数学２D演習 第2回

担当: 加藤　康之
2020 年 4 月 22 日

[1] (複素数と不等式)

(1) 複素数 a, b に対して，次式 (三角不等式) が成り立つことを示せ.

$$|a| + |b| \geq |a + b| \geq |a| - |b|$$

(2) 複素数 a, b に対して，$|a| < 1$ かつ $|b| < 1$ ならば

$$\left|\frac{a - b}{1 - \bar{a}b}\right| < 1$$

が成り立つことを示せ. なお，$\bar{a}$ は a の複素共役を表す.

(3) 複素数 a_i, 実数 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して $|a_i| < 1$, $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, かつ $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ が成り立つとする. この時，

$$|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots \lambda_n a_n| < 1$$

が成り立つことを示せ.

(4) 複素数 a, c に対して，$|a| \leq |c|$ ならば $|z - a| + |z + a| = 2|c|$ を満たす複素数 z が存在すること，及びその逆が成り立つことを示せ. また，この条件が成り立つ時，$|z|$ の最大値，最小値を求めよ.

[2] (Cauchy-Riemann の関係式)

(1) 次の各関数について Cauchy-Riemann の関係式を用いて微分可能性を判定せよ.

$$\exp(z), \qquad \ln(z), \qquad \exp(\bar{z})$$

(2) 　微分可能な複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ について以下の問に答えよ.

(i) $f(z)$ が x, y について 2 階微分可能ならば，$u(x, y)$，$v(x, y)$ はいずれも調和関数である事を示せ. 関数 $w(x, y)$ が調和関数であるとは $w(x, y)$ がラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w(x, y) = 0$$

を満たすことを意味する.

(ii) 複素平面上のある連結領域 Ω において $f(z)$ が微分可能，かつ $f'(z) = 0$ であるとする. この時，領域 Ω において $f(z)$ は定数であることを示せ.

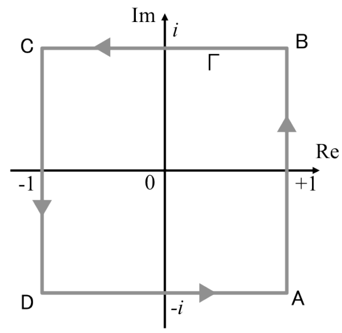
(iii) 複素平面上のある連結領域 Ω において $f(z)$ が微分可能，かつ $|f(z)| =$ 定数 であるとする. この時，領域 Ω において $f(z)$ は定数であることを示せ.

[3] 最大値の原理

$f(z)$ を複素平面上の連結領域 $\mathcal{D}$ で，正則で連続な定数ではない関数とする．$|f(z)|$ は最大値を $\mathcal{D}$ の内部ではなく境界上に持つことを，Taylor 展開を用いて証明せよ．

[4] (複素積分の warming up)

この問題では複素平面上における線積分について考える. 例えば，右図において，点 A $(1-i)$ と点 B $(1+i)$ を結ぶ線分 AB に沿って，複素関数 $f(z)=z^2$ を積分するには，以下のような手順を踏めばよい. 線分 AB 上の点 z は実数 $t(-1 \le t \le 1)$ を用いて $z = 1+it$ とパラメータ表示できることから



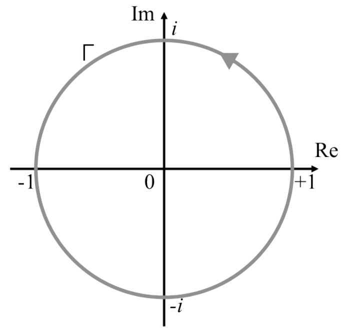
$$\int_{AB} dz z^2 = \int_{AB} d(1+it)\,(1+it)^2 = i\int_{-1}^{1} dt(1+it)^2 = \frac{4}{3}i$$

となる. この例にならって，次の問に答えよ.

(1)

$$\int_{\Gamma} dz f(z) \equiv \int_{AB} dz\; f(z) + \int_{BC} dz\; f(z) + \int_{CD} dz\; f(z) + \int_{DA} dz\; f(z)$$

を $f(z) = z, z^2, \frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}$ の場合にそれぞれ計算せよ.



(2) Γ(半径 1 の円) が右図の経路を表すとき，$f(z) = z, \frac{1}{z}$ について

$$\int_{\Gamma} dz f(z)$$

を計算せよ.