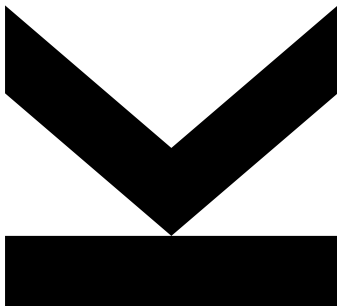


**Stephanie Vidovic**  
**k01505694,**  
**Simon Grundner**  
**k12136610**  
Institute of  
Signal Processing

@ k01505694@students.jku.at  
@ k12136610@students.jku.at  
🌐 <https://jku.at/isp>

2. April 2025

# UE01 Signalverarbeitung



## Protokoll

Gruppe 13 - SoSe 2025

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1. Aufgabe</b>	<b>3</b>
<b>2. Aufgabe</b>	<b>4</b>
<b>3. Aufgabe</b>	<b>6</b>
<b>4. Aufgabe</b>	<b>8</b>
<b>5. Aufgabe</b>	<b>15</b>
<b>Anhang</b>	<b>21</b>
<b>Feedback</b>	<b>21</b>

# 1. Aufgabe

## LTI Systeme - Zeitinvarianz (6 Punkte)

Bestimmen Sie, ob die folgenden Systeme mit Eingang  $x[n]$  und Ausgang  $y[n]$  zeitinvariant sind. Alle nötigen Zwischenschritte sind dabei anzuführen!

(a)

$$y[n] = f(x[n]) = 10 \sin(0.1\pi n) x[n]$$

(b)

$$y[n] = f(x[n]) = x[n+1] - x[1-n]$$

Die Systeme sind zeitinvariant, wenn die Forderung

$$y[n - n_0] \stackrel{!}{=} f(x[n - n_0])$$

erfüllt ist, also wenn eine Zeitverschiebung am Eingang eine Zeitverschiebung am Ausgang verursacht.

(a)

$$y[n - n_0] = 10 \sin(0.1\pi(n - n_0)) x[n - n_0] \quad (\text{ZVA})$$

$$x[n] \mapsto 10 \sin(0.1\pi n) x[n - n_0] \quad (\text{ZVE})$$

Die beiden Terme sind nicht gleich und das System ist daher **zeitvariant**.

Alternative Begründung: Das System hat die Form  $y[n] = f(n, x[n])$  und ist aufgrund der Abhängigkeit von  $n$  außerhalb des Arguments von  $x[n]$  zeitvariant.

(b)

$$y[n - n_0] = x[(n - n_0) + 1] - x[1 - (n - n_0)] \quad (\text{ZVA})$$

$$= x[n - n_0 + 1] - x[1 - n + n_0]$$

$$x[n] \mapsto x[n + 1 - n_0] - x[1 - n - n_0] \quad (\text{ZVE})$$

Die beiden Ausdrücke sind unterschiedlich, daher ist das System **zeitvariant**. Hier ist folgendes zu beachten:

**ZVE:** Bei der Verschiebung am Eingang wird zum gesamten Argument  $-n_0$  angehängt, unabhängig was im Argument von  $x[n]$  steht.

**ZVA:** Bei der Verschiebung am Ausgang, geht das Symbol  $n$  über auf  $n - n_0$ , es ist also beim einsetzen das Vorzeichen von  $n$  auch für  $n_0$  zu berücksichtigen

## 2. Aufgabe

### Periodizität von zeitdiskreten Signalen (6 Punkte)

Gegeben ist das zeitdiskrete Signal. Welche dieser Signale sind periodisch? Berechnen Sie gegebenenfalls die Grundperiode.

(a)  $\cos\left(\frac{30}{105}\pi n\right)$

(b)  $\cos(0.02\pi n)$

(c)  $\sin(5n)$

(d)  $\cos(5\pi n)$

(e)  $\sin\left(\frac{62}{10}\pi n\right)$

Das zeitdiskrete Signal  $x[n]$  ist periodisch mit der ganzzahligen Periode  $N$ , wenn gilt:

$$x[n] = x[n + N]$$

Das kleinste  $N$ , das die Gleichung erfüllt, ist die gesuchte Grundperiode. Für trigonometrische Funktionen muss ebenfalls die Periodizität gelten.

$$\sin(\varphi(n)) = \sin(\varphi(n) + 2\pi k) \quad \cos(\varphi(n)) = \cos(\varphi(n) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

**(a)**

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{30}{105}\pi(n + N)\right) &\stackrel{!}{=} \cos\left(\frac{30}{105}\pi n + 2\pi k\right) && \left| \arccos \right. \\ \frac{30}{105}\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} \frac{30}{105}\pi\left(n + 2k \cdot \frac{105}{30}\right) && \left| \frac{105}{30\pi} \right| - n \\ N &\stackrel{!}{=} \frac{105}{15}k = 7k \end{aligned}$$

Das kleinste ganzzahlige Ergebnis liefert  $k = 1 \implies N = 7$ . In den folgenden Rechnungen wird die Forderung direkt an das Argument der Winkelfunktion gestellt.

**(b)**

$$\begin{aligned} 0.02\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} 0.02\pi n + 2\pi k \\ \frac{1}{50}\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{50}\pi(n + 100k) \\ N &\stackrel{!}{=} 100k \implies N = 100 \end{aligned}$$

**(c)**

$$\begin{aligned} 5(n + N) &\stackrel{!}{=} 5n + 2\pi k \\ 5n + 5N &\stackrel{!}{=} 5n + 2\pi k \\ 5N &\stackrel{!}{=} 2\pi k \end{aligned}$$

$\pi$  ist irrational, daher ist das Signal nicht periodisch.

(d)

$$\begin{aligned}
 5\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} 5\pi n + 2\pi k \\
 5\pi n + 5\pi N &\stackrel{!}{=} 5\pi n + 2\pi k \\
 5\pi N &\stackrel{!}{=} 2\pi k \\
 N &\stackrel{!}{=} \frac{2}{5}k \implies N = 2
 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
 \frac{62}{10}\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} \frac{62}{10}\pi n + 2\pi k \\
 \frac{62}{10}\pi n + \frac{62}{10}\pi N &\stackrel{!}{=} \frac{62}{10}\pi n + 2\pi k \\
 N &\stackrel{!}{=} \frac{20}{62}k = \frac{10}{31}k \implies N = 10
 \end{aligned}$$

Veranschaulicht durch stem Plots:

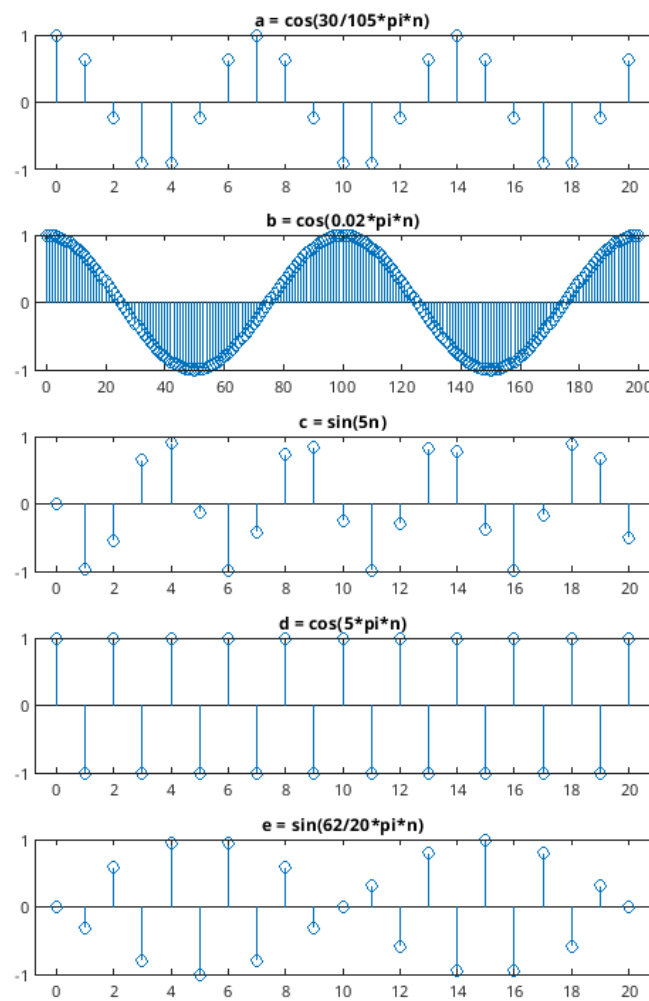
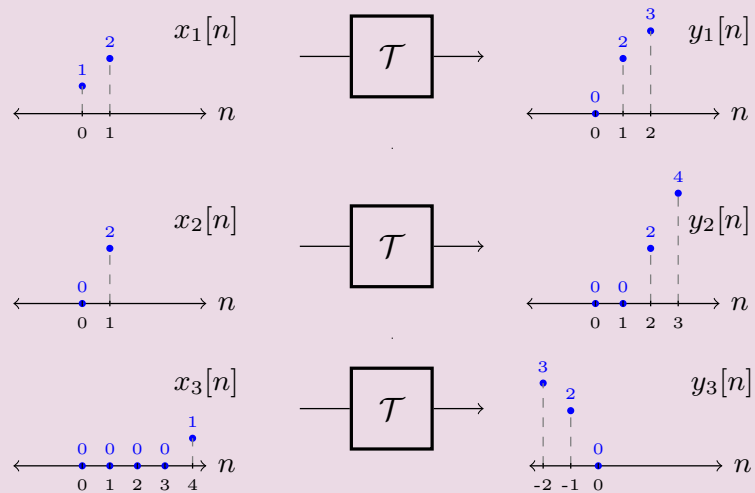


Abbildung 1: Signale

### 3. Aufgabe

#### LTI Systeme (6 Punkte)

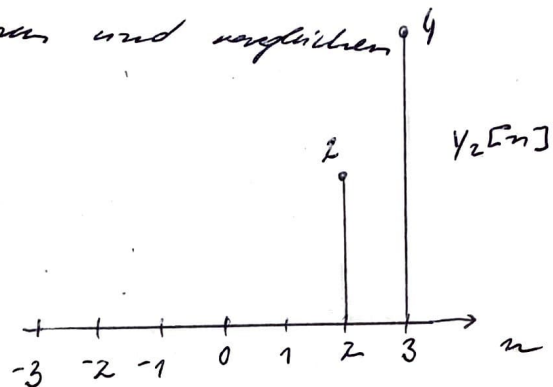
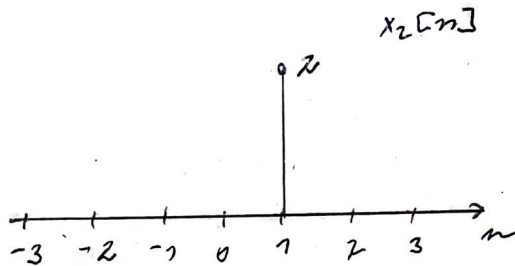
Über das System  $\mathcal{T}$  ist bekannt, dass es zeitinvariant ist. Wenn am Eingang des Systems die Signale:  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  oder  $x_3[n]$  anliegen, so erhält man die Systemantworten:  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$  bzw.  $y_3[n]$ , wie im folgenden Bild:



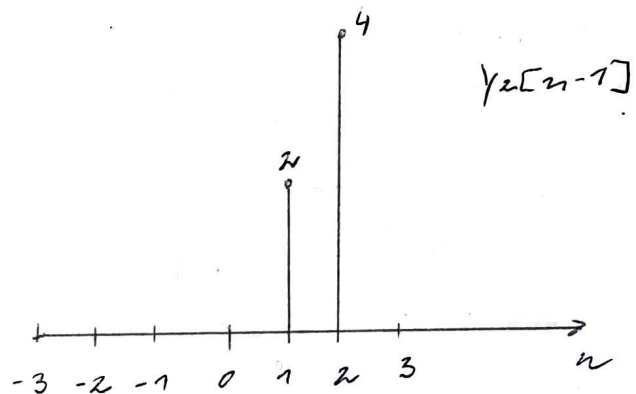
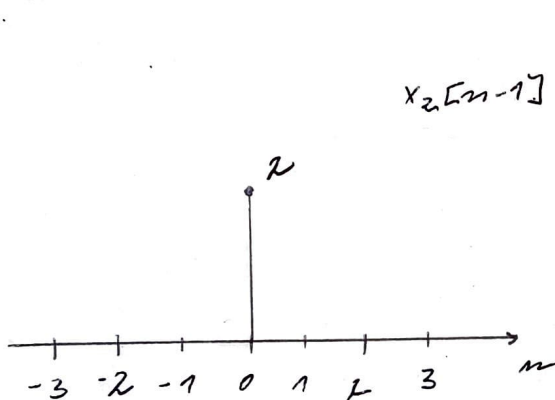
Stellen Sie fest, ob das System  $\mathcal{T}$  linear sein kann.

# Aufgabe 3.

Impulsantwort berechnen und vergleichen



Verschiebung möglich (Zeitinvariant)

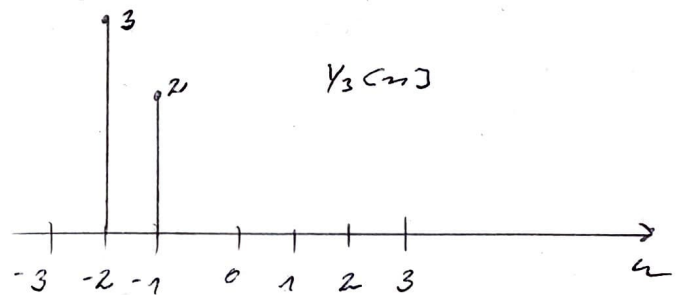
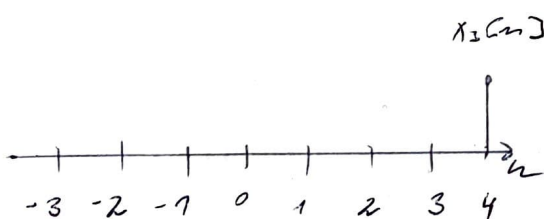
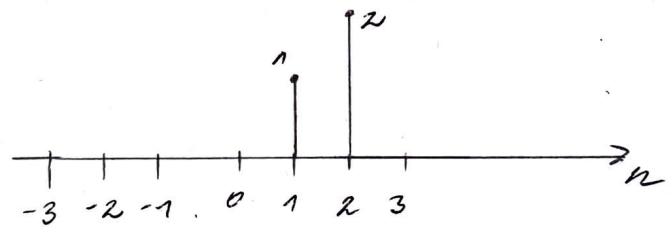
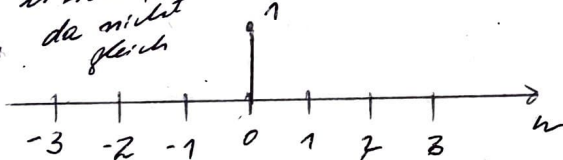


Skalierung (Skalierbarkeit, wenn LTI)

$$\frac{1}{2} \cdot y_2[n-1] = h[n]$$

≠ nicht linear, da nicht gleich

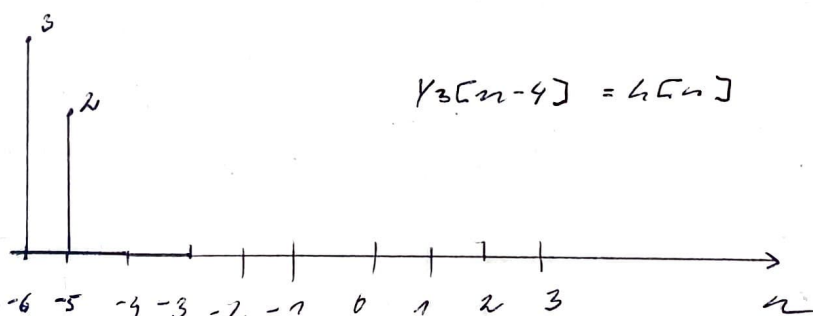
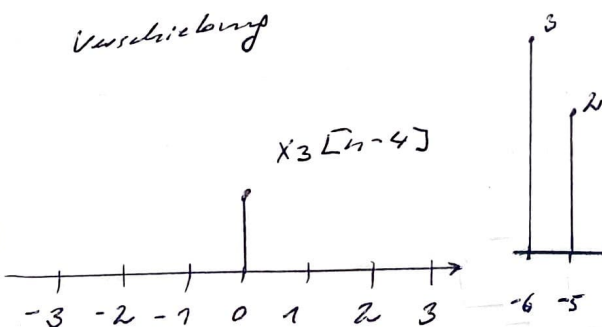
$$\frac{1}{2} \cdot x_2[n-1]$$



Verschiebung

$$x_3[n-4]$$

$$y_3[n-4] = h[n]$$



System kein LTI, nicht linear

## 4. Aufgabe

### Impuls- und Sprungantwort einfacher LTI Systeme (10 Punkte)

In diesem Beispiel betrachten wir 4 einfache diskrete Systeme.

- (a) Zeichnen Sie zunächst die Blockdiagramme der Systeme, welche über die folgenden Differenzgleichungen definiert sind:
- (i) Kammfilter:  $y_K[n] = x[n] - x[n - 4]$
  - (ii) Integrator:  $y_I[n] = x[n] + y_I[n - 1]$
  - (iii) Leaky Integrator:  $y_{LI}[n] = Ax[n] + (1 - A)y_{LI}[n - 1]$ ,  $A \in [0, 1]$
  - (iv) Differenzierer:  $y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n - 2]$
- (b) Skizzieren Sie nun die Impulsantworten  $h[n]$  der 4 (kausalen) Systeme ( $A = 0.5$ )
- (c) Speziell in der Regelungstechnik ist des öfteren auch die Sprungantwort  $g[n]$  von Interesse. Diese kann über 2 äquivalente Definitionen beschrieben werden: Erstens,  $g[n]$  ist die Antwort des Systems auf den Einheitssprung  $u[n]$  (alle Eingangswerte sind 1 für  $n \geq 0$ , sonst 0. Eine zweite Definition lautet, dass  $g[n]$  die kumulative Summe der Impulsantwort  $h[n]$  ist. Mathematisch formuliert bedeutet das:

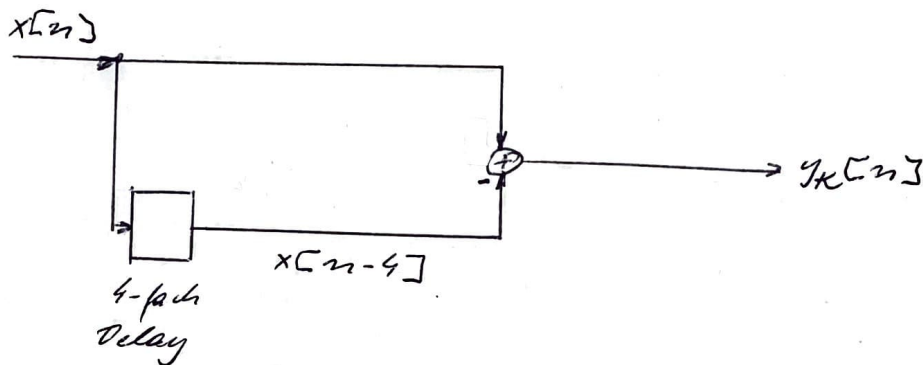
$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

Das bedeutet also, dass  $g[n]$  zum Zeitindex  $n$  gleich der Summe von allen vorigen Impulsantworten ist, bis inklusive der Impulsantwort  $h[n]$ . Skizzieren Sie, basierend auf diesem Wissen, die Sprungantworten der obigen 4 (kausalen) Systeme ( $A = 0.5$ )

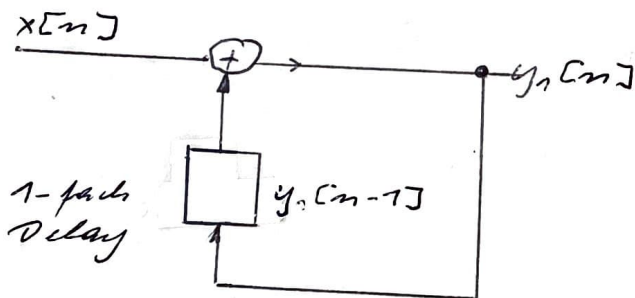


# Aufgabe 4

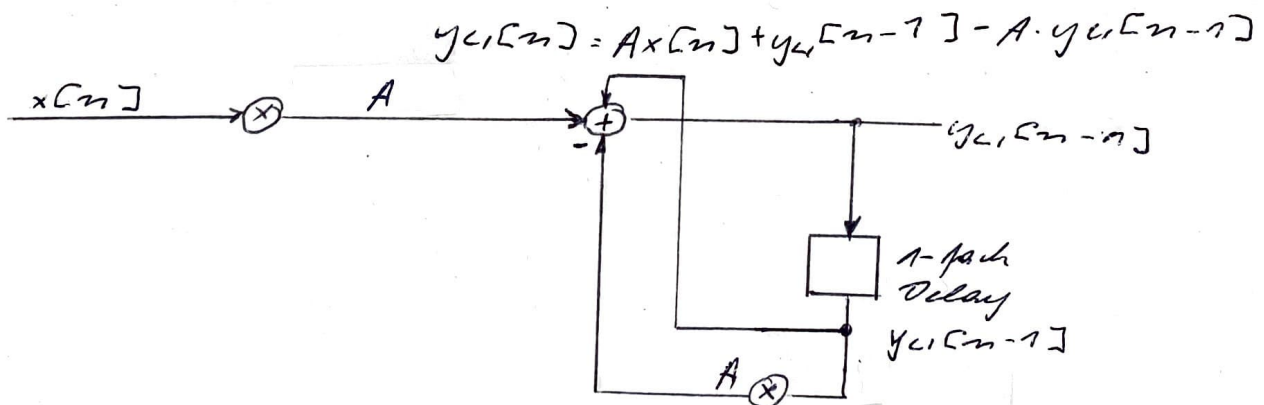
i.) a. Kammfilter:  $y_k[n] = x[n] - x[n-4]$



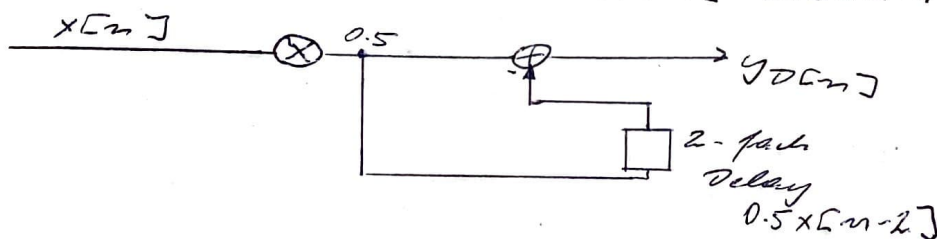
b. Integrator:  $y_i[n] = x[n] + y_i[n-1]$



c. Leaky Integrator:  $y_{li}[n] = Ax[n] + (1-A)y_{li}[n-1]$   
wobei A zw. 0 und 1



d. Differenzierer:  $y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n-2]$

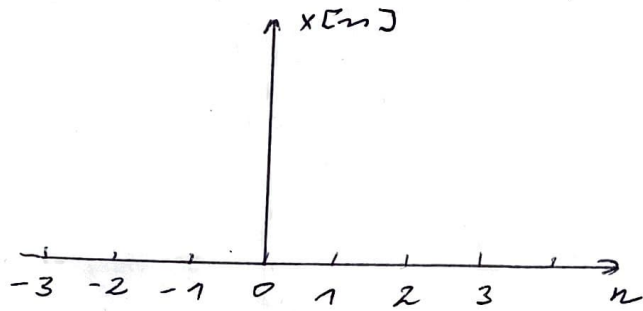


ii)

$h[n]$

5 (kannale System) ( $A=0.5$ )

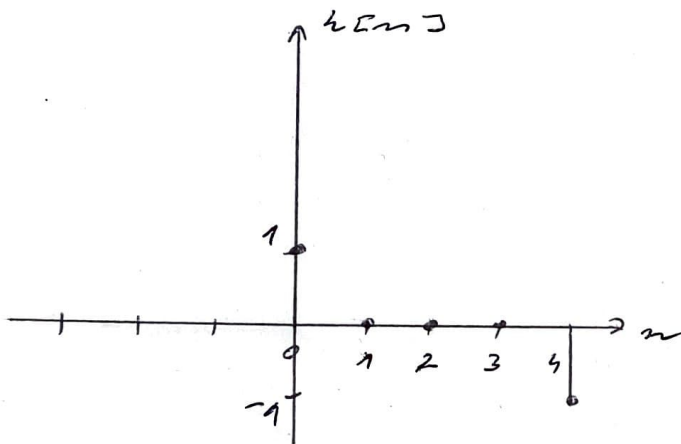
Kannfilter



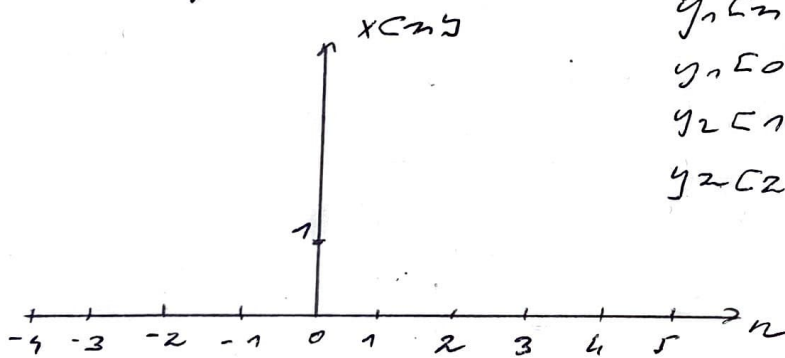
$$y_k[n] = x[n] - x[n-4]$$

$$y_k[0] = x[0] - x[0-4]$$

$$\quad \quad \quad 1 \quad - \quad 0$$



Integrator



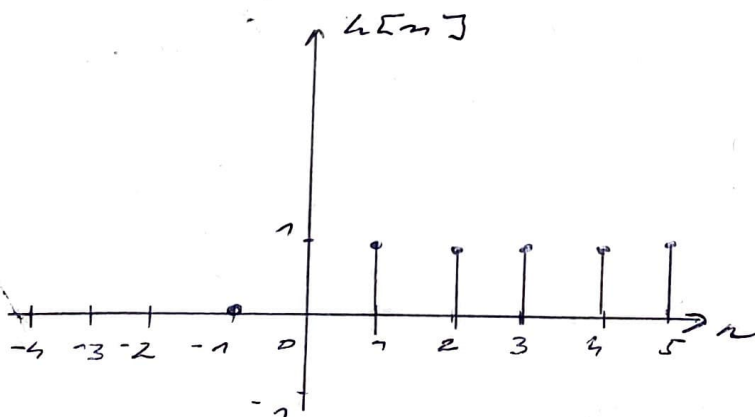
$$y_1[n] = x[n] + y[n-1]$$

$$y_1[0] = x[0] + y[0-1]$$

$$y_2[1] = x[1] + y[1-1]$$

$$y_2[2] = x[2] + y[2-1]$$

⋮



Leaky Integrator

$$A=0.5 \quad y_L[n] = Ax[n] + (1-A)y_L[n-1]$$

$$y_L[0] = 0.5x[0] + 0.5 \cdot y_L[-1]$$

$$0.5 + 0.5 \cdot 0$$

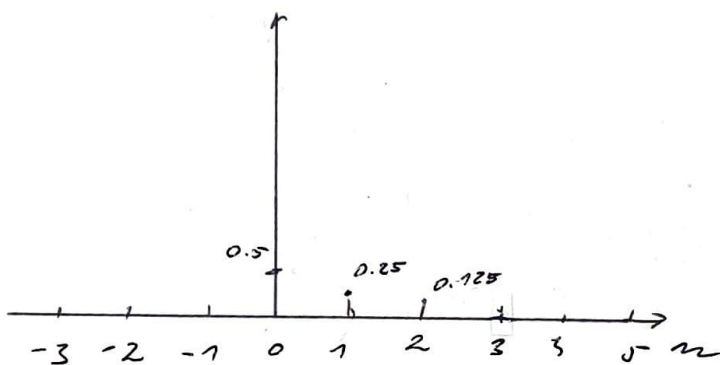
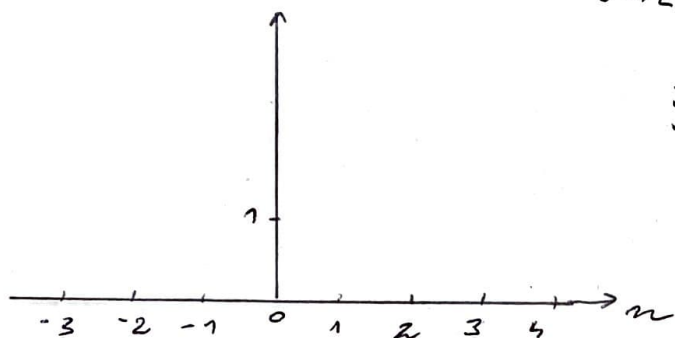
$$y_L[1] = 0.5x[1] + 0.5y_L[0]$$

$$0.5 \cdot 0 + 0.25$$

$$y_L[2] = 0.5x[2] + 0.5y_L[1]$$

$$0 + 0.5 \cdot 0.25$$

⋮



Differenzierer

$$y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n-2]$$

$$y_D[0] = 0.5x[0] - 0.5x[-2]$$

$$0.5 - 0$$

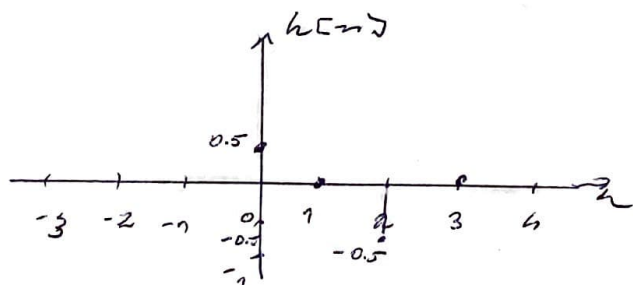
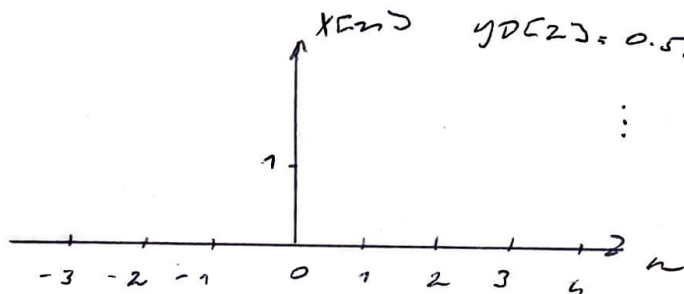
$$y_D[1] = 0.5x[1] - 0.5x[-1]$$

$$0 - 0$$

$$y_D[2] = 0.5x[2] - 0.5x[0]$$

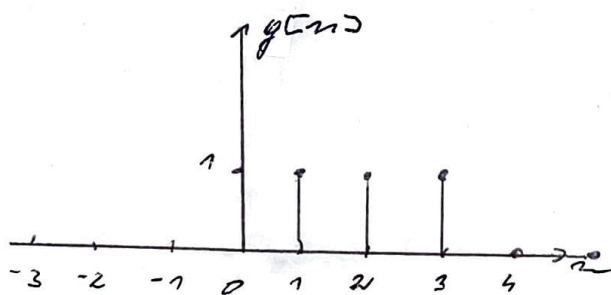
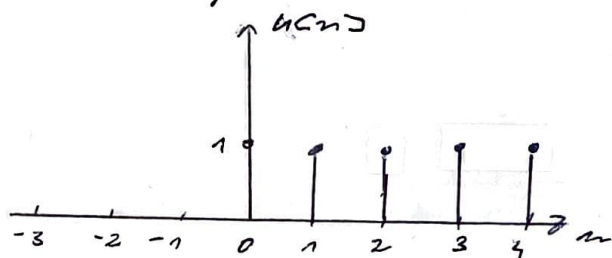
$$0 - 0.5$$

⋮

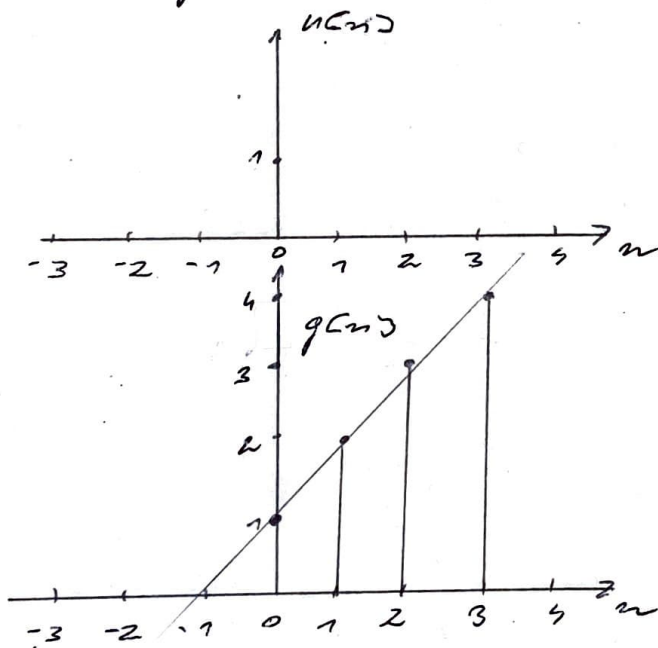


iii.)

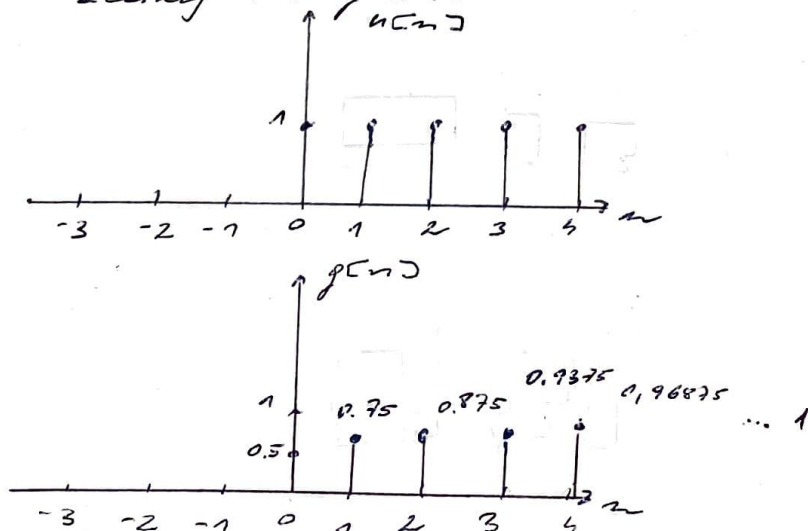
Kammfilter



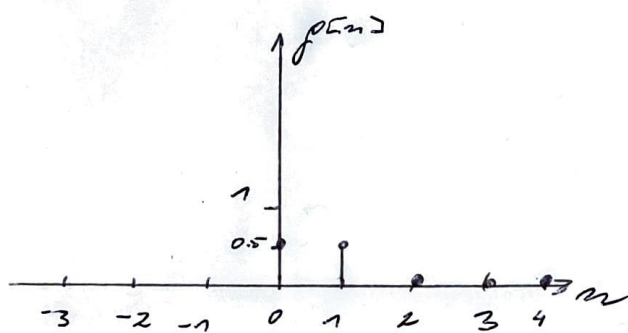
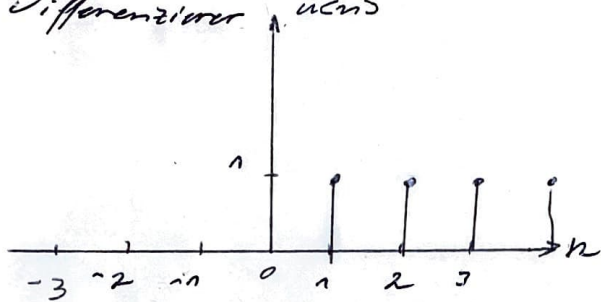
Integrator



Leaky Integrator



Differenzierer  $u[n]$





## 5. Aufgabe

### Faltungsmatrix (12 Punkte)

Die Faltung kann über die Differenzengleichung

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_{N_a-1} x[n-N_a+1] \quad (1)$$

beschrieben werden. Der Eingang  $x[n]$  und die konstante Koeffizienten-Sequenz  $\mathbf{a}[n]$  seien dabei  $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N_x-1]]^T$  und  $\mathbf{a} = [a[0], a[1], \dots, a[N_a-1]]^T$ . Die Ausgangssequenz sei definiert durch

$$\mathbf{y}_a = [y_a[0], y_a[1], \dots, y_a[N_{y_a}-1]]^T$$

wobei  $N_{y_a} = N_x$  gilt, d.h. (1) wird bis zu einem maximalen  $n = N_x$  ausgewertet. Es wird angenommen, dass  $x[n] = 0$  wenn  $n \notin [0, N_x-1]$ , und  $a[n] = 0$  wenn  $n \notin [0, N_a-1]$ .

(a) Gleichung (1) kann auch in Matrix Form

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2)$$

geschrieben werden, wobei  $\mathbf{A}$  die sogenannte Faltungsmatrix ist. Diskutieren Sie die Struktur von  $\mathbf{A}$ . Was sind die resultierenden Dimensionen dieser Matrix? Geben Sie eine detaillierte Beschreibung für diese und die folgenden Fragen in Ihrem Protokoll.

(b) Schreiben Sie eine MATLAB Funktion `[ya,A] = mtxfilter(a,x)` welche Gleichung (1) implementiert und zusätzlich die Matrix  $\mathbf{A}$  zurückgibt. Sie dürfen dabei die built-in Funktionen `convmtx` und `conv` **NICHT** verwenden! Die Funktion muss für Übergabeparameter  $(a,x)$  beliebiger Länge funktionieren.

(c) Testen Sie Ihre Funktion mit dem Zeitsignal

$$x[n] = \sin\left(2\pi \frac{8n}{N_x}\right) + \sin\left(2\pi \frac{16n}{N_x}\right) + \sin\left(2\pi \frac{80n}{N_x}\right), \quad n = 0, \dots, N_x - 1$$

und den Filterkoeffizienten

$$a[n] = \begin{cases} (-1)^n \frac{\sin(0.5\pi(n-D))}{0.5\pi(n-D)} & \text{für } n = 0, 1, \dots, D-1, D+1, \dots, N_a-1 \\ 1 & \text{für } n = D \end{cases}$$

Setzen Sie  $N_x = 256$ ,  $N_a = 33$  und  $D = 16$  und führen Sie die folgenden Experimente aus:

Verwenden Sie Ihre Funktion `mtxfilter` um die Ausgangssequenz  $y_a[n]$  zu berechnen. Visualisieren Sie ihre Resultate in einer Abbildung. Verwenden Sie dabei wiederum die Funktion `subplot`, um die Eingangs-Sequenz, die Impulsantwort und die Ausgangs-Sequenz in der gleichen Abbildung darzustellen. Verwenden

- (d) Betrachten Sie nun eine weitere Filterfunktion gegeben als

$$b[n] = \delta[n - 2]$$

mit  $N_b = 3$ . Wiederholen Sie die Schritte aus der vorigen Aufgabe, indem Sie den Filter  $b[n]$  verwenden und berechnen Sie  $y_b[n]$

- (e) Summieren Sie die Signale  $y_a[n]$  und  $y_b[n]$  um das Ausgangssignal  $y[n]$  zu erhalten. Berechnen Sie also

$$y[n] = y_a[n] + y_b[n]$$

und plotten Sie es in der Zeitdomäne. Wie können Sie die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  (welche von den Funktionen `[ya, A] = mtfilt(a,x)` bzw. `[yb, B] = mtfilt(b,x)` zurückgegeben werden) kombinieren, um eine neue Matrix  $\mathbf{C}$  zu erhalten, sodass  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ ? Berechnen und plotten Sie  $\mathbf{y}' = \mathbf{C}\mathbf{x}$  zum Vergleich.

**(a)**

$N_{ya} = N_x$ : Ein- und Ausgang sind gleichgroß:

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_{ya} \times N_x}$$

Die Matrix ist quadratisch. Einsetzen für  $n$  in (1) liefert:

$$\begin{aligned} y[0] &= a_0 x[0] \\ y[1] &= a_0 x[1] + a_1 x[0] \\ y[2] &= a_0 x[2] + a_1 x[1] + a_2 x[0] \\ &\vdots \\ y[N_{ya} - 1] &= a_0 x[N_{ya} - 1] + a_1 x[N_{ya} - 2] + \cdots + a_{N_{ya}-1} x[0] \end{aligned}$$

Eingesetzt in den Vektor  $\mathbf{y}_a$ :

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N_{ya} - 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 x[0] \\ a_1 x[0] + a_0 x[1] \\ a_2 x[0] + a_1 x[1] + a_0 x[2] \\ \vdots \\ a_{N_{ya}-1} x[0] + \cdots + a_1 x[N_{ya} - 2] + a_0 x[N_{ya} - 1] \end{pmatrix}$$



Durch erkennen der Linearkombination der Vektorelemente aus  $\mathbf{x}$ , lässt sich die Gleichung schreiben wie:

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_y a - 1} & a_{N_y a - 2} & a_{N_y a - 3} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}$$

(b)

Auch als Matlab-Skript im Anhang.

---

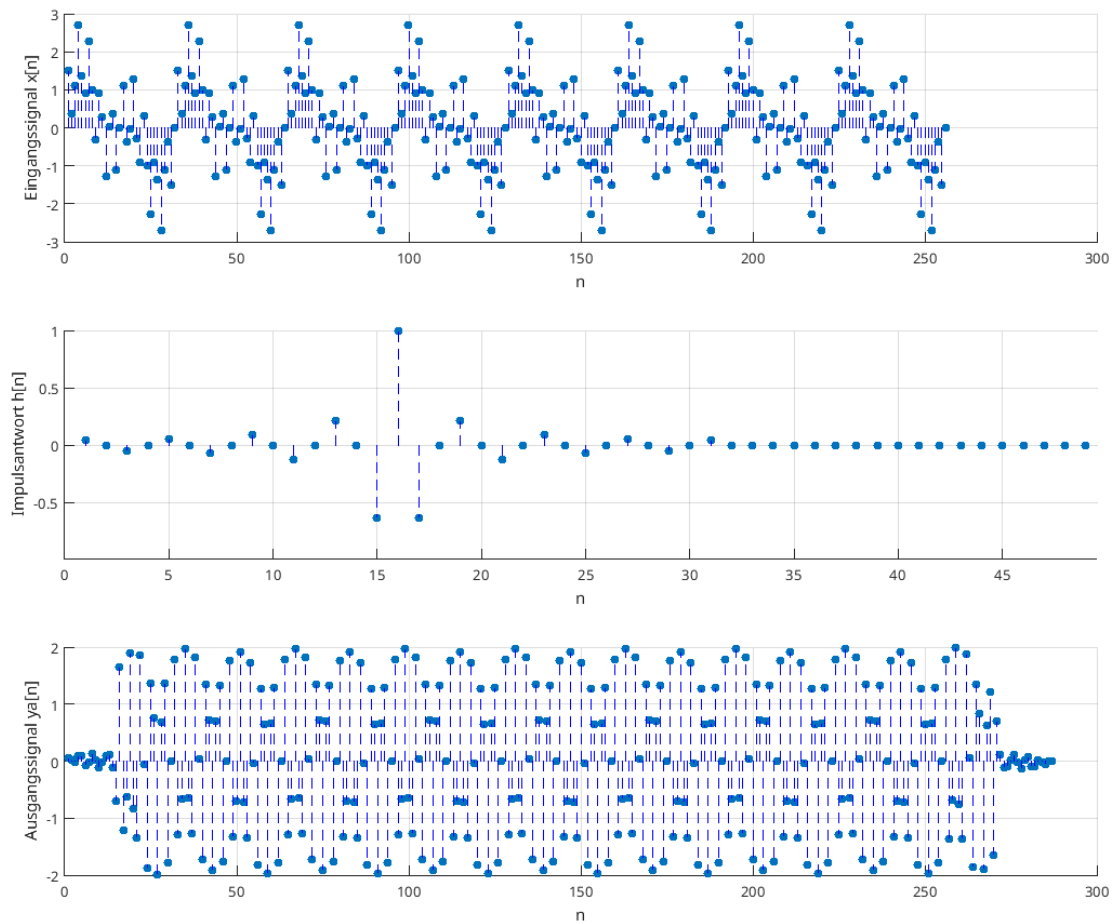
```

1 function [ya,A] = mtxfilter(a,x)
2     %calculate signal length and length of kernel
3     sigLen = length(x);
4     coeffLen = length(a);
5
6     n = sigLen;
7     m = sigLen+coeffLen-1;
8
9     A = zeros(m,n);
10
11     for i = 1:n
12         A(i:i+length(a)-1,i) = a;
13     end
14
15     ya = A*x';
16 end

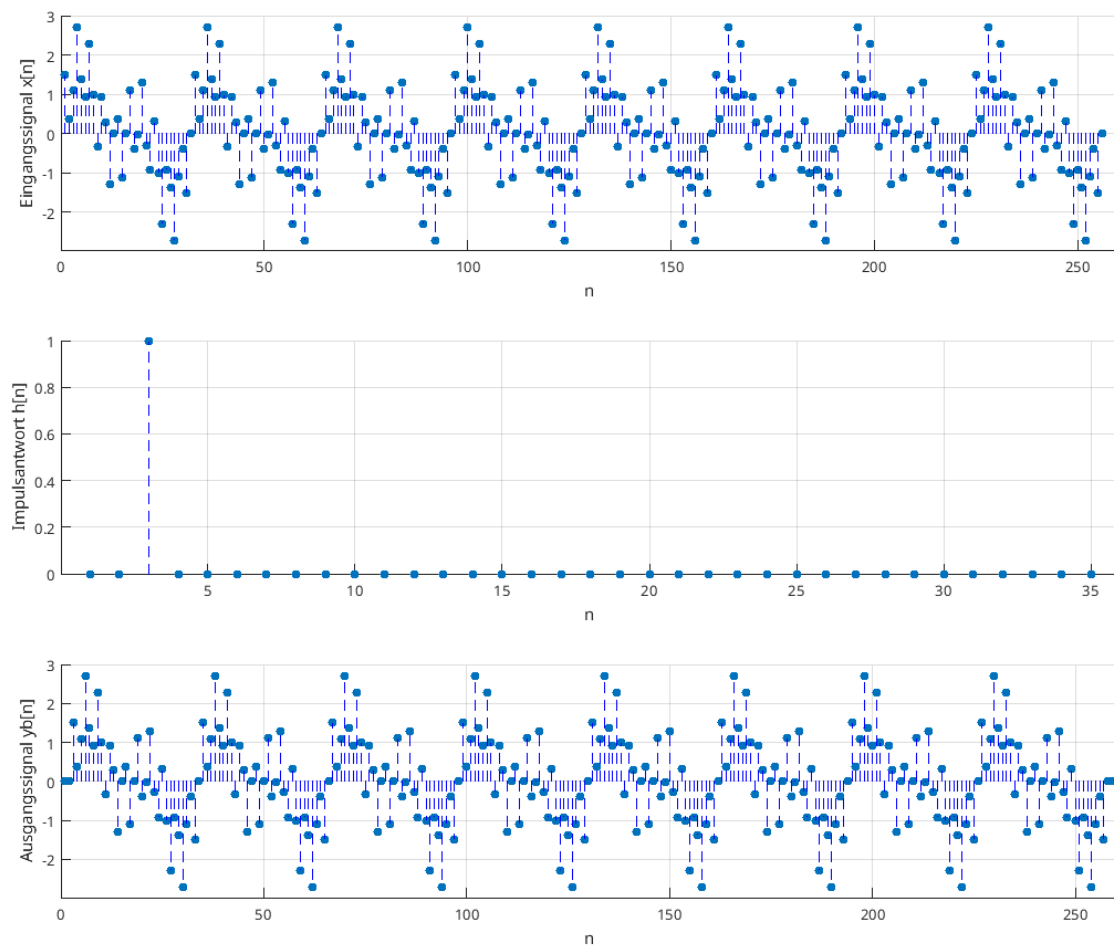
```

---

(c)

Abbildung 2: Eingangssignal  $x$ , Impulsantwort von  $\mathbf{A}$ , Ausgangssignal  $y$  zu  $x$

(d)

Abbildung 3: Antwort auf  $b[n]$

(e)

Da die Eingänge lediglich addiert werden, lässt sich für die Matrix **C** einfach **A** und **B** addieren.

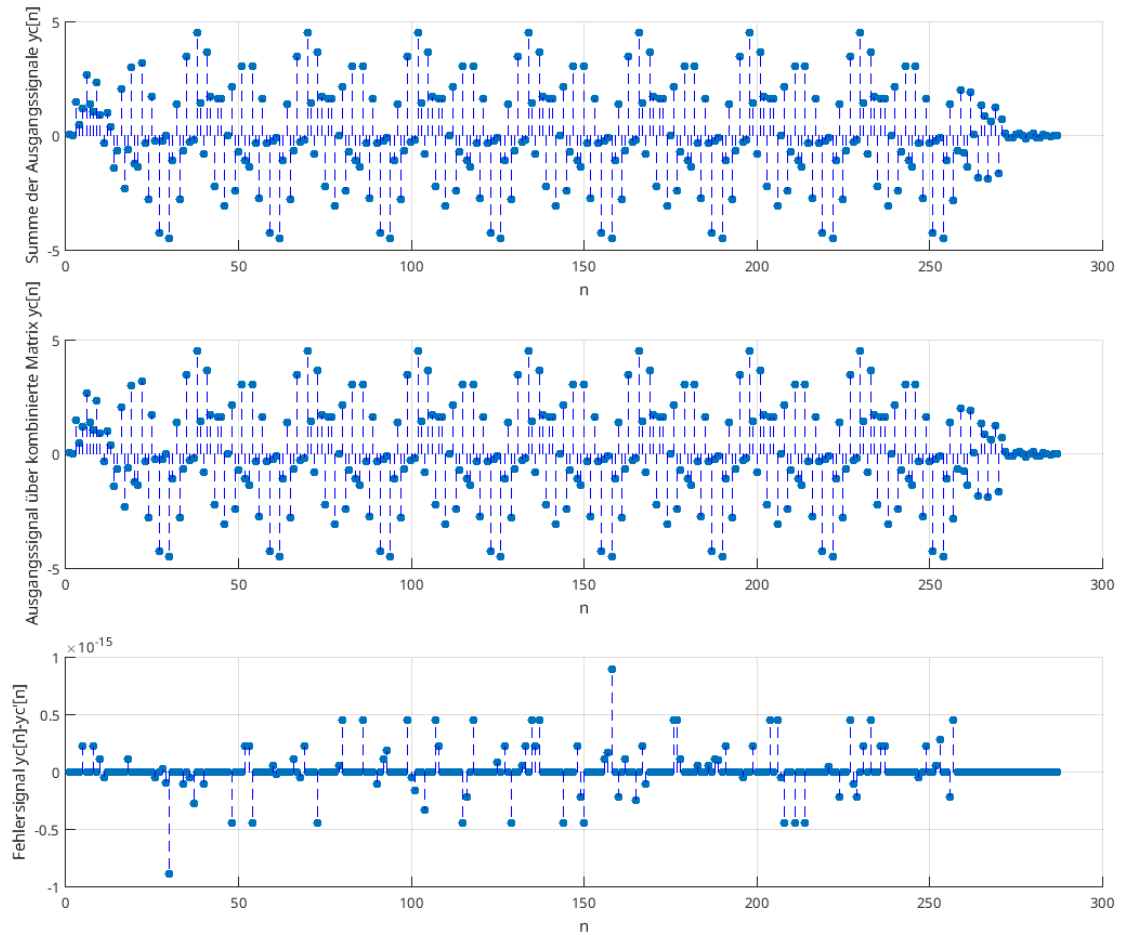


Abbildung 4: Summe der Ausgänge, Filter mit **C**, Absoluter Fehler

## Anhang

### Feedback

Durchgestrichenes Korrigiert

1.b. ~~Zeitvariant~~ ~~2P~~

4.  $z^{-n}$  für Verzögerung um  $n$  Zeitschritte  
*SG: Wortwahl statt  $n$ -Fach Delay*