assignment3

zxren0102

December 2022

第 1 题:

证明:

因为 X 是严格高斯白噪声，因此有:

$$E[X_n]=0, Cov(X_m,X_n)=\begin{cases}\sigma^2, m=n\\ 0, m\neq n\end{cases} \tag{1}$$

因此对任意的 τ，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从相同的正态分布。

因此 X 是严格平稳过程。

第 2 题:

证明:

因为 B^{0,σ^2} 是布朗运动，因此 $X_t^u=B_{t+u}^{0,\sigma^2}-B_t^{0,\sigma^2}$ 也是布朗运动，因此有:

$$X_t^u\sim N(0,u\sigma^2) \tag{2}$$

且有:

$$m_X(t)=0, R_X(t,s)=E[\overline{X}_t^u X_s^u]=\begin{cases}\sigma^2, t=s\\ u\sigma^2, t\neq s\end{cases} \tag{3}$$

所以 X^u 是平稳过程。又因为 X^u 是正态过程，因此 X^u 为严平稳过程。

第 4 题:

证明:

$$\begin{aligned}m_Y(t)&=E[X_{t+1}-X_t]=1+3(t+1)-(1+3t)=3\\ R_Y(t,t+\tau)&=E[(X_{t+1}-X_t)(X_{t+\tau+1}-X_{t+\tau})]\\ &=E[X_{t+1}X_{t+\tau+1}]+E[X_tX_{t+\tau}]-E[X_{t+1}X_{t+\tau}]-E[X_tX_{t+\tau+1}]\\ &=2R_X(\tau)-R_X(\tau-1)-R_X(\tau+1)\\ &=2\mathrm{e}^{-\lambda|\tau|}-\mathrm{e}^{-\lambda|\tau-1|}-\mathrm{e}^{-\lambda|\tau+1|}\end{aligned} \tag{4}$$

随机过程 Y 的平稳性得证。

第 6 题:

解:

由题意得:

$$R_{A_i}(t,t)=E^2[A_i]+D[A_i]=a_i^2+\sigma_i^2 \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= E[A_1 + A_2 t] = a_1 + a_2 t \\
R_X(t, t+\tau) &= E[(A_1 + A_2 t)(A_1 + A_2(t+\tau))] \\
&= E[A_1^2] + E[A_2^2]t(t+\tau) + E[A_1 A_2](2t+\tau) \\
&= a_1^2 + \sigma_1^2 + (a_2^2 + \sigma_2^2)t(t+\tau) + a_1 a_2(2t+\tau)
\end{aligned} \tag{6}
$$

由上式可知，因为 $E[A_2^2] = a_2^2 + \sigma_2^2 > 0$，因此 $R_X(t, t+\tau)$ 是随时间 t 变化，因此 X 不是平稳过程。

第 13 题:

解:

因为:

$$
\begin{aligned}
m_X &= E[A]\cos t + E[B]\sin t = 0 \\
R_X(t, t+\tau) &= E[\overline{X_t} X_{t+\tau}] \\
&= E[(\overline{A}\cos t + \overline{B}\sin t)(A\cos(t+\tau) + B\sin(t+\tau))] \\
&= E[\overline{A}A]\cos t\cos(t+\tau) + E[\overline{B}B]\sin t\sin(t+\tau) \\
&= \sigma^2(\cos t\cos(t+\tau) + \sin t\sin(t+\tau)) \\
&= \sigma^2\cos(\tau)
\end{aligned} \tag{7}
$$

因此 X 为平稳过程。又因为:

$$
\begin{aligned}
< X_t > &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A\cos(t+\tau) + B\sin(t+\tau))\mathrm{d}t = 0 = m_X \\
< \overline{X_t} X_{t+\tau} > &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\overline{A}\cos t + \overline{B}\sin t)(A\cos(t+\tau) + B\sin(t+\tau))\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{A}A\frac{\cos\tau + \cos(2t+\tau)}{2} + \overline{B}B\frac{\cos\tau - \cos(2t+\tau)}{2} + \\
&\quad \overline{A}B\frac{\sin\tau + \sin(2t+\tau)}{2} + \overline{B}A\frac{\sin(2t+\tau) - \sin\tau}{2}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\overline{A}A + \overline{B}B)\frac{\cos\tau}{2} + (\overline{A}B - \overline{B}A)\frac{\sin\tau}{2}\mathrm{d}t \neq R_X(\tau)
\end{aligned} \tag{8}
$$

因此 X 的均值函数符合各态历经性，而相关函数则否然。

第 14 题:

解:

因为 $s(t)$ 是周期为 T_0 的函数，因此有:

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= E[X_t] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t+\Theta)\mathrm{d}\Theta = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)\mathrm{d}\Theta \\
R_X(t, t+\tau) &= E[\overline{X}_t X_{t+\tau}] \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\overline{s}(t+\Theta)s(t+\tau+\Theta)\mathrm{d}\Theta \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\overline{s}(\Theta)s(\tau+\Theta)\mathrm{d}\Theta
\end{aligned} \tag{9}
$$

因此 X 为平稳过程，又由于：

$$< X_t >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s(t+\Theta)\mathrm{d}t \in [A, B] \tag{10}$$

其中：

$$A = \min\left(\frac{\lfloor 2T/T_0 \rfloor}{2T} \int_0^{T_0} s(t)\mathrm{d}t, \frac{\lceil 2T/T_0 \rceil}{2T} \int_0^{T_0} s(t)\mathrm{d}t\right), B = \max\left(\frac{\lfloor 2T/T_0 \rfloor}{2T} \int_0^{T_0} s(t)\mathrm{d}t, \frac{\lceil 2T/T_0 \rceil}{2T} \int_0^{T_0} s(t)\mathrm{d}t\right) \tag{11}$$

又因为：

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\lfloor 2T/T_0 \rfloor}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\lceil 2T/T_0 \rceil}{2T} = \frac{1}{T_0} \tag{12}$$

由夹逼准则可知，

$$< X_t >= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)\mathrm{d}t = m_X \tag{13}$$

同理可得：

$$< \overline{X}_t X_{t+\tau} >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{s}(t+\Theta) s(t+\tau+\Theta)\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \overline{s}(\Theta) s(\tau+\Theta)\mathrm{d}\Theta = R_X(\tau) \tag{14}$$

因此 X 为各态历经过程。