Ασκήσεις μελέτης - **Lab 4**

Lagrange Interpolation - interpolation.py

Υλοποιήστε μια συνάρτηση interpolation η οποία θα υπολογίζει την τιμή του πολυωνύμου παρεμβολής μιας δεδομένης συνάρτησης σε ένα σύνολο σημείων.

Είσοδος:

Η συνάρτηση θα παίρνει ως ορίσματα:

- ένα διάνυσμα x, το οποίο θα είναι ένα σύνολο σημείων (τα σημεία δεν χρειάζεται να είναι ισαπέχοντα ούτε ταξινομημένα)
- ένα διάνυσμα y το οποίο θα είναι οι τιμές της παρεμβαλόμενης συνάρτησης στα σημεία αυτά
- ένα διάνυσμα z το οποίο ειναι το σύνολο των σημείων στα οποία θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του πολυωνύμου.

Έξοδος:

Η συνάρτηση θα πρέπει να επιστρέφει

- ένα διάνυσμα, ίδιας διάστασης με το z, που θα έχει τις τιμές που παίρνει το πολυώνυμο παρεμβολής στα σημεία του z

Υπενθυμίζουμε ότι το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange δίνεται από τον τύπο:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i$$

όπου $L_i(x_i) = 1$ και $L_i(x_j) = 0$ για $i, j = 0(1)n, j \neq i$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Δοκιμάστε αν η συνάρτηση που φτιάξατε δουλεύει σωστά. Πως·[1]

Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση που φτιάξατε για να υπολογίσετε το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

[1] Θυμηθείτε ότι το πολυώνυμο πα-ρεμβολής σε $n + 1$ σημεία ενός πολυωνύμου βαθμού n είναι το ίδιο το πολυώνυμο

Χρησιμοποιήστε

- $n = 20$ με ομοιόμορφο διαμερισμό
- $n = 20$ στα σημεία του Chebyshev

Και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιήστε ως διάνυσμα z=np.linspace(-1,1,39).

Υπενθυμίζουμε ότι τα σημεία Chebyshev σχηματίζοντα ως εξής:

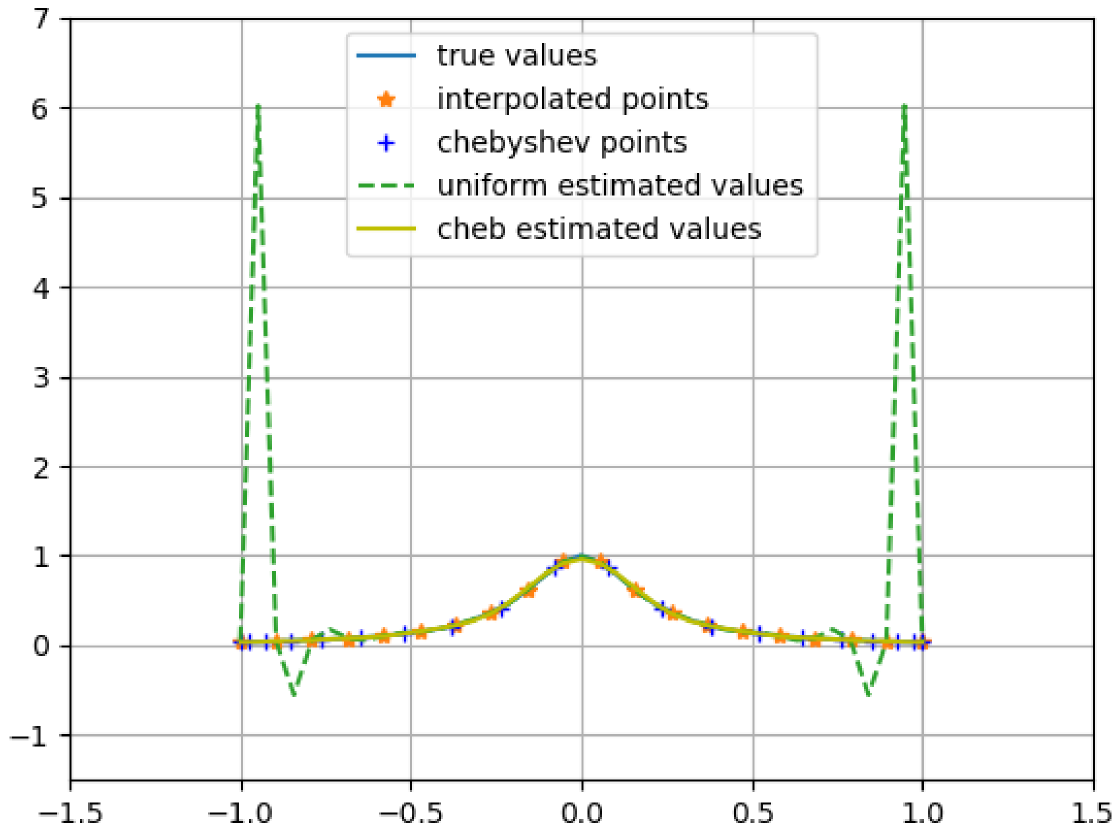
$$x_i = \cos(\frac{(2i-1)\pi}{2n})$$

με $i = 1, ..., n$

Κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και των δύο πολυωνύμων που υπολογίσατε στο z Τι παρατηρείτε·

Το επιθυμητό αποτέλεσμα φαίνεται παρακάτω

Σχήμα 1: Uniform and Chebyshev partition using Lagrange interpolation



[Monte Carlo] WarmUp - warmup.py

Σας δίνεται μία συνάρτηση η οποία παράγει ομοιόμορφα τυχαίους αριθμούς στο διάστημα [0,1]. Προσεγγίστε την τιμή του $\pi = 3.14159...$ κάνοντας χρήση της συνάρτησης παραγωγής τυχαίων αριθμών.

[Monte Carlo] Trouble - montecarlo.py

Η άσκηση χρησιμοποιεί την μέθοδο Monte Carlo για τον υπολογισμό του εμβαδού που βρίσκεται μεταξύ δύο συναρτήσεων. Η μέθοδος συνοπτικά είναι η εξής:

- Παράγουμε τυχαία σημεία με ομοιόμορφη κατανομή σε ένα ορθογώνιο που περιέχει το χωρίο του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν
- υπολογίζουμε το ποσοστό των σημείων που βρίσκονται εντος του γραφήματος των δύο συναρτήσεων
- Εντέλει το εμβαδόν που αναζητάμε είναι το ίδιο ποσοστό του εμβαδόν του ορθογωνίου με το ποσοστό των σημείων που βρίσκονται εντός του γραφήματος.

Οι συναρτήσεις εδώ δίνονται σαν σύνολα σημείων και όχι με τον αναλυτικό τους τύπο.

Σας δίνονται δύο διανύσματα

- $y = [1.000000, 0.731689, 0.070737, -0.628174, -0.989992, -0.820559, -0.210796, 0.512085, 0.960170]$
- $z = [0.00000, 0.68164, 0.99749, 0.77807, 0.14112, -0.57156, -0.97753, -0.85893, -0.27942]$

τα οποία αντιστοιχούν στην ομοιόμορφη δειγματοληψία δύο συναρτήσεων F και G στο διάστημα $[0, 2]$ έτσι ώστε

$$y[0] = F[0]$$

$$y[\,len(y) - 1\,] = F[2]$$

και

$$z[1] = G[0]$$

$$z[\,len(z) - 1\,] = G[2]$$

και τα υποδιαστήματα ενδιάμεσα θεωρούνται ισομήκη. Τα διανύσματα είναι ίδιου μεγέθους για διευκόλυνσή σας.

Σας ζητείται να παράξετε $n = 2000$ τυχαία σημεία στο ορθογώνιο

$$[0, 2] \times [min(F, G), max(F, G)]$$

και να κάνετε τη γραφική τους παράσταση ως εξής:

Όσα σημεία βρεθούν ανάμεσα στην γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων θα απεικονίζονται με κόκκινο σταυρό, όσα σημεία είναι εκτός θα απεικονίζονται με πράσινο σταυρό.

Προσεγγίστε τις δύο ΑΓΝΩΣΤΕΣ συναρτήσεις με γραμμικές splines.

Υπενθυμίζεται ότι οι γραμμικές splines για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ δίνονται από τον παρακάτω τύπο

$$S_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

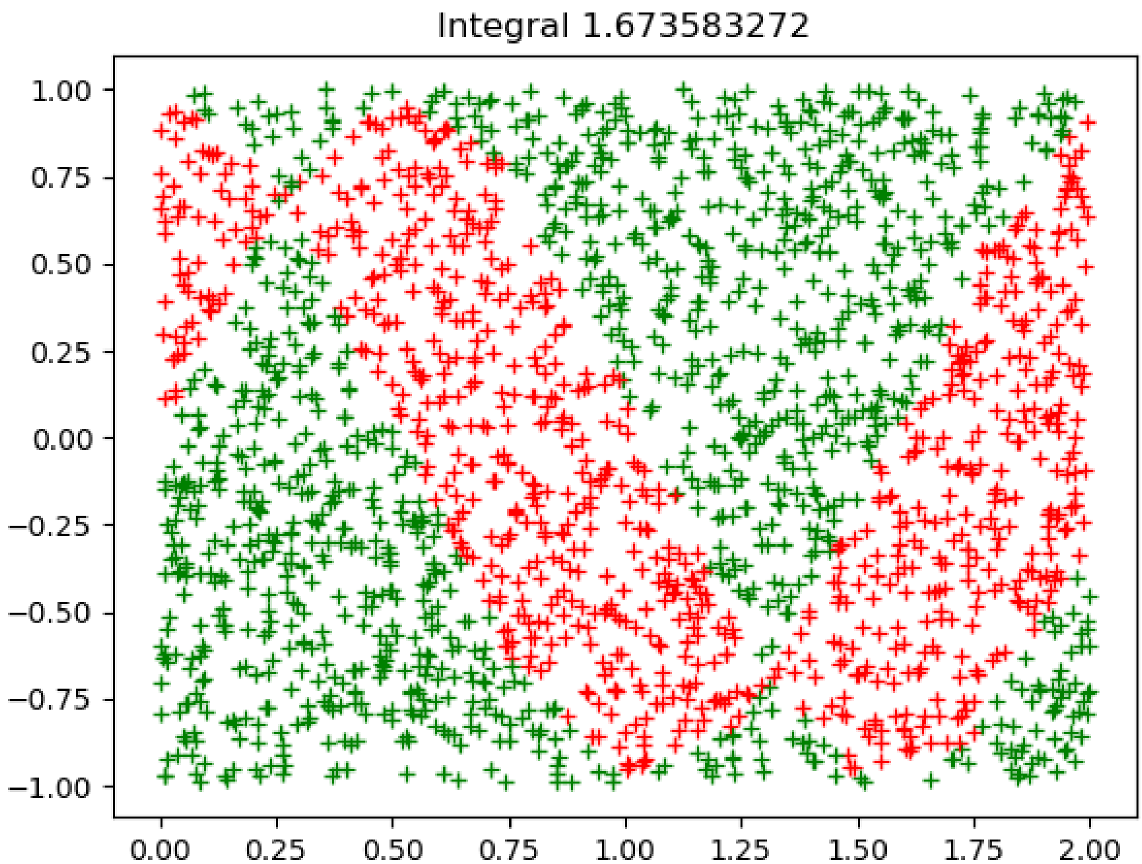
ΠΡΟΣΟΧΗ:

Τα σημεία πρέπει να είναι τελείως τυχαία. Μην κάνετε δειγματοληψία στα σημεία του άξονα x για τα οποία γνωρίζετε τις τιμές των F και G.

Εκτιμήστε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στις γραφική παράσταση (όπως ορίζεται από την γραμμική παρεμβολή) των δύο συναρτήσεων.

Το επιθυμητό αποτέλεσμα απεικονίζεται παρακάτω

Σχήμα 2: Monte Carlo with linear splines and 2000 random points for estimating the area between F and G. Red points are within our estimated area.



Trapezoid and $\frac{1}{3}$ Simpson - trapezoid_simpson.py

Υλοποιήστε την μέθοδο του τραπεζίου και $\frac{1}{3}$ Simpson για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = e^{-x^2}$$

στο διάστημα $[0, 1]$

- Για τη μέθοδο του τραπεζίου βρείτε την προσεγγιστική τιμή για $n = [10, 20, 40, 80, 160]$ υποδιαστήματα στο διάστημα ολοκλήρωσης.
- Για τη μέθοδο $\frac{1}{3}$ Simpson για $n = [2, 4, 8, 16, 32]$ υποδιαστήματα στο διάστημα ολοκλήρωσης.

Γνωρίζοντας ότι η πραγματική τιμή του ολοκληρώματος είναι 0.74682413279

- Υπολογίστε το σφάλμα της κάθε μεθόδου
- Κάντε την γραφική παράσταση(στον αξονα των x πρέπει να είναι ο αριθμός των διαστημάτων και στον αξονα y το αντίστοιχο σφάλμα).

Χρησιμοποιώντας το σφάλμα που υπολογίσατε επαληθεύστε ότι

- Για τη μέθοδο του τραπεζίου οταν διπλασιάζεται ο αριθμός των διαστημάτων το σφάλμα υποτετραπλασιάζεται.
- Για τη μέθοδο του $\frac{1}{3}$ Simpson όταν διπλασιάζεται ο αριθμός των διαστημάτων το σφάλμα υποδεκαεξαπλασιάζεται.

Υπενθυμίζουμε τους γενικευμένους κανόνες

- Μέθοδος τραπεζίου
$$I(f) = h(\frac{f_0}{2} + f_1 + ... + \frac{f_n}{2})$$
- $\frac{1}{3}$ Simpson
$$I(f) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + ... + 4f_{2n-1} + f_{2n})$$

Το επιθυμητό αποτέλεσμα φαίνεται παρακάτω

Σχήμα 3: Trapezoid and $\frac{1}{3}$ Simpson Error for subintervals