数学２D演習 第7回

担当: 加藤　康之
2020 年 6 月 3 日

[1] 復習

(1)　$f(z) = e^z$ が微分可能であることを示し，$\dfrac{de^z}{dz} = e^z$ を示せ.

(2)　$f(z) = \log z$ が原点を除いて微分可能であることを示し，$\dfrac{d\log z}{dz} = \dfrac{1}{z}$ を示せ.

(3)　原点において，$\dfrac{e^z}{z^2}$ のローラン展開を求めよ.

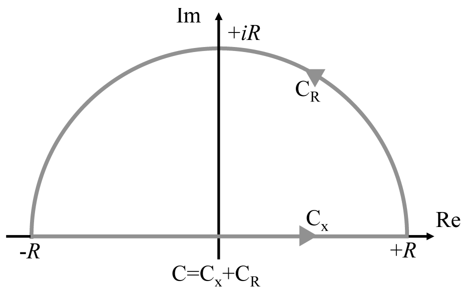
(4)　原点において，$\dfrac{\sin z}{z^3}$ のローラン展開を求めよ.

(5)　原点において，$\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ のローラン展開を求めよ.

[2] $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\exp(ix)dx$ 型の積分

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\cos(x)}{x^2+a^2} \qquad (a>0)$$

の値を以下の手順に従って求める.



(1)　$\dfrac{\exp(iz)}{z^2+a^2}$ の極の位置を全て求め，各々の極について位数，留数を求めよ.

(2)　$R > a$ として，上図の積分路 C に沿った一周積分

$$\int_{\mathrm{C}} dz\,\frac{\exp(iz)}{z^2+a^2}$$

の値を留数定理を用いて求めよ.

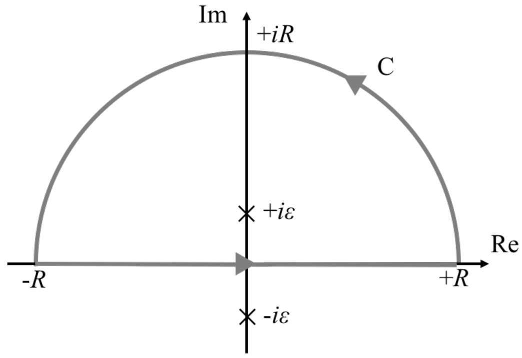
(3)　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\mathrm{C_R}} dz\,\frac{\exp(iz)}{z^2+a^2}\right| = 0$, を示せ.

(4) (2)，(3) の結果を元にして

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\cos(x)}{x^2+a^2} \qquad (a>0)$$

の値を求めよ.

[3] (Heaviside ステップ関数の積分表示)

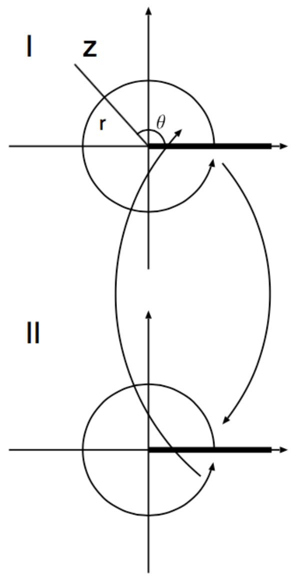


$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x - i\varepsilon} dx.$$

右図のような積分経路を考え，以下を示せ．

$$S(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 1/2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

[4] (多価関数の積分)



$$J \equiv \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2 + 1}$$

という積分の値を留数定理を用いて求めたい。関数

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^2 + 1}$$

は複素平面上の点 $z = re^{i\theta}$ において二通りの値

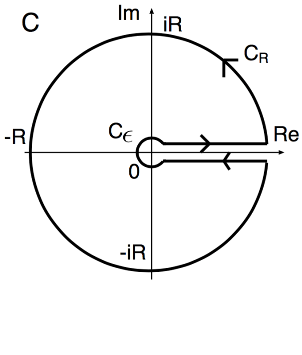
$$f(z) = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{r^2 e^{2i\theta} + 1} e^{\frac{i}{2}\theta} \;\; or \;\; \frac{r^{\frac{1}{2}}}{r^2 e^{2i\theta} + 1} e^{\frac{i}{2}\theta + i\pi}$$

をとるという意味で二価の関数である。二価性は $f(z)$ の中に $z^{\frac{1}{2}}$ が入っていることに由来する。この関数を一価の関数として定義し直すために定義域として複素平面を二つ用意する。そして各々の平面で点 $z = re^{i\theta}$ において

複素平面 I ：$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}\theta}$　　複素平面 II ：$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}\theta + i\pi}$

(θ:実軸正の部分から測った偏角 $(0 < \theta < 2\pi)$)

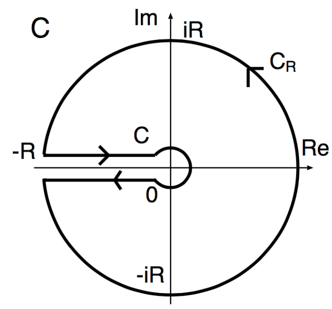
という値をとることにし、複素平面 I の実軸正の部分の下側と複素平面 II の実軸正の部分の上側、及び複素平面 I の実軸正の部分の上側と複素平面 II の実軸正の部分の下側をそれぞれ貼り合わせることにする。これにより、$z^{\frac{1}{2}}$ は $z = 0$ を除き、定義域全体で微分可能となる。このように $z^{\frac{1}{2}}$ 及び $f(z)$ を一価関数として定義したとして以下の問いに答えよ。



(1)　複素平面 I において右上図のような経路 C 上で $f(z)$ を積分することにより、実積分 J の値を求めよ。

(2)　複素平面 II において右上図のような経路 C 上で $f(z)$ を積分することにより、実積分 J の値を求めよ。(1) の答えと一致するか？

(3) 複素平面I, IIにおいて複素平面I：$z^{\frac{1}{2}}=r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}\theta}$ 複素平面II：$z^{\frac{1}{2}}=r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}\theta+i\pi}$ (θ:実軸正の部分から測った偏角 $(-\pi<\theta<\pi)$) という値をとるように関数 $z^{\frac{1}{2}}$ を定義し、実軸負の部分にbranch cutを入れることも出来る。この時、複素平面Iにおいて右図のような経路上で $f(z)$ を積分することにより、実積分 J の値を求めよ。(1), (2)の答えと一致するか？



[5] ($\int_0^\infty R(x)x^\alpha dx$ 型の積分)

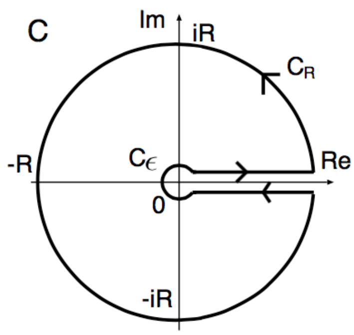
右下図のような積分経路を用いて以下の積分を実行せよ.（$\mathrm{C_R}$ や C_ε において積分が0になる場合は，その説明を省略しないこと）

(1)

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^\alpha}{x^2+x+1}\qquad(-1<\alpha<1)$$

(2)

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\ln x}{x^2+1}$$



(3)

$$\int_0^\infty dx\,\frac{(\ln x)^2}{x^2+1}$$