TD 2. Traitement statistique du signal

Exercice 1

Calculez l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi uniforme $\mathcal{U}[0,\,1]$:

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,\,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2

Calculez des estimations de l'espérance et de l'écart-type de la série de $N = 10$ échantillons ci-dessous :

$$x = [0{,}81,\ 0{,}90,\ 0{,}12,\ 0{,}91,\ 0{,}63,\ 0{,}09,\ 0{,}27,\ 0{,}54,\ 0{,}95,\ 0{,}96].$$

Exercice 3

Un signal observé y est modélisé par la somme d'un signal d'intérêt x et d'un bruit blanc b. Les signaux sont discrets et de taille N échantillons :

$$\forall n \in \{1, \ldots, N\}, \quad y_n = x_n + b_n.$$

1. Donnez l'expression de la puissance du signal x en fonction de ses échantillons x_n.
2. Donnez l'expression de la puissance du bruit b en fonction de ses échantillons b_n.
3. En déduire le lien entre la puissance du bruit et son écart-type.
4. Rappelez la définition mathématique du RSB.
5. Conclure en exprimant l'écart-type du bruit en fonction du RSB et des échantillons du signal x.

Exercice 4

On rappelle que le filtre adapté correspond à l'intercorrélation R_{yx} entre un signal observé y et le motif recherché x.

1. Donnez la définition de l'intercorrélation R_{yx}.
2. En effectuant un changement de variable dans cette dernière expression, montrez que l'intercorrélation R_{yx} s'écrit comme la convolution de y avec un signal h à déterminer.

Cette dernière question montre que le filtre adapté s'exprime également comme une convolution : c'est donc bien un filtre dont la réponse impulsionnelle est h.

Exercice 5

Montrez que la définition du filtre moyenneur peut s'écrire comme une convolution entre le signal observé y et une porte h.

Exercice 6

Déterminez les polynômes de degré d qui approximent au mieux les données d'abscisses n et d'ordonnées y dans les deux cas suivants :

1. $d = 0 \quad n = (0,\,1)^T \quad y = (2,\,3)^T$.
2. $d = 1 \quad n = (0,\,1,\,2)^T \quad y = (2,\,4,\,4)^T$.

On rappelle que l'inverse d'une matrice 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est égale à $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.