Aufgabe 2.

a.) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{M}\cdot n}$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-j\,2\pi k\cdot\frac{n}{N}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\cdot\frac{2\pi}{M}\cdot n}\cdot e^{-j\cdot 2\pi k\cdot\frac{n}{N}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\cdot\frac{2\pi}{M}\cdot n - j2\pi k\cdot\frac{n}{N}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\cdot\left(\frac{2\pi}{M}\cdot n - k\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot n\right)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n\cdot\left(\frac{1}{M}-\frac{k}{N}\right)}$$

Endliche geometrische Reihe

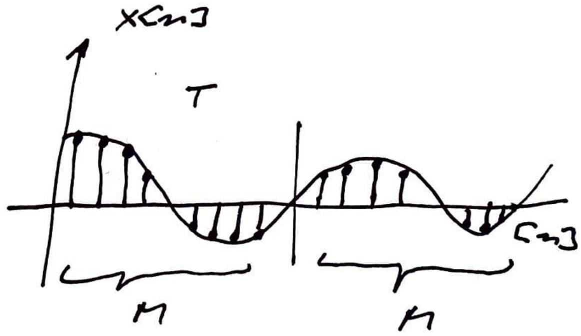
$$\sum_{n=0}^{p} q^n = \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Big(\underbrace{e^{j2\pi\left(\frac{1}{M}-\frac{k}{N}\right)}}_{q}\Big)^n$$

$$= \frac{1-e^{j2\pi\left(\frac{1}{M}-\frac{k}{N}\right)\cdot N}}{1-e^{j2\pi\left(\frac{1}{M}-\frac{k}{N}\right)}}$$

b.) N… Länge DFT

M… Signallänge



Betrachtung über eine Periode

Signal ist periodisch und die DFT-Länge ist gleich.

c.) $$X[k] = \frac{1-e^{j2\pi\left(\frac{1}{M}-\frac{k}{N}\right)\cdot N}}{1-e^{j2\pi\left(\frac{1}{M}-\frac{k}{N}\right)}}$$

$$M=N \Rightarrow \frac{1-e^{j2\pi(1-k)}}{1-e^{j2\pi\frac{1}{N}\cdot(1-k)}}$$

$$e^{jx} = \cos(x) + j\cdot\sin(x) \rightarrow \text{Euler}$$

$$e^{j2\pi(1-k)} = \underbrace{\cos(2\pi(1-k))}_{1} + j\cdot\underbrace{\sin(2\pi(1-k))}_{0}$$

$k \ldots 1,2,3,4 \ldots$ ganzzahlig $\rightarrow$ immer 1!

$$\rightarrow X[k] = \frac{1-e^{j2\pi(1-k)}}{1-e^{j2\pi\frac{1}{N}\cdot(1-k)}} \quad \begin{matrix}\rightarrow =1\\ \rightarrow \neq 1\end{matrix}$$

d.) $$X[k] = \frac{1-e^{j2\pi(1-k)}}{1-e^{j2\pi\frac{1}{N}\cdot(1-k)}}$$

$$\lim_{k\to 1} \frac{1-e^{j2\pi(1-k)}}{1-e^{j2\pi\frac{1}{N}\cdot(1-k)}} = \frac{0}{0}$$

d'Hospital

$$\lim_{k\to 1} \frac{j2\pi\cdot e^{j2\pi(1-k)}}{\frac{1}{N}\cdot j2\pi\cdot e^{j2\pi\frac{1}{N}(1-k)}} = \frac{j2\pi}{\frac{1}{N}\cdot j2\pi} = N$$

e.) $$\left.\begin{matrix} X[k]=0 & \text{bei} & k\neq 1 \\ X[k]=1 & \text{bei} & k=1 \end{matrix}\right| \delta[k-1]$$

vgl. $$\left.\begin{matrix} X[k]=0 & \text{bei} & k\neq 0 \\ X[k]=1 & \text{bei} & k=0 \end{matrix}\right\} \delta[k]$$

$X[K] = N \cdot \delta[K-1]$

- Spektrum hat 1-NICHT-NULL-WERT

Was reicht aus um das Signal vollständig zu beschreiben.

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{M}\cdot n} = \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n}}_{\text{unter der Annahme } M=N}$$

- Spektrum $X[K=1] = N$ sonst 0

$\Rightarrow f = \frac{1}{N}$

bei $X[K=2] = N$ sonst 0

$f = \frac{2}{N}$ ...