

# 数学 2 D 演習 第 1 回

工学部電気電子工学科 3 年 03200489 末吉七海

[1]

(1)

$$\begin{aligned}\exp(i\alpha + i\beta) &= \cos \alpha + \beta + i \sin \alpha + \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \exp(i\alpha) \exp(i\beta)\end{aligned}$$

より示された。

(2)

(1) において、 $\alpha = \theta$ 、 $\beta = \theta$  とおくと、

$$(\exp(i\theta))^2 = \exp(2i\theta)$$

Eular の公式を用いて、

$$\begin{aligned}(\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i 2 \sin \theta \cos \theta &= \cos 2\theta + i \sin 2\theta\end{aligned}$$

上式の実部と虚部を比較して、

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

以上より、2 倍角の公式が導かれた。

(1) において、 $\alpha = 2\theta$ 、 $\beta = \theta$  とおくと、

$$\exp(i\theta) \exp(2i\theta) = \exp(3i\theta)$$

Eular の公式を用いて、

$$\begin{aligned}(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \\ (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i 2 \cos \theta \sin \theta) &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \\ \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i 3 \cos^2 \theta \sin \theta - i \sin^3 \theta &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \\ 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - i 4 \sin^3 \theta + i 3 \sin \theta &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta\end{aligned}$$

上式の実部と虚部を比較して、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3\theta &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta\end{aligned}$$

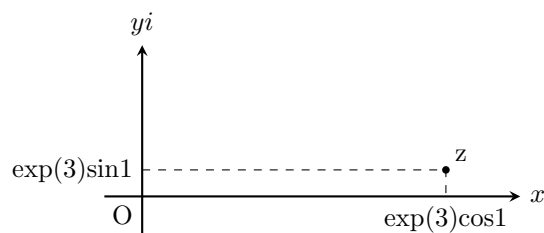
以上より 3 倍角の公式が導かれた。

(3)

Eular の公式を用いて、

$$\begin{aligned}z &= \exp(3 + 1i) \\ &= \exp(3) \exp(1i) \\ &= \exp(3)(\cos 1 + i \sin 1) \\ &= \exp(3) \cos 1 + i \exp(3) \sin 1\end{aligned}$$

点  $z(\exp(3)\cos 1 + i\exp(3)\sin 1)$  を複素平面上に図示すると、



(4)

(4-1)

$r$  は点  $z$  の原点からの距離を表す。

$\theta$  は半直線  $Oz$  と  $x$  軸正方向とのなす角を表す。

(4-2)

$0 < \theta < 2\pi$  に注意して、

$$\begin{aligned}1 + i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \exp i\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(4-3)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp(i(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \exp(i(\theta_1 - \theta_2))$$

より、 $z_1 z_2$  の絶対値は  $r_1 r_2$ 、偏角は  $\theta_1 + \theta_2$ 、また  $\frac{z_1}{z_2}$  の絶対値は  $\frac{r_1}{r_2}$ 、偏角は  $\theta_1 - \theta_2$  である。

(5)

$A = r_1 \exp(i\theta_1)$ 、 $B = r_2 \exp(i\theta_2)$  とおくと、

$$\begin{aligned} \exp(A) \exp(B) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n \right) \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (r_1 \exp(i\theta_1))^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (r_2 \exp(i\theta_2))^n \right) \\ &= \left( 1 + \frac{r_1 \exp(i\theta_1)}{1!} + \frac{(r_1 \exp(i\theta_1))^2}{2!} + \cdots + \frac{(r_1 \exp(i\theta_1))^n}{n!} + \cdots \right) \\ &\quad \left( 1 + \frac{r_2 \exp(i\theta_2)}{1!} + \frac{(r_2 \exp(i\theta_2))^2}{2!} + \cdots + \frac{(r_2 \exp(i\theta_2))^n}{n!} + \cdots \right) \\ &= 1 + \frac{r_1 \exp(i\theta_1) + r_2 \exp(i\theta_2)}{1!} + \frac{r_1^2 \exp(2i\theta_1) + 2r_1 r_2 \exp(i(\theta_1 + \theta_2)) + r_2^2 \exp(2i\theta_2)}{2!} + \cdots \\ &\quad + \frac{\sum_{m=1}^n r_1^m r_2^{(n-m)} \exp(i(m\theta_1 + (n-m)\theta_2))}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} + \cdots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r_1 \exp(i\theta_1) + r_2 \exp(i\theta_2))^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n \\ &= \exp(A + B) \end{aligned}$$

以上より示された。

[2]

(1)

三角形  $\alpha\beta\gamma$  が正三角形と必要十分条件は、角  $\gamma = \frac{1}{3}\pi$  かつ  $|\alpha - \gamma| = |\beta - \gamma|$  なので、 $\gamma$  に関して  $\alpha$  と  $\beta$  の左右は問わないことに注意すると、

$$\begin{aligned} \alpha - \gamma &= (\beta - \gamma) \exp\left(i \pm \frac{1}{3}\pi\right) \\ &= (\beta - \gamma) \left(\cos \pm \frac{1}{3}\pi + i \sin \pm \frac{1}{3}\pi\right) \\ &= (\beta - \gamma) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

以上より、

$$\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2)

(1) より、

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma &= (\beta - \gamma)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ 2(\alpha\gamma) &= (\beta - \gamma)(1 \pm \sqrt{3}i) \\ 2\alpha - \beta - \gamma &= \sqrt{3}i(\beta - \gamma) \\ (2\alpha - \beta - \gamma)^2 &= (\sqrt{3}i(\beta - \gamma))^2 \\ 4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\alpha\beta + 2\beta\gamma - 4\gamma\alpha &= -3\beta^2 + 6\beta\gamma - 3\gamma^2 \\ 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 4\gamma^2 - 4\alpha\beta - 4\beta\gamma - 4\gamma\alpha &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha &= 0\end{aligned}$$

以上より示された。

[3]

(1)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \\ \therefore a_n &= \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

収束半径  $r$  は

$$\begin{aligned}r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1| \\ &= \infty\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \\ \therefore a_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n}\end{aligned}$$

収束半径  $r$  は

$$\begin{aligned}
 r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n+1}{n} \right| \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} z^n \\
 \therefore a_n &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}
 \end{aligned}$$

収束半径  $r$  は

$$\begin{aligned}
 r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)}{(n+1)!}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n-1} \right| \\
 &= 1
 \end{aligned}$$