数学２Ｄ演習 第9回

担当: 加藤　康之

2020 年 6 月 17 日

[1] (Γ 関数のいくつかの性質)

Γ 関数は複素数 $z[\mathrm{Re}(z) > 0]$ に対して，次の積分で定義される．

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

ここで，$t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$ の意味であることに注意 ($t \in \mathbb{R}$)．また，$\mathrm{Re}(z) > 0$ で $\Gamma(z)$ は正則であることに注意[1]．

(1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を示せ (部分積分を用いよ)．また，これから正の整数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ であることを示せ．

(2) $t = s^2$ と変数変換することで，$\Gamma(1/2)$ を求めよ．

(3) (1) を使うことで，

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z}$$

を得る．右辺が $\mathrm{Re}(z) > -n-1$ で，$z = 0, -1, \cdots, -n$ を除いて正則であることから，$\mathrm{Re}(z) > -n-1$ で左辺の $\Gamma(z)$ が定義できることになる．n はいくらでも大きくできることから，$\Gamma(z)$ は $z = -n$(n は整数) の極を除いて，複素平面全体で定義できることになる[2]．さて，以上の準備のもとで，$\Gamma(z)$ の $z = -n$ の極の位数と留数を求めよ．

(4)

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds t^{p-1}e^{-t}s^{q-1}e^{-s}$$

で，$t = x^2, s = y^2$, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすることで，

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

を示せ ($r, s > 0$)．ここで，$B(p,q)$ はベータ関数であり，

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \\ &= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta \end{aligned}$$

で定義される ($x = \sin^2\theta$ を用いていることに注意, $B(p,q) = B(q,p)$ にも注意）.

---

[1] 証明が必要な事実だが，省略する

[2] この手続きを解析接続という

(5) 次の関係式を示せ[3].

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ をガンマ関数を用いて表せ.

(メモ) **Fourier 級数**：区間 $[-\ell, \ell]$ で滑らかな任意の関数 $f(x)$ は次のように展開できる.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{\ell}},$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{\ell}}dx = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}.$$

[2](Fourier 級数展開 I)

$-L \le x \le L$ で定義される関数

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & -L \le x < 0 \\ \beta & 0 < x \le L \end{cases}$$

を Fourier 級数展開せよ． $x = 0$ では級数の和はどのような値に収束するか？

[3](Fourier 級数展開 II)

区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された次の各関数を Fourier 級数展開せよ．ただし $a \in \mathbb{R}$.

(1) $f(x) = |x|$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^3 - \pi^2 x}{6}$

(4) $f(x) = \sinh(ax)$

(5) $f(x) = \begin{cases} -\pi & (-\pi < x < 0) \\ x & (0 < x < \pi) \end{cases}$

[4](特殊な級数の和)

[3] の結果を用いて，次の各級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ **(3)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

[3] ベータ関数の最初の定義式で $x = t/(1+t)$ とおくと...

[5](Fourier 級数展開と特殊な級数の和)

関数 $f(x)$ は $x \in (-\infty, \infty)$ で連続で可積分とする．

(1) 任意の整数 n に対して，$n < x < n+1$ では，$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos(2\pi mx) + b_m \sin(2\pi mx)]$ のように，$f(x)$ は Fourier 級数に展開できる．係数 a_m，b_m を，$f(x)$ を使って表わせ．

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi mx)dx$ を証明せよ．

(3) α を任意の正数として，$f(x) = e^{-\alpha|x-1/2|}$ のとき，(2) で得られた公式の右辺を計算せよ．

(4) 無限和 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ を求めよ．