数学２D演習 第3回

担当: 加藤　康之
2020 年 5 月 7 日

[1] (Cauchy-Riemann の関係式 II)

複素関数 $f(z)$ の実部，虚部をそれぞれ $u(x, y)$, $v(x, y)$ とおく ($z = x + iy$)． $f(z)$ が複素微分可能であるための必要十分条件は次の Cauchy-Riemann の関係式が成り立つことである．

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

この事をふまえて，以下の問に答えよ．

(1) Cauchy-Riemann の関係式を用いて次の各関数が微分可能かどうか判定せよ.

$$\bar{z}, \quad \exp(\frac{1}{z}), \quad \cos(z), \quad z^{\frac{1}{2}}$$

(2) 複素平面上のある連結領域 Ω で複素関数 $f(z)$ が微分可能かつ $f(z)$ の実部 $\mathrm{Re}(f(z))$ が定数だとする. この時，Ω 上で $f(z)$ が定数であることを示せ.

(3) 複素平面上のある連結領域 Ω で複素関数 $f(z)$ が微分可能かつ $f(z)$ の偏角 $\arg(f(z))$ が定数だとする. この時，Ω 上で $f(z)$ が定数であることを示せ.

[2] (複素積分の warming up II)

(1) 次の積分を計算せよ。

(a)

$$\int_{\gamma} dz \;\; x$$

γ は 0 と $1 + i$ を結ぶ線分

(b)

$$\int_{|z|=r} dz \;\; x$$

(c)

$$\int_{|z|=r} d\bar{z} \;\; z$$

(d)

$$\int_{|z|=r} d\bar{z} \;\; \frac{1}{z}$$

ただし，(b), (c), (d) の積分路は，複素平面上の中心 0 半径 r の円を反時計回りに回るものとする．

[3] (Cauchy の積分定理)

次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1} z^2 dz$

(2) $\displaystyle\int_{C_1} z^2 |dz|$

(3) $\displaystyle\int_{C_1} |z|^2 |dz|$

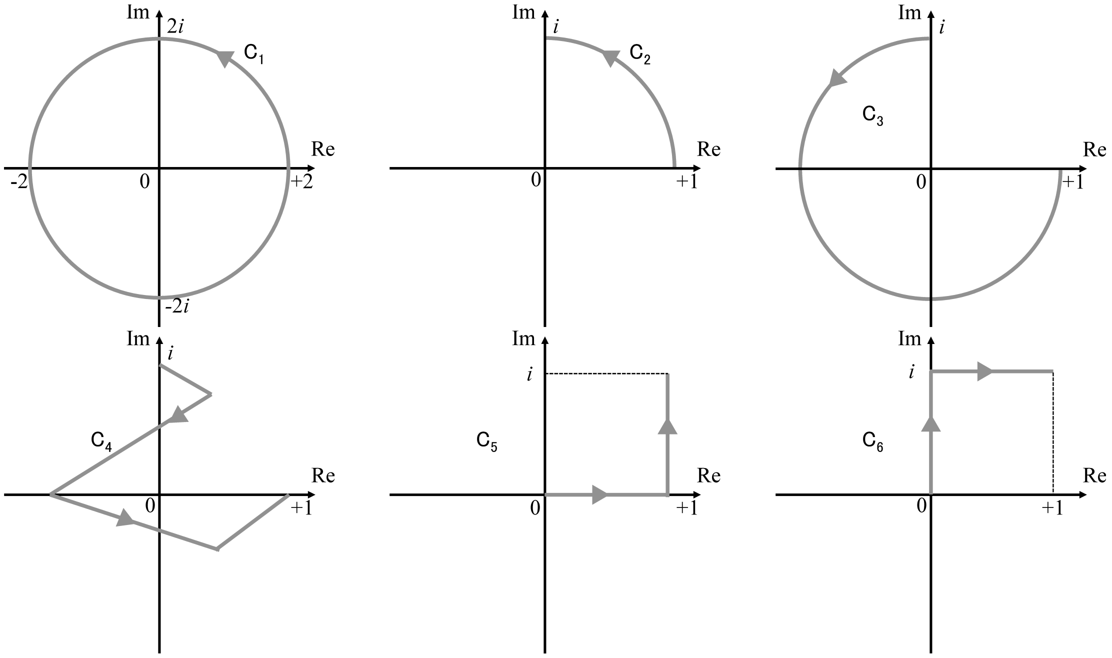
(4) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z} dz$

(5) $\displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z} dz$

(6) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{1}{z} dz$

(7) $\displaystyle\int_{C_5} |z|^2 dz$

(8) $\displaystyle\int_{C_6} |z|^2 dz$

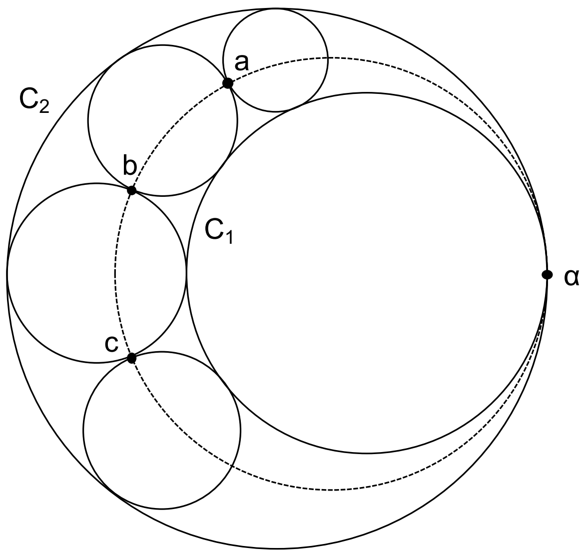


[4](複素平面間の写像)

(1) $w = z^2$ によって z 平面の上半平面上の直線群（$x = a$, や $y = b$) は w 平面上のどのような曲線群に写像されるか．

(2-1) 一次分数変換によって複素平面上の円は複素平面上の円（直線は半径が無限の円）に変換されることを示せ．(円々対応）

(2-2) 右図のように 2 つの円 C_1 と C_2 が点 α で接している場合を考える．C_1 と C_2 の隙間を小円で図のように埋めていく．小円どおしの接点がある円周上にあることを示せ.ここでは，一次分数変換 $w = \frac{1}{z-\alpha}$ を考えると C_1 と C_2 は w 平面の平行直線になることを用いよ．ここでは簡単のため，C_1（C_2）の中心を $-a_1$（$-a_2$）とし，$\alpha = 0$ とせよ．a_1, a_2 は正の定数とし，それぞれ C_1 と C_2 の半径を表している．小円の接点に対応する円の半径を求めよ.(ヒント：円々対応と等角写像)



[5](複素平面間の写像 II)

複素級数の収束領域を変数変換によって拡大することを考える．次の問に答えよ．ただし，z は複素変数，Log は対数関数の主値を表すものとする．

(1) $\mathrm{Log}(1+z)$ を $z=0$ を中心としてテイラー級数展開せよ．この級数は z 平面のどのような領域で収束するか．図示せよ．

(2) 変数 $z=\frac{2w}{1-w}$ によって w 平面の単位円の内部 $|w|<1$ は z 平面のどのような領域に写像されるか．図示せよ．

(3) $z=\frac{2w}{1-w}$ を $\mathrm{Log}(1+z)$ に代入し，それを $w=0$ を中心としてテイラー級数展開せよ．この級数は w 平面のどのような領域で収束するか．

(4) z の値を与えた時 $z=\frac{2w}{1-w}$ の関係を通じて一つの w の値が決まる．この w を (3) の級数に代入すると，(1) とは異なる級数による $\mathrm{Log}(1+z)$ の表示が得られる．この表示を z の関数として書き下せ．この級数は z 平面のどのような領域で収束するか．