数学２D演習 第5回

担当: 加藤　康之
2020 年 5 月 20 日

[1](復習)

つぎの値を求めよ．(実数 a, b を用いて $a+ib$ の形に変形せよ．)

(1) $\log i$
(2) $i^{1/2}$
(3) i^i
(4) $\sin(i)$
(5) $\log(1+i\sqrt{3})$
(6) $\frac{2+i}{3-2i}$
(7) $\tan(i+\frac{\pi}{3})$

[2]Laurent 展開 (I)

関数

$$f(z,w) = \exp\left[\frac{w}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right],$$

の $z=0$ のまわりでのローラン展開を

$$f(z,w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) z^n,$$

とすると，

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(w\sin\theta - n\theta\right) d\theta$$

となることを示せ.

[3] Laurent 展開 (II)

$f(z) = \dfrac{1}{3z^2-5z-2}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 部分分数展開せよ.
(2)(i)$|z| < \dfrac{1}{3}$ (ii)$\dfrac{1}{3} < |z| < 2$ (iii)$|z| > 2$ の各領域で $z=0$ を中心として $f(z)$ を Laurent 展開せよ.
(3)(2) の Laurent 展開を項別積分することにより $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2-5z-2}$ を求めよ.

[4] ($\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 型の積分)

$z = \exp(i\theta)$ と置換することにより，次の積分を実行せよ．

(1)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} \quad (1 \ < \ a)$$

(2)

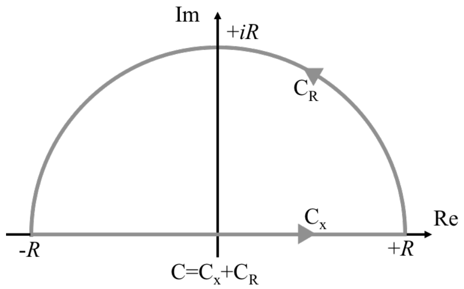
$$\int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \quad (0 \ < \ a \ < \ 1)$$

[5] ($\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ 型の積分)

右下図のような積分経路を用い，半円上の積分が $R \to \infty$ で 0 に収束することを用いて以下の積分を実行せよ．

(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$$



(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{x^4}{(x^2+2)^2(x^2+3)}$$