Szeregi liczbowe

Szereg liczbowy

Rozważmy ciąg liczbowy (a_n)

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.$$

Dla ustalonego n, niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n)

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ S_3=a_1+a_2+a_3,\ S_4=a_1+a_2+a_3+a_4\ \ldots..$$

Ciąg (S_n) sum częściowych $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ nazywamy szeregiem liczbowym.

Szereg oznaczamy symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lub $a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots.$

Definicja (szereg zbieżny i rozbieżny, suma i reszta szeregu)

Mówimy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, jeżeli istnieje granica właściwa ciągu jego sum częściowych (S_n).

Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

to mówimy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest rozbieżny odpowiednio do $-\infty$ albo do ∞.

Sumą szeregu zbieżnego nazywamy granicę

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

i oznaczamy ją tym samym symbolem co szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

***n*-tą resztą szeregu**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazywamy liczbę

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

Twierdzenie (o zbieżności kombinacji liniowych szeregów)
Jeżeli szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są zbieżne, to:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Fakt (**o zbieżności szeregu geometrycznego**)

Szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

jest zbieżny dla $|x|<1$ i rozbieżny dla $x \geq 1$ oraz dla $x \leq -1$ szereg jest rozbieżny.

Dla zbieżnego szeregu geometrycznego mamy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Twierdzenie (**warunek konieczny zbieżności szeregu**)

Jeżeli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Kryteria zbieżności szeregów

Twierdzenie (**kryterium całkowe**)

Niech funkcja f będzie nieujemna oraz nierosnąca na przedziale $[n_0, \infty)$, gdzie $n_0 \in N$. Wówczas szereg

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

i całka niewłaściwa

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$$

są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.

Fakt

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$

jest zbieżny dla $p>1$ i rozbieżny dla $p\leq 1$.

Twierdzenie (**kryterium porównawcze**)

Niech $0 \leq a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$. Wówczas:

1. jeżeli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest zbieżny, to także szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny

2. jeżeli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest rozbieżny, to także szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

jest rozbieżny.

Twierdzenie (**kryterium ilorazowe**)

Niech $a_n, b_n > 0$ ($a_n, b_n < 0$) dla każdego $n \geq n_0$ oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad \text{gdzie} \quad 0 < k < \infty.$$

Wówczas szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.

Twierdzenie (**kryterium d'Alemberta**)

Niech

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q.$$

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny dla $q<1$ i rozbieżny dla $1<q\leq\infty$.

Twierdzenie (**kryterium Cauchy'ego**)

Niech

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny dla $q<1$ i rozbieżny dla $1<q\leq\infty$.

Zbieżność bezwzględna szeregów

Twierdzenie (**Leibniza o szeregu naprzemiennym**)

Jeżeli

1. ciąg (b_n) jest nierosnący od numeru $n_0 \in N$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0,$

to szereg naprzemienny

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$$

jest zbieżny.

Definicja (zbieżność bezwzględna szeregu)
Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest **zbieżny bezwzględnie**, gdy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

jest zbieżny.

Twierdzenie (zbieżność szeregów zbieżnych bezwzględnie)
Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Definicja (szereg zbieżny warunkowo)
Szereg zbieżny, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nazywamy szeregiem **zbieżnym warunkowo**.

Szeregi potęgowe

Definicja (szereg potęgowy)
Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $x_0 \in R$ i współczynnikach $c_n \in R$, gdzie n=0,1,2,.., nazywamy szereg postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \text{gdzie} \quad x \in R.$$

Definicja (promień zbieżności szeregu potęgowego)
Promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

nazywamy liczbę R określoną równością:

$$R = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty \\ \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} & \text{gdy} \quad 0 < \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty \\ \infty & \text{gdy} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \end{cases}$$

Promień zbieżności szeregu może być obliczony także ze wzoru:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Twierdzenie (**Cauchy'ego-Hadamara**)

Niech $0<R<\infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

Wówczas szereg ten jest:

1. **zbieżny bezwzględnie** w każdym punkcie przedziału $(x_0-R,\ x_0+R)$
2. **rozbieżny** w każdym punkcie zbioru $(-\infty, x_0-R)\cup(x_0+R,\infty)$.

W obu końcach przedziału $(x_0-R,\ x_0+R)$ szereg potęgowy może być zbieżny lub rozbieżny.

Jeżeli $R=0$, to szereg potęgowy jest zbieżny tylko w punkcie x_0.

Jeżeli $R=\infty$, to szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie na całej prostej.

Definicja (przedział zbieżności szeregu potęgowego)
Zbiór tych $x \in R$, dla których szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

jest zbieżny, nazywamy **przedziałem zbieżności tego szeregu**.

Definicja (szereg Taylora i Maclaurina)
Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodne dowolnego rzędu. Szereg potęgowy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

nazywamy **szeregiem Taylora** funkcji f o środku w punkcie x_0. Jeżeli $x_0=0$, to szereg ten nazywamy **szeregiem Maclaurina** funkcji f.

Twierdzenie (o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora)

Jeżeli:

1. funkcja f ma na otoczeniu O punktu x_0 pochodne dowolnego rzędu,
2. dla każdego $x \in O$ spełniony jest warunek

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

gdzie

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

oznacza n-tą resztę we wzorze Taylora dla funkcji f, to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

dla każdego $x \in O$.

Twierdzenie (o jednoznaczności rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy)
Jeżeli

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

dla każdego x z pewnego otoczenia punktu x_0, to

$$c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\ldots$$

Twierdzenie (**o różniczkowaniu szeregu potęgowego**)

Niech $0<R\leq\infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

Wówczas:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

dla każdego $x\in(-R,R)$.

Twierdzenie (**o całkowaniu szeregu potęgowego**)

Niech $0<R\leq\infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

Wówczas:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

dla każdego $x\in(-R,R)$.

Szereg Fouriera

Definicja (szereg trygonometryczny)

Szeregiem trygonometrycznym na przedziale $[-\pi,\pi]$ nazywamy szereg postaci:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

gdzie $a_0\in R$ oraz $a_n,b_n\in R$ dla $n\in N$.

Definicja (szereg Fouriera funkcji)

Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[-\pi,\pi]$. **Szeregiem Fouriera** tej funkcji nazywamy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

gdzie

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\ldots$$

oraz

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots$$

Fakt (współczynniki szeregu Fouriera funkcji parzystych i nieparzystych)

1. Jeżeli funkcja f jest parzysta, to $b_n=0$ dla $n=1,2,\ldots$ oraz

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

2. Jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to $a_n=0$ dla $n=0,1,2,\ldots$ oraz

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

UWAGA

Szereg Fouriera funkcji określonej na przedziale $[-l,l]$ ma postać:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

gdzie

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\ldots$$

oraz

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots$$

Twierdzenie (**kryterium Dirichleta**)

Jeżeli funkcja $f : [-\pi,\pi] \to R$ jest

1. przedziałami monotoniczna,

2. przedziałami ciągła, przy czym w każdym punkcie nieciągłości x spełnia warunek,

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x_-) + f(x_+)]$$

3. na końcach przedziału zachodzą równości

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi_-) + f(\pi_+)]$$

to funkcja f jest sumą swojego szeregu Fouriera, tzn. dla każdego $x \in [-\pi,\pi]$ mamy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Jeżeli funkcja f spełnia w przedziale $[-l,l]$ warunki Dirichleta, to jest rozwijalna w tym przedziale w szereg trygonometryczny Fouriera.

Jeżeli ponadto funkcja f jest okresowa i ma okres $2l$, to poniższa równość jest prawdziwa dla każdego x z dziedziny tej funkcji.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

Rozwijania funkcji w szereg trygonometryczny Fouriera sinusów lub kosinusów

Rozważmy funkcję f, która jest określona i spełnia pierwszy i drugi warunek Dirichleta w przedziale otwartym (0, l). Funkcję tę można przedstawić w przedziale (0, l) w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera składającego się z samych sinusów albo samych kosinusów.

Rozważmy funkcję pomocniczą f*, określoną na przedziale [-l,l] nazywana przedłużeniem funkcji f.

Aby otrzymać rozwinięcie funkcji f w szereg **sinusów** należy przedłużyć funkcję f w sposób **nieparzysty**.

$$f^*(x) = \begin{cases} -f(-x) & dla \quad x \in (-l,0) \\ 0 & dla \quad x = 0, x = -l, x = l \\ f(x) & dla \quad x \in (0,l) \end{cases}$$

Aby otrzymać rozwinięcie funkcji f w szereg **kosinusów** należy przedłużyć funkcję f w sposób **parzysty**.

$$f^*(x) = \begin{cases} f(l_-) & dla \quad x = l, x = -l \\ f(-x) & dla \quad x \in (-l,0) \\ 0 & dla \quad x = 0 \\ f(x) & dla \quad x \in (0,l) \end{cases}$$