数学２Ｄ演習　第２回

工学部電気電子工学科３年　03200489　末吉七海

[1]

(1)

辺々２乗して、$(|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \geq (|a|-|b|)^2$ を示せば良い。
$a = |a|\exp(i\theta_a), b = |b|\exp(i\theta_b)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
|a+b|^2 &= \big||a|\exp(i\theta_a) + |b|\exp(i\theta_b)\big|^2 \\
&= \big||a|(\cos\theta_a + i\sin\theta_a) + |b|(\cos\theta_b + i\sin\theta_b)\big|^2 \\
&= \big|\big(|a|\cos\theta_a + |b|\cos\theta_b\big) + i\big(\big(|a|\sin\theta_a + |b|\sin\theta_b\big)\big|^2 \\
&= \big(|a|\cos\theta_a + |b|\cos\theta_b\big)^2 + \big(|a|\sin\theta_a + |b|\sin\theta_b\big)^2 \\
&= |a|^2\cos^2\theta_a + 2|a||b|\cos\theta_a\cos\theta_b + |b|^2\cos^2\theta_b + |a|^2\sin^2\theta_a + 2|a||b|\sin\theta_a\sin\theta_b + |b|^2\sin^2\theta_b \\
&= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\theta_a - \theta_b)
\end{aligned}
$$

$-1 \leq \cos(\theta_a - \theta_b) \leq 1$ より、

$$
\begin{aligned}
|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \geq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\theta_a - \theta_b) \geq |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \\
\therefore \quad (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \geq (|a|-|b|)^2
\end{aligned}
$$

ただし、m、n を整数として、
　左の等号が成立するのは、$cos(\theta_a - \theta_b) = 1$ すなわち $\theta_a = \theta_b + 2m\pi$ の時
　右の等号が成立するのは、$cos(\theta_a - \theta_b) = -1$ すなわち $\theta_a = \theta_b + (2n-1)\pi$ の時
以上より、与不等式は示された。

(2)

$$
\begin{aligned}
1^2 - \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|^2 &= 1 - \frac{a-b}{1-\bar{a}b}\overline{\frac{a-b}{1-\bar{a}b}} \\
&= 1 - \frac{a-b}{1-\bar{a}b}\frac{\bar{a}-\bar{b}}{1-a\bar{b}} \\
&= \frac{(1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})-(a-b)(\bar{a}-\bar{b})}{(1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})} \\
&= \frac{1-a\bar{b}-\bar{a}b+a\bar{a}b\bar{b}-a\bar{a}+a\bar{b}+\bar{a}b-b\bar{b}}{(1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})} \\
&= \frac{1+a\bar{a}b\bar{b}-a\bar{a}-b\bar{b}}{(1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})} \\
&= \frac{1-|a|^2-|b|^2+|a|^2|b|^2}{|1-\bar{a}b|^2} \\
&= \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-\bar{a}b|^2} \\
&\geq 0 \qquad (\because |a|^2<1, |b|^2<1, |1-\bar{a}b| \geq 0) \\
\therefore \quad \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|^2 &> 1^2 \\
\therefore \quad \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| &> 1 \qquad (\because |\frac{a-b}{1-\bar{a}b}| > 0)
\end{aligned}
$$

以上より与不等式は示された。

(3)

(1) の三角不等式を繰り返し用いると、

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| &< |\lambda_1 a_1| + |\lambda_2 a_2| + \cdots + |\lambda_n a_n| \\
&= \lambda_1|a_1| + \lambda_2|a_2| + \cdots + \lambda_n|a_n| \\
&< \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \\
&= 1
\end{aligned}
$$

以上より与不等式は示された。

(4)

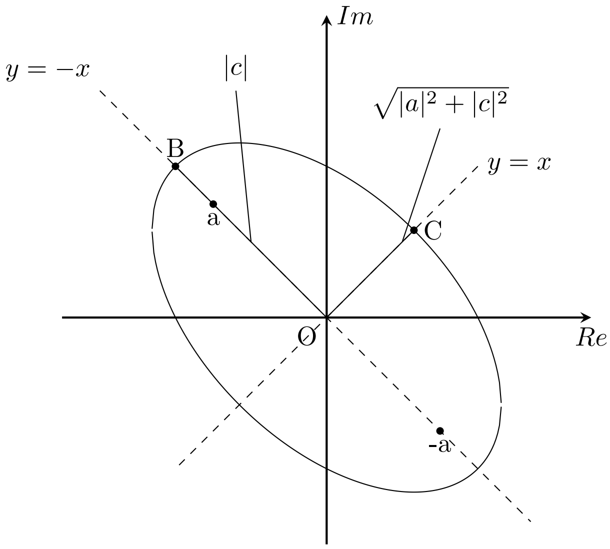
複素平面乗における、$|z-a|+|z+a|=2|c|$ の幾何学的意味について考えると、
z は a と $-a$ を焦点とし、焦点からの距離の輪が $2|c|$ の楕円上に分布している。
よって、$|a| \leq |c| \Rightarrow |z-a|+|z+a|=2|c|$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ が存在すると言える。

次に、逆を示す。

$$
\begin{aligned}
2|c| &= |z-a|+|z+a| = |z-a|+|-z-a| \\
&\geq |z-a+(-z-a)| \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&= 2|a| \\
\therefore |c| &\geq |a|
\end{aligned}
$$

以上より示された。

　ここで、$|a| \leq |c|$ の時、$|z-a|+|z+a|=2|c|$ を図示すると下の図のようになる。



　$|z|$ は点 B で最大値、点 C で最小値をとり、
　$|z|$ の最大値は楕円の長軸長で $|c|$
　$|z|$ の最小値は楕円の短軸長で $\sqrt{|c|^2-|a|^2}$

[2]

(1)

(i)　e^z

　$z=x+iy$、$e^z=u+iv$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
e^z &= e^{x+iy} \\
&= e^x e^{iy} \\
&= e^x(\cos y + i\sin y)
\end{aligned}
$$

より、

$$
u = e^x\cos y, \qquad v = e^x \sin y
$$

$$
\begin{cases}
\partial_x u = e^x\cos y, & \partial_y v = e^x \cos y \\
\partial_y u = -e^x\sin y, & -\partial_x v = -e^x\sin y
\end{cases}
$$

以上より CR 方程式は成立していることがわかるので、e^z は微分可能である。

(ii)　$\ln z$

$z = re^{i\theta}$、$\ln z = u + iv$ とおくと、

$$\begin{aligned} \ln z &= ln(re^{i\theta}) \\ &= \ln r + i(\theta + 2\pi n) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

より、

$$u = \ln r, \qquad v = \theta + 2\pi n$$

$r \neq 0$ において、

$$\begin{cases} \partial_r u = \frac{1}{r}, & \frac{1}{r}\partial_\theta v = \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r}\partial_\theta u = 0, & -\partial_r v = 0 \end{cases}$$

以上より、$r \neq 0$ において CR 方程式は成立していることがわかるので、$\ln z$ は原点以外の全ての点において微分可能である。

(iii)　$e^{\bar{z}}$

$z = x + iy$、$e^{\bar{z}} = u + iv$ とおくと、

$$\begin{aligned} e^{\bar{z}} &= e^{x-iy} \\ &= e^x e^{-iy} \\ &= e^x(\cos y - i \sin y) \end{aligned}$$

より、

$$u = e^x \cos y, \qquad v = -e^x \sin y$$

$$\begin{cases} \partial_x u = e^x \cos y, & \partial_y v = -e^x \cos y \\ \partial_y u = -e^x \sin y, & -\partial_x v = e^x \sin y \end{cases}$$

以上より CR 方程式は成立しないことがわかるので、$e^{\bar{z}}$ は微分不可能。

(2)

(i)

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$ は微分可能であることから、CR 方程式が成立するので、

$$\partial_x u \ = \partial_y v \tag{2.1}$$

$$\partial_x v = -\partial_y u \tag{2.2}$$

(**??**) の両辺を x、y で微分するとそれぞれ、

$$\partial_{xx} u = \partial_{yx} v \tag{2.3}$$

$$\partial_{xy} u = \partial_{yy} v \tag{2.4}$$

同様に、(**??**) の両辺を x、y で微分すると、

$$\partial_{xx} v = -\partial_{yx} u \tag{2.5}$$

$$\partial_{yx} v = -\partial_{yy} u \tag{2.6}$$

$\partial_{yx} v = \partial_{xy} v$ が成り立つので、(**??**)、(**??**) より、

$$\begin{aligned} \partial_{xx} u &= -\partial_{yy} u \\ \therefore (\partial_{xx} + \partial_{yy}) u &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$\partial_{yx} u = \partial_{xy} u$ が成り立つので、(**??**)、(**??**) より、

$$\begin{aligned} \partial_{xx} v &= -\partial_{yy} v \\ \therefore (\partial_{xx} + \partial_{yy}) v &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

(**??**), (**??**) より、u, v はいずれも調和関数であると言える。

(ii)

f(z) の導関数は微分する向きによらないので、

$$\begin{aligned} f'(z) = \partial_x f(z) &= \partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y) \\ &= 0 \\ f'(z) = \partial_y f(z) &= \partial_y u(x,y) + i\partial_y v(x,y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

実部と虚部をそれぞれ比較して、

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y u(x,y) = \partial_x v(x,y) = \partial_y v(x,y) = 0$$
$$\therefore \quad u(x,y) = const. \qquad v(x,y) = const.$$
$$\therefore \quad f(z) = const.$$

以上より題意は示された。

(iii)

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおくと、$|f(z)| = const.$ より $u^2 + v^2 = const.$ 両辺 x, y で微分すると、それぞれ

$$\partial_x (u^2 + v^2) = 2\big(u(\partial_x u) + v(\partial_x v)\big) = 0 \tag{2.9}$$

$$\partial_y (u^2 + v^2) = 2\big(u(\partial_y u) + v(\partial_y v)\big) = 0 \tag{2.10}$$

CR 方程式より、

$$\partial_x u \ = \partial_y v \tag{2.11}$$

$$\partial_y u = -\partial_x v \tag{2.12}$$

(**??**), (**??**), (**??**) より、

$$u(-\partial_x v) + v(\partial_x u) = 0 \tag{2.13}$$

(**??**), (**??**) より、$u = v = 0$ を除いて、

$$\partial_x u = \partial_x v = 0 \tag{2.14}$$

(**??**)、CR 方程式より、

$$\partial_y u = \partial_y v = 0 \tag{2.15}$$

(**??**), (**??**) が導かれ、これは (**??**) で除いた $u = v = 0$ においても成り立つので、
前問と同様に $f(z) = const.$
以上より題意は示された。

[3]

D 内の任意の点 α に対して $|f(\omega)| > |f(\alpha)|$ となる $\omega \in D$ が存在することを示す。
α を中心として、f(z) を Taylor 展開すると、

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + f''(\alpha)(z-\alpha)^2 + \cdots$$

ただし、f(z) は定数ではないので、$f'(\alpha) \neq 0$
$\omega = \alpha + \delta e^{i\theta}(\delta > 0, \theta in \mathbb{R})$ を考えると、三角不等式より、

$$\begin{aligned}
|f(\omega)| &\geq |f(\alpha) + f'(\alpha)(\omega - \alpha)| - |f''(\alpha)(\omega-\alpha)^2 + \cdots| \\
&= |f(\alpha) + f'(\alpha)(\delta e^{i\theta})| - |f''(\alpha)(\delta e^{2i\theta}) + f'''(\alpha)(\delta e^{3i\theta}) + \cdots| \\
&= |f(\alpha)| + \delta f'(\alpha) - \delta^2 |f''(\alpha) + f'''(\alpha)(\omega-\alpha) + \cdots|
\end{aligned}$$

十分小さい δ を考えるとき、第 3 項以降は無視して良いので、

$$|f(\omega)| - |f(\alpha)| \geq \delta |f'(\alpha)| > 0$$

以上より題意は示された。

[4]

(1)

A → B は $t = 1 + it(-1 \leq 1)$、B → C は $t = -t + i(-1 \leq 1)$、C → D は $t = -1 - it(-1 \leq 1)$、
D → A は $t = t - i(-1 \leq 1)$ と変数変換できる。

(i) $f(z) = z$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathrm{d}z f(z) &= \int_{AB} \mathrm{d}z f(z) + \int_{BC} \mathrm{d}z f(z) + \int_{CD} \mathrm{d}z f(z) + \int_{DA} \mathrm{d}z f(z) \\
&= \int_{AB} \mathrm{d}z z + \int_{BC} \mathrm{d}z z + \int_{CD} \mathrm{d}z z + \int_{DA} \mathrm{d}z z \\
&= \int_{-1}^{1} (i\mathrm{d}t)(1+it) + \int_{-1}^{1} (-\mathrm{d}t)(-t+i) + \int_{-1}^{1} (-i\mathrm{d}t)(-1-it) + \int_{-1}^{1} (\mathrm{d}t)(t-i) \\
&= 2i - 2i + 2i - 2i \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) $f(z) = z^2$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathrm{d}z f(z) &= \int_{AB} \mathrm{d}z f(z) + \int_{BC} \mathrm{d}z f(z) + \int_{CD} \mathrm{d}z f(z) + \int_{DA} \mathrm{d}z f(z) \\
&= \int_{AB} \mathrm{d}z z^2 + \int_{BC} \mathrm{d}z z^2 + \int_{CD} \mathrm{d}z z^2 + \int_{DA} \mathrm{d}z z^2 \\
&= \int_{-1}^{1} (i\mathrm{d}t)(1+it)^2 + \int_{-1}^{1} (-\mathrm{d}t)(-t+i)^2 + \int_{-1}^{1} (-i\mathrm{d}t)(-1-it)^2 + \int_{-1}^{1} (\mathrm{d}t)(t-i)^2 \\
&= \int_{-1}^{1} (i\mathrm{d}t)(-t^2+2it+1) + \int_{-1}^{1} (-\mathrm{d}t)(t^2-2it-1) + \int_{-1}^{1} (-i\mathrm{d}t)(-t^2+2it+1) + \int_{-1}^{1} (\mathrm{d}t)(t^2-2it-1) \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t(-it^2+i-t^2+1+it^2-i+t^2-1) \\
&= \int_{-1}^{1} 0\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

(iii) $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathrm{d}z f(z) &= \int_{AB} \mathrm{d}z f(z) + \int_{BC} \mathrm{d}z f(z) + \int_{CD} \mathrm{d}z f(z) + \int_{DA} \mathrm{d}z f(z) \\
&= \int_{AB} \mathrm{d}z \frac{1}{z} + \int_{BC} \mathrm{d}z \frac{1}{z} + \int_{CD} \mathrm{d}z \frac{1}{z} + \int_{DA} \mathrm{d}z \frac{1}{z} \\
&= \int_{-1}^{1} (i\mathrm{d}t) \frac{1}{1+it} + \int_{-1}^{1} (-\mathrm{d}t) \frac{1}{-t+i} + \int_{-1}^{1} (-i\mathrm{d}t) \frac{1}{-1-it} + \int_{-1}^{1} (\mathrm{d}t) \frac{1}{t-i} \\
&= \Big[\ln(1+it)\Big]_{-1}^{1} + \Big[\ln(-t+i)\Big]_{-1}^{1} + \Big[\ln(-1-it)\Big]_{-1}^{1} + \Big[\ln(t-i)\Big]_{-1}^{1} \\
&= \ln B - \ln A + \ln C - \ln B + \ln D - \ln C + \ln A - \ln D
\end{aligned}$$

これは A → B,B → C,C → D,D → A と一周しているので、
2 回出てくる $\ln A$ は 2π ずれていることに注意すると、

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathrm{d}z f(z) &= \ln B - \ln A + \ln C - \ln B + \ln D - \ln C + \ln A - \ln D \\
&= 2\pi n
\end{aligned}$$

(iv) $f(z) = \frac{1}{z^2}$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathrm{d}z f(z) &= \int_{AB} \mathrm{d}z f(z) + \int_{BC} \mathrm{d}z f(z) + \int_{CD} \mathrm{d}z f(z) + \int_{DA} \mathrm{d}z f(z) \\
&= \int_{AB} \mathrm{d}z \frac{1}{z^2} + \int_{BC} \mathrm{d}z \frac{1}{z^2} + \int_{CD} \mathrm{d}z \frac{1}{z^2} + \int_{DA} \mathrm{d}z \frac{1}{z^2} \\
&= \int_{-1}^{1} (i\mathrm{d}t) \frac{1}{(1+it)^2} + \int_{-1}^{1} (-\mathrm{d}t) \frac{1}{(-t+i)^2} + \int_{-1}^{1} (-i\mathrm{d}t) \frac{1}{(-1-t)^2} + \int_{-1}^{1} (\mathrm{d}t) \frac{1}{(t-i)^2} \\
&= \left[\frac{-1}{1+it}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{-t+i}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{-1}{1+t}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{-t+i}\right]_{-1}^{1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2)

$z = e^{i\theta}(0 \leq \theta < 2\pi)$ と変数変換できる。

(i)　$f(z) = z$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_\Gamma z\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} e^{i\theta}(ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta) \\
&= i\int_0^{2\pi} (\cos 2\theta + \sin 2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii)　$f(z) = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_\Gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}(ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta) \\
&= i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$