数学２D演習 第4回

担当: 加藤　康之
2020 年 5 月 13 日

[1] (実関数積分への応用)

次の実関数の積分の値を求めよ．

(1)
$$\int_a^b dx e^{-ux}\cos(x)$$

(2)
$$\int_a^b dx x e^{-ux}\sin(x)$$

[2] (特異点の分類と Laurent 展開)

1.

次の各関数の特異点とその種類を (極である場合はその位数も) 調べ，それらの点における留数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{z(z-2)^3}$　(2) $\dfrac{1}{z^3-1}$　(3) $\dfrac{\exp(iz)}{z(z-i)}$

2.

次の各関数について括弧内に指定された特異点周りの Laurent 展開を行い，((6) に関しては２次まで）それらの特異点における留数を求めよ．また，特異点の種類を (極である場合には位数も含めて) 調べよ．

(1) $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$　$(z=0)$

(2) $\dfrac{1-\cos(z)}{z^3}$　$(z=0)$

(3) $\dfrac{1}{z^2+1}$　$(z=i)$

(4) $\dfrac{\sin(z)}{z}$　$(z=0)$

(5) $\dfrac{z^3}{(z-1)^4}$　$(z=1)$

要復習 (6) $\dfrac{z}{\sin z}$　$(z=\pi)$

[3]

1. (閉経路に沿った積分と留数)

(1)

$f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$ を $z=0$ の周りで Laurent 展開し，留数 $\mathrm{Res}(f(z), z=0)$ を求めよ．

(2)

(1) で得られた Laurent 展開を項別積分することにより，単位円に沿った $f(z)$ の積分

$$\int_{|z|=1} dz\ e^{-\frac{1}{z}}$$

を求めよ．なお，積分経路の向きは反時計回りとする．積分の値が $2\pi i \mathrm{Res}(f(z), z=0)$ と一致することを確かめよ．

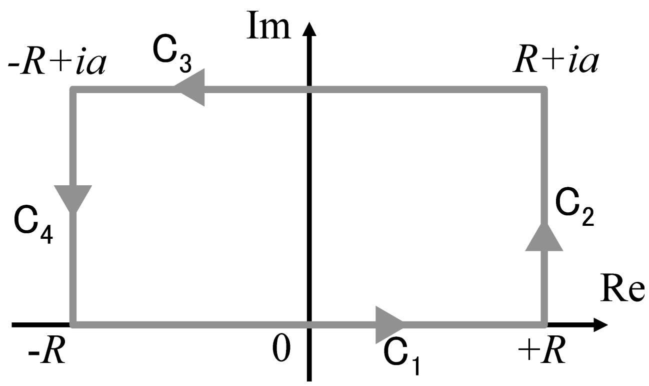
2．(Cauchy の積分定理を用いた積分の計算)

右図の積分路に沿って $f(z) = z^2 e^{-z^2}$ を積分することを考える．積分路は実軸に平行で $z=-R$ と $z=R$ を結ぶ経路 C_1, C_3，虚軸に平行で $z=\pm R$ と $z=\pm R+ia$ を結ぶ経路 C_2, C_4 からなる．経路の向きは図中の矢印の向きに取る．

(1) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_2} dz + \int_{C_4} dz\right) f(z) = 0$ を示せ．不等式

$$\left|\int dz\ f(z)\right| \le \int |dz|\ |f(z)|$$

を用いよ．



(2) $R\to\infty$ とした経路に沿って $f(z) = z^2 e^{-z^2}$ を一周積分することにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ (x+ia)^2 e^{-(x+ia)^2}$$

を求めよ．

(3) 同様に $f(z) = e^{-z^2}$ の積分により，以下の実積分を求めよ．

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2ax)dx$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x \sin(2ax)dx$$