数学２D演習 第1回

担当: 加藤　康之
2020 年 4 月 15 日

[1]

θ を実数として，$e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ と定める．これを Euler の公式と呼ぶ.

(1) α，β を実数として，$\exp(i\alpha)\exp(i\beta) = \exp(i\alpha + i\beta)$ を示せ．このように一般の複素数についても，指数法則が成立する．

(2) (1) を用いて三角関数の 2 倍角，3 倍角の公式を導け．すなわち，$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$, $(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ をそれぞれ $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ で表せ.

(3) $z = \exp(3 + 1i)$ の実部，虚部を求め，複素平面上に z を図示せよ．

(4) 複素数 z を $z = r\exp(i\theta)$($r \geq 0$，θ，r は実数) の形に表すことを極座標表示と言う．また，この時 r を z の絶対値，θ を z の偏角と呼び，$|z| = r$，$\arg z = \theta$ と表す.

(4-1) r と θ は複素平面上でどのような意味を持つか.

(4-2) $1 + i$ を $r\exp(i\theta)$ の形に極座標表示せよ．(ただし $0 < \theta < 2\pi$ とする．)

(4-3) $z_1 = r_1\exp(i\theta_1)$, $z_2 = r_2\exp(i\theta_2)$ について，z_1z_2 及び z_1/z_2 の絶対値と偏角を求めよ．

(5) A, B を複素数として，$e^Ae^B = e^{(A+B)}$ が成り立つことを，両辺級数展開して確かめよ．

[2]

α, β, γ を複素数平面上の異なる点とする．

(1) 三角形 $\alpha\beta\gamma$ が正三角形となる必要十分条件は $\dfrac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ であることを示せ.

(2) (1) の条件は $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$ と同値であることを示せ.

[3]

次のべき級数の収束半径を求めよ．

(1) $1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \cdots \dfrac{z^n}{n!} + \cdots.$

(2) $z - \dfrac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n} + \cdots.$

(3) $1 + \alpha z + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}z^n + \cdots \qquad (\alpha \neq 0, 1, 2\cdots).$

A　複素数の演算と幾何学的意味

公式

複素数 z_1, z_2 を極形式で表示した際に, $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$ とする．このとき, $z_1 z_2$ を極形式で表示すると, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ となる．

このことを複素平面上で幾何学的にとらえ直すと, 点 $z_1 \cdot z_2$ は原点 0 を中心に, 点 z_1 を r_2 倍して θ_2 だけ回転させた点であることを意味する．

B　ベキ級数と収束半径について

複素数 z のベキ級数に対して, 次の定理が成立する．

定理

ベキ級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が $z = z_0$ で収束するなら $|z| < z_0$ である各点でこの級数は**絶対収束**[a] する．

[a] 絶対収束:$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の各項の絶対値を各項とする級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという．$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するなら $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する=絶対値をとったものが収束するなら, 符号をいくら変えても収束する．

この定理より, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ がその内部の全ての点で絶対収束して, 外部の点で発散する境界=円が存在する．この円の半径を**収束半径**という．収束半径を求める代表的な方法を二つ以下述べる．

d'Alembert の判定法

収束半径 r は $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ で与えられる．**ただし, 右辺の極限が振動する場合は使えない．**

この方法は実用的だが, 太字で示した付帯条件がついていることに注意．

Cauchy-Hadamard の定理

収束半径 r は $\dfrac{1}{r} = \displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ で与えられる[a]

[a] 上極限 $\overline{\lim}_{n\to\infty}$ は次のように定義される: $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup \{a_k : k > n\}$.