# 数学２D演習　第6回

工学部電気電子工学科 3 年　03200489　末吉七海

## [1]　復習

(1)　$\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{3z^2-5z-2}$

$\frac{1}{3z^2-5z-2}$ の極で積分経路にの内側にあるものは、 $z=-\frac{1}{3}$
$z=-\frac{1}{3}$ における留数は、

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{1}{3z^2-5z-2}, z=-\frac{1}{3}\right) &= \lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left((z-\frac{1}{3})\frac{1}{3z^2-5z-2}\right) \\ &= \lim_{z\to-\frac{1}{3}}\frac{1}{3(z-2)} \\ &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

よって、

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{3z^2-5z-2} = -\frac{2\pi i}{7}$$

(2)　$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5\cos\theta-13}$

$e^{i\theta}=z$ と置換すると、$\frac{1}{iz}\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}z$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5\cos\theta-13} &= \oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{iz(5\frac{z+z^{-1}}{2}-13)} \\ &= \frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{5z^2-26z+5} \end{aligned}$$

積分経路の内側にある $\frac{1}{5z^2-26z+5}$ の極は、$z=\frac{1}{5}$
$z=\frac{1}{5}$ における留数は、

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{1}{5z^2-26z+5}, z=\frac{1}{5}\right) &= \lim_{z\to\frac{1}{5}}\left((z-\frac{1}{5})\frac{1}{5z^2-26z+5}\right) \\ &= \lim_{z\to\frac{1}{5}}\frac{1}{5(z-5)} \\ &= -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5\cos\theta-13} &= \frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{5z^2-26z+5} \\ &= \frac{2}{i}\times 2\pi i\times(-\frac{1}{24}) \\ &= -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

### (3) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta+2}$

$e^{i\theta}=z$ と置換すると、$\frac{1}{iz}\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}z$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta+2} &= \oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{iz(\frac{z-z^{-1}}{2i}+2)} \\ &= 2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+4iz-1}\end{aligned}$$

積分経路の内側にある $\frac{1}{z^2+4iz-1}$ の極は、$z=-2i+\sqrt{3}i$
$z=-2i+\sqrt{3}i$ における留数は、

$$\begin{aligned}Res\left(\frac{1}{z^2+4iz-1}, z=-2i+\sqrt{3}i\right) &= \lim_{z\to-2i+\sqrt{3}i}\left(\left(z-(-2i+\sqrt{3}i)\right)\frac{1}{z^2+4iz-1}\right) \\ &= \lim_{z\to-2i+\sqrt{3}i}\frac{1}{z-(-2i-\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{1}{-2i+\sqrt{3}i-(-2i-\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}i}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta+2} &= 2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+4iz-1} \\ &= 2\times 2\pi i\times\frac{1}{2\sqrt{3}i} \\ &= \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\end{aligned}$$

## [2] ラプラス方程式の境界値問題

### (1)

$z=x+iy\to f(z)=\xi(x,y)+\eta(x,y)$ という等角写像を考える。
以下においては、$\partial_x\xi=\xi_x$ のように表すとする。
$f(z)=\xi(x,y)+\eta(x,y)$ は正則より、CR 方程式が成り立ち、

$$\begin{aligned}\xi_x &= \eta_y \quad \xi_y=-\eta_x \\ \therefore\quad \xi_{xx} &= \eta_{yx} \quad \xi_{yy}=-\eta_{xy} \\ \xi_{xy} &= \eta_{yy} \quad \xi_{yx}=-\eta_{xx}\end{aligned} \tag{1.1}$$

よって、

$$\xi_{xx}+\xi_{yy}=0 \quad \eta_{xx}+\eta_{yy}=0 \tag{1.2}$$

$f(z)=\xi(x,y)+\eta(x,y)$ のから、

$$
\begin{aligned}
\partial_x &= \xi_x \partial_\xi + \eta_x \partial_\eta \\
\partial_y &= \xi_y \partial_\xi + \eta_y \partial_\eta
\end{aligned}
$$

さらにそれぞれの式を、$x, y$ で微分すると、

$$
\begin{aligned}
\partial_x^2 &= \xi_{xx}\partial_\xi + \xi_x \partial_x \partial_\xi + \eta_{xx}\partial_\eta + \eta_x \partial_x \partial_\eta \\
&= \xi_{xx}\partial_\xi + \xi_x(\xi_x\partial_\xi + \eta_x\partial_\eta)\partial_\xi + \eta_{xx}\partial_\eta + \eta_x(\xi_x\partial_\xi + \eta_x\partial_\eta)\partial_\eta \\
&= \xi_{xx}\partial_\xi + \xi_x^2\partial_{\xi\xi} + \xi_x\eta_x\partial_{\eta\xi} + \eta_{xx}\partial_\eta + \eta_x\xi_x\partial_{\xi\eta} + \eta_x^2\partial_{\eta\eta} \\
&= \xi_{xx}\partial_\xi + \eta_{xx}\partial_\eta + \xi_x^2\partial_{\xi\xi} + 2\xi_x\eta_x\partial_{\xi\eta} + \eta_x^2\partial_{\eta\eta}
\end{aligned}
$$

同様に、

$$
\partial_y^2 = \xi_{yy}\partial_\xi + \eta_{yy}\partial_\eta + \xi_y^2\partial_{\xi\xi} + 2\xi_y\eta_y\partial_{\xi\eta} + \eta_y^2\partial_{\eta\eta}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\partial_x^2 + \partial_x^2 &= (\xi_{xx}+\xi_{yy})\partial_\xi + (\eta_{xx}+\eta_{yy})\partial_\eta \\
&\quad + (\xi_x^2+\xi_y^2)\partial_{\xi\xi} + 2(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y)\partial_{\xi\eta} + (\eta_x^2+\eta_y^2)\partial_{\eta\eta} \\
&= (\xi_{xx}+\xi_{yy})\partial_\xi + (\eta_{xx}+\eta_{yy})\partial_\eta \\
&\quad + (\xi_x^2+\xi_y^2)\partial_{\xi\xi} + 2(-\xi_x\xi_y + \xi_y\xi_x)\partial_{\xi\eta} + ((-\xi_y)^2+\xi_x^2)\partial_{\eta\eta} \quad (\because \text{式 } (1.1)) \\
&= (\xi_x^2+\xi_y^2)(\partial_{\xi\xi}+\partial_{\eta\eta}) \quad (\because \text{式 } (1.2))
\end{aligned}
$$

$\xi_x=\xi_y=0$ の点を含まないので、 $\xi_x^2+\xi_y^2 \neq 0$ だから、

$$
\partial_x^2 + \partial_x^2 = 0 \rightarrow \partial_{\xi\xi} + \partial_{\eta\eta} = 0
$$

よって、題意は示された。

## (2)

円周上では、$r=1$ で、$z=e^{i\theta}(-\pi<\theta<\pi)$ とおけるので、$\theta \neq 0$ において、

$$
\begin{aligned}
w &= i\frac{1-z}{1+z} \\
&= i\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} \\
&= i\frac{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{(1+e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})} \\
&= i\frac{2-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} \\
&= i\frac{2-2\cos\theta}{2i\sin\theta} \\
&= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

よって、w は実軸上を動く。
また、z が半径 1 の円内にあることから $w=\frac{1-z}{1+z}$ の偏角は $-\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}$
よって、$w=i\frac{1-z}{1+z}$ の偏角は $-\pi<\phi<\pi$

ゆえに w 平面に変換すると虚部は正となる。
点 A においては、

$$\lim_{\theta\to-\pi+0} w = \lim_{\theta\to-\pi+0} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = -\infty$$

点 B においては、

$$w|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -1$$

点 C においては、

$$\lim_{\theta\to0} w = \lim_{\theta\to0} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to0} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 0$$

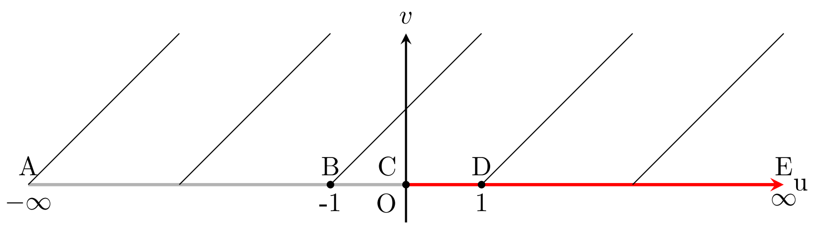
点 D においては、

$$w|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1$$

点 E においては、

$$\lim_{\theta\to\pi-0} w = \lim_{\theta\to\pi-0} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \infty$$

よって、w の奇跡を図示すると以下の斜線部分のようになる。




(3)

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{\pi}\mathrm{Log}W = \frac{1}{2\pi}\log(u^2+v^2) + i\frac{1}{\pi}arg(w)$$

点 A においては、

$$\lim_{u\to-\infty,v\to0} w = \infty + i\frac{1}{\pi}\times\pi = \infty + i$$

点 B においては、

$$\lim_{u\to-1,v\to0} w = \frac{1}{2\pi}\log 1 + i\frac{1}{\pi}\times\pi = i$$

点 C においては、

$$\lim_{\delta\to0}\lim_{u\to\pm\delta,v\to0} w = \begin{cases} \lim_{\delta\to0}\frac{1}{2\pi}\log\delta + i\frac{1}{\pi}\times\pi = -\infty + i \\ \lim_{\delta\to0}\frac{1}{2\pi}\log\delta + i\frac{1}{\pi}\times 0 = -\infty \end{cases}$$

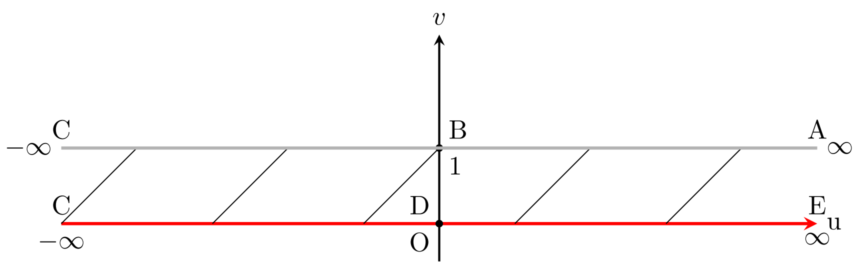
点 D においては、

$$\lim_{u\to1,v\to0} w = \frac{1}{2\pi}\log 1 + i\frac{1}{\pi}\times 0 = 0$$

点 E においては、

$$\lim_{u\to\infty,v\to0} w = \infty + i\frac{1}{\pi}\times 0 = \infty$$

$-\infty \le \xi \le \infty$。また $0 \le arg(w) \le \pi$ より、$0 \le \eta \le 1$
よって、$\zeta$ の範囲は以下の斜線部分のようになる。




## (4)

$\xi$ 方向には一定なので、

$$\partial_\xi T = 0 \tag{4.1}$$

$(\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)T = 0$、$\partial_\xi^2 T = 0$ より、

$$\partial_\eta^2 T = 0$$

よって、

$$\partial_\eta T = b \quad (b = const.) \tag{4.2}$$

式 (4.1)、式 (4.2) から、

$$T = a + b\eta$$

境界条件 $\eta = 1$ の時 $T = 1$、$\eta = 0$ の時 $T = 0$ なので、

$$T = \eta$$

## (5)

$$T(\xi, \eta) = \eta$$

$\eta = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{arctan}\dfrac{v}{u}$ より、

$$T(u, v) = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctan}\frac{v}{u}$$

$w = i\frac{1-z}{1+z}$ より、

$$\begin{aligned}
u + iv &= i\frac{1 - x - iy}{1 + x + iy} \\
&= i\frac{(1 - x - iy)(1 + x - iy)}{(1 + x)^2 + y^2} \\
&= i\frac{(1 - x - iy)(1 + x - iy)}{(1 + x)^2 + y^2} \\
&= i\frac{1 - x^2 - y^2 - 2iy}{(1 + x)^2 + y^2} \\
&= \frac{2y + i(1 - x^2 - y^2)}{(1 + x)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore u = \frac{2y}{(1 + x)^2 + y^2}, \quad v = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 + x)^2 + y^2}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
T(x,y) &= \frac{1}{\pi}\mathrm{arctan}\frac{\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}}{\frac{2y}{(1+x)^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{arctan}\frac{1-x^2-y^2}{2y}
\end{aligned}
$$

## [3] 主値積分

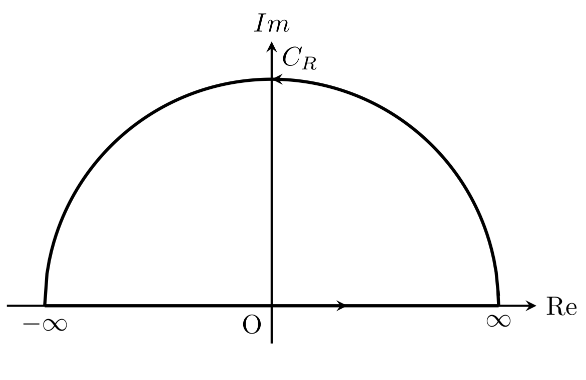
略

## [4] $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\exp{(ix)}\mathrm{d}x$ の積分

$C_R$ とは、半径 R の上半円を表すとする。

### (1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x &= \Im\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z\right] \\
&= \Im\left[\oint_C\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z\right] \quad (C\text{ は以下の図の積分経路}\because\text{ ジョルダンの補題}) \\
&= \Im\left[\frac{1}{2}\oint_C\Big(\frac{1}{z-ia}+\frac{1}{z+ia}\Big)e^{iz}\mathrm{d}z\right] \\
&= \frac{1}{2}\Im\left[\oint_C\frac{1}{z-ia}e^{iz}\mathrm{d}z\right] \quad (\because z=-ia\text{ は積分経路外}) \\
&= \frac{1}{2}\Im\left[2\pi i\times Res\Big(\frac{e^{iz}}{z-ia}, z=ia\Big)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\pi i\times e^{-a}\right] \\
&= \pi e^{-a}
\end{aligned}
$$

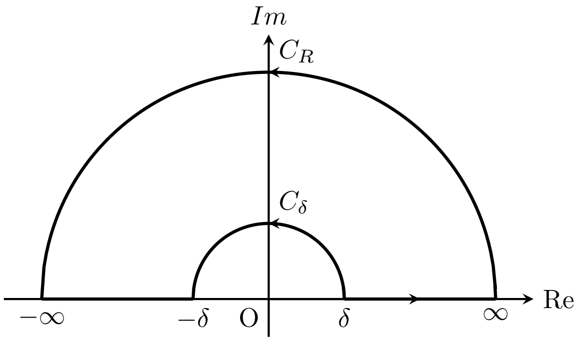


(2)

略

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x &= \Im\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z\right] \\
&= \Im\left[\oint_C \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z - \lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z\right] \quad (\because \text{ジョルダンの補題}) \\
&= \Im\left[- \lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z\right] \quad (\because \frac{e^{iz}}{z} \text{は積分経路内に極を含まないので周回積分は 0 }) \\
&= \Im\left[- \lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} \frac{1}{z} (1 + iz - z^2 - iz^3 + \cdots) \mathrm{d}z\right] \\
&= - \lim_{\epsilon\ to0} \Im\left[\int_{\pi}^{0} \frac{1}{\epsilon^{i\theta}} (1 + i\epsilon e^{i\theta} - \epsilon e^{2i\theta} - i\epsilon e^{3i\theta} + \cdots) i\epsilon e^{i\theta} \mathrm{d}\theta\right] \\
&= \lim_{\epsilon\ to0} \int_{0}^{\pi} (1 - \epsilon e^{2i\theta} - \cdots) \mathrm{d}\theta \\
&= \pi
\end{aligned}
$$




## [5] Cauchy 主値

(1) $P_v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x-a)} \mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
P_v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x-a)} \mathrm{d}x &= 2\pi i Res\Big(\frac{1}{(x^2+1)(x-a)}, i\Big) + \pi i Res\Big(\frac{1}{(x^2+1)(x-a)}, a\Big) \\
&= 2\pi i \frac{1}{2i(i-a)} + \pi i \frac{1}{a^2+1} \\
&= -\frac{\pi a}{a^2+1}
\end{aligned}
$$

(2) $P_v\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x^2-x+1)}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} P_v\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x^2-x+1)}\mathrm{d}x &= 2\pi i Res\Big(\frac{1}{x(x^2-x+1)}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big) + \pi i Res\Big(\frac{1}{x(x^2-x+1)}, 0\Big) \\ &= 2\pi i \frac{1}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} i\sqrt{3}} + \pi i \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

(3) $P_v\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x &= \pi i Res\Big(\frac{1}{x+2}, -2\Big) - \pi i Res\Big(\frac{1}{x-2}, 2\Big) \\ &= \pi i - \pi i \\ &= 0 \end{aligned}$$

(4) $P_v\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{2}{x}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{2}{x}\mathrm{d}x &= \pi i Res\Big(\frac{1}{x-a}, a\Big) + \pi i Res\Big(\frac{1}{x-b}, b\Big) + \pi i Res\Big(\frac{2}{x}, 0\Big) \\ &= \pi i + \pi i - 2\pi i \\ &= 0 \end{aligned}$$