数学２Ｄ演習 第６回

担当: 加藤　康之
2020 年 5 月 27 日

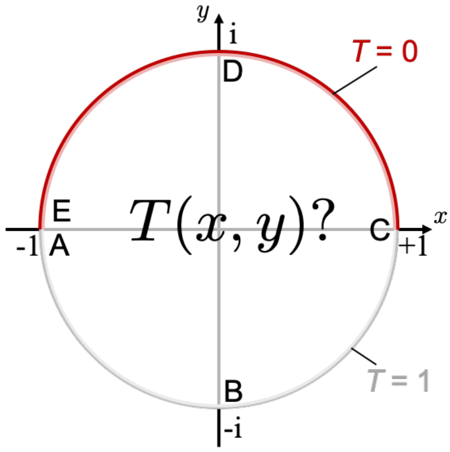
[1]（復習）　以下の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2-5z-2}$　　**(2)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5\cos\theta-13}$　　**(3)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin\theta+2}$

[2]（ラプラス方程式の境界値問題）

右図のような円柱の断面を想定して，下半円では温度 $T=1$，上半円では $T=0$ となっているとする．円柱内で温度分布 $T(x,y)$ はラプラス方程式を満たすとし，$T(x,y)$ を求める問題を考えよう：

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ T = 1\ (\overset{\frown}{\mathrm{ABC}}) \\ T = 0\ (\overset{\frown}{\mathrm{CDE}}) \end{cases}$$



(1) 正則関数 $f(z)$ による等角写像を，２変数の関数 $\xi(x,y), \eta(x,y)$ による変数変換とみなす：

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \to \quad f(z) = \xi(x,y) + \mathrm{i}\eta(x,y). \tag{1}$$

この変数変換がラプラス方程式の形を変えないこと，すなわち，

$$\Delta g = \left[\partial_x^2 + \partial_y^2\right] g = \left[\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2\right] g = 0, \tag{2}$$

の成立を示せ．ただし $\partial_X = \frac{\partial}{\partial X}$ として，ξ，η は，x, y について二階微分可能で，考える領域内で $\partial_x\xi = \partial_y\xi = 0$ の点を含まないものとする．ヒント：第２回 [2](2)(i) 参照．

(2)

$$w = u + \mathrm{i}v = \mathrm{i}\frac{1-z}{1+z} \tag{3}$$

の一次変換によって，円とその内部はどの領域に変換されるか図示せよ．また図に示した代表点 (A-E) がどこに移るかも示せ．

(3) さらに

$$\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta = \frac{1}{\pi}\mathrm{Log}w = \frac{1}{2\pi}\log(u^2+v^2) + \frac{\mathrm{i}}{\pi}\mathrm{arctan}\left(\frac{v}{u}\right) \tag{4}$$

の変換によって，円とその内部はどの領域に変換されるか図示せよ．また図に示した代表点 (A-E) がどこに移るかも示せ．

(4) (1) で示した通り，これらの変数変換ではラプラス方程式の形は変化せず，解くべき方程式は，

$$\begin{cases} \left[\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2\right] T = 0 \\ T = 1\ (\eta = 1) \\ T = 0\ (\eta = 0) \end{cases}$$

となる．これを解き $T(\xi,\eta)$ を求めよ．

(5) 変数変換を逆変換し $T(x,y)$ を求め，図示せよ．

[3] （主値積分）

$f(x)$ が区間 (a,b) 内の 1 点 $x=c$ を除いて連続であるとき，$f(x)$ のこの区間での定積分の Cauchy 主値を

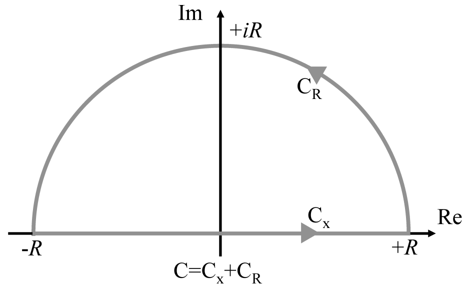
$$\mathrm{P_v}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right],$$

と定義する.（不連続点を避けて積分する.）不連続点が 2 つ以上ある場合についても同様に定義する.

(1) 以下 $f(x) = P(x)/Q(x)$ を有理関数とする．分子の次数 (deg$P$) と分母の次数 (deg$Q$) が $\deg Q \geq \deg P + 2$ を満たすとき，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathrm{C}_R} f(z)dz = 0$$

を示せ. (積分経路は右図)



(2)$f(z)$ は $z=\zeta_j$ $(j=1,\cdots,N)$ に 1 位の極を持つとする．加えて (1) の条件を満たすとき，

$$\mathrm{P_v}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{j:\mathrm{Im}\zeta_j>0}\mathrm{Res}[f(z),\zeta_j] + \pi i\sum_{j:\mathrm{Im}\zeta_j=0}\mathrm{Res}[f(z),\zeta_j],$$

を満たすことを示せ.

[4]（$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\exp(ix)dx$ 型の積分）

[3] の積分経路の複素積分を利用して，以下の積分を実行せよ．a は正の実数とする．また，(3) は積分経路を若干変更する必要がある．(ジョルダンの補題について各自確認しておいてください．)

(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{x\sin x}{x^2+a^2}$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\sin ax}{x^2+x+1}$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\sin x}{x}$$

[5] （Cauchy 主値）

次の Cauchy 主値を求めよ．(a, b:実数)

(1)

$$\mathrm{P_v}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x-a)}$$

(2)

$$\mathrm{P_v}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(x^2-x+1)}$$

(3)

$$\mathrm{P_v}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right)dx$$

(4)

$$\mathrm{P_v}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}-\frac{2}{x}\right)dx$$