Szereg Taylora

Szeregiem Taylora funkcji $f(x)$ o środku w punkcie x_0 nazywamy szereg potęgowy postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Jeżeli $x_0 = 0$, to szereg ten nazywamy szeregiem Maclaurina funkcji f.

N-tym przybliżeniem funkcji f nazywamy wyrażenie postaci

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad N = 1, 2, 3, \ldots$$

Zadanie T1. Napisz program zgodnie z podaną specyfikacją.
Wejście: funkcja jednej zmiennej $f(x)$, liczba naturalna N, liczba rzeczywista x_0.
Wyjście:
W1 – wyznaczone składowe N-tego przybliżenia funkcji $f(x)$, czyli jednomiany:
$a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0,\ \ a_1 = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1, a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2, \ldots, a_N = \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N.$
W2 - wyznaczone N-te przybliżenie funkcji $f(x)$ szeregiem Taylora w punkcie x_0, czyli wielomian N-tego stopnia: $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.
W3 – wykres funkcji $f(x)$ oraz wykres jej N-tego przybliżenia zaznaczone na tym samym układzie współrzędnych.
W4 – wykres N-tego przybliżenia funkcji $f(x)$ oraz wykresy składowych tego przybliżenia zaznaczone na tym samym układzie współrzędnych.
Wykresy muszą posiadać odpowiednią legendę.

Zadanie T2. Napisz program zgodnie z podaną specyfikacją.
Wejście: funkcja jednej zmiennej $f(x)$, liczby naturalne N_1, N_2 ($N_1 < N_2$), liczba rzeczywista x_0.
Wyjście:
W1 – wypisane kolejne przybliżenia $f_{N_1}(x), \ldots, f_{N_2}(x)$ funkcji $f(x)$ szeregiem Taylora w punkcie x_0.
W2 – wykres funkcji $f(x)$ oraz jej przybliżeń zaznaczone na tym samym układzie współrzędnych.

Zadanie T3. Korzystając z napisanych przez siebie programów wyznacz rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji

- $f(x) = cos(x)$,
- $f(x) = \frac{1}{1-x}$,
- $f(x) = \ln(\frac{1}{1-x})$.

Szereg Fouriera

Szeregiem Fouriera funkcji $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ nazywamy szereg trygonometryczny postaci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

N-tym przybliżeniem funkcji f na przedziale $[-\pi, \pi]$ nazywamy wyrażenie postaci

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right), \qquad N = 1, 2, 3, \ldots$$

Zadanie F1. Napisz program zgodnie z podaną specyfikacją.
Wejście: funkcja jednej zmiennej $f(x)$, liczba naturalna N.
Wyjście:
W1 - wyznaczone składowe N-tego przybliżenia funkcji $f(x)$: $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ dla $n = 1, \ldots, N$,
W2 - wyznaczone N-te przybliżenie funkcji $f(x)$ szeregiem Fouriera:
$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$.
W3 - wykres funkcji $f(x)$, wykres N-tego przybliżenia funkcji $f(x)$ oraz wykres składowych tego przybliżenia.
Wykres powinien zawierać odpowiednią legendę.

Zadanie F2. Napisz program zgodnie z podaną specyfikacją.
Wejście: funkcja jednej zmiennej $f(x)$, liczby naturalne N_1, N_2 ($N_1 < N_2$).
Wyjście:
W1 – wypisane kolejne przybliżenia $f_{N_1}(x), \ldots, f_{N_2}(x)$ funkcji $f(x)$ szeregiem Fouriera.
W2 – wykres funkcji $f(x)$ oraz jej przybliżeń zaznaczone na tym samym układzie współrzędnych.

Zadanie F3. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & x \in [-\pi, 0) \\ 0 & x = 0 \\ x^2 - \pi^2 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Korzystając z podanych wzorów wyznaczyć

$a_0 =$ .... $\quad a_1 =$ .... $\quad a_2 =$ ....

$a_3 =$ .... $\quad a_4 =$ .... $\quad a_5 =$ ....

$a_6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

oraz uzupełnić tabelę

	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
f_2						
f_5						
f_8						
$f(x)$						

Zadanie F4. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x+\pi & x \in [-\pi, 0) \\ 0 & x = 0 \\ x-\pi & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Korzystając z podanych wzorów wyznaczyć

$a_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b_6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

oraz uzupełnić tabelę

	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
f_2						
f_4						
f_6						
$f(x)$						

Zadanie F5.. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} -x-\pi & x \in [-\pi, 0] \\ x-\pi & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Korzystając z podanych wzorów wyznaczyć

$a_0 =$ .... $a_1 =$ .... $a_2 =$ ....

$a_3 =$ .... $a_4 =$ .... $a_5 =$ ....

$b_1 =$ .... $b_2 =$ .... $b_3 =$ ....

$b_4 =$ .... $b_5 =$ .... $b_6 =$ ....

oraz uzupełnić tabelę

	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
f_1						
f_3						
f_5						
$f(x)$						