Wprowadzenie do Teorii Grafów - skrypt

prof. dr hab. Michał Morayne

opracowali: Damian Nowak, Mikołaj Pietrek

Spis treści

Literatura

- „Wprowadzenie do teorii grafów” - Robin J. Wilson
- „Teoria Grafów”

Wykład 1. Podstawowe pojęcia

1.1 Definicja grafu

Grafem nazywamy parę $G = (V, \mathcal{E})$ (czasem piszemy $G = (V, E)$), gdzie $V = \{v_1, ..., v_n\}$ pewien (u nas) skończony zbiór zwany zbiorem wierzchołków. (v_i - wierzchołek), $\mathcal{E} \subseteq [V]^1 \cup [V]^2$. ($[V]^k = \{A \subseteq V : |A| = k\}$) nazywa się zbiorem krawędzi ($\{\{v_j\}\{v_i, v_j\}\}$.

1.2 Grafy proste

Grafem prostym nazywamy graf bez krawędzi wielokrotnych oraz pętli.

1.3 Krawędzie wielokrotne

Jeżeli dwa te same wierzchołki łączone są przez więcej niż jedną krawędź, to krawędzie te nazywamy wielokrotnymi.

1.4 Pętle

Pętlą nazywamy krawędź $\{v, v\} \in \mathcal{E}$.

1.5 Wierzchołki incydentne

Wierzchołki $v_i, v_j \in V$ nazywamy incydentnymi jeśli są połączone krawędzią, tzn. $\{v_i, v_j\} \in \mathcal{E}$. Wtedy krawędź $\{v_i, v_j\}$ nazywam incydentną do v_i, v_j.

1.6 Ścieżka

Niech G będzie grafem. Niech $u, w \in V$. Ścieżką nazywamy dowolny ciąg wierzchołków takich, że $\langle v = u_1, u_2, ..., u_k = w\rangle$ oraz $\{u_i, u_{i+1}\} \in \mathcal{E}$.

1.7 Droga

Ścieżkę $\langle u_1, u_2, ..., u_k\rangle$ nazywamy drogą jeśli $(\forall i, j)(i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j)$ (wszystkie wierzchołki są różne).

1.8 Cykl

Cykl to specjalny przypadek ścieżki dla której $u_1 = u_k$, a dla innych wierzchołków zachodzi $(\forall i, j)(i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j)$.

1.9 Spójność

Graf nazywamy spójnym jeśli $(\forall i, j)(i \neq j \Rightarrow$ istnieje scieżka od v_i do $v_j)$.

1.10 Podgraf

Graf $G' = (V', \mathcal{E}')$ nazywamy podgrafem grafu G jeśli $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ oraz krawędzie w E' łączą tylko wierzchołki z V'.

1.11 Podgraf indukowany

Graf $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{E}})$ jest podgrafem indukowanym grafu G, jeśli jest podgrafem G oraz $\widetilde{\mathcal{E}}$ jest zbiorem wszystkich krawędzi łączących wierzchołki z $\widetilde{V}$.

1.12 Składowa

Składową grafu G nazywamy każdy spójny maksymalny podgraf indukowany.

Wykład 2. Podstawowe pojęcia cd.

2.1 Stopień wierzchołka

Definiujemy stopień wierzchołka v jako liczbę krawędzi z E incydentnych do v. Używamy oznaczenia $deg(v)$. W przypadku pętli, wkład do $deg(v)$ wynosi 2.

2.2 Odległość

Odległością pomiędzy $u, v \in V$ nazywamy ilość krawędzi najkrótszej ścieżki łączącej u oraz v. Odległość tą oznaczamy jako $d(u, v)$.

2.3 Twierdzenie o drodze

Twierdzenie 1. Jeśli dwa wierzchołki da się połączyć ścieżka, to istnieje między nimi droga.

Dowód. Niech $p_0 = \langle u = v_1, v_2, v_3, ...v_k = v\rangle$ będzie pewną ścieżka od u do v. Niech v_{i_1} będzie ostatnim wystąpieniem v_1 w tej ścieżce. Teraz rozważmy ścieżkę $p_1 = \langle v_{i_1}, v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, ...v_{k-1}, v_k\rangle$ Niech v_{i_2} będzie ostatnim miejscem wystąpienia wierzchołka v_{i_1+1} w ścieżce p_1. Teraz rozważmy ścieżkę $p_2 = \langle v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_2+1}, ...v_{k-1}, v_k\rangle$. Kontynuujemy rozważania aż pojawi się v_{i_m} gdzie $i_m = k$.
Ostatecznie otrzymujemy $p_m = \langle v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_2+1}, ...v_{i_m-1}, v_{i_m}\rangle$.
Z konstrukcji (rozważaliśmy ostatnie wystąpienia wierzchołków i ponieważ $i_1 < i_2 < ... < i_m$) jest to droga.

2.4 Graf pełny

Graf K nazywamy grafem pełnym (lub kliką) gdy każdy wierzchołek jest połączony z każdym innym.

2.5 Spójność

Lemat. Jeśli w grafie $G = (V, \mathcal{E})$ usuniemy jedną krawędź $\{u, v\} \in \mathcal{E}$ to liczba składowych zwiększy się co najwyżej o jeden.

Dowód. TODO

Twierdzenie 2. Jeśli $G = (V, \mathcal{E})$ jest grafem prostym o k składowych oraz $|V| = n, |\mathcal{E}| = m$ to zachodzi:

$$n - k \leqslant m \leqslant (n - k)(n - k + 1)/2$$

Dowód. Ograniczenie dolne, dowód indukcyjny.
Jeśli $m = 0$ to $n = k$ i nierówność zachodzi.
Niech nierówność zachodzi dla każdego grafu o mniej niż m krawędzi.
Ponieważ $m > 0$ to istnieje pewna krawędź $\{u, v\} \in \mathcal{E}$. Rozważmy graf $G' = (V, \mathcal{E} \setminus \{\{u, v\}\})$ Teraz G' ma $m - 1$ krawędzi. Z lematu ma więc conajwyżej $k + 1$ składowych. Zatem

$$n - (k + 1) \leqslant m - 1$$

$$n - k - 1 \leqslant m - 1$$

$$n - k \leqslant m$$

Co kończy dowód ograniczenia dolnego.

Ograniczenie górne, dowód poprzez pokazanie zachodzenia dla przypadku granicznego.
Ograniczenie spełnione jest " najtrudniej " gdy wszystkie składowe są pełne. Pokażemy że najgorsza sytuacja (przy k składowych będącymi grafami pełnymi) pojawia się gdy mam do czynienia z $k - 1$ jednopunktowymi składowymi i jedną pełną składową.
Niech więc $(V_1, \mathcal{E}_1)...(V_k, \mathcal{E}_k)$ będą składowymi grafu G i $n_1 = |V_1| \geqslant n_2 = |V_2| \geqslant ... \geqslant n_k = |V_k|$
Załóżmy że dla $i > 1 |V_i| = n > 1$
Niech $u \in V_i$. Zmieńmy nasz graf zabierając u z V_i i przenosząc do V_1. Dbajmy również o to aby w naszym grafie (dalej o k składowych) wszystkie składowe nadal były grafami pełnymi. Różnica wynosi

$$\binom{n_1}{2} + \frac{(n_i - 1)(n_i - 2)}{2} - \left(\frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \frac{n_i(n_i - 1)}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(n_1^2 + n_1 + n_i^2 - 3n_i + 2 - n_1^2 + n_1 - n_i^2 + n_i\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(2n_1 - 2n_i + 2\right)$$
$$n_1 - n_i + 1$$

Co jest dodanie z założenia. Zatem ilość krawędzi m wzrasta gdy zwiększamy jedną składową kosztem pozostałych. To oznacza, że największa ilość krawędzi wystąpi gdy $|V_1| = n - k + 1, |V_2| = ... = |V_k| = 1$.
W takiej sytuacji mamy $\frac{1}{2}(n - k + 1)(n - k)$, co dowodzi poprawności ograniczenia górnego jako równości.

Wykład 3. Podstawowe pojęcia, cykle Eulera

3.1 Spójność (cd.)

Przypomnijmy sformułowanie twierdzenia 2.

Twierdzenie 2 (przypomnienie)**.** Jeśli $G = (V, \mathcal{E})$ jest grafem prostym o n wierzchołkach i n krawędziach i k składowych, to zachodzą następujące nierówności:

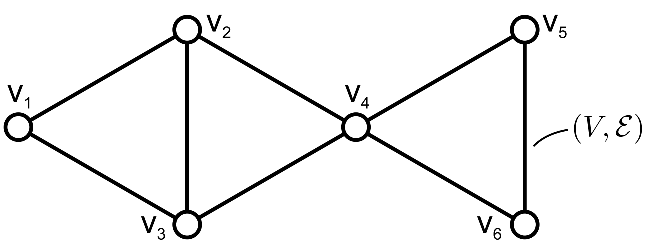
$$n - k \leqslant m \leqslant (n - k)(n - k + 1)/2$$

Wniosek 1. Jeśli dla grafu prostego $G = (V, \mathcal{E})$ o n wierzchołkach i m krawędziach zachodzi nierówność $n > (n - 2)(n - 1)/2$ to G jest spójny.

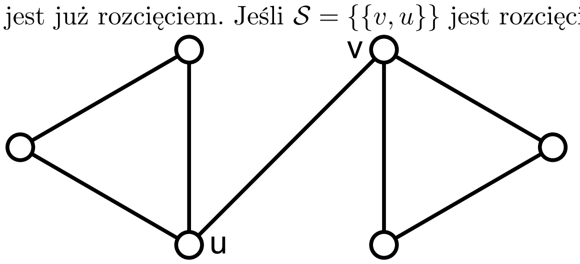
Dowód. Teza jest prawdziwa, bo (*) nie zachodzi.

3.2 Kilka definicji związanych ze spójnością

Podzbiór $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ zbioru krawędzi grafu spójnego $G = (V, \mathcal{E})$ nazywamy zbiorem rozpajającym w G jeśli graf $G = (V, \mathcal{E} - \mathcal{S})$ nie jest spójny.

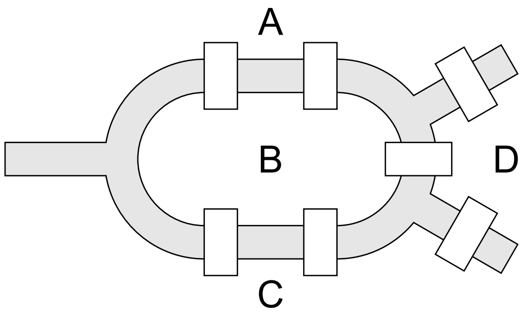


$\mathcal{S} = \{\{\ v_2, v_4\}, \{\ v_3, v_4\}, \{\ v_3, v_1\}\}$
$\mathcal{S}$ jest tu zbiorem rozpajającym.
Zbiór rozpajającym $\mathcal{S}$ w grafie $G = (V, \mathcal{E})$ nazywamy rozcięciem, jeśli żaden podzbiór właściwy $\mathcal{S}$ tej własności nie ma (nie jest zbiorem rozpajającym). W powyższym przykładzie $\mathcal{S}$ nie jest rozcięciem, ale $\mathcal{S}' = \{\{\ v_2, v_4\}, \{\ v_3, v_4\}\}$ jest już rozcięciem. Jeśli $\mathcal{S} = \{\{v, u\}\}$ jest rozcięciem, to krawędź $\{u, v\}$ nazywamy mostem. Przykład:

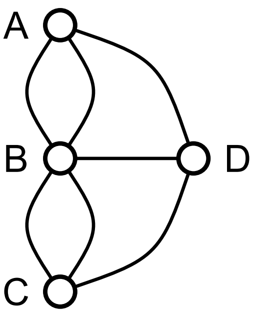


3.3 Grafy Eulera (eulerowskie)

3.3.1 Mosty w Królewcu



Euler spacerując po Królewcu zastanawiał się, czy można odbyć taki spacer, aby przez każdy most przejść jeden raz i skończyć spacer w tym samym miejscu, gdzie się zaczęło.
W istocie mamy tu do czynienia z następującym grafem:



Euler udowodnił następujące twierdzenie dotyczące takich spacerów. Jeśli ścieżkę w której występują wszystkie krawędzie grafu G i każda krawędź występuje dokładnie raz, w której pierwszy i ostatni wierzchołek są równe, nazwiemy cyklem Eulera (eulerowskim), to:

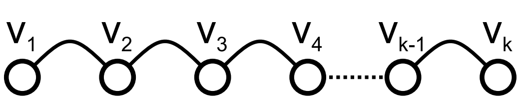
Twierdzenie 3 (Eulera)**.** W grafie $G = (V, \mathcal{E})$ występuje cykl Eulera wtedy, tylko wtedy, gdy G jest spójny i każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Graf w którym jest cykl Eulera nazywamy grafem Eulera (eulerowskim).

Uwaga. Cykl Eulera nie zawsze jest cyklem w sensie używanej przez nas definicji cyklu!

Zanim udowodnimy twierdzenie Eulera, udowodnijmy następujący lemat.

Lemat. Jeśli w grafie $G = (V, \mathcal{E})$ stopień każdego wierzchołka jest większy niż 1, to G zawiera jako podgraf cykl.

Dowód. Jeśli G zawiera pętle lub krawędzie wielokrotne, to teza lematu jest trywialna. Możemy dalej założyć, że G jest grafem prostym.
Niech $v_1 \in V$ Ponieważ $deg(v_2) \geqslant 2$, więc istnieją krawędzie $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, v_3 \neq v_1$. Ponieważ $deg(v_3) \geqslant 2$ to istnieje incydentna z v_3 krawędź $\{v_3, v_4\} \in \mathcal{E}, v_4 \neq v_2$. Jeśli $v_4 \neq v_1$ to dowód jest skończony, bo mamy cykl. Jeśli nie, to kontynuujemy powyższą procedurę.
Załóżmy, że w jej trakcie skonstruowaliśmy drogę $\langle v_1, v_2, ..., v_k \rangle, k \geqslant 4$.



Ponieważ $deg(v_k) \geqslant 2$ więc istnieje krawędź $\{v_k, v_{k+1}\}$ taka że $v_{k+1} \neq v_{k-1}$. (1) Jeśli $v_{k+1} \in \{v_1, v_2, ..., v_{k-2}\}$ czyli $v_{k+1} = v_i, i \in \{1, ..., k-2\}$ to mamy cykl $\langle v_i, v_{i+1}, ..., v_k, v_i \rangle$. (2) Jeśli nie, to $\{v_1, ..., v_{k+1}\}$ jest drogą i iterujemy naszą procedurę.
Zauważmy, że przypadek (2) nie może zachodzić więcej niż $|V|$ (która jest skończona), a więc w którymś kroku istotnie otrzymamy cykl. □

Wykład 4. Grafy Eulera (cd.), konstrukcja

4.1 Lemat o moście i składowej

Lemat. Jeśli graf $G = (V, \mathcal{E})$ jest spójny i $\{u, v\}$ jest mostem to graf $G' = (V, \mathcal{E} \setminus \{u, v\})$ ma dwie składowe.

Dowód. Niech

$$V_1 = \{w \in V, \text{istnieje droga od } u \text{ do } w \text{ w } G'\}$$

$$V_2 = \{w \in V, \text{istnieje droga od } v \text{ do } w \text{ w } G'\}$$

Niech G_1 będzie grafem indukowanym przez V_1 w G'. Niech G_2 będzie grafem indukowanym przez V_2 w G'. Wtedy G_1, G_2 to składowe grafu G
Pokażemy najpierw, że $V_1 \cup V_2 = V$
Niech $w \in V$. Ponieważ G jest spójny to istnieje droga $\langle s_1 = u, s_2, ...s_{k-1}, s_k = w \rangle$ Jeśli $\forall i\, (s_i \neq v)$ to $w \in V_1$. Jeśli $s_i = v$ dla pewnego $i > 1$, to droga $\langle v = s_i, s_{i+1}, ...s_{k+1}, s_l = w \rangle$ daje $w \in V_2$
Spójność G_1, G_2 wynika z definicji składowych.

4.2 Algorytm Fleury'ego

Algorytm Fleury'ego pozwala na konstrukcję cyklu Eulera w grafie eurelowskim. Konstrukcja ta nie jest jednoznaczna.

1. Wybieramy dowolny wierzchołek w którym rozpoczniemy algorytm.
2. Przechodzimy z wierzchołka w którym aktualnie jesteśmy do dowolnego sąsiada (z ograniczeni z podpunktu 2) eliminując krawędź po której przeszliśmy. Usuwamy wierzchołek z którego wszyliśmy jeśli po usunięciu okazał się być izolowany.
3. Przechodzimy przez most tylko gdy musimy.

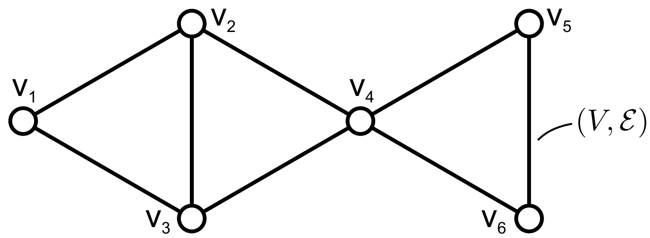
Twierdzenie 4. W grafie eulerowskim algorytm Fleury'ego prowadzi do konstrukcji cyklu Eulera.

Dowód (Szkic). Należy pokazać że po każdym kroku otrzymany graf jest spójny.
Ponieważ lista krawędzi jest skończona oraz za każdym razem mamy ruch to skończymy na grafie pustym.
Kończymy na wierzchołków startowym, ponieważ wierzchołki mają stopnie parzyste, a z każdym ruchem zmniejszmy ogólną sumę stopni o 2.

Wykład 5. Grafy Hamiltona, drzewa

5.1 Definicja grafu Hamiltona

W grafie $G = (V, \mathcal{E})$ mamy cyklem Hamiltona nazywamy cykl będący podgrafem G zawierającym całe V.



Gdzie ... jest ścieżka Hamiltona.

Uwaga. Nie istnieje podobna do charakteryzacji grafów Eulera charakteryzacja grafów Hamiltona.

5.2 Grafy prawie hamiltonowskie

Grafem prawie Hamiltownowskim nazywamy graf w którym istnieje droga Hamiltona, istnieje droga zawierająca wszystkie wierzchołki. Takie grafy nazywamy także półhamiltonowskimi.

5.3 Twierdzenie Orego

Twierdzenie 5 (Ora)**.** Jeśli $G = (V, \mathcal{E})$ jest grafem spójnym, prostym i dla każdej pary wierzchołków niesąsiednich u, v zachodzi: $deg(u) + deg(v) \geqslant |V|$ to G jest Hamiltonowski.

Dowód (niewprost)*.* Do $\mathcal{E}$ dodajmy tyle nowych krawędzi aby graf $\widetilde{G} = (V, \widetilde{\mathcal{E}})$ był prawie hamiltonowski. Pracujemy dalej z grafem $\widetilde{G}$. Zatem w $\widetilde{G}$ istnieje droga zawierająca wszystkie wierzchołki (dodanie jednej krawędzi stworzy cykl).

Lemat. Istnieje takie $2 \leqslant i \leqslant n$, że krawędzie $\{v_{i-1}, v_n\}, \{v_1, v_i\} \in \widetilde{\mathcal{E}}$ ponieważ $\{v_1, v_n\} \notin \widetilde{\mathcal{E}}$ (z zał. TW.)

Dowód. Załóżmy że takie i nie istnieje. Ustalmy $i \leqslant j \leqslant n$. Jeśli $\{v_1, v_j\} \in \widetilde{\mathcal{E}}$ to $\{v_{j-1}, v_n\} \notin \widetilde{\mathcal{E}}$.
Niech $v_{i_1}, v_{i_2}, ...v_{i_k}$ będą wszystkimi wierzchołkami incydentnymi do v_1. Wtedy nie są one incydentne do v_n. Zatem $deg(v_n) \leqslant n - 1 - deg(v_1)$. To daje sprzeczność.

Dowodzą lematu uzyskujemy sprzeczność z założeniem, że $\widetilde{G}$ nie jest hamiltonowski, bowiem: $\langle v_1, v_i, v_{i+1}, ..v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, ..., v_2, v_1\rangle$ jest cyklem Hamiltona.

5.4 Alternatywna forma twierdzenia o grafach hamiltonowskich

Twierdzenie 6. Jeśli w grafie prostym $G = (V, \mathcal{E})$ stopień każdego wierzchołka jest nie mniejszy niż $\frac{n}{2}$ to G jest Hamiltonowski.

Dowód. Za darmo z TW. Orego

5.5 Definicja Drzewa

Drzewem nazywamy graf $T = (V, \mathcal{E})$ który jest prosty, spójny oraz nie posiada cykli.

5.6 Liście

Liściem nazywamy wierzchołki drzewa o stopniu równym 1 (są incydentne z tylko jednym wierzchołkiem)

5.7 Twierdzenie o liściach

Twierdzenie 7. Niech $T = (V, \mathcal{E})$ gdzie $|V| \geqslant 2$ będzie drzewem. Wtedy T ma przynajmniej 2 liście.

Dowód. Niech $\langle v_1, ...v_k \rangle$ to najdłuższa droga. Wtedy v_1 oraz v_k to liście. Jeśli v_1 nie jest liściem, to znaczy że $deg(v_1) = 2$. Wtedy istnieje $u \neq v_2$ t.że $\{v_1, u\} \in \mathcal{E}$. Ale wtedy wybrana wcześniej droga nie jest najdłuższa (albo tworzy cykl).

Wykład 6. Drzewa cd.

6.1 Charakteryzacje drzew

Twierdzenie 8. Następujące warunki na graf $T = (V, \mathcal{E})$ są równoważne

1. T jest drzewem
2. w T nie ma cykli ma ma $n - 1$ krawędzi
3. w T nie ma cyklu i T jest spójne
4. T jest spójny i każda krawędź jest mostem
5. Każde dwa wierzchołki połączone są dokładnie jedną drogą.
6. T nie zawiera cykli i dodanie jednej krawędzi stworzy cykl

Dowód. Dowód za pomocą metody dookoła Wojtek.
$1 \to 2$ przez indukcję.

1. Dla $|V| = 1$ działa.
2. Niech dla $|V| = n$ też działa.
3. Rozważmy drzewo $\widetilde{T} = (\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{E}})$, takie że $|\widetilde{V}| = n + 1$. Wtedy występuje tam pewien liść v. Możemy go usunąć, ponieważ jest on liściem. Operacja ta nie tworzy cykli, oraz z właściwości liścia nie powoduje rozspójnienia. Zatem z założenia indukcyjnego $\widetilde{T}$ jest drzewem.

$2 \to 3$ dowód nie wprost.
Spójność jest spełniona trywialne. Załóżmy że T nie jest spójny. Zatem T ma k składowych: $S_1, S_2, ...S_k$. Składowe te są drzewami. Zatem dla tych składowych zachodzi $1 \to 2$. To oznacza, że dla $S_i = (V_i \mathcal{E}_i)$ mamy $|\mathcal{E}_i| = |V_i| - 1$. Stąd: $|E| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{E}_i| = \sum_{i=1}^{k} |V_i - 1| = |V| - k$. To daje nam sprzeczność.
$3 \to 4$ dowód nie wprost.
Spójność wynika od razu. Jeśli są jakieś nie mosty np. $\{u, v\}$ to usuwamy je i pozostaje nam spójny graf $\widetilde{T} = (\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{E}})$. W $\widetilde{T}$ jest droga od u do v: $\langle a_1, a_2 ... a_k \rangle$. Jeśli dodamy do tej drogi krawędź $\{u, v\}$ to powstanie cykl, co daje sprzeczność.
$4 \to 5$
W dowodzenie przeprowadzonym na wykładzie został wykryty błąd. Prace nad poprawioną wersją trwają, proszę o wysłanie zdjęcia poprawionej wersji @Damian Nowak na fb. $5 \to 6$
Brak cykli jest trywialny. Niech $\{u, v\}$ są dowolne. Są wtedy połączone drogą. Dodanie krawędzi między nimi spowoduje zamknięcie cyklu. Jeżeli krawędź spowoduje powstanie kolejnego cyklu, to musiały być wcześniej połączone dwoma różnymi drogami.
$6 \to 1$
Oczywiste.

Wykład 7. Zliczanie drzew, kody Prüfera

7.1 Zliczanie drzew etykietowanych

Niech $G = (V, \mathcal{E}), \widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{E}})$. Mówimy:

$$\phi : V \to \widetilde{V}$$

jest izomorfizmem pomiędzy $G i \widetilde{G}$ wtedy i tylko wtedy jeśli jest $1-1$ i jest " na " oraz $\{u, v\} \in \mathcal{E} \to \{\phi(u), \phi(v)\} \in \widetilde{\mathcal{E}}$.
Wtedy mówimy że G i $\widetilde{G}$ są izomorficzne.
Tutaj będziemy zliczać drzewa o n wierzchołkach które są ustalone i rozróżnialne pytamy ile różnych drzew możemy stworzyć.
Wiąże się to z ogólniejszą definicją grafy etykietowanego i izomorfizmu między grafami etykietowanymi. Grafem etykietowanym nazywamy dowolny graf $G = (V, \mathcal{E})$ gdzie każdemu wierzchołkowi przyporządkowane są różne liczby. Izomorfizm pomiędzy grafami etykietowanymi to odwzorowanie wierzchołków z zachowaniem etykiet.

7.2 Kody Prüfera

Twierdzenie 9 (Cayleya)**.** Wszystkich nieizomorficznych drzew etykietowanych o n wierzchołkach jest n^{n-2}

Dowód. Dowód będzie polegał na utożsamieniu drzew o n wierzchołkach z ciągami liczb ze zbioru $[n]$ o długościach $n-2$. Ciągi te nazwiemy kodami Prüfera. Niech teraz $T = (G, \mathcal{E})$ będzie drzewem etykietowanym, $|V| = n$.

1. Szukamy liścia o najmniejszej etykiecie w T, oznaczamy go jako b_1. Niech a_1 to wierzchołek połączony z b_1. Likwidujemy krawędź $\{a_1, b_1\}$ i usuwamy b_1 z grafu.

2. Powstałe w ten sposób T_1 które traktujemy krokiem 1, Niech b_2 to liść o najmniejszej etykiecie w T_1 ...

3. Krok n-2 b_{n-2} to liść o najmniejszej etykiecie a $a_n n-2$ to incydenty wierzchołek

Kodem Prüfera dla T nazywamy ciąg $\langle a_1, ...a_{n-2}\rangle$. Kodowanie jest różnowartościowe, ponieważ z kodu Prüfera można odtworzyć T.

1. Niech b_1 to najmniejsza liczba ze zbioru $[n]$ która nie występuje w $\langle a_1, ...a_{n-2}\rangle$. Tworzymy krawędź $\{a_1, b_1\}$. Z naszej listy usuwamy a_1, a b_1 usuwamy i już więcej nie rozważamy.

2. Niech b_2 będzie najmniejszą liczbą ze zbioru $[n]$ która nie występuje w $\langle a_2, ...a_{n-2}\rangle$ oraz której nie odrzuciliśmy w poprzednich krokach. Tworzymy krawędź $\{a_2, b_2\}$. Z naszej listy usuwamy a_2, a b_2 usuwamy i już więcej nie rozważamy.

3. itd...

4. (krok $n-2$) Niech b_{n-2} będzie najmniejszą liczbą ze zbioru $[n]$ która nie występuje w $\langle a_{n-2}\rangle$ oraz której nie odrzuciliśmy w poprzednich krokach. Tutaj tworzymy dwie krawędzie $\{a_{n-2}, b_{n-2}\}$ oraz $\{a_{n-2}, c\}$ gdzie c to pozostały wierzchołek, którego nie odrzuciliśmy.

Wykład 8. Drzewa spinające

8.1 Drzewa spinające grafów spójnych

Niech $G = (V, \mathcal{E})$ będzie grafem spójnym. Drzewem spinającym (rozpinającym) grafu G nazywamy każdy podgraf $T = (V, \mathcal{E}')$ będący drzewem.

Twierdzenie 10. Każdy graf spójny ma przynajmniej jedno drzewo spinające.

Dowód. Stosujemy następującą procedurę: Jeśli w G nie ma cykli to G jest drzewem i jest swoim grafem spinającym. W przeciwnym wypadku istnieje cykl. Usuwamy dowolną krawędź z tego cyklu. Nowy graf jest nadal spójny. Powtarzamy procedurę aż do otrzymania drzewa.

Rozważmy teraz graf prosty i spójny $G = (V, \mathcal{E})$ w którym każdej krawędzi $e \in \mathcal{E}$ przypisano wagę. $W(e) \in R_+$. Algorytm zachłanny K(ruskala)

1. Wybierz krawędź e_1 o najmniejszej wadze i dodaj do drzewa spinającego.
2. Wybierz krawędź e_2 o najmniejszej wadze z pozostałych krawędzi i dodaj do drzewa spinającego.
3. Wybierz e_3 o najmniejszej wadze, tak aby nie stworzyła cyklu i dodaj do drzewa spinającego.
4. kontynuujemy powyższe kroki aż do otrzymania drzewa spinającego cały graf G.

Twierdzenie 11. Algorytm K(ruskala) w grafie prowadzi do konstrukcji drzewa spinającego o minimalnej sumie wag krawędzi [1]

Dowód. Dołączony tutaj, choć przedstawiony na następnym wykładzie. Najpierw udowodnimy pewien CLAIM.
CLAIM. Załóżmy że wszystkie wagi są unikalne. Pokażemy bowiem, że jeśli w K nie prowadzi do MST w sytuacji ogólnej to w tej też nie prowadzi. Niech T będzie wynikiem zastosowania algorytmu do grafu $G = (V, E)$ Niech $e_1, ...me_{n-1}$ będą kolejno wybranymi krawędziami przez K. Załóżmy że łączna waga krawędzi $T = W(T)$ jest większa niż waga innego drzewa spinającego S dla G (tj. $E(T) > W(S)$). Niech $\alpha_1 > 0$ i jest dostatecznie mała. Niech nowa waga $\widetilde{w}(e_1) = w(e_1) - \alpha_1$. PRzy tak zmienionej wadze e_1 moglibyśmy tę krawędź znów wybrać w K. Niech $\widetilde{w}(e_2) = w(e_2) - \alpha_2$ i $\alpha_2 < \alpha_1$. Wtedy $\widetilde{w}(e_2) > \widetilde{w}(e_1)$. Kolejne elementy wybieramy według tego samego schematu. W ten sposób mamy nowe wagi: $\widetilde{w}(e_1) < \widetilde{w}(e_2) < \widetilde{w}(e_3)...\widetilde{w}(e_{n-1})$. Algorytm K wtedy może wybrać $(e_1, ...e_{n-1})$. Dla $e \in \mathcal{E} \setminus \{e_1, ...e_n\}$ dobieramy $\beta_e > 0$ t. że. $\widetilde{w}(e) = w(e) + \beta_e$ oraz nowe wagi są unikalne. Wtedy:

$$\alpha_1 + ...\alpha_{n-1} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \beta_e < W(T) - W(S)$$

. Ostatnia nierówność gwarantuje, że waga $\widetilde{W}(T) > \widetilde{W}(S)$. Zatem K zawodzi także dla pewnego grafu o unikalnych wagach. Co dowodzi CLAIM.
Zatem możemy założyć że graf G ma unikalne wagi. Załóżmy że T które wybraliśmy nie jest minimalne. Niech teraz S będzie MST. Niech $e_1...e_{n-1}$ będą kolejno wybieranymi krawędziami przez K. Niech $k = min\{i : e_i \notin \mathcal{E}\}$ Jeśli dodamy krawędź e_k do S rozważając $\widetilde{S} = (V, \mathcal{E} \cup e_k)$ to otrzymamy w nowym grafie cykl. W skład tego cyklu wchodzi e_k. Niech e będzie inną krawędzią tego cyklu. Wtedy $\widetilde{\widetilde{S}} = (V, \mathcal{E} \setminus \{e\} \cup \{e_k\}$ też jest drzewem. Ponieważ $e \notin \{e_1, ...e_{k-1}\}$ i w k-tym kroku algorytm K wybrał e_k, więc $w(e_k) < w(e)$. Zatem:

$$W(\widetilde{\widetilde{S}}) < W(S)$$

co daje sprzeczność.

Wykład 9. Planarność

9.1 Definicja grafów planarnych

Graf $G = (V, \mathcal{E})$ nazywamy planarnym jeśli możemy jego izomorficzną kopię na płaszczyźnie R^2 narysować tak aby krawędzie się nie przecinały.

[1] W związku z faktem że nie mam czasu pisać za każdym razem "drzewa spinającego o minimalnej sumie wag krawędzi"będę używał skrótów: minimalne drzewo spinające lub MST

9.2 Ściany

Ścianą nazywamy obszar w którym od każdego punktu do każdego innego punktu można przejść łamaną nie przechodząc żądnej krawędzi. Niech F to zbiór wszystkich ścian danego grafu.

9.3 Wzór Eulera

Twierdzenie 12 (Eulera)**.**

$$|V| - |\mathcal{E}| + |F| = 2$$

gdzie $G = (V, \mathcal{E})$ jest grafem spójnym i planarnym.

Dowód. Indukcja po liczbie krawędzi.
$m = 0$ Zachodzi, bo $1 - 0 + 1 = 2$
Zał, że TW. zachodzi dla $m - 1$.
Niech teraz $G = (V, \mathcal{E})$ będzie grafem spójnym o m krawędziach. Zał że G jest drzewem. Wtedy $|E| = |V| - 1$. Wtedy w G nie ma ścian, bo nie ma cyklu. ($|F| = 1$). Zatem TW zachodzi. Jeśli G nie jest drzewem, a więc w G istnieje cykl jako podgraf, to usuńmy z tego cyklu dowolną krawędź. Wtedy zmniejszamy liczbę krawędzi oraz ścian o 1 i zachodzi nasze założenie indukcyjne.

9.4 Twierdzenia o planarności

Twierdzenie 13. Jeśli $G = (V, \mathcal{E})$ jest grafem prostym, spójnym i planarnym oraz $|V| > 3$, to $|E| \leqslant 3|V| - 6$. Ogólniej[2]: jeśli r to obwód grafu (dł. najmniejszego cyklu) to : $|E| \leqslant \frac{r}{r-2}(|V| - 2)$

Dowód. Szkic.
Zauważmy, że jeśli obwód to r to każda ściana ograniczona jest minimalnie przez r krawędzi. Zliczając tak wszystkie ściany otrzymujemy: $r|F| \leqslant 2|E|$. Ilość krawędzi jest podwojona, ponieważ każdą krawędź liczymy dwukrotnie(może ona odgraniczać maks. 2 różne ściany) Następnie stosujemy poprzednie twierdzenie.

Twierdzenie 14. Grafy K_5 oraz $K_{3,3}$ nie są grafami planarnymi.

Dowód. Grafy te nie spełniają poprzedniego twierdzenia.

9.5 Homeomorfizm

Grafy G_1 oraz G_2 są homeomorficzne jeżeli graf G_1 można otrzymać z grafu G_2 przy pomocy usuwania i/lub dodawania wierzchołków stopnia 2.

Twierdzenie 15. Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z K_5 lub $K_{3,3}$

9.6 Ściąganie

Niech $G = (V, \mathcal{E})$ i $e = \{v, u\} \in \mathcal{E}$ Ściąganiem krawędzi nazywamy utworzenie nowego grafu

$$H = (V \setminus \{v\}, (\mathcal{E} \setminus \{\ \{s, v\ \ : s \neq v\}\}) \cup \{\{t, u\} : \{t, v\} \in \mathcal{E}\})$$

Graf H jest ściągnięciem grafu G jeżeli możemy go otrzymać przez ściągniecie kolejnych krawędzi.

Twierdzenie 16. Graf $G = (V, \mathcal{E})$ jest planarny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera żadnego grafu ściągalnego do K_5 oraz $K_{3,3}$.

[2]Dodatek autora skryptu

Wykład 10. Kolorowanie grafów

10.1 Liczba chromatyczna

Załóżmy że $G = (V, E)$ jest bez pętli. Mówimy że G jest k kolorowalny jeśli każdemu wierzchołkowi można przypisać jeden z k kolorów tak aby dwa dowolne sąsiednie wierzchołki miały różne kolory. Formalnie $G = (V, \mathcal{E})$ jest k kolorowalny jeśli $\exists c : A = \{1, 2, 3...k\}(\forall v_1, v_2)(\{v_1, v_2\} \in \mathcal{E} \to c(v_1) \neq c(v_2))$.
Liczbą chromatyczną grafu $\chi(G) = k$ jak najmniejsze k, takie że G jest k kolorowalne.

Twierdzenie 17 (Brooksa)**.** Jeśli $G = (V, \mathcal{E})$ jest grafem prostym, $|V| > 2$ oraz stopień każdego wierzchołka jest $\leqslant n$ i $G \neq K_{n+1}$ to $\chi(G) \leqslant n$

10.2 Indeks chromatyczny

Analogicznie do pojęcia liczby chromatycznej definiujemy pojęcie indeksu chromatycznego z tą różnicą iż kolorujemy krawędzie.

Twierdzenie 18 (Appel Haken)**.** Jeśli G jest planarne i proste to $\chi(G) \leqslant 4$.