

**Zagadnienie Cauchy’ego** dla równania różniczkowego pierwszego rzędu  $y'(x) = f(x, y(x))$  polega na znalezieniu rozwiązania tego równania spełniającego warunek początkowy  $y(x_0) = y_0$ , gdzie  $y$  - funkcja nieznana,  $f$  - dana funkcja,  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ .

I. Aby znaleźć **rozwiązanie dokładne (RD)** zagadnienia Cauchy’ego stosuje się komendę `dsolve`.

Można też znaleźć przybliżone rozwiązania analityczne (w postaci funkcji np. wielomianu) lub rozwiązania numeryczne (w postaci ciągu wartości).

II. W celu znalezienia **przybliżonego rozwiązania analitycznego (RA)** stosujemy wzór

$$y(x) \approx y_N = \sum_{k=0}^N \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

III. W celu znalezienia **rozwiązania numerycznego (RN)** stosujemy wzór

$$y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

dla zadanego  $h > 0$  oraz  $x_n = x_0 + n \cdot h$ .

**Zadanie.** Dane jest zagadnienie Cauchy’ego:

(a)  $y' = 2y + e^x - x, \quad y(0) = \frac{1}{4}.$

(b)  $y' - (x + 1)y = x - 1, \quad y(0) = 0.$

1. Stosując komendę `dsolve` znaleźć rozwiązanie dokładne zagadnienia oraz wpisać wartości tego rozwiązania (RD) w punktach podanych w poniższej tabeli.
2. Napisz program, który wyznaczy rozwiązanie analityczne przybliżone (RA) dla danego zagadnienia Cauchy’ego oraz wpisz wartości tego rozwiązania dla równań (a), (b) w poniższej tabeli.
3. Napisz program, który wyznaczy rozwiązanie numeryczne (RN) dla danego zagadnienia Cauchy’ego oraz wpisz wartości tego rozwiązania dla równań (a), (b) w poniższej tabeli.

(a)	$x_0 = 0.0$	$x_1 = 0.2$	$x_2 = 0.4$	$x_3 = 0.6$	$x_4 = 0.8$	$x_5 = 1.0$
RD						
RA						
RN						

(b)	$x_0 = 0.0$	$x_1 = 0.2$	$x_2 = 0.4$	$x_3 = 0.6$	$x_4 = 0.8$	$x_5 = 1.0$
RD						
RA						
RN						