Matematyka Dyskretna - skrócona lista wzorów

Mikołaj Pietrek

Semestr letni 2016/2017 - najważniejsze wzory z wykładu

Potęgi dolne/górne

$$x^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1}(x-i) \qquad x^{\overline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1}(x+i) \qquad x^{\underline{0}} = \prod_{i=0}^{-1}(x-i) = 1 \qquad x^{\underline{1}} = x^1 = x$$

Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \binom{-x+k-1}{k}$$

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \Rightarrow (x+1)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k$$

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

$$\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n}$$

definicja: liczba wszystkich k-elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego

Liczby Stirlinga I rodzaju (cykliczne)

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix} = \binom{n}{2} \qquad \begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} = (n-1)!$$

$$\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix} x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} x^k \qquad \begin{bmatrix}n+1\\m+1\end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\binom{k}{m}$$

definicja: liczba permutacji w S_n, które rozbijają się na k cykli (w kanonicznym rozbiciu), wliczając jednoelementowe

Liczby Stirlinga II rodzaju (partycyjne)

$$\left\{ n \atop 0 \right\} = 0 \qquad \left\{ n \atop n \right\} = 1 \qquad \left\{ n \atop n-1 \right\} = \binom{n}{2} \qquad \left\{ n \atop n-1 \right\} = \left[n \atop n-1 \right] \qquad \left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1$$

$$\left\{ n+1 \atop k \right\} = k\left\{ n \atop k \right\} + \left\{ n \atop k-1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ n \atop k \right\} = k\left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$$

definicja: liczba partycji zbioru $[n]$ składających się z k części

Podstawy teorii grafów

Definicje

- ścieżka (droga) - skończony ciąg krawędzi w postaci $a \to v_1 \to v_2 \to ... \to v_{k-1} \to b$, gdzie a jest wierzchołkiem początkowym, natomiast b wierzchołkiem końcowym (bez powtarzających się wierzchołków)
- długość ścieżki - liczba krawędzi ścieżki
- cykl - skończony ciąg krawędzi, w któym powtarza się jedynie początek (będący równocześnie końcem)
- stopień wierzchołka - ilość krawędzi do niego dochodzących.
- dopełnienie grafu ($\overline{G}$) - zbiór wierzchołków jest identyczny jak w grafie G, natomiast wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy nie są połączone w grafie G.

Przykłady

- spójny - graf, w którym dla każdego wierzchołka istnieje droga do każdego innego wierzchołka
- prosty - bez pętli własnych i krawędzi wielokrotnych.
- regularny - graf prosty, w którym wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień
- drzewo - spójny graf acykliczny
- drzewo rozpinające - drzewo, które zawiera wszystkie wierzchołki grafu G, a zbiór krawędzi drzewa jest podzbiorem zbioru krawędzi grafu
- pełny (K_n) - każdy wierzchołek jest połączony bezpośrednio krawędzią z każdym innym
- pełny dwudzielny ($K_{n,m}$) - graf pełny, którego wierzchołki mogą być podzielone na dwa zbiory, tak by w obrębie jednego zbioru żaden wierzchołek nie był połączony z innym
- pusty (P_n) - nieposiadający krawędzi
- liniowy (L_n) - otrzymany poprzez usunięcie jednej krawędzi z grafu cyklicznego
- cykliczny (C_n) - regularny graf spójny, którego każdy wierzchołek jest stopnia drugiego

Grupy automorfizmów

- $\Gamma(K_n) \cong S_n$
- $\Gamma(K_{n,m}) \cong S_n \times S_m$ dla $n \neq m$
- $\Gamma(K_{n,n}) \cong Z_2 \times S_n \times S_n$
- $\Gamma(P_n) \cong S_n$
- $\Gamma(L_n) \cong Z_2$
- $\Gamma(C_n) \cong D_n$
- $\Gamma(\overline{G}) = \Gamma(G)$ dla dowolnego grafu G

Klasy kombinatoryczne

Uwaga: w poniższych wzorach a_n oznacza ilość elementów o randze n

dla klasy $\mathcal{A} = (A, |\cdot|)$ definiujemy $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\mathcal{E}(x) = (e, |\cdot|) \qquad |e| = 0 \qquad E(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e_n x^n = 1$

$\mathcal{Z}(x) = (z, |\cdot|) \qquad |z| = 1 \qquad Z(x) = x$

$\mathbf{Seq}(\mathcal{A})(x) = \dfrac{1}{1 - \mathcal{A}(x)}$

$\mathbf{Pset}(\mathcal{A})(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)^{a_n}$

$\mathbf{Mset}(\mathcal{A})(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1 - x^n)^{a_n}} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-a_n}$

$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(z) = \mathcal{A}(z) + \mathcal{B}(z)$

$(\mathcal{A} \times \mathcal{B})(z) = \mathcal{A}(z) \cdot \mathcal{B}(z)$