数学２Ｄ演習　第１回

工学部電気電子工学科 3 年　03200489　末吉七海

[1]

(1)

$$\begin{aligned}\exp(i\alpha + i\beta) &= \cos\alpha + \beta + i\sin\alpha + \beta \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \exp(i\alpha)\exp(i\beta)\end{aligned}$$

より示された。

(2)

(1) において、$\alpha = \theta$、$\beta = \theta$ とおくと、

$$\Big(\exp(i\theta)\Big)^2 = \exp(2i\theta)$$

Eular の公式を用いて、

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^2 &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta\end{aligned}$$

上式の実部と虚部を比較して、

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

以上より、2 倍角の公式が導かれた。

(1) において、$\alpha = 2\theta$、$\beta = \theta$ とおくと、

$$\exp(i\theta)\exp(2i\theta) = \exp(3i\theta)$$

Eular の公式を用いて、

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta \\ (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\cos\theta\sin\theta) &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta \\ \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i3\cos^2\theta\sin\theta - i\sin^3\theta &= cos3\theta + isin3\theta \\ 4\cos{}^3\theta - 3\cos\theta - i4\sin^3\theta + i3\sin\theta &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta\end{aligned}$$

上式の実部と虚部を比較して、

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

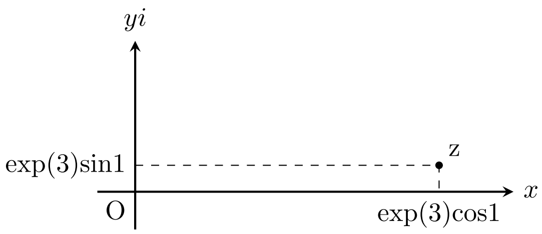
以上より 3 倍角の公式が導かれた。

(3)

Eular の公式を用いて、

$$\begin{aligned} z &= \exp(3+1i) \\ &= \exp(3)\exp(1i) \\ &= \exp(3)(\cos 1 + i\sin 1) \\ &= \exp(3)\cos 1 + i\exp(3)\sin 1 \end{aligned}$$

点 z(exp(3)cos1 + iexp(3)sin1) を複素平面上に図示すると、



(4)

(4-1)

r は点 z の原点からの距離を表す。
θ は半直線 Oz と x 軸正方向とのなす角を表す。

(4-2)

$0 < \theta < 2\pi$ に注意して、

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \\ &= \sqrt{2}\exp i\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(4-3)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp\big(i(\theta_1+\theta_2)\big)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\exp\big(i(\theta_1-\theta_2)\big)$$

より、$z_1 z_2$ の絶対値は $r_1 r_2$、偏角は $\theta_1+\theta_2$、また $\frac{z_1}{z_2}$ の絶対値は $\frac{r_1}{r_2}$、偏角は $\theta_1-\theta_2$ である。

(5)

$A = r_1\exp(i\theta_1)$、$B = r_2\exp(i\theta_2)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\exp(A)\exp(B) &= (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B^n) \\
&= \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\big(r_1\exp(i\theta_1)\big)^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\big(r_2\exp(i\theta_2)\big)^n\Big) \\
&= \Big(1+\frac{r_1\exp(i\theta_1)}{1!}+\frac{\big(r_1\exp(i\theta_1)\big)^2}{2!}+\cdots+\frac{\big(r_1\exp(i\theta_1)\big)^n}{n!}+\cdots\Big) \\
&\quad\Big(1+\frac{r_2\exp(i\theta_2)}{1!}+\frac{\big(r_2\exp(i\theta_2)\big)^2}{2!}+\cdots+\frac{\big(r_2\exp(i\theta_2)\big)^n}{n!}+\cdots\Big) \\
&= 1+\frac{r_1 exp(i\theta_1)+r_2\exp(i\theta_2)}{1!}+\frac{r_1^2\exp(2i\theta_1)+2r_1r_2\exp\big(i(\theta_1+\theta_2)\big)+r_2^2\exp 2i\theta_2)}{2!}+\cdots \\
&\quad+\frac{\sum_{m=1}^{n} r_1^m r_2^{(n-m)}\exp\Big(i\big(m\theta_1+(n-m)\theta_2\big)\Big)\frac{n!}{m!(n-m)!}}{n!}+\cdots \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\big(r_1\exp(i\theta_1)+r_2\exp(i\theta_2)\big)^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n \\
&= \exp(A+B)
\end{aligned}$$

以上より示された。

[2]

(1)

三角形 $\alpha\beta\gamma$ が正三角形と必要十分条件は、角 $\gamma = \frac{1}{3}\pi$ かつ $|\alpha-\gamma| = |\beta-\gamma|$ なので、
γ に関して α と β の左右は問わないことに注意すると、

$$\begin{aligned}
\alpha-\gamma &= (\beta-\gamma)\exp(i\pm\frac{1}{3}\pi) \\
&= (\beta-\gamma)(\cos\pm\frac{1}{3}\pi+i\sin\pm\frac{1}{3}\pi) \\
&= (\beta-\gamma)(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)
\end{aligned}$$

以上より、

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(2)

(1) より、

$$\begin{aligned}
\alpha-\gamma &= (\beta-\gamma)(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i) \\
2(\alpha\gamma) &= (\beta-\gamma)(1\pm\sqrt{3}i) \\
2\alpha-\beta-\gamma &= \sqrt{3}i(\beta-\gamma) \\
\left(2\alpha-\beta-\gamma\right)^2 &= \left(\sqrt{3}i(\beta-\gamma)\right)^2 \\
4\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\alpha\beta+2\beta\gamma-4\gamma\alpha &= -3\beta^2+6\beta\gamma-3\gamma^2 \\
4\alpha^2+4\beta^2+4\gamma^2-4\alpha\beta-4\beta\gamma-4\gamma\alpha &= 0 \\
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha &= 0
\end{aligned}$$

以上より示された。

[3]

(1)

$$(\text{与式})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$
$$\therefore \quad a_n=\frac{1}{n!}$$

よって、収束半径 r は

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}|n+1| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

(2)

$$(\text{与式})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$$
$$\therefore \quad a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

よって、収束半径 r は

$$
\begin{aligned}
r &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{n+1}{n}\right| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}z^n \\
\therefore\quad a_n &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}
\end{aligned}
$$

よって、収束半径 r は

$$
\begin{aligned}
r &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(\alpha-n-1)}{(n+1)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n-1}\right| \\
&= 1
\end{aligned}
$$