数学２D演習　第3回

工学部電気電子工学科 3 年　03200489　末吉七海

[1]　Cauchy-Riemann の関係式

(1)

(i)　$\bar{z}$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - iy \\ \therefore \quad u &= x \qquad v = -y \\ \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{aligned}$$

以上より、$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ なので $\bar{z}$ は正則でないと言える。

(ii)　$\exp\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ \therefore \quad \exp\left(\frac{1}{z}\right) &= \exp\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\frac{y}{x^2+y^2} - i\exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\sin\frac{y}{x^2+y^2} \\ \therefore \quad u &= \exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\frac{y}{x^2+y^2} \qquad v = -\exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\sin\frac{y}{x^2+y^2} \\ \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\sin\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\sin\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

以上より、$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ なので $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ は正則であると言える。ただし $z = 0$ を除く。

(iii)　$\cos z$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^i z + e^{-iz}}{2} \\ &= \frac{\exp(ix - y) + \exp(-ix + y)}{2} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^y(\cos x - i\sin x)}{2} \\ &= \frac{e^{-y}\cos x + e^y\cos x}{2} + i\frac{e^{-y}\sin x - e^y\sin x}{2} \\ \therefore \quad u &= \frac{e^{-y}\cos x + e^y\cos x}{2} \qquad v = \frac{e^{-y}\sin x - e^y\sin x}{2} \\ \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-e^{-y}\sin x - e^y\sin x}{2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-e^{-y}\sin x - e^y\sin x}{2} \end{aligned}$$

以上より、$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ なので $\cos z$ は正則であると言える。

(iv) $z^{\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
z^{\frac{1}{2}} &= r^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right) \\
&= r^{\frac{1}{2}} \cos\Bigl(\frac{\theta}{2}\Bigr) + i r^{\frac{1}{2}} \sin\Bigl(\frac{\theta}{2}\Bigr) \\
\therefore \quad u = r^{\frac{1}{2}} \cos\Bigl(\frac{\theta}{2}\Bigr) & \qquad v = r^{\frac{1}{2}} \sin\Bigl(\frac{\theta}{2}\Bigr) \\
\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos\Bigl(\frac{\theta}{2}\Bigr)
\end{aligned}
$$

以上より、$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ なので $z^{\frac{1}{2}}$ は正則であると言える。ただし、$r=0$ を除く。

(2)

$f(z) = u + iv$ とおくと、$u = const.$
f(z) は正則より、 CR 方程式から、

$$
\partial_y v = \partial_x u = 0
$$

ゆえに、$v = const.$
実部も虚部も定数より、f(z) は定数であるとことがわかる。

(3)

$f(z) = u + iv$ とおくと、偏角が定数すなわち、$\frac{v}{u} = const.$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \partial_x \frac{v}{u} &= \frac{u\partial_x v - v\partial_x u}{u^2} = 0 \\
\partial_y \frac{v}{u} &= \frac{u\partial_y v - v\partial_y u}{u^2} = 0
\end{aligned}
$$

さらに、f(x) は正則より、CR 方程式が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
\partial_x u &= \partial_y v \\
\partial_x v &= -\partial_y u
\end{aligned}
$$

以上４つの式を連立すると、

$$
\begin{aligned}
\partial_x u = \partial_y v = \partial_x v = \partial_y u &= 0 \\
\therefore \quad u = const. \qquad v &= const.
\end{aligned}
$$

よって、実部も虚部も定数より、f(z) は定数であるとことがわかる。

[2]　複素積分の warming up

(a)

$z = t(1+i)$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 1$、$\mathrm{dz} = (1+i)\mathrm{dt}$ より、

$$\int_\gamma \mathrm{dz}\, x = \int_0^1 (1+i)\mathrm{dt}\, t = \frac{1+i}{2}$$

(b)

$z = re^{i\theta}$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 2\pi$、$\mathrm{dz} = ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ より、

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{dz}\, x &= \int_0^{2\pi} ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta\, r\cos\theta \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta \\ &= i\pi r^2\end{aligned}$$

(c)

$z = re^{i\theta}$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 2\pi$、$\mathrm{d\bar{z}} = -ire^{-i\theta}\mathrm{d}\theta$ より、

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{dz}\, z &= \int_0^{2\pi} -ire^{-i\theta}\mathrm{d}\theta\, re^{i\theta} \\ &= -ir^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= -2i\pi r^2\end{aligned}$$

(d)

$z = re^{i\theta}$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 2\pi$、$\mathrm{d\bar{z}} = -ire^{-i\theta}\mathrm{d}\theta$ より、

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{dz}\, z &= \int_0^{2\pi} -ire^{-i\theta}\mathrm{d}\theta\, \frac{1}{r}e^{-i\theta} \\ &= -i \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

[3]　Cauchy の積分定理

(1)

$z = 2e^{i\theta}$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 2\pi$、$\mathrm{dz} = 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ より、

$$\int_{C_1} z^2 \mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} 4e^{2i\theta} 2ie^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 8ie^{3i\theta} \mathrm{d}\theta = 0$$

(2)

$z = 2e^{i\theta}$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 2\pi$、$|\mathrm{dz}| = 2\mathrm{d}\theta$ より、

$$\int_{C_1} z^2 |\mathrm{dz}| = \int_0^{2\pi} 4e^{2i\theta} 2\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 8e^{2i\theta} \mathrm{d}\theta = 0$$

(3)

$z = 2e^{i\theta}$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 2\pi$、$|\mathrm{dz}| = 2\mathrm{d}\theta$ より、

$$\int_{C_1} z^2 |\mathrm{dz}| = \int_0^{2\pi} 4 \times 2\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 8\mathrm{d}\theta = 16\pi$$

(4)

$z = 2e^{i\theta}$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$、$\mathrm{dz} = 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ より、

$$\int_{C_2} \frac{1}{z} \mathrm{dz} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{-i\theta} 2ie^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} i\mathrm{d}\theta = \frac{i}{2}$$

(5)

$z = 2e^{i\theta}$ とおくと、積分範囲は $\frac{\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$、$\mathrm{dz} = 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ より、

$$\int_{C_3} \frac{1}{z} \mathrm{dz} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{2} e^{-i\theta} 2ie^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} i\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2} i$$

(6)

$\frac{\pi}{2}$ の特異点は $z = 0$ であり、C_3 の積分経路に沿った向きで左手に存在するので、

$$\int_{C_4} \frac{1}{z} \mathrm{dz} = \int_{C_3} \frac{1}{z} \mathrm{dz} = \frac{3\pi}{2} i$$

(7)

0 から 1 において、$z = t$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 1\pi$、$\mathrm{dz} = \mathrm{dt}$
1 から $1 + i$ において、$z = 1 + ti$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 1\pi$、$\mathrm{dz} = i\mathrm{dt}$

$$\int_{C_5} |z|^2 \mathrm{dz} = \int_0^1 t^2 \mathrm{dt} + \int_0^1 |1 + ti|^2 i\mathrm{dt} = \int_0^1 t^2 \mathrm{dt} + \int_0^1 (1 + t^2) i\mathrm{dt} = \frac{1}{3} + i\frac{4}{3}$$

(8)

0 から i において、$z = ti$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 1\pi$、$\mathrm{dz} = i\mathrm{dt}$
i から $1 + i$ において、$z = t + i$ とおくと、積分範囲は $0 \leq t \leq 1\pi$、$\mathrm{dz} = \mathrm{dt}$

$$\int_{C_6} |z|^2 \mathrm{dz} = \int_0^1 |ti|^2 i\mathrm{dt} + \int_0^1 |t + i|^2 \mathrm{dt} = \int_0^1 t^2 i\mathrm{dt} + \int_0^1 (1 + t^2) \mathrm{dt} = \frac{4}{3} + i\frac{1}{3}$$

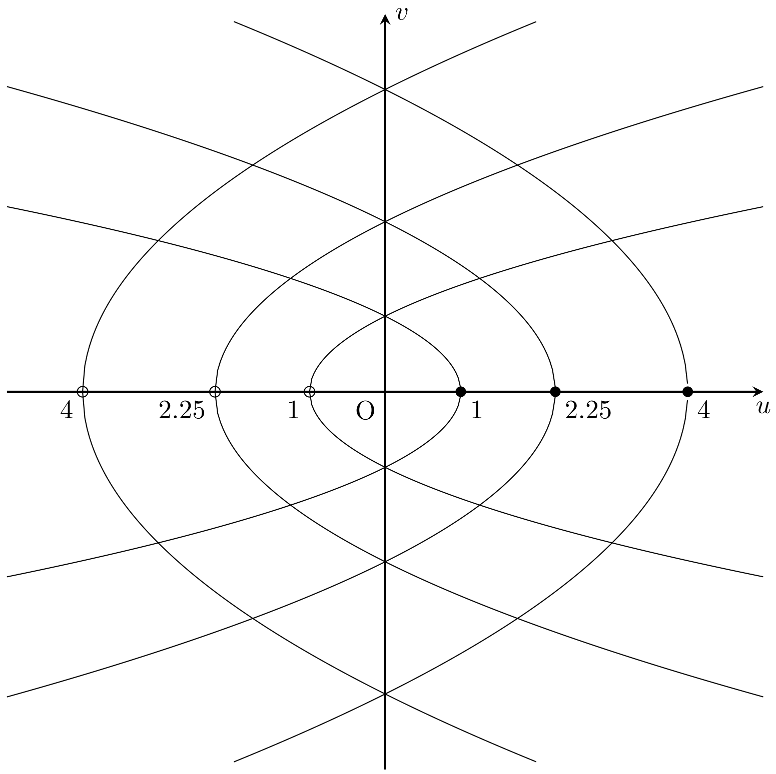
[4]　複素平面間の写像

(1)

$z = x + iy$、$w = u + iv$ とおくと、

$$\begin{aligned} & w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \\ & \therefore \quad u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy \\ & \therefore \quad u = -\left(\frac{v}{2x}\right)^2 + x^2 \qquad u = \left(\frac{v}{2y}\right)^2 - y^2 \end{aligned}$$

よって w 座標に図示すると、下の図のような放物線群となる。ただし、実軸の負の部分は除く。



(2)

(i)

　z から w へ一次分数変換を行うと、$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ として、

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{az+b}{cz+d} \\
&= \frac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}} \\
&= \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c}}{z+\frac{d}{c}} \\
&= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}
\end{aligned}
$$

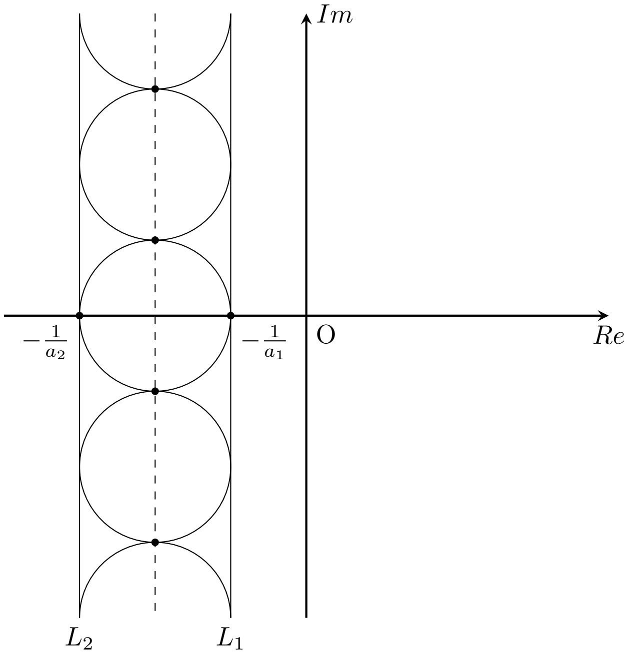
よって、

1. $\frac{d}{c}$ 平行移動
2. 原点対称移動
3. $\left|\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{c^2}\right|$ 拡大
4. 原点中心に $\arg\left[\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{c^2}\right]$ 回転
5. $\frac{a}{c}$ 平行移動

以上の変換で、z から w へ一次分数変換を行うことが可能である。
ゆえに、円から円に変換することが可能であると言える。

(ii)

点 α を原点とおき、円 C_1, C_2 の半径をそれぞれ a_1, a_2 とおくと、
C_1 上の点は $a_1 = |z + a_1|$、C_2 上の点は $a_2 = |z + a_2|$ と表せる。
ここで、w への一次分数変換 $\frac{1}{z-\alpha}$ を考えると C_1, C_2 はそれぞれ、
w 上の直線 $L_1 : u = -\frac{1}{a_1}, L_2 : u = -\frac{1}{a_2},$ へと変換される。



L_1, L_2 は上の図のようになり、L_1, L_2 に接する円もこのように描ける。
これらの円の接点を結ぶと上の図の破線のような直線となり、その式は、

$$u = \frac{1}{2}(-\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2})$$
$$\therefore \quad u = -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}}$$

z 平面へ逆変換すると、

$$\left|z + \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}\right| = \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}$$

以上より、C_1 と C_2 に接する円同士の接点は、
C_1 と C_2 の中心の中点を中心として半径 $\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}$ の円上にある。

[5]　複素平面間の写像

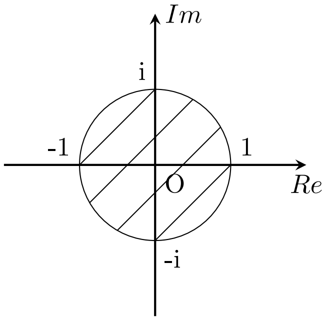
(1)

$$\mathrm{Log}(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n}z^n + \cdots$$

収束するのは、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}z^{n+1}}{(-1)^n\frac{1}{n}z^n}\right| < 1$$
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|z| < 1$$
$$\therefore \quad |z| < 1$$

よって下の図のような円の内部になる。ただし境界を除く。

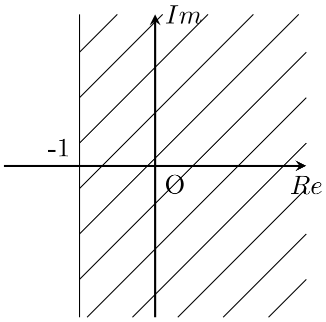


(2)

境界は、$|w| = 1$ であり、$w = \cos\theta + i\sin\theta (0 \le \theta < 2\pi)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
z = \frac{2w}{1-w} &= \frac{2\cos\theta + i2\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta} \\
&= \frac{(2\cos\theta + i\sin\theta)(1-\cos\theta + i\sin\theta)}{2-2\cos\theta} \\
&= \frac{(2\cos\theta - 2) + i2\sin\theta}{2-2\cos\theta} \\
&= -1 + i\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \\
&= -1 + i\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= -1 + i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= -1 + i\cot\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

$0 \le \theta < 2\pi$ において、$-\infty \le \cot\frac{\pi}{2} < \infty$ であるから、z 平面において境界は、直線 $x = -1$ である。
$|w| < 1$ は、$w = 0$ を含むので、$z = \frac{0}{1-0} = 0$ を含む。
よって、下の図の x = -1 の右側であり、境界は含まない。



(3)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Log}(1+z) &= \mathrm{Log}\bigl(1+\frac{2w}{1-w}\bigr) = \mathrm{Log}\bigl(\frac{1+w}{1-w}\bigr) = \mathrm{Log}(1+w) - \mathrm{Log}(1-w) \\
&= w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 + \cdots - (-w - \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{3}w^3 + \cdots) \\
&= 2\bigl(w + \frac{1}{3}w^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}w^{2n+1} + \cdots\bigr)
\end{aligned}
$$

収束する領域は、

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\bigl|\frac{2}{2(n+1)+1}w^{2(n+1)+1}\bigr|}{\bigl|\frac{2}{2n+1}w^{2n+1}\bigr|} &< 1 \\
\therefore \quad |w|^2 &< 1
\end{aligned}
$$

よって、原点を中心として、半径 1 の円の内部で収束する。

(4)

$z = \frac{2w}{1-w}$ より、$w = \frac{z}{2+z}$ を (3) の級数展開に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Log}(1+z) &= 2\bigl(w + \frac{1}{3}w^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}w^{2n+1} + \cdots\bigr) \\
&= 2\Bigl(\bigl(\frac{z}{2+z}\bigr) + \frac{1}{3}\bigl(\frac{z}{2+z}\bigr)^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\bigl(\frac{z}{2+z}\bigr)^{2n+1} + \cdots\Bigr)
\end{aligned}
$$

収束する領域は、

$$
\begin{aligned}
|w| = \bigl|\frac{z}{2+z}\bigr| &< 1 \\
\therefore \quad z &> -1
\end{aligned}
$$

よって、z の実部が-1 より大きいときに収束する。