RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU PIERWSZEGO

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci:

$$y' = f(t, y). \tag{R}$$

UWAGA

Najogólniejszą formą równania różniczkowego rzędu pierwszego jest równanie postaci:

$$F(t, y, y') = 0.$$

Inaczej mówiąc równanie różniczkowe rzędu pierwszego wiąże zmienną niezależną t, zmienną zależną y i jej pierwszą pochodną y'.
Można się również posługiwać tzw. formą różniczkową równania różniczkowego, czyli równaniem postać:

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0.$$

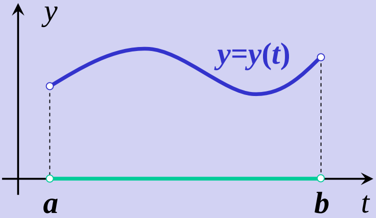
Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

DEFINICJA

Funkcję $y(t)$ nazywamy **rozwiązaniem na przedziale** (a, b) **równania różniczkowego** (R), jeżeli na tym przedziale jest ona różniczkowalna i zamienia to równanie w tożsamość:

$$y'(t) \equiv f(t, y(t)).$$

Wykres rozwiązania równania różniczkowego nazywamy jego **krzywą całkową**.



DEFINICJA

Równanie różniczkowe (R) oraz warunek:

$$y(t_0) = y_0 \tag{W}$$

nazywamy **zagadnieniem początkowym** lub **zagadnieniem Cauchy'ego**.

UWAGA

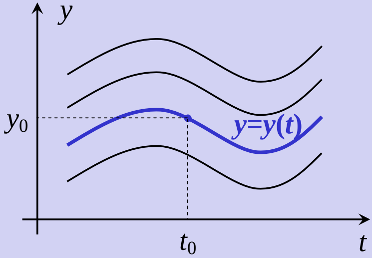
Zagadnienie początkowe będziemy zapisywali w postaci:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{RW}$$

Liczby t_0 i y_0 nazywamy **wartościami początkowymi**, a warunek (W) **warunkiem początkowym**.

DEFINICJA

Funkcja $y(t)$ jest **rozwiązaniem zagadnienia początkowego** (RW), jeżeli jest rozwiązaniem równania (R) na pewnym przedziale zawierającym punkt t_0 i spełnia warunek (W).



TWIERDZENIE

Niech funkcja $f(t, y)$ oraz jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ będą określone i ciągłe na obszarze $D \subset R^2$. Wtedy dla każdego punktu $(t_0, y_0) \in D$ zagadnienie początkowe (RW) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

UWAGA

Inaczej mówiąc przy dowolnych wartościach początkowych wybranych z obszaru D istnieje zawsze rozwiązanie zagadnienia poczatkowego (RW). Co więcej, jeżeli dane są dwa rozwiązania o tych samych wartościach początkowych (W), przy czym każde z rozwiązań określone jest na pewnym przedziale zawierającym punkt t_0, to rozwiązania te pokrywają się na wspólnej części rozważanych przedziałów.

Równania różniczkowe

o zmiennych rozdzielonych

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych nazywamy równanie postaci:

$$y' = g(t) \cdot h(y). \tag{S}$$

UWAGA

Jeżeli $h(y_0) = 0$ dla pewnego y_0, to funkcja stała $y(t) \equiv y_0$ jest jednym z rozwiązań równania (S).

W formie różniczkowej równanie o zmiennych rozdzielonych (S) przyjmuje postać:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)dt.$$

Całka równania (S)

Niech funkcje $g(t)$ i $h(y)$ będą ciągłe przy czym $h(y) \neq 0$ dla każdego y, dla którego funkcja $h(y)$ jest określona. Wówczas całka równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych (S) dana jest wzorem:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą.

Przykłady

Rozwiązać równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

1. $y' = 2ty^2$
2. $y' = 2y(t+1)$
3. $yy' + 4t = 0$
4. $t^2y' + y^2 = 0, \quad y(1) = 1$
5. $y' + y^2 \sin t = 3(ty)^2, \quad y(0) = 1$

Równania różniczkowe jednorodne

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym jednorodnym nazywamy równanie postaci:

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right). \tag{J}$$

Zamiana zmiennych w równaniu jednorodnym (J)

Równanie jednorodne (J) przez zamianę zmiennych:

$$y = u \cdot t$$

sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych postaci:

$$tu' = f(u) - u.$$

Przykłady

Rozwiązać równania różniczkowe jednorodne:

1. $y' = \frac{t+y}{t}$
2. $y' = \frac{2ty}{t^2+y^2}$
3. $t^2y' = t^2 + ty + y^2$
4. $ty' = t + \frac{1}{2}y, \quad y(1) = 0$
5. $y' = \frac{y^2+t^2}{ty}, \quad y(1) = -1$

Równania różniczkowe liniowe

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci:

$$y' + p(t) \cdot y = q(t). \tag{L}$$

Jeżeli $q(t) \not\equiv 0$, to równanie (L) nazywamy **liniowym niejednorodnym**. W przeciwnym przypadku nazywamy je **liniowym jednorodnym**.

Metoda uzmienniania stałej

Jeżeli $p(t)$ oraz $q(t)$ są funkcjami ciągłymi, to rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (L) dane jest wzorem:

$$y(t) = \exp\left(-\int p(t)dt\right)\int q(t)\exp\left(\int p(t)dt\right)dt + C\exp\left(-\int p(t)dt\right)$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Przy czym wszystkie całki są tu rozumiane jako dowolne, lecz ustalone funkcje pierwotne.

Przykłady

Rozwiązać równania różniczkowe liniowe:

1. $y' - 2ty = t$
2. $y' + 2y = e^{3t}$
3. $y' - \frac{y}{t} = t\cos t$
4. $y' + 2ty = t, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$
5. $y' = 2y + e^{t} - t, \quad y(0) = \frac{1}{4}$

Równania różniczkowe Bernoulliego

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym Bernoulliego nazywamy równanie postaci:

$$y' + p(t) \cdot y = h(t) \cdot y^r, \tag{B}$$

gdzie $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

UWAGI

- Gdy $r = 0$, równanie Bernoulliego jest równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym.
- Gdy $r = 1$, równanie Bernoulliego jest równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym.
- Dla $r > 0$ funkcja $y(t) \equiv 0$ jest zawsze jednym z rozwiązań równania Bernoulliego.

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

Sprowadzenie równania Bernoulliego (B) do równania liniowego (L)

Równanie różniczkowe Bernoulliego (B) przez zamianę zmiennych:

$$z = y^{1-r}$$

sprowadza się do równania różniczkowego liniowego niejednorodnego postaci:

$$z' + (1-r)p(t)z = (1-r)h(t).$$

Przykłady

Rozwiązać równania różniczkowe Bernoulliego:

1. $y' - 2ty = 2t^3y^2$
2. $y' - \frac{y}{2} = -\frac{2t}{y}$
3. $y' + y + y^2 \sin t = 0$
4. $y' - y = \frac{t}{y}, \quad y(0) = -1$
5. $ty' + y = y^2 \ln t, \quad y(1) = 1$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU DRUGIEGO

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu drugiego nazywamy równanie postaci:

$$y'' = f(t, y, y'). \tag{R2}$$

UWAGA

Najogólniejszą formą równania różniczkowego rzędu drugiego jest równanie postaci:

$$F(t, y, y', y'') = 0.$$

Inaczej mówiąc równanie różniczkowe rzędu drugiego wiąże zmienną niezależną t, zmienną zależną y oraz jej pierwszą y' i drugą pochodną y''.

DEFINICJA

Funkcję $y(t)$ nazywamy **rozwiązaniem na przedziale (a, b) równania różniczkowego** (R2), jeżeli na tym przedziale jest ona 2-krotnie różniczkowalna i zamienia to równanie w tożsamość:

$$y''(t) \equiv f(t, y(t), y'(t)).$$

Wykres rozwiązania równania różniczkowego nazywamy jego **krzywą całkową**.

DEFINICJA

Równanie różniczkowe (R2) oraz warunki:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1 \tag{W2}$$

nazywamy **zagadnieniem początkowym** lub **zagadnieniem Cauchy'ego**.

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

UWAGA

Zagadnienie początkowe będziemy zapisywali w postaci:

$$y'' = f(t, y, y'), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1 \qquad \text{(RW2)}$$

Liczby t_0, y_0 i y_1 nazywamy **wartościami początkowymi**, a warunek (W2) **warunkiem początkowym**.

DEFINICJA

Funkcja $y(t)$ jest **rozwiązaniem zagadnienia początkowego** (RW2), jeżeli jest rozwiązaniem równania (R2) na pewnym przedziale zawierającym punkt t_0 i spełnia warunek (W2).

Równania rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego

Równanie różniczkowe postaci $y'' = f(t, y')$

Równanie różniczkowe rzędu drugiego postaci:

$$y'' = f(t, y')$$

przez podstawienie $y' = u$ sprowadza się do równania różniczkowego rzędu pierwszego:

$$u' = f(t, u).$$

Przykłady

Rozwiązać równania różniczkowe:

1. $ty'' + y' = t$
2. $(1 + t^2)y'' + 2ty' = t^3$
3. $ty'' - y' = e^t t^2$
4. $y'' = t + \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $t^3 y'' + t^2 y' = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$

Równanie różniczkowe postaci $y'' = f(y, y')$

Równanie różniczkowe rzędu drugiego postaci:

$$y'' = f(y, y')$$

przez podstawienie $y' = q(y)$ sprowadza się do równania różniczkowego rzędu pierwszego:

$$qq' = f(y, q).$$

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

Przykłady

Rozwiązać równania różniczkowe:

1. $2yy'' + (y')^2 = 0$
2. $(y-1)y'' = 2(y')^2$
3. $(1+y^2)y'' = 2y(y')^2$
4. $2y'' = 3y^2, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = 1$
5. $y'' = (y')^2 - 2y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Równania różniczkowe liniowe

rzędu drugiego

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym liniowym rzędu drugiego nazywamy równanie postaci:

$$y'' + p(t) \cdot y' + q(t) \cdot y = h(t). \tag{L2}$$

Funkcje $p(t)$ i $q(t)$ nazywamy **współczynnikami**, a funkcję $h(t)$ **wyrazem wolnym** równania (L2).

TWIERDZENIE

Niech funkcje $p(t)$, $q(t)$ i $h(t)$ będą ciągłe na przedziale (a, b). Wówczas dla każdego punktu $(t_0, y_0, y_1) \in (a, b) \times \mathbb{R}^2$ zagadnienie początkowe:

$$y'' + p(t) \cdot y' + q(t) \cdot y = h(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest określone na przedziale (a, b).

Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu jednorodne

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym rzędu drugiego nazywamy równanie postaci:

$$y'' + p(t) \cdot y' + q(t) \cdot y = 0. \tag{LJ2}$$

Kombinacja liniowa rozwiązań równania jednorodnego

Niech $\varphi(t)$ oraz $\psi(t)$ będą rozwiązaniami równania jednorodnego (LJ2). Wówczas dla dowolnych stałych α, β funkcja:

$$y(t) = \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t)$$

jest także rozwiązaniem tego równania.

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

DEFINICJA

Układ dwóch rozwiązań $(y_1(t), y_2(t))$ równania jednorodnego (LJ2) określonych na przedziale (a, b) nazywamy **układem fundamentalnym** tego równania na tym przedziale, jeżeli dla każdego $t \in (a, b)$ spełniony jest warunek:

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

UWAGA

Powyższy wyznacznik oznaczamy przez $W(y_1(t), y_2(t))$ i nazywamy **wrońskianem** układu funkcji $(y_1(t), y_2(t))$.

Postać rozwiązania równania liniowego jednorodnego

Niech $(y_1(t), y_2(t))$ będzie układem fundamentalnym równania jednorodnego (LJ2). Wówczas rozwiązanie postaci:

$$C_1 \cdot y_1(t) + C_2 \cdot y_2(t)$$

zależne od dwóch stałych rzeczywistych C_1, C_2 nazywamy **rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego** (LJ2) i oznaczamy symbolem:

$$y_{ROJ}(t).$$

Każde rozwiązanie równania liniowego jednorodnego można otrzymać z jego rozwiązania ogólnego przez odpowiedni i jednoznaczny dobór stałych.

Równania różniczkowe liniowe

drugiego rzędu jednorodne

o stałych współczynnikach

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym rzędu drugiego o stałych współczynnikach nazywamy równanie postaci:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0, \quad \text{gdzie} \quad p, q \in \mathbb{R}. \tag{LS2}$$

DEFINICJA

Równanie postaci:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

nazywamy **równaniem charakterystycznym** równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach (LS2). Natomiast wielomian:

$$\omega(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$$

nazywamy **wielomianem charakterystycznym** tego równania.

Postać układu fundamentalnego równania (LS2)

Jeżeli liczby λ_1, λ_2 są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego równania różniczkowego (LS2), to układ fundamentalny tego równania tworzą funkcje:

1. $y_1(t) = e^{\lambda_1 t},\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, gdy $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
2. $y_1(t) = e^{\lambda_1 t},\ y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$, gdy $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$
3. $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t,\ y_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$, gdy $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$.

Przykłady

Wyznaczyć układ fundamentany równań różniczkowych:

1. $y'' - 4y = 0$
2. $y'' + 2y' - 3y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + 6y' + 9y = 0$
5. $4y'' + 4y' + 5y = 0$
6. $y'' + 4y' + 20y = 0$

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

Algorytm rozwiązywania równania (LS2)

1. Równanie różniczkowe o stałych współczynnikach:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$$

2. Równanie charakterystyczne równania różniczkowego:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

3. Pierwiastki równania charakterystycznego: $\lambda_1, \ \lambda_2$
4. Układ fundamentalny równania różniczkowego: $(y_1(t), \ y_2(t))$
5. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego:

$$y_{ROJ}(t) = C_1 \cdot y_1(t) + C_2 \cdot y_2(t)$$

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

Przykłady

Rozwiązać równania różniczkowe:

1. $6y'' + y' - y = 0$
2. $4y'' - 4y' + y = 0$
3. $y'' + y = 0$

Przykłady

Rozwiązać zagadnienia początkowe:

1. $y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
3. $y'' + 2y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Równania różniczkowe liniowe niejednorodne drugiego rzędu

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

DEFINICJA

Równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym rzędu drugiego nazywamy równanie postaci:

$$y'' + p(t) \cdot y' + q(t) \cdot y = h(t), \tag{LN2}$$

gdzie $h(t) \not\equiv 0$.

Różnica rozwiązań równania niejednorodnego

Niech $\varphi(t)$ oraz $\psi(t)$ będą rozwiązaniami równania niejednorodnego (LN2). Wówczas ich różnica:

$$\varphi(t) - \psi(t)$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego jednorodnego (LJ2).

Postać rozwiązania równania liniowego niejednorodnego

Niech $(y_1(t), y_2(t))$ będzie układem fundamentalnym równania jednorodnego (LJ2) i niech $\varphi(t)$ będzie jakimkolwiek (nie zawierającym stałych) rozwiązaniem równania niejednorodnego (LN2). Wówczas rozwiązanie postaci:

$$C_1 \cdot y_1(t) + C_2 \cdot y_2(t) + \varphi(t),$$

zależne od stałych rzeczywistych C_1, C_2 nazywamy **rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego** (LN2) i oznaczamy symbolem

$$y_{RON}(t).$$

Każde rozwiązanie równania liniowego niejednorodnego można otrzymać z jego rozwiązania ogólnego przez odpowiedni i jednoznaczny dobór stałych.

Metoda uzmienniania stałych

Metoda uzmienniania stałych

Niech $(y_1(t), y_2(t))$ będzie układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego (LJ2). Wtedy funkcja:

$$\varphi(t) = C_1(t) \cdot y_1(t) + C_2(t) \cdot y_2(t),$$

gdzie $C_1(t), C_2(t)$ są dowolnymi rozwiązaniami układu równań:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

jest rozwiązaniem równania niejednorodnego (LN2).

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

Przykłady

Znaleźć rozwiązanie ogólne równań:

1. $2y'' + 4y' - 6y = 3$
2. $y'' + y' - 2y = t^2$
3. $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$
4. $y'' - 2y' + y = e^t \mathrm{arctg} t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' - 4y' + 3y = 9t^2 + 4, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 8$

Metoda współczynników nieoznaczonych

- metoda przewidywań

DEFINICJA

Niech funkcja $h(t)$ ma postać:

$$h(t) = [(a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0) \cos \beta t +$$

$$+ (b_l t^l + b_{l-1} t^{l-1} + \ldots + b_1 t + b_0) \sin \beta t] e^{\alpha t}$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Stałą kontrolną tej funkcji nazywamy liczbę:

$$\sigma = \alpha + i\beta.$$

Przykłady

Wyznacz stałe kontrolne podanych funkcji:

1. $h(t) = 2$
2. $h(t) = 3t^2 + 5t - 1$
3. $h(t) = te^{2t}$
4. $h(t) = 2\sin 3t$
5. $h(t) = te^{-3t}\cos 2t$

Rozwiązanie równania liniowego niejednorodnego

Niech prawa strona równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = h(t)$$

ma postać:

$$h(t) = [(a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0) \cos \beta t +$$

$$+ (b_l t^l + b_{l-1} t^{l-1} + \ldots + b_1 t + b_0) \sin \beta t] e^{\alpha t}$$

i niech $\omega(\lambda)$ będzie wielomianem charakterystycznym tego równania, a $\sigma = \alpha + i\beta$ stałą kontrolną funkcji $h(t)$.

Rozwiązanie równania liniowego niejednorodnego

Wówczas:
jeżeli σ jest $s-$krotnym $(s = 0, 1, 2)$ pierwiastkiem wielomianu $\omega(\lambda)$, to rozwiązanie równania ma postać:

$$\varphi(t) = t^s \cdot [(A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + ... + A_1 t + A_0) \cos \beta t +$$

$$+ (B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + ... + B_1 t + B_0) \sin \beta t] e^{\alpha t}$$

gdzie $m = \max\{k, l\}$, a $A_i, B_i, (i = 1, 2, ..., m)$ są odpowiednio dobranymi współczynnikami rzeczywistymi.

Przykłady

Znaleźć rozwiązanie ogólne równań:

1. $y'' + y = t + 1$
2. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$
3. $y'' + 2y' + y = 4\cos 2t$
4. $y'' - y' = -2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
5. $y'' + y = 2\cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Składanie rozwiązań - metoda superpozycji

Jeżeli funkcje $\psi(t)$ i $\eta(t)$ są rozwiązaniami odpowiednio równań:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

i

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = h(t)$$

to ich suma $\psi(t) + \eta(t)$ jest rozwiązaniem równania:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) + h(t).$$

Przykłady

Rozwiązać równania różniczkowe:

1. $y'' - 2y' + y = 2 + \sin t$
2. $y'' + 2y = 2t + \sin t$
3. $y'' + 5y' + 6y = \cos t + 6e^{-2t}$
4. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2t} - 3e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' + 5y' + 4y = 4t + 1 + e^{t}, \quad y(0) = 0{,}1, \quad y'(0) = 1{,}1$