Rozwiązywanie równań różniczkowych

Rozwiązanie przybliżone (RA) – przybliżone rozwiązanie analityczne z wykorzystaniem wzoru Taylora

$$y(x) = y_0 + \frac{y'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \frac{y''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \ldots$$

Dane jest równanie $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$; $y = y(x)$

1. y_0 – dane
2. $y' = f(x,y)$, wyznaczamy $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$
3. $y'' = (y'(x))'$, wyznaczamy $y''(x_0)$*
4. $y''' = (y''(x))'$, wyznaczamy $y'''(x_0)$

itd.

5. wyznaczamy $y(x)$ podstawiając 1–4 do wzoru Taylora

Przykład. Zastosuj wzór Taylora $f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$ dla $N=3$, do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania równania różniczkowego: $y'=2x^2y+e^x$, $y(2)=1$.

$$y'=2x^2y+e^x \quad , \quad y(2)=1$$

1. $x_0=2$, $y_0=1$

2. $y'(x)=2x^2\cdot y+e^x$ gdzie $y=y(x)$; $y'(x_0)=y'(2)=2\cdot 2^2\cdot 1+e^2=8+e^2$

3. obliczamy $y''(x)=4x\cdot y+2x^2\cdot y'+e^x$

   oraz $y''(x_0)=y''(2)=4\cdot 2\cdot 1+2\cdot 4\cdot(8+e^2)+e^2=8+8(8+e^2)+e^2=$
   $8+64+8e^2+e^2=72+9\cdot e^2$

4. obliczamy $y'''(x)=4\cdot y+4x\cdot y'+4x\cdot y'+2x^2\cdot y''+e^x=$
   $4y+8xy'+2x^2\cdot y''+e^x$

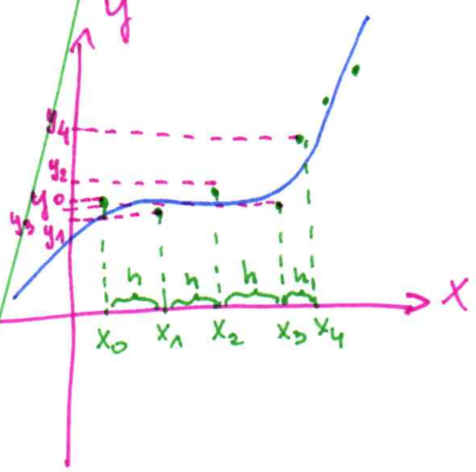
   $y'''(x_0)=y'''(2)=4\cdot 1+8\cdot 2\cdot(8+e^2)+2\cdot 4\cdot(72+9\cdot e^2)+e^2=$
   $=4+16(8+e^2)+8(72+9\cdot e^2)+e^2=$
   $=4+128+16e^2+576+72\cdot e^2+e^2=1284+89e^2$

5. $y(x)=1+\frac{8+e^2}{1}(x-2)+\frac{72+9e^2}{2}(x-2)^2+\frac{1284+89e^2}{6}(x-2)^3$

Rozwiązywanie równań różniczkowych

Rozwiązanie numeryczne (RN) - metoda Eulera

Dane jest równanie: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$; $y = y(x)$



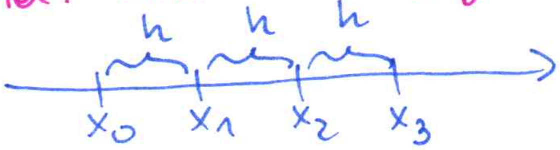
1. wyznaczamy x_n

x_0 - dane

$x_1 = x_0 + h$, $h > 0$, $\underbrace{h = 0{,}2}$ przyjmujemy takie założenie

$x_2 = x_1 + h$

itd. $x_{n+1} = x_n + h = x_0 + n \cdot h$



2. wyznaczamy y_n

y_0 - dane

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$

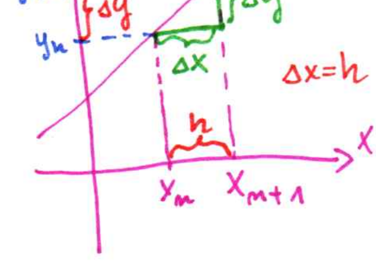
$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$

$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$

itd.

3. uzasadnienie wzoru rekurencyjnego

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} \text{ dla } h \to 0$$



$$\begin{cases} y' = \frac{\Delta y}{h} \\ y' = f(x,y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta y}{h} = f(x,y) \Rightarrow \Delta y = h \cdot f(x,y)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Przykład

$$y' - (x-2)\cdot y = x+2 \quad , \quad y(0)=1 \qquad (\text{tzn. } x_0=0,\ y_0=1)$$

$$y=y(x)$$

$$y' = (x-2)\cdot y + x + 2$$

$$y' = f(x,y) \quad , \text{gdzie} \quad f(x,y) = (x-2)\cdot y + x + 2$$

1. wyznaczamy x_n dla $h=0{,}2$

$x_0 = 0$
$x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}2 = 0{,}2$
$x_2 = x_1 + h = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$
$x_3 = x_2 + h = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$
$x_4 = x_3 + h = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$

alternatywnie
$x_0 = 0$
$x_1 = x_0 + h = 0{,}2$
$x_2 = x_0 + 2h = 0{,}4$
$x_3 = x_0 + 3h = 0{,}6$
$x_4 = x_0 + 4h = 0{,}8$

2. wyznaczamy y_n ze wzoru $y_{n+1} = y_n + h\cdot f(x_n, y_n)$
dla $h=0{,}2$ oraz $f(x,y) = (x-2)\cdot y + x + 2$

$y_0 = 1$
$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0,y_0) = 1 + 0{,}2\cdot 0 = 1$
$y_2 = y_1 + h\cdot f(x_1,y_1) = 1 + 0{,}2\cdot 0{,}4 = 1{,}08$
$y_3 = y_2 + h\cdot f(x_2,y_2) = 1{,}08 + 0{,}2\cdot 0{,}64 = 1{,}208$
$y_4 = y_3 + h\cdot f(x_3,y_3) = 1{,}208 + 0{,}2\cdot 0{,}784 = 1{,}3648$

$f(x_0,y_0) = f(0,1) = (0-2)\cdot 1 + 0 + 2 = 0$
$f(x_1,y_1) = f(0{,}2;1) = (0{,}2-2)\cdot 1 + 0{,}2 + 2 = 0{,}4$
$f(x_2,y_2) = f(0{,}4;1{,}08) = (0{,}4-2)\cdot 1{,}08 + 0{,}4 + 2 = 0{,}64$
$f(x_3,y_3) = f(0{,}6;1{,}208) = (0{,}6-2)\cdot 1{,}208 + 0{,}6 + 2 = 0{,}784$

3. otrzymujemy punkty

$(x_0,y_0) = (0,1)$
$(x_1,y_1) = (0{,}2 \ ; \ 1)$
$(x_2,y_2) = (0{,}4 \ ; \ 1{,}08)$
$(x_3,y_3) = (0{,}6 \ ; \ 1{,}208)$
$(x_4,y_4) = (0{,}8 \ ; \ 1{,}3648)$