数学２Ｄ演習　第４回

工学部電気電子工学科 3 年　03200489　末吉七海

[1]　実関数積分への応用

1.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}x\, e^{-ux}\cos(x) &= \Re\left[\int_a^b \mathrm{d}z\, e^{-uz}e^{iz}\right] \\
&= \Re\left[\int_a^b \mathrm{d}z\, e^{(i-u)z}\right] \\
&= \Re\left[\left[\frac{1}{i-u}e^{(i-u)z}\right]_a^b\right] \\
&= \Re\left[\frac{-u-i}{u^2+1}\Big(e^{(i-u)b}-e^{(i-u)a}\Big)\right] \\
&= \frac{1}{u^2+1}\Big(e^{-ub}\big(-u\cos(b)+\sin(b)\big)+e^{-ua}\big(-u\cos(a)+\sin(a)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}x\, xe^{-ux}\sin(x) &= \Im\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^b \mathrm{d}z\, ze^{-uz}e^{iz}\right] \\
&= \Im\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^b \mathrm{d}z\, e^{(i-u)z}\right] \\
&= \Im\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\frac{1}{i-u}e^{(i-u)z}\right]_a^b\right] \\
&= \Im\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{-u-i}{u^2+1}\Big(e^{(i-u)b}-e^{(i-u)a}\Big)\right)\right] \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{u^2+1}\Big(-e^{-ub}\big(\cos(b)+u\sin(b)\big)+e^{-ua}\big(\cos(a)+u\sin(a)\big)\Big)\right) \\
&= \frac{1}{(u^2+1)^2}\Big(e^{-ua}\big((u^2a+a+2u)\cos(a)+(u^3a+u^2+ua-1)\sin(a)\big) \\
&\qquad - e^{-ua}\big((u^2b+b+2u)\cos(b)+(u^3b+u^2+ub-1)\sin(b)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

[2]　特異点の分類と Laurent 展開

1.

(1)　$\frac{1}{z(z-2)^3}$

　1 位の極 $z=0$ と 3 位の極 $z=2$ を持つ。

$z=0$ における留数は、

$$z\frac{1}{z(z-2)^3}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{(z-2)^3}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{8}$$

$z=2$ における留数は、

$$\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z-2)^3 frac1z(z-2)^3\bigg|_{z=2}=\frac{1}{z^3}\bigg|_{z=2}=\frac{1}{8}$$

(2)　$\frac{1}{z^3-1}$

　1 位の極 $z=1,-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ と 3 位の極 $z=2$ を持つ。

$z=1$ における留数は、

$$(z-1)\frac{1}{z^3-1}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{z^2+z+1}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{3}$$

$z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ における留数は、

$$(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{1}{z^3-1}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{(z-1)(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{i\sqrt{3}(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{6}$$

$z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ における留数は、

$$(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{1}{z^3-1}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{(z-1)(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{-i\sqrt{3}(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{6}$$

(3)　$\frac{\exp(iz)}{z(z-i)}$

　1 位の極 $z=0,i$ を持つ。

$z=0$ における留数は、

$$z\frac{\exp(iz)}{z(z-i)}\bigg|_{z=0}=\frac{\exp(iz)}{z-i}\bigg|_{z=0}=i$$

$z=i$ における留数は、

$$(z-i)\frac{\exp(iz)}{z(z-i)}\bigg|_{z=i}=\frac{\exp(iz)}{z}\bigg|_{z=i}=-\frac{i}{e}$$

2.

(1)　$\sin\left(\frac{1}{z}\right)$

　$\sin x$ の Taylor 展開は、

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$x \to \frac{1}{z}$ と置換すると、$\sin z$ の Laurent 展開が得られ、

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

この Laurent 展開より $z=0$ は真性特異点であると言える。
また、$z=0$ における留数は、Laurent 展開の $\dfrac{1}{z}$ の係数に等しいので、1。

(2)　$\frac{1-\cos z}{z^3}$

　$\cos x$ の Taylor 展開は、

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

よって、$\frac{1-\cos z}{z^3}$ の Laurent 展開は、

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos z}{z^3} &= \frac{1}{z^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-3}}{(2n)!} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-3}}{(2n)!} \end{aligned}$$

この Laurent 展開より $z=0$ は 1 位の極であると言える。
また、$z=0$ における留数は、Laurent 展開の $\dfrac{1}{z}$ の係数に等しいので、$\dfrac{1}{2}$。

(3)　$\frac{1}{z^2+1}$

　$\frac{1}{z^2+1}$ の Laurent 展開は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{(z-i)(z+i)} \\ &= \frac{1}{(z-i)(2i+z-i)} \\ &= \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} \\ &= \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n \end{aligned}$$

この Laurent 展開より $z=0$ は 1 位の極であると言える。
また、$z=0$ における留数は、Laurent 展開の $\frac{1}{z-i}$ の係数に等しいので、$-\frac{i}{2}$。

(4) $\frac{\sin z}{z}$

$\sin x$ の Taylor 展開は、

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\frac{\sin z}{z}$ の Laurent 展開は、

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

この Laurent 展開より $z = 0$ は除去可能特異点であると言える。

よって、$z = 0$ における留数は 0。

(5) $\frac{z^3}{(z-1)^4}$

$\frac{z^3}{(z-1)^4}$ の Laurent 展開は、

$$\begin{aligned}
\frac{z^3}{(z-1)^4} &= \frac{(z-1)^3}{(z-1)^4} + \frac{3z^2-3z+1}{(z-1)^4} \\
&= \frac{1}{z-1} + \frac{3(z-1)^2}{(z-1)^4} + \frac{3z-2}{(z-1)^4} \\
&= \frac{1}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{3(z-1)}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^4} \\
&= \frac{1}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{3}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4}
\end{aligned}$$

この Laurent 展開より $z = 1$ は 4 位の極であると言える。

また、$z = 0$ における留数は、

$$Res\Big[\frac{z^3}{(z-1)^4}, z = 1\Big] = \lim_{z\to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{3!}(z-1)^4 \frac{z^3}{(z-1)^4} = 1$$

(6) $\frac{z}{\sin z}$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-\pi|=\epsilon} \frac{\xi}{\sin \xi(\xi-\pi)n+1} \mathrm{d}\xi$$

$\xi = \pi + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$（$\epsilon << 1$）とおき、上の式に代入すると、

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\pi + \epsilon e^{i\theta}}{\sin \pi + \epsilon e^{i\theta}} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{(\epsilon e^{i\theta})^{n+1}} \mathrm{d}\theta \\
&\approx -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\pi + \epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}\big(1 - \frac{1}{6}(\epsilon e^{i\theta})^2\big)} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{(\epsilon e^{i\theta})^n} \mathrm{d}\theta \\
&\approx -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \big(\pi(\epsilon e^{i\theta})^{-n-1} + (\epsilon e^{i\theta})^{-n}\big)\big(1 + \frac{1}{6}(z e^{i\theta})^2\big) \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
n=-1 \quad & C_{-1}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\pi \mathrm{d}\theta=-\pi \\
n=0 \quad & C_0=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}\theta=-1 \\
n=1 \quad & C_1=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\pi\frac{1}{6}\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{6}\pi \\
n=2 \quad & C_2=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1\times\frac{1}{6}\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

以上より、

$$\frac{z}{\sin z}=-\frac{\pi}{2-\pi}-1-\frac{\pi}{6}(z-\pi)-\frac{1}{6}(z-\pi)^2\cdots$$

この Laurent 展開より $z=1$ は 1 位の極であると言える。
また、$z=0$ における留数は、$\frac{1}{z-\pi}$ の係数で、 $-\pi$。

[3]

1. 閉経路に沿った積分と留数

(1)

e^x の taylor 展開は、

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z)^n$$

よって、$f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$ の Laurent 展開は、

$$
\begin{aligned}
&e^{-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-z)^{-n} \\
&\therefore \quad Res(f(z),z=0)=-1
\end{aligned}
$$

(2)

$$\int_{|z|=1}\mathrm{d}zz^m=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta ie^{i\theta}e^{im\theta}\begin{cases}2\pi i & (m=-1)\\ 0 & (m\neq-1)\end{cases}$$

より、(1) の Laurent 展開を用いて項別積分を行うと、

$$
\begin{aligned}
\int_{|z|=1}\mathrm{d}ze^{-\frac{1}{z}} &= \int_{|z|=1}\mathrm{d}ze^{-\frac{1}{z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-z)^{-n} \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{|z|=1}\mathrm{d}z(-z)^{-n} \\
&=-2\pi i
\end{aligned}
$$

また、(1) より、 $Res(f(z),z=0)=-1$ なので、

$$2\pi iRes(f(z),z=0)=-2\pi i$$

これは確かに、$\int_{|z|=1} \mathrm{d}z e^{-\frac{1}{z}}$ と一致する。

2. Cauchy の積分定理を用いた積分の計算

(1)

$z = R + it (0 \leq t \leq a)$ と置換すると、

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_2} \mathrm{d}z f(z)\right| &= \left|\int_0^a i\mathrm{d}t (R+it)^2 \exp\left(-(R+it)^2\right)\right| \\
&\leq \int_0^a \mathrm{d}t \left|i\right|\left|t(R+it)^2)\right|\left|\exp\left(-(R+it)^2\right)\right| \\
&= \int_0^a \mathrm{d}t (R^2+t^2)\exp\left(-R^2+t^2\right) \\
&< (R^2+a^2)\exp\left(-R^2+a^2\right)a \quad (\because (R^2+t^2)\exp\left(-R^2+t^2\right) \text{ は } t \text{ に関して単調増加}) \\
&\to 0 \quad (R \to \infty)
\end{aligned}
$$

同様に、$z = -R + it (0 \leq t \leq a)$ と置換すると、

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_4} \mathrm{d}z f(z)\right| &= \left|\int_a^0 i\mathrm{d}t (-R+it)^2 \exp\left(-(-R+it)^2\right)\right| \\
&\leq \int_a^0 \mathrm{d}t \left|i\right|\left|t(-R+it)^2)\right|\left|\exp\left(-(-R+it)^2\right)\right| \\
&= \int_a^0 \mathrm{d}t (R^2+t^2)\exp\left(-R^2+t^2\right) \\
&< (R^2+a^2)\exp\left(-R^2+a^2\right)a \quad (\because (R^2+t^2)\exp\left(-R^2+t^2\right) \text{ は } t \text{ に関して単調増加減少}) \\
&\to 0 \quad (R \to \infty)
\end{aligned}
$$

以上より、

$$
\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_2}\mathrm{d}z + \int_{C_4}\mathrm{d}z\right)f(z) = 0
$$

が示された。

(2)

f(z) は $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ で囲まれた領域に特異点を持たないので、

$$
\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(z)\mathrm{d}z = 0
$$

また、(1) より、

$$
\int_{C_2+C_4} f(z)\mathrm{d}z = 0
$$

なので、

$$
\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\int_{\infty}^{-\infty} \mathrm{d}x(x+ia)^2 \exp\left(-(x+ia)^2\right) &= \lim_{R\to\infty} \int_{R}^{-R} \mathrm{d}x(x+ia)^2 \exp\left(-(x+ia)^2\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} -\int_{C_3} \mathrm{d}x f(x) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \mathrm{d}x f(x) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x x^2 \exp\left(-x^2\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 \exp\left(-x^2\right)
\end{aligned}
$$

ここで、ガウス積分より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-ax^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

両辺 a で微分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x - x^2 \exp\left(-ax^2\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{3}{2}}$$

$a = 1$ を代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x - x^2 \exp\left(-x^2\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

よって、

$$\int_{\infty}^{-\infty} \mathrm{d}x(x+ia)^2 \exp\left(-(x+ia)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 \exp\left(-x^2\right) == -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3)

(1),(2) と同様の積分路で、$f(z) = e^{-z^2}$ として考える。

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \mathrm{d}x f(x) &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \exp\left(-x^2\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-x^2\right) \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

$z = R + it (0 \leq t \leq a)$ と置換すると、

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{C_2} \mathrm{d}z f(z) \right| &= \left| \int_0^a i\mathrm{d}t \exp\left(-(R+it)^2\right) \right| \\
&\leq \int_0^a \mathrm{d}t \left| i \right| \left| \exp\left(-(R+it)^2\right) \right| \\
&= \int_0^a \mathrm{d}t \exp\left(-R^2 + t^2\right) \\
&< \exp\left(-R^2 + a^2\right) a \quad (\because \exp\left(-R^2 + t^2\right) \text{ は } t \text{ に関して単調増加}) \\
&\to 0 \quad (R \to \infty)
\end{aligned}
$$

同様に、$z=-R+it(0\leq t\leq a)$ と置換すると、

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_4}\mathrm{d}zf(z)\right| &= \left|\int_a^0 i\mathrm{d}t\exp\left(-(-R+it)^2\right)\right| \\
&\leq \int_a^0 \mathrm{d}t\Big|i\Big|\Big|\exp\left(-(-R+it)^2\right)\Big| \\
&= \int_a^0 \mathrm{d}t\exp\left(-R^2+t^2\right) \\
&< \exp\left(-R^2+a^2\right)a \quad (\because \exp\left(-R^2+t^2\right) \text{ は } t \text{ に関して単調増加減少}) \\
&\to 0 \quad (R\to\infty)
\end{aligned}
$$

また、f(z) は $C_1+C_2+C_3+C_4$ で囲まれた領域に特異点を持たないので、

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(z)\mathrm{d}z = 0 \\
\therefore \quad &\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z \\
&= -\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \Re\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xe^{x^2}e^{2iax}\right) \\
&= \Re\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xe^{a^2}e^{(x+ia)^2}\right) \\
&= e^{a^2}\Re\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xe^{(x+ia)^2}\right) \\
&= e^{a^2}\Re\left(-\int_{C_3}\mathrm{d}ze^{z^2}\right) \\
&= e^{a^2}\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xe^{-x^2}\cos(2ax) \\
&= \Big[e^{-x^2}\sin(2ax)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x - 2xe^{-x^2}\sin(2ax) \\
&= \Big[e^{-x^2}\sin(2ax)\Big]_{-\infty}^{\infty} + 2I_2 \\
\therefore \quad I_2 &= \frac{I_1}{2} - \frac{1}{2}\Big[e^{-x^2}\sin(2ax)\Big]_{-\infty}^{\infty}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\Big[e^{-x^2}\sin(2ax)\Big]_{-\infty}^{\infty} &= \lim_{R\to\infty}\left|\Big[e^{-x^2}\sin(2ax)\Big]_{-R}^{R}\right| \\
&= e^{-R^2}\sin(2Rx) - e^{-R^2}\sin(-2Rx) \\
&= 0 \quad (as\, R\to\infty)
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{I_1}{2} - \frac{1}{2}\Big[e^{-x^2}\sin(2ax)\Big]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{a^2}
\end{aligned}
$$