Wyznacz środek i promień zbieżności szeregu potęgowego.

Promień wyznaczymy korzystając ze wzoru
$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}(x+3)^n$

  $a_n = \frac{n+1}{n+2}$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$

  środek: $x_0 = -3$,

  promień: $R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+3}{n+2} \right| = 1$

  przedział zbieżności: $x \in (-3-1, -3+1) = (-4, -2)$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

  $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

  $R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{1} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(n+1)}{1} \right| = +\infty$

  przedział zbieżności: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n$

  $x_0 = 0$, $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$

  $R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$

  przedział zbieżności: $\{0\}$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n (x-2)^n$

  $x_0 = 2$, $a_n = 3^n$, $a_{n+1} = 3^{n+1}$

  $R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{3^n}{3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$

  przedział zbieżności $\left(2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Rozwiń funkcję w szereg Maclaurina

$$(*)\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \qquad \text{dla } x_0=0$$

$f(x)=\ln(1+x)$

obliczamy $f(0)=\ln(1)=0$

obliczamy kolejno pochodne funkcji i wartość pochodnych w pkt. $x_0=0$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$, $\quad f'(0)=1$

$f''(x)=-(1+x)^{-2}$, $\quad f''(0)=-1$

$f'''(x)=2(1+x)^{-3}$, $\quad f'''(0)=2$

$f^{IV}(x)=-6(1+x)^{-4}$, $\quad f^{IV}(0)=-6$

$$f^{(n)}(x)=(1+x)^{-n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot(n-1)! = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n+1}!\,(n-1)!}{1}$$

podstawiamy do wzoru $(*)$ $(x_0=0)$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\frac{(-1)^{n+1}!\,(n-1)!}{1}}{n!}\cdot x^n = 0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{n!}_{\,n}}\,x^n$$

$$=0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n$$

stąd

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\ldots$$