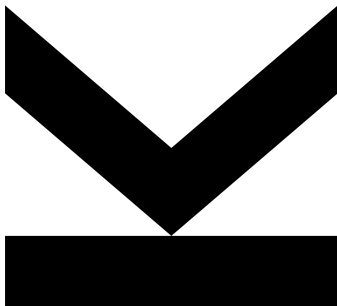


Stephanie Vidovic
k01505694,
Simon Grundner
k12136610
Institute of
Signal Processing

@ k01505694@students.jku.at
@ k12136610@students.jku.at
🌐 <https://jku.at/isp>

30. April 2025

UE02 Signalverarbeitung



Protokoll

Gruppe 13 - SoSe 2025

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabe	3
(a) Impuls- und Sprungantwort 1	4
(b) DTFT 1	5
(c) Betrag der DTFT	5
(d) Periodizität der DTFT	5
(e) Impuls- und Sprungantwort 2	6
(f) DTFT 2	7
(g) Parallelschaltung	7
2. Aufgabe	8
(a) Impulsantwort	8
(b) Frequenzantwort 1	9
(c) Frequenzantwort 2	9
(d) Phase des Systems	10
3. Aufgabe	11
(a) inverse Fouriertransformation	11
(b) Abtastung	12
4. Aufgabe	14
(a) H _{2n} Funktion	14
(b) H ₁₆ Berechnen	15
(c) Auf orthogonalität Testen	15
Anhang	16
Literatur	18

1. Aufgabe

LTI Systeme und DTFT (14 Punkte)

- (a) Wir betrachten das LTI System mit folgender Impulsantwort:

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

wobei $u[n]$ die (diskrete) Sprungfunktion darstellt. Berechnen Sie die Sprungantwort $g_1[n]$ dieses Systems, indem Sie die Faltungssumme anschreiben und auswerten (das Ergebnis soll eine geschlossene Lösung sein). Skizzieren Sie die Impuls- und die Sprungantwort.

- (b) Wenn $h[n]$ absolut summierbar ist, d.h. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$, dann ist die zeitdiskrete Fourier Transformation (discrete-time Fourier Transform - DTFT) wie folgt gegeben,

$$H(e^{j\Omega}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \quad (1)$$

Bestimmen Sie die Frequenzantwort $H_1(e^{j\Omega})$ analytisch (also ohne Verwendung einer Tabelle). Gerne können Sie natürlich Ihr Ergebnis auf Korrektheit überprüfen.

- (c) Leiten Sie den Betrag der Frequenzantwort $|H_1(e^{j\Omega})|$ her, sodass Sie den Betragsgang qualitativ skizzieren können. Hinweis: Starten Sie hierzu mit folgendem für komplexe Zahlen gültigen Zusammenhang: $|c|^2 = cc^*$, wobei c^* die komplex konjugierte von c ist.
- (d) $h_1[n]$ ist eine Sequenz von unendlicher Dauer. Daher kann MATLAB nicht direkt verwendet werden, um $H_1(e^{j\Omega})$ zu berechnen. Allerdings kann der in (b) berechnete Ausdruck $H_1(e^{j\Omega})$ für ein bestimmtes (normiertes) Frequenzintervall ausgewertet werden, um im Anschluss Betrag und Phase (bzw. Real- und Imaginärteil des Frequenzverlaufs) darzustellen. Bestimmen Sie $H_1(e^{j\Omega})$ für 4001 äquidistante Punkte zwischen $[-4\pi, 4\pi]$ und stellen Sie in einzelnen (sub)plots Betrag, Phase, sowie Real- und Imaginärteil dar. Achten Sie wie immer auf eine korrekte Achsenbeschriftung. Was fällt Ihnen in Bezug auf die Periodizität auf?
- (e) Betrachten Sie nun ein weiteres LTI System mit einer Sprungantwort.

$$g_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_2[n]$ dieses Systems. Drücken Sie $h_2[n]$ mithilfe von $h_1[n]$ aus. Skizzieren Sie wieder sowohl Impuls- als auch Sprungantwort.

Hinweis: Um $h_2[n]$ herzuleiten, nutzen Sie die Linearität des Systems und den Fakt, dass $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$.

- (f) Bestimmen Sie $H_2(e^{j\Omega})$ unter der Berücksichtigung der Linearität der DTFT.
- (g) Betrachten Sie nun eine Parallelschaltung der beiden Systeme und berechnen Sie die Impulsantwort $h_p[n]$ des kombinierten Systems. Was fällt Ihnen auf?

(a) Impuls- und Sprungantwort 1

Skizze der Impulsantwort $h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 u[n]$:

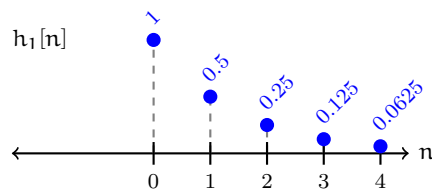


Abbildung 1: Impulsantwort $h_1[n]$

Sprungantwort:

$$g_1[n] = (h_1 * u)[n] = \sum_{v=-\infty}^{\infty} h_1[v] u[n-v] = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^v \underbrace{u[v] u[n-v]}_{\text{rect}}$$

Aus dem Produkt der Sprungfunktionen wird eine Rechteckfunktion:

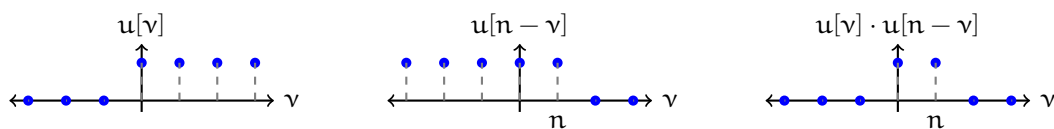


Abbildung 2: Überlegung zur Rechteckfunktion

Durch diese Rechteckfunktion lassen sich Grenzen für die Summe einsetzen. Als nächstes wird der bekannte Term für die Partialsumme einer geometrischen Reihe (5) eingesetzt:

$$g_1[n] = \sum_{v=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^v = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) u[n] \quad \Leftarrow \quad \sum_{i=0}^k q^i = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

Die Skizze zur Sprungantwort sieht dann wie folgt aus:

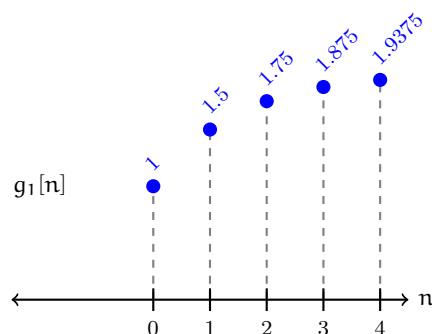


Abbildung 3: Sprungantwort $g_1[n]$

Durch vergleichen mit Abbildung 1 kann man erkennen, dass die Sprungantwort die kumulative Summe der Impulsantwort ist.

(b) DTFT 1

In der Summenformel der DTFT (1) ist wegen der Sprungfunktion in der Impulsantwort die untere Grenze gleich 0. Nach dem Ausklammern der Potenz, lässt sich der Grenzwert der geometrischen Reihe (4) einsetzen:

$$H_1(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^n} u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\Omega} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} \quad \Longleftarrow \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

(c) Betrag der DTFT

Für den Betrag der Transformaten gilt:

$$|H_1(\Omega)|^2 = H_1 H_1^* = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(e^{-j\Omega} + e^{j\Omega})}$$

Zu erkennen ist hier ein trigonometrischer Zusammenhang (6).

$$|H_1(\Omega)|^2 = \frac{1}{1.25 - \cos(\Omega)} \implies |H_1(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1.25 - \cos(\Omega)}}$$

(d) Periodizität der DTFT

Zunächst werden die zu plottenden Größen mit $H_1(e^{j\Omega})$ wie in (b) im Intervall $\Omega = [-4\pi, 4\pi]$ initialisiert.

```

1 o = linspace(-4*pi, 4*pi, 4001);
2 H = 1./(1-0.5*exp(-1i*o));

```

Zum verarbeiten des Spektrums werden folgende MATLAB-Funktionen verwendet:

- **abs**(H) : Betrag
- **angle**(H) : Phase
- **real**(H) : Realteil
- **imag**(H) : Imaginärteil

Geplottet ist der normierte Frequenzgang $H_1(e^{j\Omega})$. In diesen Diagrammen ist die Periodizität des Frequenzganges zu erkennen. Die Periode des Spektrums ist $[-\pi, \pi]$. Beim Bode-Diagramm ist zu beachten, dass die Phase in rad und der Betrag als absoluter Faktor aufgetragen ist (nicht in dB).

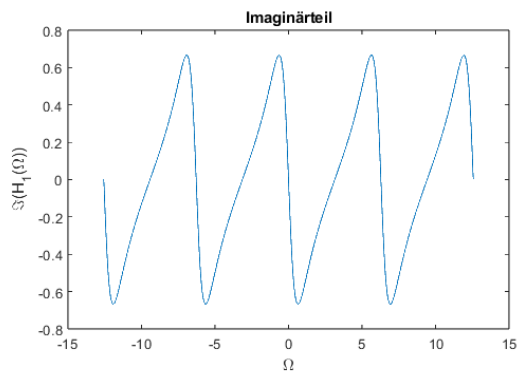
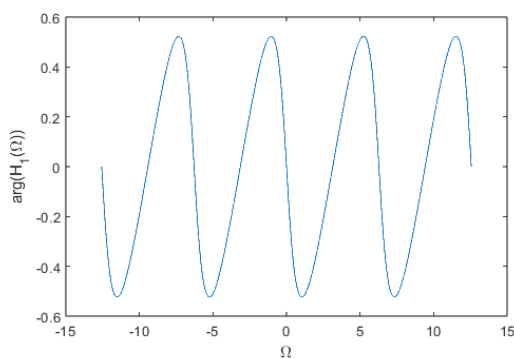
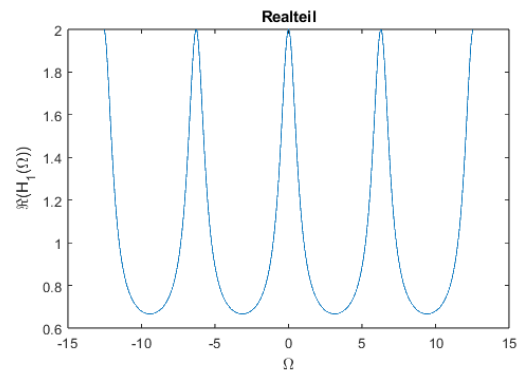
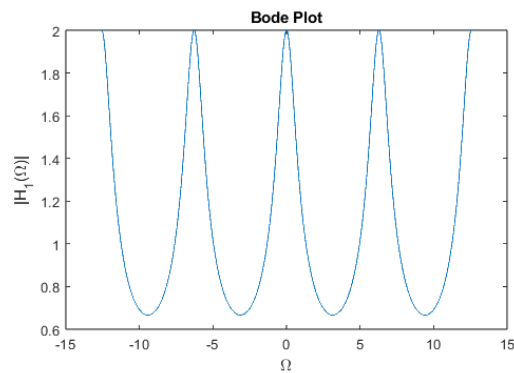


Abbildung 4: Bodeplot

Abbildung 5: Imaginär- und Realteil

(e) Impuls- und Sprungantwort 2

Aus der Sprungantwort $g_2[n]$ des Systems soll die Impulsantwort $h_2[n]$ ermittelt werden.

$$g_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = (h_2 * u)[n] = h_1[n]$$

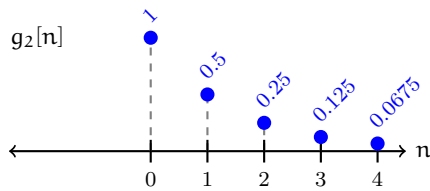
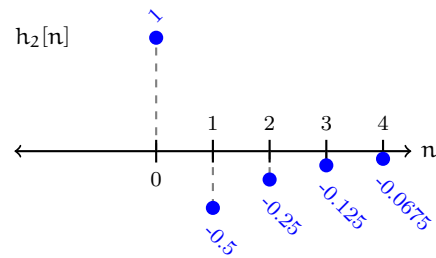
$$\begin{aligned} h_2[n] &= (h_2 * \delta)[n] = (h_2 * (u - u[\cdot - 1]))[n] \\ &= (h_2 * u)[n] - \underline{(h_2 * u[\cdot - 1])[n]} && \rightarrow \sum_{v=-\infty}^{\infty} h_2[v]u[n-v-1] \\ &= (h_2 * u)[n] - (h_2 * u)[n-1] \\ &= g_2[n] - g_2[n-1] = \mathbf{h_1[n] - h_1[n-1]} \end{aligned}$$

Hier wird die Beziehung $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ verwendet, um von der Impulsantwort auf einen Term zu gelangen, in den $g_2[n]$ eingesetzt werden kann. An der Nebenrechnung kann man sehen, dass sich die Zeitverschiebung der Sprungfunktion auf das gesamte Faltungsergebnis überträgt, da der Term $n-1$ in das äußere Argument herausgezogen werden kann.

$h_1[n]$ in $h_2[n]$ einsetzen liefert:

$$h_2[n] = \frac{1}{2^n} u[n] - \frac{1}{2^{n-1}} u[n-1] = \frac{1}{2^n} (u[n] - 2u[n-1]) = \frac{1}{2^n} (\delta[n] - u[n-1])$$

Damit ist die Skizze der beiden Systemantworten:

Abbildung 6: Sprungantwort $g_2[n]$ Abbildung 7: Impulsantwort $h_2[n]$

(f) DTFT 2

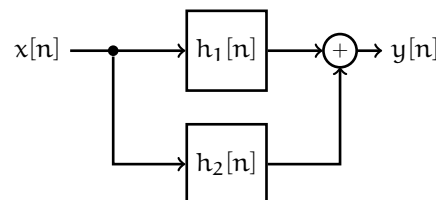
Die DTFT von $h_2[n] = h_1[n] - h_1[n-1]$ kann mit der bereits berechneten Transformierten $H_1(e^{j\Omega})$ konstruiert werden. Hier ist lediglich eine Zeitverschiebung zu berücksichtigen.

$$x[n - n_0] \quad \circ \text{---} \bullet \quad e^{-j\Omega n_0} X(e^{j\Omega})$$

$$H_2(e^{j\Omega}) = H_1(e^{j\Omega}) - e^{-j\Omega} H_1(e^{j\Omega}) = H_1(1 - e^{-j\Omega}) = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

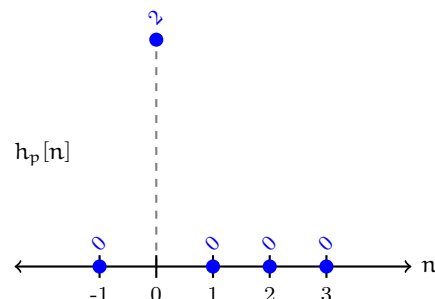
(g) Parallelschaltung

$$\begin{aligned} y[n] &= (x * h_1)[n] + (x * h_2)[n] \\ &= (x * \underbrace{(h_1 + h_2)}_{h_p})[n] \end{aligned}$$



Direkt für $h_2[n]$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} h_p[n] &= h_1[n] + h_1[n] - h_1[n-1] \\ &= 2h_1[n] - h_1[n-1] \\ &= \frac{2}{2^n} u[n] - \frac{1}{2^{n-1}} u[n-1] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} (u[n] - u[n-1]) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \delta[n] = 2\delta[n] \end{aligned}$$



Die Impulsantworten addieren sich. In diesem Fall werden die beiden IIR-Systeme zu einem FIR-System, da sich die Impulsantworten so überlagern, dass sich die unendlichen Reihen subtrahieren (Gut erkennbar mit Abbildung 6 und 7, da $g_2[n] = h_1[n]$).

2. Aufgabe

LTI Systeme und DTFT (10 Punkte)

Die Beziehung zwischen Eingangssignal $x[n]$ und Ausgangssignal $y[n]$ eines zeitdiskreten Systems ist durch

$$y[n] = -2x[n-1] + 2x[n-2] - 2x[n-3]$$

gegeben.

- Bestimmen und skizzieren Sie die Impulsantwort des Systems. Ist das System ein FIR oder ein IIR System?
- Berechnen Sie die Frequenzantwort $H(e^{j\Omega})$ dieses Systems (d.h. die DTFT der Impulsantwort $h[n]$). Berechnen und skizzieren Sie qualitativ Betrag und Phase von $H(e^{j\Omega})$.

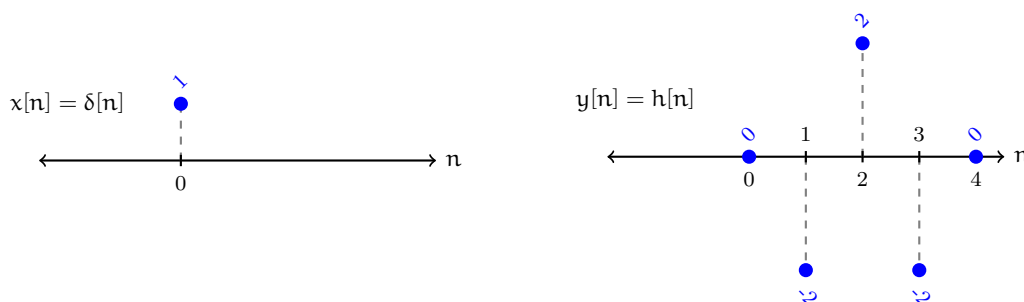
Hinweis: Verwenden Sie trigonometrische Zusammenhänge um einen einfachen Ausdruck für $H(e^{j\Omega})$ zu erhalten. Abgesehen von möglichen Phasensprüngen, verläuft die Phase linear? Falls ja, was bedeutet das für die Impulsantwort des Systems?

- Betrachten wir nun ein neues System mit der Frequenzantwort $H_1(e^{j\Omega}) = H(e^{j(\Omega+\pi)})$. Verwenden Sie eine Tabelle mit DTFT Eigenschaften um die die Impulsantwort $h_1[n]$ dieses Systems zu bestimmen und zu skizzieren. Welche Eigenschaft haben Sie verwendet?
- Handelt es sich noch immer um ein System mit linearer Phase? Ist das neue System mit der Impulsantwort $h_1[n]$ noch immer linear? (Sie müssen hier keinen Beweis liefern, geben Sie lediglich eine Erklärung dazu ab).

(a) Impulsantwort

Zum ermitteln der Impulsantwort $h[n]$ wird am Eingang des Systems ein Impuls angelegt.

$$h[n] = -2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-3]$$



Das System ist ein FIR-System, da es in einem endlichen Intervall klar bestimmt werden kann. Die Impulsantwort kann auch in der Form

$$h[n] = 2(-1)^n \text{ für } n \in [1, 3] \quad (2)$$

geschrieben werden.

(b) Frequenzantwort 1

$$H(e^{j\Omega}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

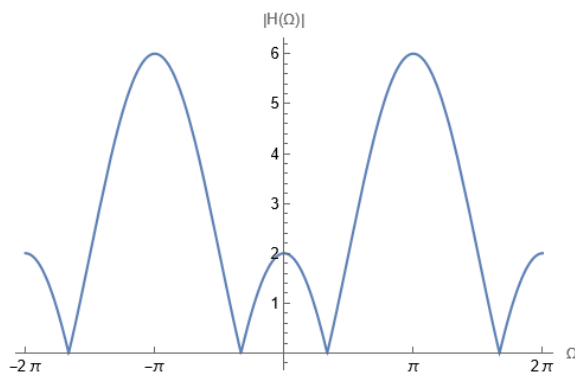
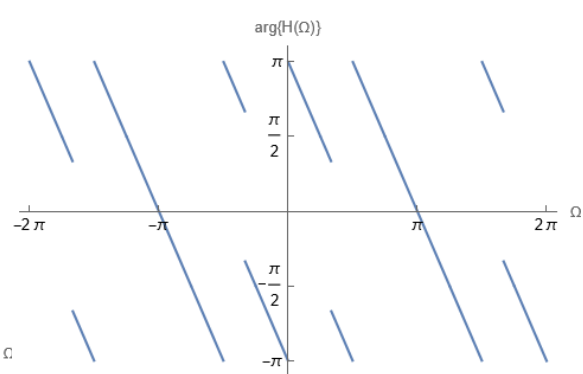
Die Definitionsgrenzen für $h[n]$ können in die Summe eingesetzt werden.

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=1}^3 2(-1)^n e^{-j\Omega} = -2e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} - 2e^{-j3\Omega}$$

Aus der Eulerschen Formel (7) und den Symmetrieeigenschaften von Sinus und Cosinus folgt:

$$\begin{aligned} &= -2(\cos(-\Omega) + j \sin(-\Omega)) + 2(\cos(-2\Omega) + j \sin(-2\Omega)) - 2(\cos(-3\Omega) + j \sin(-3\Omega)) \\ &= -2(\cos(\Omega) - j \sin(\Omega)) + 2(\cos(2\Omega) - j \sin(2\Omega)) - 2(\cos(3\Omega) - j \sin(3\Omega)) \end{aligned}$$

$$H(e^{j\Omega}) = 2(\cos(2\Omega) - \cos(\Omega) - \cos(3\Omega)) - j2(\sin(2\Omega) - \sin(\Omega) - \sin(3\Omega))$$

Abbildung 8: Betrag von $H(e^{j\Omega})$ Abbildung 9: Phase von $H(e^{j\Omega})$

Wie man in Abbildung 9 sehen kann, ist die Phase linear. Die Linearität der Phase ist eine Eigenschaft von FIR-Systemen mit spiegel- oder punktsymmetrischer Impulsantwort [1, p. 217]. Dies ist zum Beispiel beim IIR-System (Abbildung 4) aus Aufgabe 2 nicht der Fall.

(c) Frequenzantwort 2

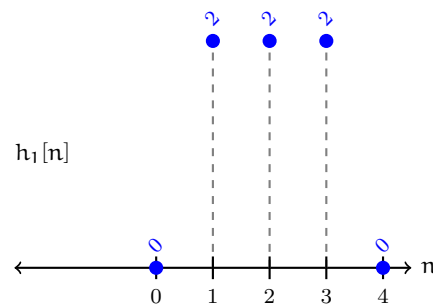
$$H_1(e^{j\Omega}) = H(e^{j(\Omega+\pi)})$$

Hier wird der Zusammenhang

$$e^{j\theta_0 n} x[n] \circ \bullet x(e^{j(\theta-\theta_0)})$$

verwendet. Daher gilt für die Impulsantwort unter Anwendung der eulerschen Identität (8)

$$h_1[n] = e^{-j\pi n} h[n] = (-1)^n h[n]$$



Es handelt sich nun um eine Rechteckfunktion.

(d) Phase des Systems

Die Frequenzantwort des linearen Systems ist lediglich eine Frequenzverschiebung eines anderen linearen Systems, weswegen die Phase ebenfalls linear ist.

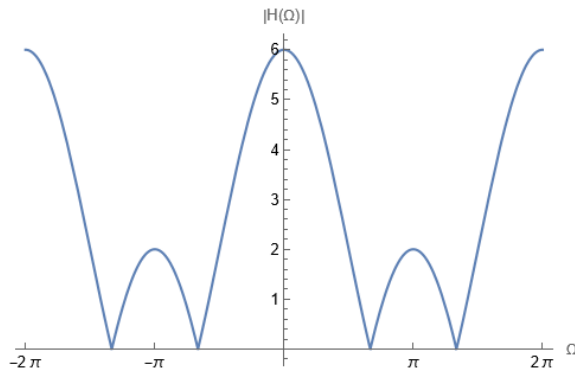


Abbildung 10: Betrag von $H_1(e^{j\Omega})$

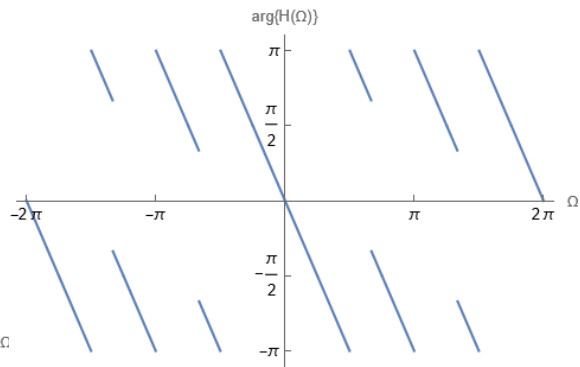
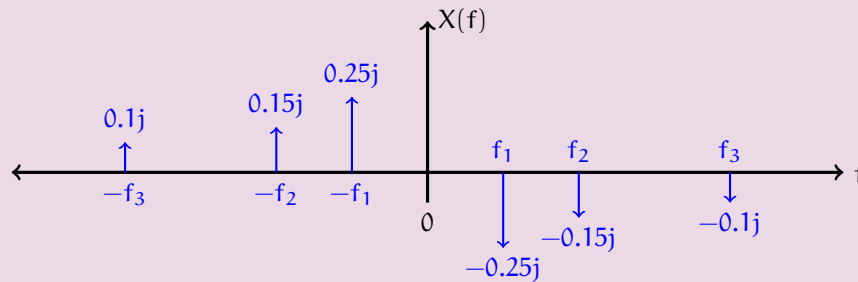


Abbildung 11: Phase von $H_1(e^{j\Omega})$

3. Aufgabe

Spektren abgetasteter Signale (8 Punkte)

Gegeben sei das Spektrum $X(f)$ eines Audiosignals $x(t)$.



- (a) Wie lautet das Signal $x(t)$?
- (b) Das Signal $x(t)$ wird mit der Frequenz $f_s = 4\text{kHz}$ abgetastet. Zeichnen Sie das Betragspektrum $|X_s(f)|$ des abgetasteten Signals im Basisband für
- (i) $f_1 = 400\text{Hz}$, $f_2 = 800\text{Hz}$, $f_3 = 1600\text{Hz}$
 - (ii) $f_1 = 2400\text{Hz}$, $f_2 = 2800\text{Hz}$, $f_3 = 3600\text{Hz}$
 - (iii) $f_1 = 4400\text{Hz}$, $f_2 = 4800\text{Hz}$, $f_3 = 5600\text{Hz}$

Aus dem gegebenen Spektrum wird die Impulsfolge abgelesen

$$X(f) = j0.1\delta(f + f_3) + j0.15\delta(f + f_2) + j0.25\delta(f + f_1) \\ -j0.1\delta(f - f_3) - j0.15\delta(f - f_2) - j0.25\delta(f - f_1)$$

(a) inverse Fouriertransformation

Um das Signal zu erhalten, wird eine inverse Fouriertransformation durchgeführt.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (\text{IFT})$$

Für den ersten Term in $X(f)$ wird das Integral ausgewertet. Dieses lässt sich wegen der Abtasteigenschaft der Delta-Distribution (3) auflösen. Der Exponent wird wegen dem positiven Vorzeichen von f_3 negativ.

$$\frac{j0.1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f + f_3) \cdot e^{j2\pi f t} df = \frac{j0.1}{2\pi} e^{-j2\pi f_3 t} \\ = \frac{j0.1}{2\pi} (\cos(2\pi f_3 t) - j \sin(2\pi f_3 t)) = \frac{1}{20\pi} (j \cos(2\pi f_3 t) + \sin(2\pi f_3 t))$$

Die Selbe Rechnung kann nun auf alle Terme angewendet werden. Zu beachten sind dabei die Vorzeichen. Da der Sinus eine gerade Funktion ist, kann das Vorzeichen der Frequenzen herausgezogen werden. Beim Kosinus hat das Vorzeichen im Argument keine Auswirkung.

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{20\pi} (j \cos(2\pi f_3 t) + \sin(2\pi f_3 t)) - \frac{1}{20\pi} (j \cos(2\pi f_3 t) - \sin(2\pi f_3 t)) \\ & + \frac{1.5}{20\pi} (j \cos(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_2 t)) - \frac{1.5}{20\pi} (j \cos(2\pi f_2 t) - \sin(2\pi f_2 t)) \\ & + \frac{2.5}{20\pi} (j \cos(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_1 t)) - \frac{2.5}{20\pi} (j \cos(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_1 t)) \end{aligned}$$

Die komplexen Kosinusse kürzen sich weg und man erhält

$$x(t) = \frac{1}{20\pi} (2 \sin(2\pi f_3 t) + 3 \sin(2\pi f_2 t) + 5 \sin(2\pi f_1 t))$$

(b) Abtastung

Abtastung: $x[n] := x(nT_s) = x\left(\frac{n}{f_s}\right)$

$$x[n] = \frac{1}{20\pi} \left(5 \sin\left(2\pi \frac{f_1}{f_s} t\right) + 3 \sin\left(2\pi \frac{f_2}{f_s} t\right) + 2 \sin\left(2\pi \frac{f_3}{f_s} t\right) \right)$$

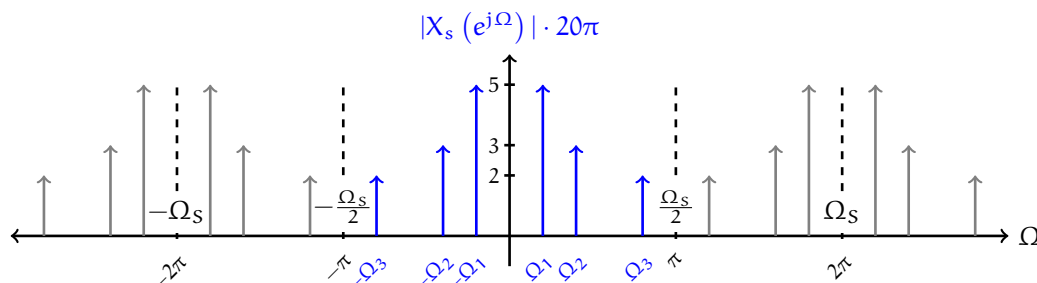
Für eine schönere Darstellung wird das Signal noch normiert mit $\Omega_n := 2\pi \frac{f_n}{f_s} \Rightarrow \Omega_s = 2\pi$

$$x[n] = \frac{1}{20\pi} (5 \sin(\Omega_1 t) + 3 \sin(\Omega_2 t) + 2 \sin(\Omega_3 t))$$

In dem Signal kommen nur diskrete Sinusschwingungen vor, welche im Spektrum (Betragsmäßig) zu Delta-Impulsen korrespondieren. Dieses Delta-Impulse treten an den Stellen der normierten Kreisfrequenzen Ω_1 bis Ω_3 auf. Das Spektrum ist außerdem periodisch. Es tritt um jedes Vielfaches von Ω_s das Spektrum erneut auf. (Eigenschaft des abgetasteten Sinus)

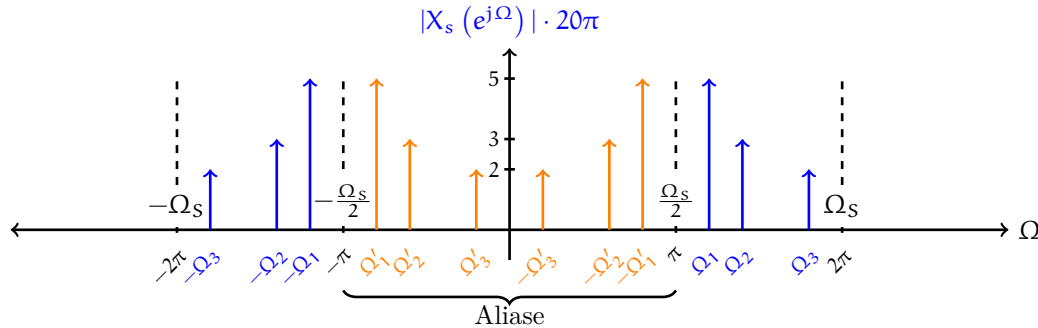
$$(i) \quad f_1 = 400\text{Hz}, f_2 = 800\text{Hz}, f_3 = 1600\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 = \frac{1}{5}\pi, \Omega_2 = \frac{2}{5}\pi, \Omega_3 = \frac{4}{5}\pi$$

Hier befinden sich alle Frequenzen innerhalb der Integrationsgrenzen der inversen DTFT (siehe Tabelle 1). Daher kann das Signal aus diesem Spektrum exakt rekonstruiert werden.



$$f_1 = 2400\text{Hz}, f_2 = 2800\text{Hz}, f_3 = 3600\text{Hz} \implies \Omega_1 = \frac{6}{5}\pi, \Omega_2 = \frac{7}{5}\pi, \Omega_3 = \frac{9}{5}\pi$$

Zu beachten ist hier, dass alle $\Omega_n > \pi$ sind. Dieses Kriterium verletzt das Abtasttheorem. Man kann erkennen, dass Aliase der Frequenzen um höhere vielfache der Sampling-Frequenz herunter gespiegelt werden.



Jedoch werden bei der Rekonstruktion des Signals genau diese Aliase wahrgenommen und das Signal lautet daher:

$$x_R[n] = \frac{1}{20\pi} (5 \sin(\Omega'_1 t) + 3 \sin(\Omega'_2 t) + 2 \sin(\Omega'_3 t))$$

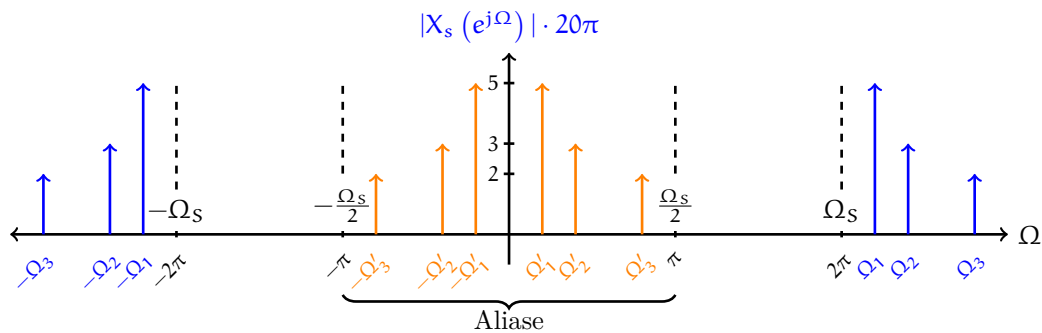
mit

$$\Omega'_1 = \frac{4}{5}\pi, \Omega'_2 = \frac{3}{5}\pi, \Omega'_3 = \frac{1}{5}\pi \implies f'_1 = 1600\text{Hz}, f'_2 = 1200\text{Hz}, f'_3 = 400\text{Hz}$$

Omega mit negativen Vorzeichen sind von oben herab gespiegelt und mit jene mit positiven Vorzeichen von unten hinauf gespiegelt. Die Spiegelachsen sind dabei $\pm\Omega_s$.

$$(ii) f_1 = 4400\text{Hz}, f_2 = 4800\text{Hz}, f_3 = 5600\text{Hz} \implies \Omega_1 = \frac{11}{5}\pi, \Omega_2 = \frac{12}{5}\pi, \Omega_3 = \frac{14}{5}\pi$$

Hier gilt der gleiche Fall wie in (ii).



Das rekonstruierte Signal ist damit wieder:

$$x_R[n] = \frac{1}{20\pi} (5 \sin(\Omega'_1 t) + 3 \sin(\Omega'_2 t) + 2 \sin(\Omega'_3 t))$$

mit

$$\Omega'_1 = \frac{1}{5}\pi, \Omega'_2 = \frac{2}{5}\pi, \Omega'_3 = \frac{4}{5}\pi \implies f'_1 = 400\text{Hz}, f'_2 = 800\text{Hz}, f'_3 = 1600\text{Hz}$$

4. Aufgabe

Anwendung Korrelation (8 Punkte)

Zwei analoge Signale $x(t)$ und $y(t)$ sind orthogonal, wenn

$$\rho_{xy}^E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = 0$$

Den Integralausdruck nennt man auch Skalarprodukt $\langle x(t), y(t) \rangle$. Das zeitdiskrete Äquivalent dieses Skalarproduktes ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^N x[n]y[n]$$

Bei der Datenübertragung werden oft Codewörter zur Übertragung eingesetzt. Diese Codewörter sollten dabei einfach zu detektieren sein. Außerdem sollten alle Codewörter untereinander orthogonal sein. Eine mögliche Art von orthogonalen Codewörtern, welche sehr einfach zu erzeugen sind, sind Walsh-Funktionen.

Dazu wird eine Hadamard-Matrix erstellt, deren Zeilen die Walsh-Funktionen beinhaltet. Eine Hadamard-Matrix kann iterativ durch die Vorschrift

$$\mathbf{H}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n & \mathbf{H}_n \\ \mathbf{H}_n & -\mathbf{H}_n \end{bmatrix}$$

erzeugt werden. Den Beginn bildet $\mathbf{H}_1 = [1]$

- Schreiben Sie eine Funktion die aus einer Hadamard-Matrix \mathbf{H}_n die Hadamard-Matrix \mathbf{H}_{2n} bildet.
- Berechnen Sie die Hadamard-Matrix \mathbf{H}_{16} an indem Sie die Funktion aus (a) mehrmals hintereinander aufrufen.
- Überprüfen Sie die Orthogonalität zweier Zeilen aus \mathbf{H}_{16} und zwar anhand der 2. und 3. Zeile und der 3. und 4. Zeile.

(a) H2n Funktion

```

1 function H_2n = hadamard2n(H_n)
2     H_2n = [H_n, H_n; H_n, -H_n];
3 end

```

(b) H16 Berechnen

```

1 %starting matrix
2 H_1 = (1);
3
4 %compute the Hadamard-matrix H_16
5 H_2 = hadamard2n(H_1);
6 H_4 = hadamard2n(H_2);
7 H_8 = hadamard2n(H_4);
8 H_16 = hadamard2n(H_8);

```

```

1 H_16 =
2  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
3  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1 -1
4  1  1 -1 -1  1  1 -1 -1  1  1 -1 -1  1  1 -1 -1
5  1 -1 -1  1  1 -1 -1  1  1 -1 -1  1  1 -1 -1  1
6  1  1  1  1 -1 -1 -1 -1  1  1  1  1 -1 -1 -1 -1
7  1 -1  1 -1 -1  1 -1  1  1 -1  1 -1 -1  1 -1  1
8  1  1 -1 -1 -1 -1  1  1  1  1 -1 -1 -1 -1  1  1
9  1 -1 -1  1 -1  1  1 -1  1 -1 -1  1 -1  1  1 -1
10 1  1  1  1  1  1  1  1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
11 1 -1  1 -1  1 -1  1 -1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1
12 1  1 -1 -1  1  1 -1 -1 -1 -1  1  1 -1 -1  1  1
13 1 -1 -1  1  1 -1 -1  1 -1  1  1 -1 -1  1  1 -1
14 1  1  1  1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1  1  1  1  1
15 1 -1  1 -1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1  1 -1  1 -1
16 1  1 -1 -1 -1 -1  1  1 -1 -1  1  1  1  1 -1 -1
17 1 -1 -1  1 -1  1  1 -1 -1  1  1 -1  1 -1 -1  1

```

(c) Auf orthogonalität Testen

```

1 res2_3 = H_16(2,:)*H_16(3,:)' ;
2 res3_4 = H_16(3,:)*H_16(4,:)' ;
3 disp(['Zweite_und_dritte_Zeile_von_H_16: ', num2str(res2_3)]);
4 disp(['Dritte_und_vierte_Zeile_von_H_16: ', num2str(res3_4)]);

```

Die Ausgabe beider Ausdrücke `res2_3` und `res3_4` ist gleich 0. Anhand der obigen Definition der Orthogonalität ist diese erfüllt.

Anhang

DTFT

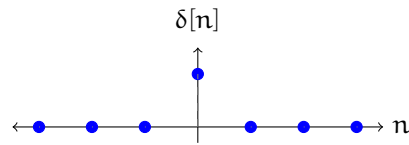
Tabelle 1: DTFT Transformationstabelle

$x[n] := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$	\longleftrightarrow	$X(e^{j\theta}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n} \quad (\text{normiert})$
$x[n] := \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} X(f) e^{j2\pi \frac{f}{f_s} n} df$	\longleftrightarrow	$X(f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi \frac{f}{f_s} n}$
$x[n - n_0]$	\longleftrightarrow	$e^{-j\theta n_0} X(e^{j\theta})$
$e^{j\theta_0 n} x[n]$	\longleftrightarrow	$X(e^{j(\theta - \theta_0)})$
$x^*[n]$	\longleftrightarrow	$X^*(e^{-j\theta})$
$x[-n]$	\longleftrightarrow	$X(e^{-j\theta})$
$(x * y)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n - k]$	\longleftrightarrow	$X(e^{j\theta}) Y(e^{j\theta})$
$x[n] \cdot y[n]$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\lambda}) Y(e^{j(\theta - \lambda)}) d\lambda$
$x_e[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x^*[-n])$	\longleftrightarrow	$\Re \{X(e^{j\theta})\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2} (x[n] - x^*[-n])$	\longleftrightarrow	$j \Im \{X(e^{j\theta})\}$
$\Re\{x[n]\}$	\longleftrightarrow	$X_e(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} (X(e^{j\theta}) + X^*(e^{-j\theta}))$
$j \Im\{x[n]\}$	\longleftrightarrow	$X_o(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} (X(e^{j\theta}) - X^*(e^{-j\theta}))$
$n \cdot x[n]$	\longleftrightarrow	$j \frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta}$
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} X(e^{j\theta}) + \pi X(e^{j\theta}) \delta_{2\pi}(\theta)$

Testsignale

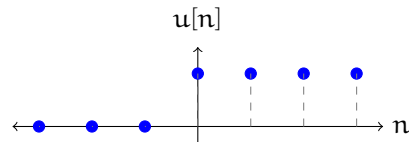
- Kronecker Delta

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



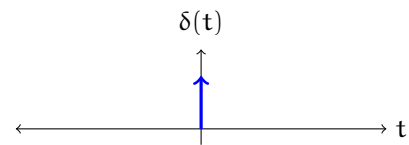
- Sprungfunktion

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



- Dirac-Distribution

$$\delta(t) = \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{wenn } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Abtasteigenschaft der Dirac-Distribution:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt \quad (3)$$

Geometrische Reihe

- Unendlicher Grenzwert

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \quad (4)$$

- Partialsumme der geometrischen Reihe

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \quad (5)$$

Trigonometrie

- Komplexer Zusammenhang des Kosinus

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (6)$$

- Eulersche Formel

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad (7)$$

- Eulersche Identität

$$e^{-j\pi} = -1 \quad (8)$$

Literatur

- [1] Daniel Ch. von Grünigen. *Digitale Signalverarbeitung : mit einer Einführung in die kontinuierlichen Signale und Systeme ; mit 91 Beispielen, 80 Aufgaben sowie einer CD-ROM mit Lösungen sowie Entwurfs- und Simulationsprogrammen*. Fachbuchverl. Leipzig im Carl-Hanser-Verl, 4. Aufl. edition, 2008.

Feedback

- 1.a. $-u[n]$ fehlt -0,25P;
1.d. Matlab Datei fehlt;
2.b. Aus trigonometrischen Beziehungen lässt sich die Frequenzantwort auf $H(e^{j\Omega} = 2e^{-j2\Omega}(1 - 2\cos(\Omega))$ vereinfachen (Hinweis: zuerst $2e^{-j2\Omega}$ herausheben) (-1P)
3.a. Faktor $1/(2P)i$ ist falsch -0,5P;
3.b. falsche Amplitude -1P;
Schön ausgearbeitet!