JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

**Stephanie Vidovic**
**k01505694,**
**Simon Grundner**
**k12136610**
Institute of
Signal Processing

@ k01505694@students.jku.at
@ k12136610@students.jku.at
https://jku.at/isp

9. September 2025

# UE05 Signalverarbeitung

## Protokoll

**Gruppe 13 - SoSe 2025**

INSTITUTE OF SIGNAL PROCESSING

**Schlagwörter** Dig. Filter, Minimalphasen/Allpass Systeme

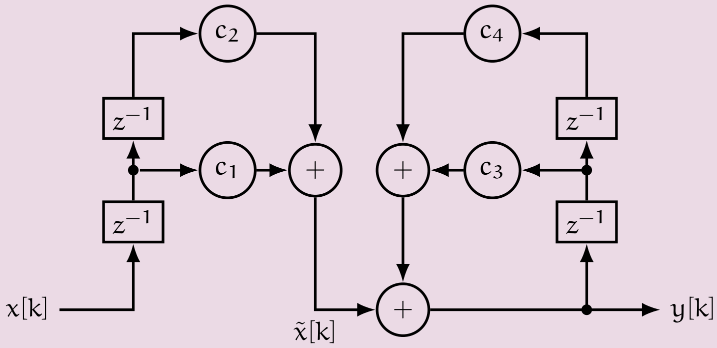
**JOHANNES KEPLER**
**UNIVERSITÄT LINZ**
Altenberger Straße 69
4040 Linz, Austria
jku.at

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Aufgabe

**Pol-/Nullstellendarstellung eines digitalen Filters (10 Punkte)**

Gegeben ist ein kausales zeitdiskretes Filter.




$c_1 = -\frac{1}{4}$

$c_2 = \frac{1}{4}$

$c_3 = 1$

$c_4 = -\frac{1}{2}$

(a) Geben Sie eine Differenzengleichung in $x[k]$ und $y[k]$ zur Beschreibung dieses Filters an.

(b) Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(z)$?

(c) Berechnen Sie Pole $z_p$ und Nullstellen $z_n$ von $H(z)$ und zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm

(d) Um welche Art Filter wird es sich hier handeln? Unterscheidung zwischen FIR/IIR und Hoch-/Tief-/Bandpass/Bandsperre!

(e) Handelt es sich um ein stabiles Filter? Begründung!

Aufgabe 1.

a.) Beschreibung des Filters

$$y[k] = c_1 \cdot x[k-1] + c_2 \cdot x[k-2] + c_3 \cdot y[k-1] + c_4 \cdot y[k-2]$$

$c_1 = -\frac{1}{4}$ $c_3 = 1$

$c_2 = \frac{1}{4}$ $c_4 = -\frac{1}{2}$

$$y[k] = -\frac{1}{4} \cdot x[k-1] + \frac{1}{4} \cdot x[k-2] + 1 \cdot y[k-1] - \frac{1}{2} y[k-2]$$

b.) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$Y(z) = -\frac{1}{4} z^{-1} X(z) + \frac{1}{4} z^{-2} X(z) + z^{-1} Y(z) - \frac{1}{2} z^{-2} Y(z)$$

$$Y(z) - z^{-1} Y(z) + \frac{1}{2} z^{-2} Y(z) = -\frac{1}{4} z^{-1} X(z) + \frac{1}{4} z^{-2} X(z)$$

$$Y(z) \cdot \left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}\right) = X(z) \cdot \left(-\frac{1}{4} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-\frac{1}{4} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}} = \frac{1 - z}{4z^2 - 4z + 2}$$

$\rightarrow 1 - z = 0$

$z_{n1} = 1$

$\rightarrow 4z^2 - 4z + 2 = 0$

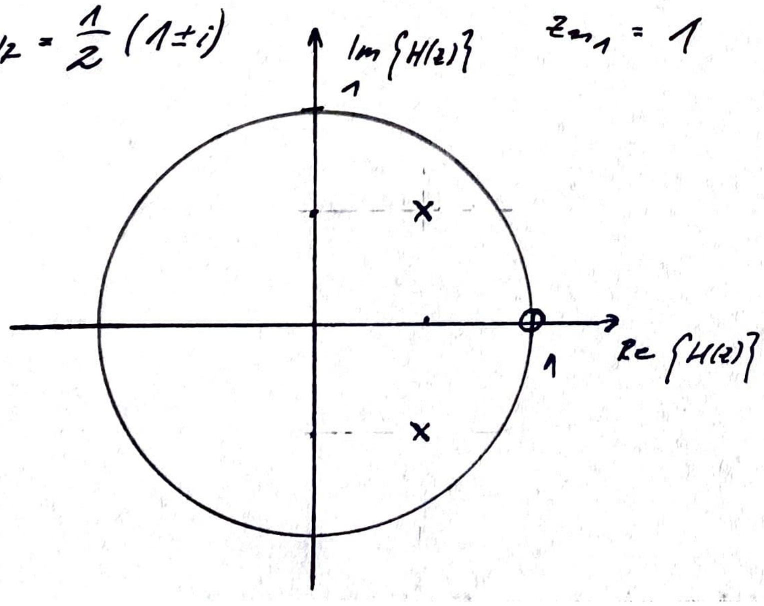
$2z^2 - 2z + 1 = 0$

$z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$

$z_{p1/2} = \frac{1}{2}(1 \pm i)$

c.) Pole ($z_p$) Nullstellen ($z_n$)

$z_{p1/2} = \frac{1}{2}(1 \pm i)$ $z_{n1} = 1$




d.) IIR Hochpass

e.) System ist stabil, da Pole von $H(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen.

$|z_{p1/2}| < 1$

# 2. Aufgabe

**Minimalphasen und Allpass Systeme I (16 Punkte)**

Jedes stabile, kausale LTI System mit der z-Transformierten

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} \tag{1}$$

kann in ein Produkt eines Minimalphasen $H_m(z)$ und eines Allpass Systems $H_a(z)$ aufgeteilt werden. Dabei hat ein stabiles kausales Minimalphasen System immer eine stabile, kausale Inverse $\frac{1}{H_m(z)}$, d.h., alle Pole und Nullstellen sind innerhalb des Einheitskreises. Der Minimalphasen-Anteil eines kausalen, stabilen LTI Systems wird dadurch erhalten, indem man alle Nullstellen mit Betrag größer $1$ am Einheitskreis spiegelt. Anders formuliert, wenn $z_{0,k}$ die $k$-te Nullstelle von $H(z)$ ist, dann wird die $k$-te Nullstelle $\tilde{z}_{0,k}$ des Minimalphasensystems $H_m(z)$ durch

$$\tilde{z}_{0,k} = \begin{cases} z_{0,k} & \text{for } |z_{0,k}| < 1 \\ \dfrac{1}{z^*_{0,k}} & \text{for } |z_{0,k}| \geq 1 \end{cases}$$

bestimmt ($^* \rightarrow$ konjugiert komplex). Die Pole des Minimalphasen-Anteils sind an der selben Stelle wie die Pole des originalen Systems $H(z)$.

(a) Schreiben Sie eine Matlab Funktion

```
[b_min, a_min, b_all, a_all] = decomposeLTI(b_h, a_h)
```

welche die folgenden Aufgaben erfüllt:

- Das System ist mittels der Polynomkoeffizienten `b_h`, `a_h` der Transferfunktion definiert. Überprüfen Sie ob das System stabil ist. Sie können die MATLAB-Funktion `roots` verwenden, um die Nullstellen der Polynome zu berechnen.
- Falls das System instabil ist, geben Sie eine Warnung am `Command Window` aus und setzen Sie alle Rückgabeparameter auf 0.
- Wenn das System stabil ist, berechnen Sie die Dekomposition von $H(z)$ in das Produkt von $H_m(z)$ (Minimalphasen-Anteil) und $H_a(z)$ (Allpass-Anteil). Das heißt, berechnen Sie die Position der Nullstellen und Pole von $H_m(z)$ und $H_a(z)$.
- Wenn das System stabil ist, verwenden Sie die MATLAB-Funktion `poly` um die Nullstellen und Pole von $H_m(z)$ und $H_a(z)$ auf die entsprechenden Zähler-Polynome bzw. Nenner-Polynome umzuformen. Stellen Sie dabei ein korrekte Skalierung für $H_a(z)$ und $H_m(z)$ sicher, sodass $|H_a(e^{j\Omega})| = 1$ und $|H_m(e^{j\Omega})| = |H(e^{j\Omega})|$. Setzen Sie die resultierenden Polynome als Rückgabeparameter `b_min`, `a_min`, `b_all`, `a_all`.
- Stellen Sie sicher, dass die Funktion ausreichend kommentiert ist. Inkludieren Sie einen `header`, welcher angezeigt wird wenn Sie das Kommando `help decomposeLTI` eingeben.

(b) Betrachten Sie nun das folgende kausale zeitdiskrete System

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-3}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-3}}$$

Verwenden Sie das MATLAB-Kommando `zplane` um das Pol-Nullstellen Diagramm für das System $H(z)$ darzustellen. Stellen Sie außerdem die Pole und Nullstellen des Allpass-Anteils sowie des (stabilen) inversen Minimalphasen-Anteils dar. Was können Sie beobachten?

(c) Plotten Sie die Frequenzantwort (Betrag und Phase mit `freqz`) für das System $H(z)$ und dessen Minimalphasen-Anteil $H_m(z)$. Was können Sie über Betrag und Phase der Systeme aussagen?

- Eine etwas detaillierter Beschreibung zu Minimalphasen und Allpass Systemen kann z.B. unter http://ece-research.unm.edu/bsanthan/ece539/note7.pdf gefunden werden
- Alle Kommentare zwischen Funktionsdefinition und dem ersten Quelltext werden vom **help** Kommando angezeigt.

## (a) Dekomposition in MATLAB

Die Funktion ist wie nach Vorschrift der Angabe und mithilfe der verlinkten Ressource implementiert. Die **help**-Page für `decomposeLTI` gibt folgendes zurück:

```
decomposeLTI - Takes in a stable system and splits it into Allpass and a Minimalphase
     parts, such that H = H_min*H_all. If the input system is unstable, an error is
    returned to the console window and all coefficients return 0.

    Syntax
      [b_min, a_min, b_all, a_all] = decomposeLTI(b_h, a_h)

    Input Arguments
      b_h - Transferfunction numerator coefficients vector
      a_h - Transferfunction denominator coefficients vector

    Output Arguments
      b_min - Numerator coefficients of Minimalphase Transferfunction
      a_min - Denominator coefficients of Minimalphase Transferfunction
      b_all - Numerator coefficients of Allpass Transferfunction
      a_all - Denominator oefficients of Allpass Transferfunction
```

Damit der Allpass einen Betrag von 1 hat ist hier wichtig, dass das Polynom bezüglich der

## (b) Pol-Nullstellendiagramm

Das Pol-Nullstellen Diagramm wurde in diesem Fall so modifiziert, dass zusätzlich eine Art Bode-Diagramm in die z-Ebene geplottet wird.

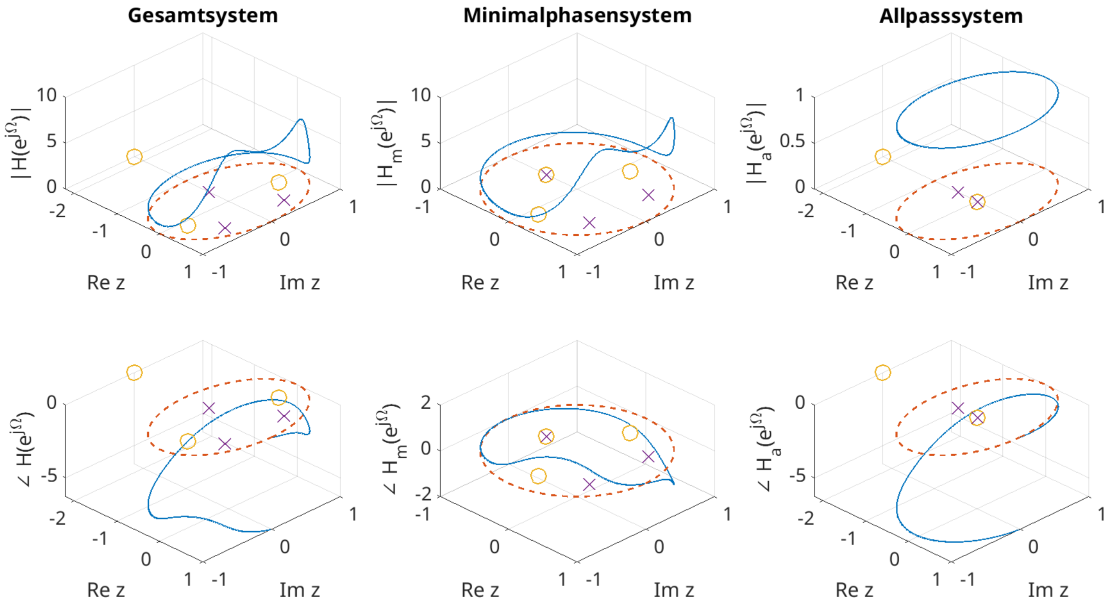



Abbildung 1: Pol- Nullstellen Diagramm

Hier kann man zunächst sehen, dass sich die Pole und Nullstellen der beiden Komponenten ergänzen und zusammen die Pole und Nullstellen des Gesamtsystems aufweisen. Dort wo Pole und Nullstellen gleichzeitig auftreten, kürzen sich die Terme in der Übertragungsfunktion.

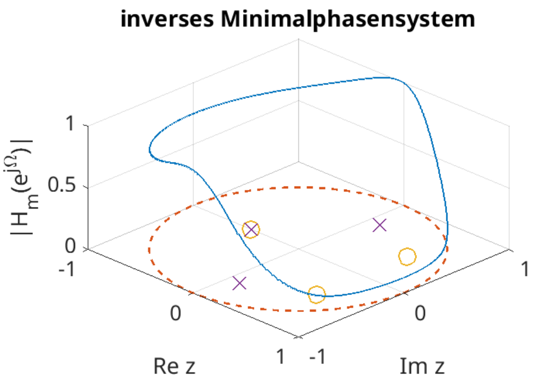


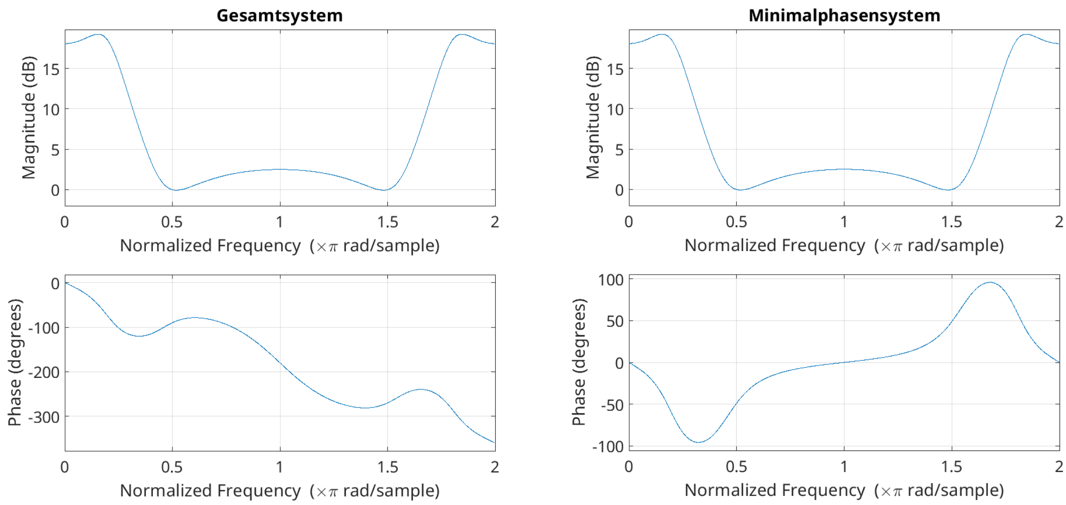

Abbildung 2: Enter Caption

Da auch für die inverse alle Pol- und Nullstellen innerhalb des Einheitskreise sind, ist das inverse System ebenfalls kausal und stabil

## (c) Frequenzantwort

**Betrag:** Man kann erkennen, dass er Betragsgang der beiden Systeme gleich ist.

**Phase:** Der Minimalphasenanteil besitzt die Eigenschaft, dass dessen Phase nicht vollständig um 360° dreht, sondern innerhalb ±180° bleibt.



# 3. Aufgabe

**Minimalphasen und Allpass Systeme II (14 Punkte)**

Ein kausales System ist durch die Impulsantwort

$$h[n] = 1.2\delta[n] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

definiert.

(a) Berechnen Sie analytisch die z-Transformierte $H(z)$ der Impulsantwort.

(b) Plotten Sie die ersten 50 Samples von $h[n]$. Sie können dazu die MATLAB Funktion `impz` verwenden, wobei Sie dieser die Koeffizienten von $H(z)$ übergeben.

(c) Überprüfen Sie mit ihrer Funktion `decomposeLTI` ob das System stabil ist und bestimmen Sie damit die Koeffizienten des Minimalphasen-Anteils sowie des Allpass-Anteils. Handelt es sich hier um ein Minimalphasen System? **Begründen Sie Ihre Antwort!**

*Anmerkung:* Falls Sie Aufgabe 2 nicht lösen konnten, können Sie die Stabilität und Minimalphasen- Eigenschaft analytisch überprüfen. Tatsächlich kann Aufgabe 2 gänzlich analytisch gelöst werden (es ist eine nette Übung!).

(d) Plotten Sie die ersten 50 Samples der Impulsantwort $h_{inv}$ von $\frac{1}{H_m(z)}$, der Inversen des Minimalphasen Anteils.

(e) Verwenden Sie das Kommando `impz` um auch längere Sequenzen von $h[n]$ und $h_{inv}[n]$ zu erhalten. Bestimmen und plotten Sie die Impulsantwort der Kaskade der beiden Systeme. Was fällt Ihnen auf?

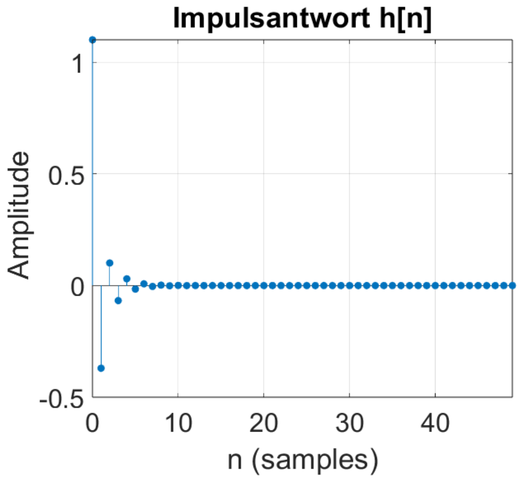
## (a) z-Transformation

$$H(z) = 1.2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{3}{5}\frac{z}{z-\frac{1}{5}} = 1.2 + \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}$$

Kann mittels der Matlab-Funktion `residuez(r, p, k)` wie bereits in vorigen Übungen dokumentiert in Zähler- und Nennerpolynom umgerechnet werden.

$$H(z) = \frac{1.1 - 0.04z^{-1} - 0.12z^{-2}}{1 + 0.3z^{-1} - 0.1z^{-2}}$$

## (b) Plot der Impulsantwort




## (c) Stabilität Prüfen

`decomposeLTI` wirf zunächst keinen Fehler für Instabilität und liefert die Koeffizienten für die jeweiligen Anteile

**Allpass:** `b_all = [1, 0, 0]`,

`a_all = [1, 0, 0]`

**Min-Phase:** `b_min = [1.0000, -0.0364, -0.1091]`,

`a_min = [1.0000 0.3000 -0.1000]`

Hier ist zu erkennen, dass die Koeffizienten beim Allpass-Anteil nur $a_0 = 1$ und $b_0 = 1$ sind. Bei einem solchen System ist der Phasengang konstant 0, was heißen muss, dass im Ursprüngliche System nur der Minimalphasenanteil auf die Phase wirkt. Das System ist also selbst ein Minimalphasensystem. Eine Alternative Begründung ist, dass alle ihre Null- (und Polstellen) innerhalb des Einheitskreises liegen.

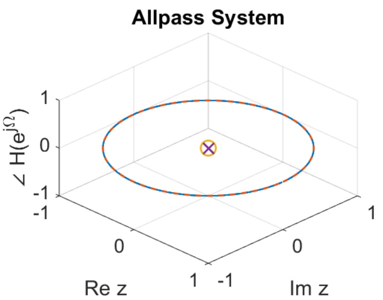



Abbildung 3: Phase des Allpass Anteil

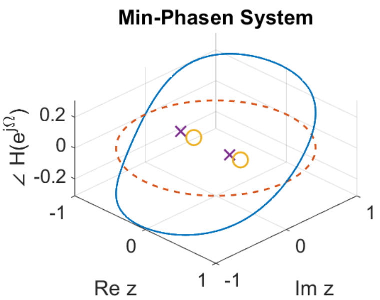
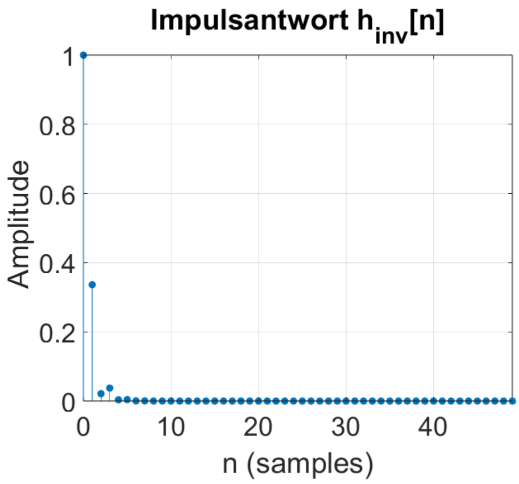
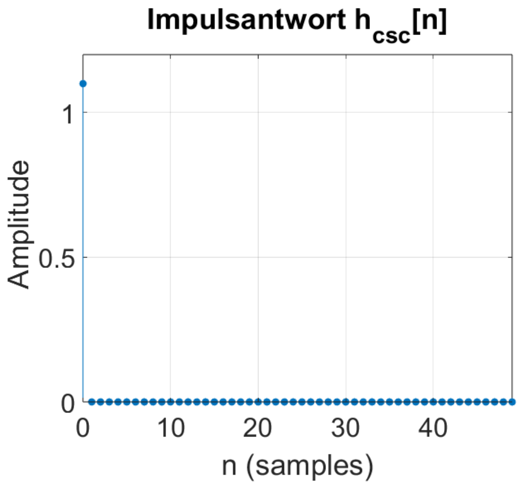



Abbildung 4: Phasengang des Minimalphasen Anteil gleich dem Phasengang des Gesamtsystems

## (d) Plot der inversen Impulsantwort




## (e) Kaskadierung der Systeme




Es bleibt nur ein Delta-Impuls als Resultierende Impulsantwort übrig.

# Anhang

**Z-Transformation**

Tabelle 1: Rechensätze für kausale Signale

| | |
|---|---|
| 1. | $X(z) = \mathcal{Z}_n\{x[n]\}(z) \quad := \quad \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$ |
| 2. | $\mathcal{Z}_n\{x[n-k]\}(z) \quad = \quad z^{-k}\mathcal{Z}_n\{x[n]\}(z)$ |

Tabelle 2: z-Korrespondenztabelle

| | |
|---|---|
| 1. | $a^n u[n] \quad \circ\!-\!\bullet \quad \dfrac{z}{z-a}$ |