. Gładką gdy f' jest ciągła na $\mathcal{D}$

4.8 Wektor styczny jednostkowy

Wektorem stycznym jednostkowym do krzywej parametrycznej nazywamy:

$$T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

Jeśli $f''(t)$ istnieje dla każdego $t \in \mathcal{D}$, to $T'(t)$ zwany wektorem normalnym w punkcie t również istnieje i spełnia równanie:

$$T'(t) \cdot T(t) = 0$$

4.9 Pochodna pola wektorowego

Niech $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, gdzie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy mamy:

$$f(\overrightarrow{x}) = (f_1(\overrightarrow{x}), \ldots, f_m(\overrightarrow{x})) \qquad \text{gdzie } f_i : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

$$f'(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

4.10 Pochodna cząstkowa funkcji złożonej

Pochodna złożona to, ogólnie, iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i zewnętrznej. Więc dla $F(\overrightarrow{x}) = f(u_1(\overrightarrow{x}), \ldots, u_m(\overrightarrow{x}))$, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) = (u_1(\overrightarrow{x}), \ldots, u_m(\overrightarrow{x}))$, mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\overrightarrow{x}) = \nabla f(\overrightarrow{u}) \cdot u'(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(\overrightarrow{x}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(\overrightarrow{x})$$

4.11 Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

Niech $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, będzie funkcją różniczkowalną oraz niech $\overrightarrow{p_0} \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \overrightarrow{h}$ Wtedy mamy:

$$f(\overrightarrow{p}) - f(\overrightarrow{p_0}) = \mathrm{d}f(\overrightarrow{p_\theta})$$

Dla pewnego $\overrightarrow{p_\theta} = \overrightarrow{p_0} + \theta\overrightarrow{h}$, $\theta \in (0, 1)$.

4.12 Wzór Taylora dla funkcji mającej ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją n-różniczkowalną, $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Wzór Taylora wygląda następująco:

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \mathrm{d}f_{\vec{a}}(\vec{h}) + \mathrm{d}^2 f_{\vec{a}}(\vec{h}) + \ldots + R_n(\vec{a}, \vec{h})$$

gdzie $\mathrm{d}^n f_{\vec{a}}(\vec{h})$ to n-krotna różniczka zupełna w punkcie $\vec{a}$, która jest definiowana rekurencyjnie:

1. $\mathrm{d}f_{\vec{a}}(\vec{h}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h} = \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_2} \cdot h_2 + \ldots + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n} \cdot h_n$
2. $\mathrm{d}^{n+1} f_{\vec{a}}(\vec{h}) = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^n f_{\vec{a}}(\vec{h})\right)$

Można udowodnić, że jawna postać n-tej różniczki ($n > 1$) dla funkcji dwóch zmiennych wygląda następująco:

$$\mathrm{d}^n f_{\vec{a}}(h_1, h_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f(\vec{a})}{\partial x_1^{n-k} \partial x_2^k} \cdot h_1^{n-k} h_2^k$$

Czyli dla $n = 2$:

$$\mathrm{d}^2 f_{(x_1, x_2)}(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} h_2^2$$

4.13 Aproksymacja funkcji wielu zmiennych

Aby znaleźć przybliżoną wartość funkcji wielu zmiennych w punkcie $\overrightarrow{p_0} + \overrightarrow{h}$ znając wartość funkcji w punkcie $\overrightarrow{p_0}$ korzystamy z różniczki zupełnej:

$$f(\vec{x_0} + \vec{h}) = f(\vec{x_0}) + \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{h}$$

5 Ekstrema funkcji

5.1 Ekstrema funkcji

Niech $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, wtedy f przyjmuje lokalnie wartość największą (najmniejszą) w $\overrightarrow{p} \in \mathcal{D}$, gdy istnieje kula $\mathcal{K}(\overrightarrow{p}, \varepsilon)$ taka, że $(\forall \overrightarrow{x} \in \mathcal{K}(\overrightarrow{p}, \varepsilon))\,(f(\overrightarrow{p}) \geqslant f(\overrightarrow{x}))$ (odpowiednio dla wartości najmniejszej).

5.2 Kryterium na ekstrema lokalne

Warunek konieczny: Jeśli funkcja f ma pochodne cząstkowe w $\overrightarrow{p}$ oraz ma ekstremum lokalne w $\overrightarrow{p}$ to:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Wyróżnik dla funkcji dwóch zmiennych:

$$\mathrm{W}(\overrightarrow{p}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right)(\overrightarrow{p})$$

Warunek dostateczny (funkcja dwóch zmiennych x i y: Jeśli f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ oraz wyróżnik $\mathrm{W}(\overrightarrow{p}) > 0$ to f ma ekstremum w punkcie $\overrightarrow{p}$, przy czym jeśli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ to jest to minimum, a jeśli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ to jest to maksimum.
Natomiast jeśli $\mathrm{W}(\overrightarrow{p}) < 0$, to $\overrightarrow{p}$ jest punktem siodłowym.
W przypadku $\mathrm{W}(\overrightarrow{p}) = 0$ należy zastosować inne metody.

5.3 Warstwica funkcji

Niech $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, wtedy zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ nazywamy warstwicą funkcji f. Jest to rzut na $\mathbb{R}^2$ krzywej $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c = f(x, y)\}$, która leży na powierzchni $z = f(x, y)$ i na płaszczyźnie $z = c$.

5.4 Prostopadłość gradientu do warstwicy

Jeśli krzywa gładka $\mathcal{C}$, dla której wektor styczny w punkcie (x_0, y_0) jest różny od zera, jest warstwicą funkcji różniczkowalnej $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) i jeśli $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, to $\nabla f(x_0, y_0) \perp \mathcal{C}$.

5.5 Równanie płaszczyzny stycznej

$$\nabla f(\overrightarrow{x_0}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) = 0$$

5.6 Ekstrema warunkowe

Szukamy ekstremów funkcji $f(x, y)$ spełniających warunek $g(x, y) = a$, $a \in \mathbb{R}$
Warunek konieczny: Załóżmy, że f i g są różniczkowalne oraz są spełnione następujące warunki:

1. $g(\overrightarrow{p}) = a$
2. $\{(x, y) : g(x, y) = a\}$ jest krzywą gładką $\overrightarrow{r}(t)$

3. $r'(t) \neq 0$
4. $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{r}(t_0)$, gdzie t_0 nie jest końcem przedziału
5. $\nabla g\left(\overrightarrow{p}\right) \neq 0$
6. f ma ekstremum na krzywej $r(t)$ w $\overrightarrow{p_0}$

Wtedy $\nabla g\left(\overrightarrow{p}\right) \parallel \nabla f\left(\overrightarrow{p}\right)$, czyli $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\left(\nabla f\left(\overrightarrow{p}\right) = \lambda \nabla g\left(\overrightarrow{p}\right)\right)$, gdzie λ nazywamy mnożnikiem Lagrange'a.

6 Całki podwójne

6.1 Definicja

Zbiór $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, nazywamy prostokątem. Jego pole oznaczamy jako $|P|$. $\mathcal{P}$ = podział P na prostokąty $P_1, P_2, \ldots, P_n$, gdzie $\Delta P_i = |P_i|$.
Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, wtedy definiujemy następujące wartości:

$$M = \sup_P f \Rightarrow M_i = \sup_{P_i} f$$

$$m = \inf_P f \Rightarrow m_i = \inf_{P_i} f$$

Suma całkowa Riemanna:

1. Dolna: $L_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta P_i$
2. Górna: $U_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta P_i$
3. Pośrednia: $M_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta P_i$, gdzie $a_i \in [m_i, M_i]$

Całkę górną i dolną definiujemy następująco:

$$\sup_{\mathcal{P}} L_{\mathcal{P}}(f) = \underline{\iint_P} f(x, y) dP$$

$$\inf_{\mathcal{P}} U_{\mathcal{P}}(f) = \overline{\iint_P} f(x, y) dP$$

Jeśli te dwie całki są sobie równe to mówimy, że f jest całkowalna na P, a całkę oznaczamy:

$$\iint_P f dP = \iint_P f(x, y) dx dy$$

6.2 Własności

1. Jeśli f jest całkowalna na P, to dla każdego ciągu podziałów $\mathcal{P}_k$ takiego, że $\delta(\mathcal{P}_k) \to_{k\to\infty} 0$, mamy, że $\lim_{k\to\infty} \sigma_{\mathcal{P}_k}(f) = \iint_P f dP$.
2. Każda funkcja ciągła na P (ogólniej każda taka która ma zbiór punktów nieciągłości o mierze Jordana $= 0$) jest całkowalna.
3. Własności analogiczne dla całki pojedynczej: addytywność, mnożenie przez skalar, $m|P| \leqslant \iint_P f dP \leqslant M|P|$.
4. Interpretacją geometryczną jest objętość pola pod wykresem funkcji.

6.3 Całki iterowane

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dydx$$

Jeśli f jest ciągła to mamy na P:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dydx$$

6.4 Inne zbiory całkowania

Całkę z funkcji ograniczonej możemy rozszerzyć na dowolny zbiór ograniczony, biorąc prostokąt w którym ten zbiór się zawiera i kładąc $f(x,y) = 0$ dla każdego punktu spoza zbioru.
Możemy także całkować po obszarach normalnych (tj takich zawartych pomiędzy wykresami funkcji).

6.5 Niezależność w sensie Jordana

Zbiór $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ jest niezależny w sensie Jordana jeśli istnieje całka $\iint_{\mathcal{D}} dP$ taka, że $|\mathcal{D}| = \iint_{\mathcal{D}} dP$, gdzie mamy $f : P \to \{0,1\}$, $f \restriction_{\mathcal{D}} \equiv 1$, $f \restriction_{P \setminus \mathcal{D}} \equiv 0$.

6.6 Kryterium niezależności w sensie Jordana dla zbioru płaskiego

$\mathcal{D}$ jest mierzalny (płasko) w sensie Jordana wtedy i tylko wtedy gdy brzeg $\delta\mathcal{D}$ ma miarę płaską 0, czyli inaczej:

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists P_1, \dots, P_k) \left(\delta P \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i,\ \sum_{i=1}^{k} |P_i| < \varepsilon \right)$$

6.7 Objętość bryły

Jeśli bryła $\mathbb{V}$ jest określona między powierzchniami $z = \varphi(x,y)$, $z = \psi(x,y)$, gdzie $\varphi \leqslant \psi$, nad obszarem płaskim $\mathcal{D}$, to:

$$|\mathbb{V}| = \iint_{\mathcal{D}} [\psi(x,y) - \varphi(x,y)]\, dP$$

6.8 Pole płata powierzchni

Niech funkcja $f : \mathcal{S} \to \mathcal{D}$, gdzie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, wtedy wzór na pole płata powierzchni przyjmuje postać:

$$\iint_{\mathcal{S}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dP$$

7 Całki potrójne

7.1 Definicja

Zbiór $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant a',\ b \leqslant y \leqslant b',\ c \leqslant z \leqslant c'\}$, gdzie $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$, nazywamy prostopadłościanem. Niech $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, a $\mathcal{P}_n$ podziałem P na n prostopadłościanów o objętościach $|P_1|, \dots, |P_n|$. Wtedy definiujemy następujące wartości:

$$M = \sup_P f \Rightarrow M_i = \sup_{P_i} f$$

$$m = \inf_P f \Rightarrow m_i = \inf_{P_i} f$$

Suma całkowa Riemanna:

1. Dolna: $L_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^n m_i |P_i|$
2. Górna: $U_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^n M_i |P_i|$

Całkę górną i dolną definiujemy następująco:

$$\sup_{\mathcal{P}} L_{\mathcal{P}}(f) = \underline{\iiint_P} f(x,y)dP$$

$$\inf_{\mathcal{P}} U_{\mathcal{P}}(f) = \overline{\iiint_P} f(x,y)dP$$

Jeśli te dwie całki są sobie równe to mówimy, że f jest całkowalna na P, a całkę oznaczamy:

$$\iiint_P f dP = \iiint_P f(x,y)dxdy$$

Własności analogiczne do całek podwójnych.

8 Całkowanie przez podstawienie i Jakobian przejścia

8.1 Twierdzenie o podstawianiu

Jeśli $T : V \to V'$ jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem mającym pierwsze pochodne cząstkowe ciągłe takim, że T^{-1} też ma te własności (dyfeomorfizmem), gdzie V, V' są regularne w $\mathbb{R}^3$ oraz $T(u,v,w) = (x,y,z)$, wtedy:

$$\iiint_{V'} f(x,y,z)dP' = \iint_V f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dP$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

8.2 Współrzędne biegunowe

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

8.3 Współrzędne sferyczne

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

8.4 Współrzędne cylindryczne

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$