Rozwiązać równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

• $y' = 2ty^2$

zamieniamy y' na $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = 2ty^2$$

rozdzielamy zmienne

$$\frac{dy}{y^2} = 2t\,dt$$

całkujemy obustronnie

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2t\,dt$$

$$-\frac{1}{y} = t^2 + C$$ – C dodajemy tylko raz, po jednej stronie

$$y = \frac{-1}{t^2+C}$$

• $y \cdot y' + 4t = 0$

zamieniamy y' na $\frac{dy}{dt}$

$$y \cdot \frac{dy}{dt} + 4t = 0$$

rozdzielamy zmienne

$$y \cdot dy = -4t\,dt$$

całkujemy

$$\int y\,dy = \int (-4t)\,dt$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -2t^2 + C \quad / \cdot 2$$

$$y^2 = -4t^2 + 2C$$

Rozwiąż zagadnienie początkowe

- $t \cdot y' - 2y = 0 \quad , \quad y(1) = 2$

zamieniamy y' na $\frac{dy}{dt}$

$t \cdot \frac{dy}{dt} = 2y$

rozdzielamy zmienne

$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dt}{t}$

obustronnie całkujemy

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{t}\,dt$

$\ln|y| = 2 \cdot \ln|t| + C$ ← C dodajemy tylko po jednej stronie

wyliczamy y

$y = e^{2 \cdot \ln|t| + C} = e^{\ln|t|^2 + \ln C_1} = e^{\ln(|t|^2 \cdot C_1)} = |t|^2 \cdot C_1$

Rozwiązanie: $y(t) = |t|^2 \cdot C_1$

Podstawiamy war. początkowy i wyliczamy C_1 $\begin{cases} t=1,\ y=2 \Rightarrow 2 = 1^2 \cdot C_1 \Rightarrow C_1 = 2 \\ \text{stąd } y(t) = |t|^2 \cdot 2 \end{cases}$ odp

- $y' - 2ty = 0 \quad , \quad y(1) = -e$

zamieniamy y' na $\frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dt} - 2ty = 0$

rozdzielamy zmienne

$\frac{dy}{dt} = 2ty$

$\frac{dy}{y} = 2t\,dt$

obustronnie całkujemy

$\int \frac{dy}{y} = \int 2t\,dt$

$\ln|y| = t^2 + C \Rightarrow |y| = e^{t^2 + C}$

Podstawiamy war. początkowy $y = -e,\ t = 1$ i wyliczamy C

$|-e| = e^{1^2 + C}$

$e = e^{1 + C}$

$1 = 1 + C$

$C = 0$

odp:

$|y(t)| = e^{t^2 + 0}$

$|y(t)| = e^{t^2}$

- $y' + y^2 \sin t = 3(ty)^2$, $y(0)=1$

podstawiamy $\frac{dy}{dt}$ zamiast y'

$$\frac{dy}{dt} + y^2 \sin t = 3t^2y^2$$

rozdzielamy zmienne

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2y^2 - y^2 \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2(3t^2 - \sin t)$$

$$\frac{dy}{y^2} = (3t^2 - \sin t)\,dt$$

całkujemy

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (3t^2 - \sin t)\,dt$$

$$-\frac{1}{y} = t^3 + \cos t + C$$

$$y = \frac{-1}{t^3 + \cos t + C}$$

podstawiamy warunek początkowy $y=1, t=0$
i wyliczamy c

$$-\frac{1}{1} = 0^3 + \cos 0 + C$$

$$-1 = 1 + C$$

$$c = -2$$

odp. $y(t) = \dfrac{-1}{t^3 + \cos t - 2}$ o.u.

Rozwiązać równanie różniczkowe jednorodne

- $t^2 y' = t^2 + ty + y^2 \quad (*)$

zastosujemy podstawienie

$$y(t) = u(t)\cdot t$$

stąd $\quad y'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{du}{dt} = u'(t)\cdot t + u(t)\cdot 1$

i do równanie $(*)$ wstawiamy

$$\begin{cases} y = u\cdot t \\ y' = u'\cdot t + u \end{cases}$$

otrzymując

$$t^2(u'\cdot t + u) = t^2 + tut + u^2\cdot t^2 \quad /\cdot \frac{1}{t^2}, \quad t \neq 0$$

$$u'\cdot t + u = 1 + u + u^2$$

$$u'\cdot t = 1 + u^2$$

$$\frac{du}{dt}\cdot t = 1 + u^2 \quad \text{— r.r. o zmiennych rozdzielonych}$$

rozdzielamy zmienne

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{t}dt$$

całkujemy

$$\int \frac{1}{1+u^2}du = \int \frac{1}{t}dt$$

$$\operatorname{arctg}(u) = \ln|t| + C = \ln|t| + \ln|C_1| = \ln|t\cdot C_1|$$

zamiast u wstawiamy $\frac{y(t)}{t}$ otrzymując

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{t}\right) = \ln|t\cdot C_1|$$

$$\frac{y}{t} = \operatorname{tg}(\ln|t\cdot C_1|) \Rightarrow y(t) = t\cdot \operatorname{tg}(\ln|t\cdot C_1|) \quad \text{o.u.}$$

Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

- $y' - 2ty = t \quad (*)$

I Rozwiązujemy r.r. jednorodne

$$y' - 2ty = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = 0 \quad \text{— r.r. o zmiennych rozdzielonych}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2ty$$

$$\frac{dy}{y} = 2t\,dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2t\,dt$$

$$\ln|y| = t^2 + C$$

$$|y| = e^{t^2+C} = e^{t^2} \cdot e^{C} = e^{t^2} \cdot C_1$$

czyli $\quad y = C_2 \cdot e^{t^2} \qquad C_2 = \pm C_1$

II uzmienniamy stałą: $C_2 = C_2(t)$

$$y(t) = C_2(t) \cdot e^{t^2}$$

obliczamy pochodną

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = C_2'(t) \cdot e^{t^2} + C_2(t) \cdot e^{t^2} \cdot 2t$$

i podstawiamy do r-nia $(*)$

$$\underbrace{C_2'(t) e^{t^2} + \cancel{C_2(t) \cdot e^{t^2} \cdot 2t}}_{y'(t)} - \cancel{2t \cdot \underbrace{C_2(t) \cdot e^{t^2}}_{y(t)}} = t$$

tutaj musi nastąpić redukcja

$$C_2'(t) e^{t^2} = t$$

$$C_2'(t) = \frac{t}{e^{t^2}}$$

$$C_2(t) = \int C_2'(t)\,dt = \int \frac{t}{e^{t^2}}\,dt = \frac{-1}{2e^{t^2}} + C_3$$

ostatecznie

$$y(t) = \overbrace{\left(\frac{-1}{2e^{t^2}} + C_3\right)}^{C_2(t)} e^{t^2} = -\frac{1}{2} + e^{t^2} \cdot C_3 \quad \text{cu.}$$

• $y' - \frac{y}{t} = t\cos t \quad (*)$

I Rozwiązujemy r. r. liniowe jednorodne

$y' - \frac{y}{t} = 0$

$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$ – r.r. o zmiennych rozdzielonych

$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{t}dt$

$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{t}dt$

$\ln|y| = \ln|t| + C$

$|y| = e^{\ln|t|+C} = e^{\ln|t|} \cdot e^{C} = e^{\ln|t|} \cdot C_1 = |t| \cdot C_1$

$y = t \cdot C_2$

II uzmienniamy stałą $C_2 = C_2(t)$

$y(t) = t \cdot C_2(t)$

obliczamy pochodną

$y'(t) = 1 \cdot C_2(t) + t \cdot C_2'(t)$

i podstawiamy do r-nie $(*)$

$\underbrace{\cancel{C_2(t)} + t \cdot C_2'(t)}_{y'(t)} - \cancel{\frac{1}{t} \cdot \underbrace{t \cdot C_2(t)}_{y(t)}} = t\cos t$

$t \cdot C_2'(t) = t\cos t \quad / \cdot \frac{1}{t}, \quad t \neq 0$

$C_2'(t) = \cos t$

$C_2(t) = \int C_2'(t)\,dt = \int \cos t\,dt = \sin t + C_3$

ostatecznie

$y(t) = t \cdot \underbrace{(\sin t + C_3)}_{C_2(t)}$ o.k.

Rozwiązać równanie różniczkowe Bernoulliego

- $y' - 2ty = 2t^3 y^2$

$p(t) = -2t$, $h(t) = 2t^3$, $r = 2$

stosujemy podstawienie

$$z = y^{1-r}$$

stąd

$$\begin{cases} z(t) = y(t)^{-1} = \frac{1}{y(t)} \\ z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{-1}{y(t)^2} \cdot y'(t) = \frac{-1}{y^2} \cdot y' \end{cases}$$

wówczas

$$y' - 2ty = 2t^3 y^2 \,|\, : y^r$$ // dzielimy przez y^r

$$\frac{1}{y^2} y' - \frac{2ty}{y^2} = 2t^3$$

$$\underbrace{-\left(-\frac{1}{y^2} y'\right)}_{z'} - 2t \cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{z} = 2t^3$$

$-z' - 2tz = 2t^3$ – równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

$$z(t) = -t^2 + 1 + e^{-t^2} \cdot C$$

ostatecznie

$$\frac{1}{y} = -t^2 + 1 + e^{-t^2} \cdot C$$

stąd $y = \frac{1}{-t^2 + 1 + e^{-t^2} \cdot C}$ <u>O.K.</u>

- $y' - \frac{y}{2} = -\frac{2t}{y}$

$p(t) = -\frac{1}{2}$, $h(t) = -2t$, $r = -1$

stosujemy podstawienie

$$z = y^{1-r}$$

stąd
$$\begin{cases} z(t) = y(t)^{1-(-1)} = y(t)^2 \\ z'(t) = 2y(t)\cdot y'(t) \end{cases}$$

wówczas

$$y' - \frac{1}{2}y = -\frac{2t}{y} \quad /:y^{-1}$$

$$y'\cdot y - \frac{1}{2}y^2 = -2t$$

$$\frac{1}{2}\cdot\underbrace{(2y'\cdot y)}_{z'} - \frac{1}{2}\underbrace{y^2}_{z} = -2t$$

$$\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}z = -2t \quad /\cdot 2$$

$$z' - z = -4t \quad \text{— r. r. liniowe niejednorodne}$$

$$z(t) = 4t + 4 + e^t\cdot c$$

ostatecznie

$$y(t)^2 = 4t + 4 + e^t\cdot c$$

$$y(t) = \pm\sqrt{4t + 4 + e^t\cdot c} \quad \text{o.k.}$$

• $y' - 2y = 2\sqrt{y}$

$p(t) = -2, \quad h(t) = 2, \quad r = \frac{1}{2}$

stosujemy podstawienie

$$z = y^{1-r}$$

stąd
$$\begin{cases} z(t) = y(t)^{1-\frac{1}{2}} = y(t)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y(t)} = \sqrt{y} \\ z'(t) = \frac{1}{2\sqrt{y(t)}} \cdot y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' \end{cases}$$

wówczas
$$y' - 2y = 2\sqrt{y} \quad /:\sqrt{y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} y' - \frac{2y}{\sqrt{y}} = 2$$

$$2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'\right)}_{z'} - 2\underbrace{\sqrt{y}}_{z} = 2$$

$$2 \cdot z' - 2z = 2$$ – równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

$$z' - z = 1$$

$$z = -1 + e^t \cdot C$$

ostatecznie

$$\sqrt{y} = -1 + e^t \cdot C$$