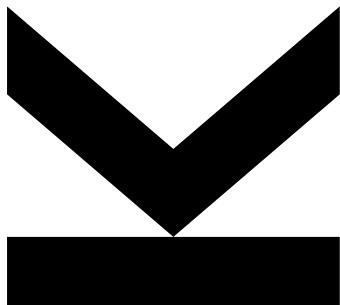


Stephanie Vidovic
k01505694,
Simon Grundner
k12136610
Institute of
Signal Processing

@ k01505694@students.jku.at
@ k12136610@students.jku.at
🌐 <https://jku.at/isp>

2. April 2025

UE01 Signalverarbeitung



Protokoll

Gruppe 13 - SoSe 2025



Schlagwörter Einführung in zeitdiskrete Signale, LTI, Faltung

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ
Altenberger Straße 69
4040 Linz, Austria
jku.at

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabe	3
2. Aufgabe	4
3. Aufgabe	6
4. Aufgabe	8
5. Aufgabe	15
Anhang	21
Feedback	21

1. Aufgabe

LTI Systeme - Zeitinvarianz (6 Punkte)

Bestimmen Sie, ob die folgenden Systeme mit Eingang $x[n]$ und Ausgang $y[n]$ zeitinvariant sind. Alle nötigen Zwischenschritte sind dabei anzuführen!

(a)

$$y[n] = f(x[n]) = 10 \sin(0.1\pi n) x[n]$$

(b)

$$y[n] = f(x[n]) = x[n+1] - x[1-n]$$

Die Systeme sind zeitinvariant, wenn die Forderung

$$y[n - n_0] \stackrel{!}{=} f(x[n - n_0])$$

erfüllt ist, also wenn eine Zeitverschiebung am Eingang eine Zeitverschiebung am Ausgang verursacht.

(a)

$$y[n - n_0] = 10 \sin(0.1\pi(n - n_0)) x[n - n_0] \quad (\text{ZVA})$$

$$x[n] \mapsto 10 \sin(0.1\pi n) x[n - n_0] \quad (\text{ZVE})$$

Die beiden Terme sind nicht gleich und das System ist daher **zeitvariant**.

Alternative Begründung: Das System hat die Form $y[n] = f(n, x[n])$ und ist aufgrund der Abhängigkeit von n außerhalb des Arguments von $x[n]$ zeitvariant.

(b)

$$y[n - n_0] = x[(n - n_0) + 1] - x[1 - (n - n_0)] \quad (\text{ZVA})$$

$$= x[n - n_0 + 1] - x[1 - n + n_0]$$

$$x[n] \mapsto x[n + 1 - n_0] - x[1 - n - n_0] \quad (\text{ZVE})$$

Die beiden Ausdrücke sind unterschiedlich, daher ist das System **zeitvariant**. Hier ist folgendes zu beachten:

ZVE: Bei der Verschiebung am Eingang wird zum gesamten Argument $-n_0$ angehängt, unabhängig was im Argument von $x[n]$ steht.

ZVA: Bei der Verschiebung am Ausgang, geht das Symbol n über auf $n - n_0$, es ist also beim einsetzen das Vorzeichen von n auch für n_0 zu berücksichtigen

2. Aufgabe

Periodizität von zeitdiskreten Signalen (6 Punkte)

Gegeben ist das zeitdiskrete Signal. Welche dieser Signale sind periodisch? Berechnen Sie gegebenenfalls die Grundperiode.

- (a) $\cos\left(\frac{30}{105}\pi n\right)$
- (b) $\cos(0.02\pi n)$
- (c) $\sin(5n)$
- (d) $\cos(5\pi n)$
- (e) $\sin\left(\frac{62}{10}\pi n\right)$

Das zeitdiskrete Signal $x[n]$ ist periodisch mit der ganzzahligen Periode N , wenn gilt:

$$x[n] = x[n + N]$$

Das kleinste N , das die Gleichung erfüllt, ist die gesuchte Grundperiode. Für trigonometrische Funktionen muss ebenfalls die Periodizität gelten.

$$\sin(\varphi(n)) = \sin(\varphi(n) + 2\pi k) \quad \cos(\varphi(n)) = \cos(\varphi(n) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(a)

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{30}{105}\pi(n + N)\right) &\stackrel{!}{=} \cos\left(\frac{30}{105}\pi n + 2\pi k\right) && \text{arccos} \\ \frac{30}{105}\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} \frac{30}{105}\pi\left(n + 2k \cdot \frac{105}{30}\right) && \left|\frac{105}{30\pi}\right| - n \\ N &\stackrel{!}{=} \frac{105}{15}k = 7k \end{aligned}$$

Das kleinste ganzzahlige Ergebnis liefert $k = 1 \implies N = 7$. In den folgenden Rechnungen wird die Forderung direkt an das Argument der Winkelfunktion gestellt.

(b)

$$\begin{aligned} 0.02\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} 0.02\pi n + 2\pi k \\ \frac{1}{50}\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{50}\pi(n + 100k) \\ N &\stackrel{!}{=} 100k \implies N = 100 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 5(n + N) &\stackrel{!}{=} 5n + 2\pi k \\ 5n + 5N &\stackrel{!}{=} 5n + 2\pi k \\ 5N &\stackrel{!}{=} 2\pi k \end{aligned}$$

π ist irrational, daher ist das Signal nicht periodisch.

(d)

$$\begin{aligned}
 5\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} 5\pi n + 2\pi k \\
 5\pi n + 5\pi N &\stackrel{!}{=} 5\pi n + 2\pi k \\
 5\pi N &\stackrel{!}{=} 2\pi k \\
 N &\stackrel{!}{=} \frac{2}{5}k \implies N = 2
 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
 \frac{62}{10}\pi(n + N) &\stackrel{!}{=} \frac{62}{10}\pi n + 2\pi k \\
 \frac{62}{10}\pi n + \frac{62}{10}\pi N &\stackrel{!}{=} \frac{62}{10}\pi n + 2\pi k \\
 N &\stackrel{!}{=} \frac{20}{62}k = \frac{10}{31}k \implies N = 10
 \end{aligned}$$

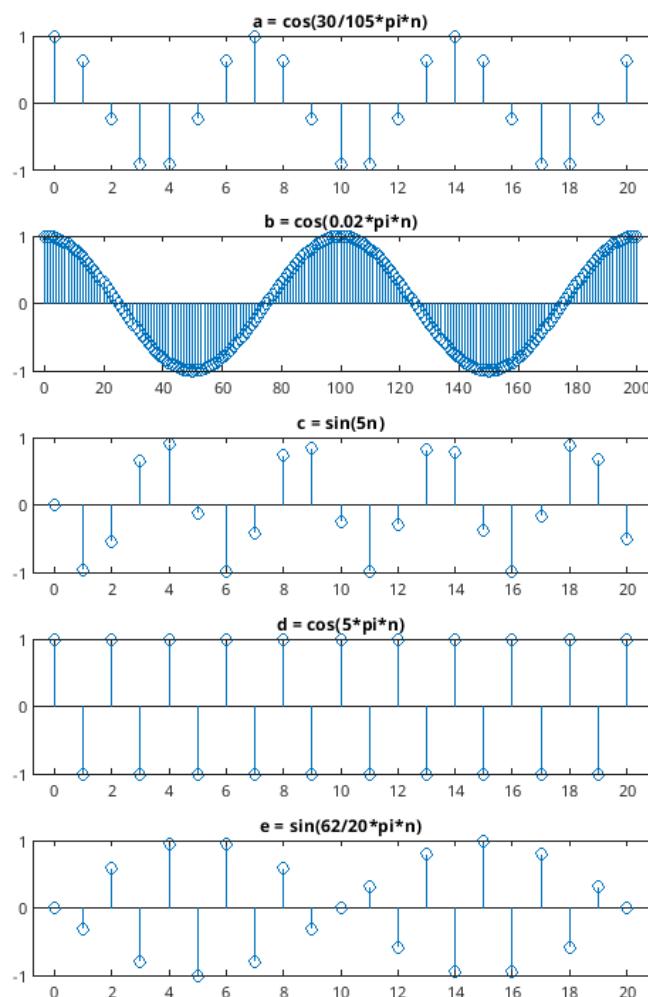
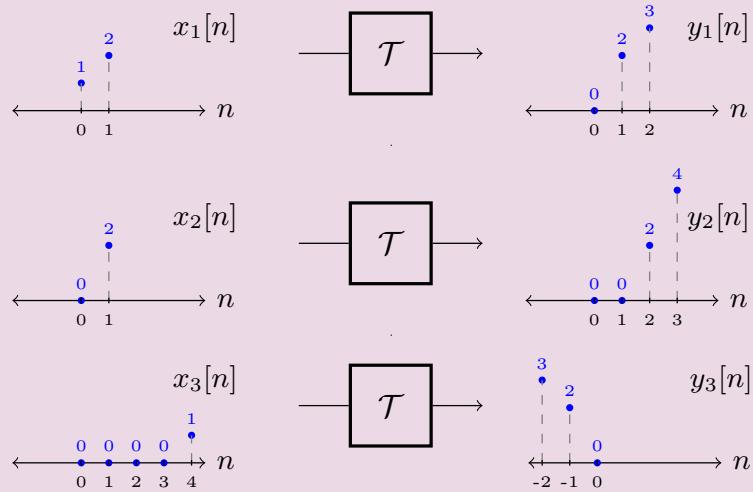
Veranschaulicht durch `stem` Plots:

Abbildung 1: Signale

3. Aufgabe

LTI Systeme (6 Punkte)

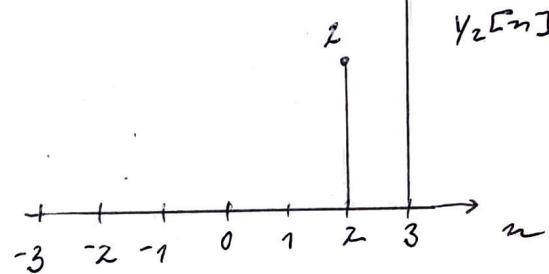
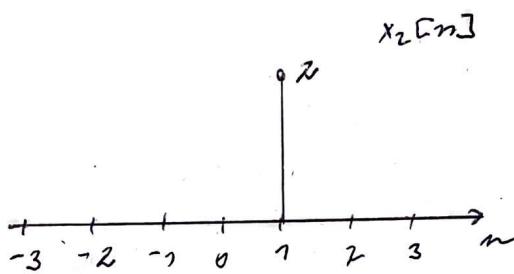
Über das System \mathcal{T} ist bekannt, dass es zeitinvariant ist. Wenn am Eingang des Systems die Signale: $x_1[n]$, $x_2[n]$ oder $x_3[n]$ anliegen, so erhält man die Systemantworten: $y_1[n]$, $y_2[n]$ bzw. $y_3[n]$, wie im folgenden Bild:



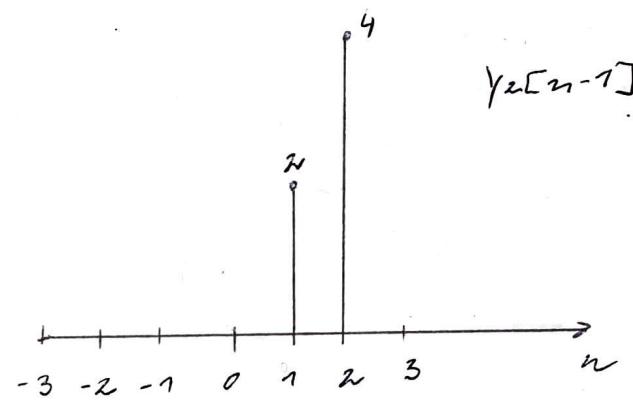
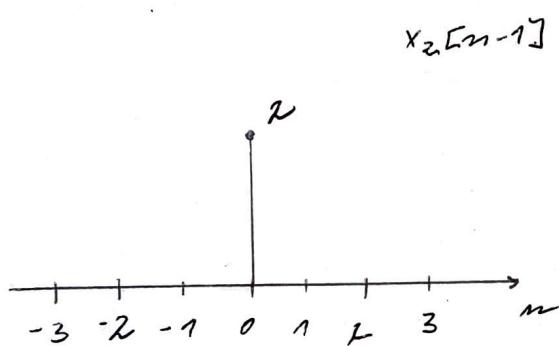
Stellen Sie fest, ob das System \mathcal{T} linear sein kann.

Aufgabe 3.

Impulsantwort berechnen und vergleichen

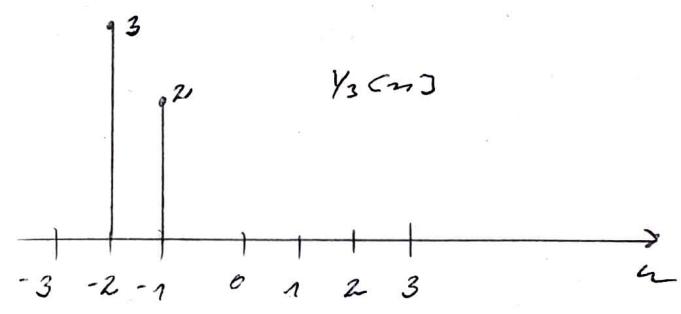
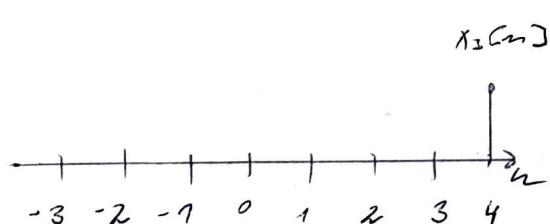
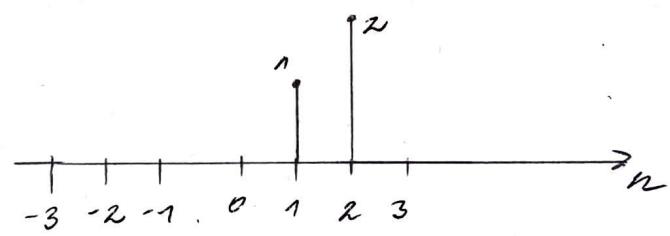
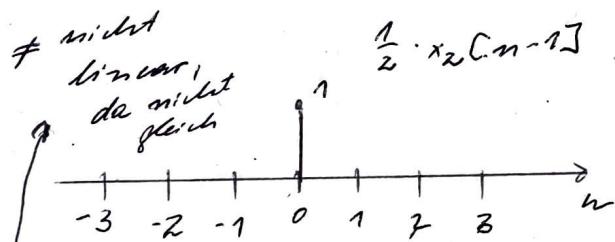


Verschiebung möglich (Zeitzuverarbeitung)

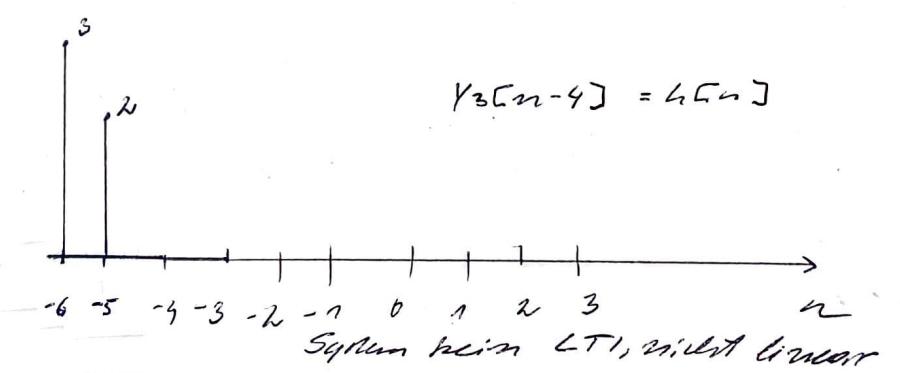
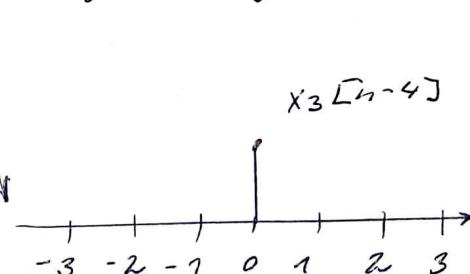


Skalierung (Skalierbarkeit, wenn CTI)

$$\frac{1}{2} \cdot y_2[n-1] = h[n]$$



Verschiebung



4. Aufgabe

Impuls- und Sprungantwort einfacher LTI Systeme (10 Punkte)

In diesem Beispiel betrachten wir 4 einfache diskrete Systeme.

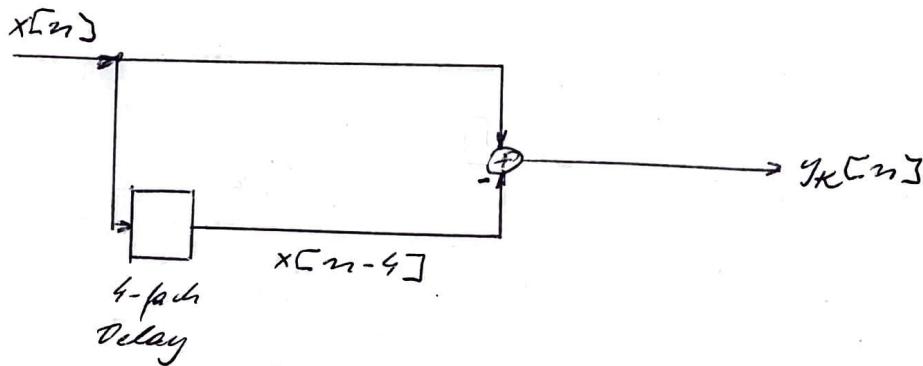
- (a) Zeichnen Sie zunächst die Blockdiagramme der Systeme, welche über die folgenden Differenzengleichungen definiert sind:
 - (i) Kammfilter: $y_K[n] = x[n] - x[n - 4]$
 - (ii) Integrator: $y_I[n] = x[n] + y_I[n - 1]$
 - (iii) Leaky Integrator: $y_{LI}[n] = Ax[n] + (1 - A)y_{LI}[n - 1], \quad A \in [0, 1]$
 - (iv) Differenzierer: $y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n - 2]$
- (b) Skizzieren Sie nun die Impulsantworten $h[n]$ der 4 (kausalen) Systeme ($A = 0.5$)
- (c) Speziell in der Regelungstechnik ist des öfteren auch die Sprungantwort $g[n]$ von Interesse. Diese kann über 2 äquivalente Definitionen beschrieben werden: Erstens, $g[n]$ ist die Antwort des Systems auf den Einheitssprung $u[n]$ (alle Eingangswerte sind 1 für $n \geq 0$, sonst 0). Eine zweite Definition lautet, dass $g[n]$ die kumulative Summe der Impulsantwort $h[n]$ ist. Mathematisch formuliert bedeutet das:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

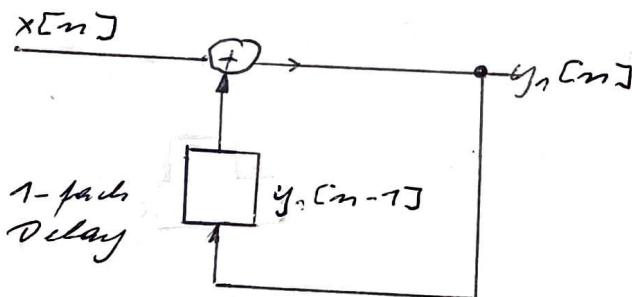
Das bedeutet also, dass $g[n]$ zum Zeitindex n gleich der Summe von allen vorigen Impulsantworten ist, bis inklusive der Impulsantwort $h[n]$. Skizzieren Sie, basierend auf diesem Wissen, die Sprungantworten der obigen 4 (kausalen) Systeme ($A = 0.5$)

Aufgabe 4

1.) a. Hammingfilter: $y_K[n] = x[n] - x[n-4]$

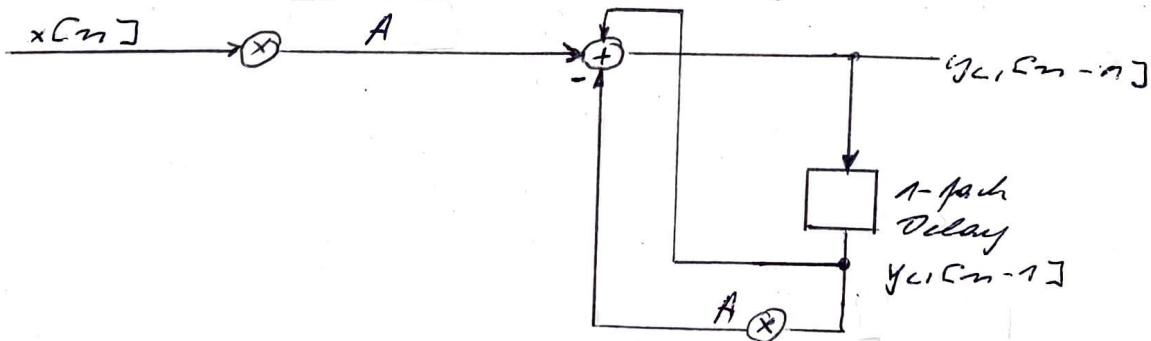


b. Integrator: $y_I[n] = x[n] + y_I[n-1]$

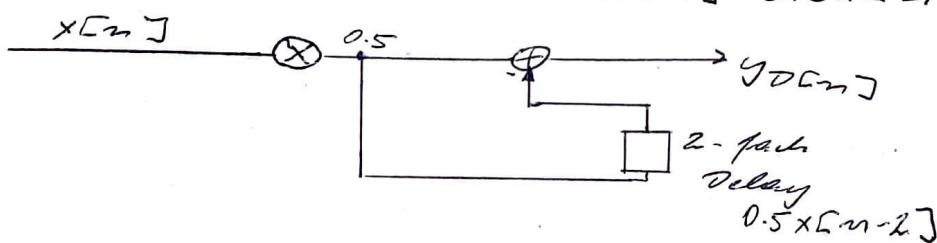


c. Leaky Integrator: $y_{LI}[n] = Ax[n] + (1-A)y_{LI}[n-1]$
wobei A zw. 0 und 1

$$y_{LI}[n] = Ax[n] + y_{LI}[n-1] - A \cdot y_{LI}[n-1]$$



d. Differenzierer: $y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n-2]$

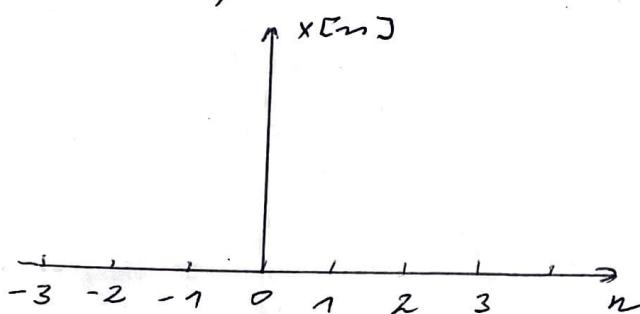


ii)

$$h[n]$$

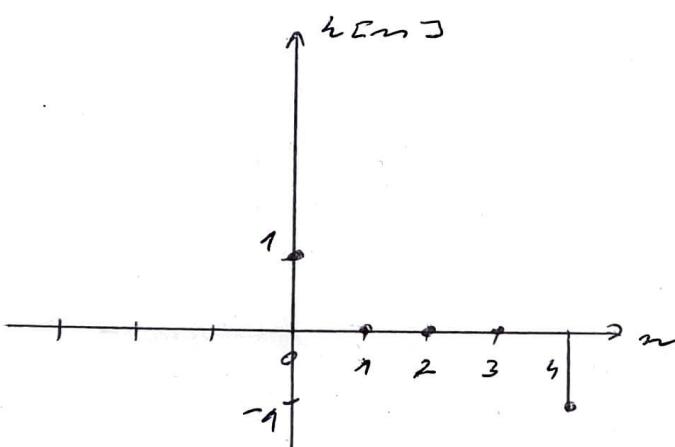
Stkammfilter system ($A=0.5$)

Kraamfilter

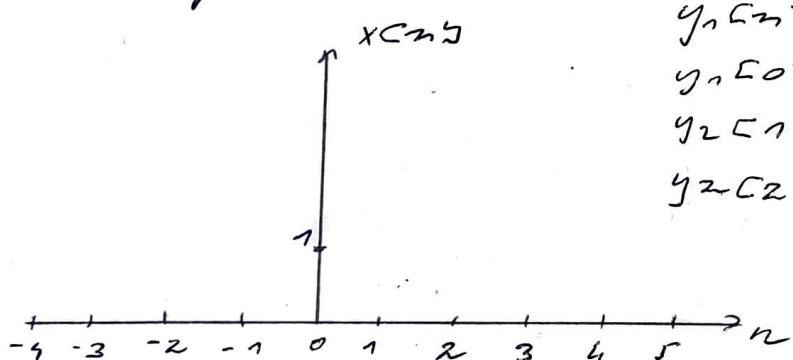


$$y_{k[1]} = x[1] - x[-4]$$

$$\frac{y_{k[0]}}{1} = \frac{x[0] - x[-4]}{1} = 0$$



Integrator



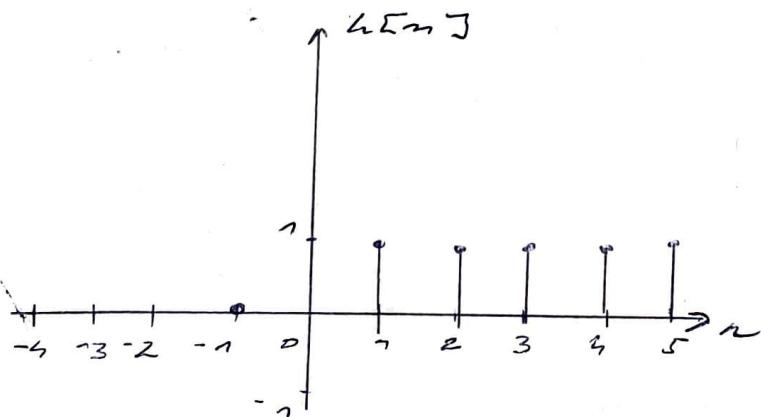
$$y_1[n] = x[n] + y[n-1]$$

$$y_1[0] = x[0] + y[-1]$$

$$y_2[1] = x[1] + y[0-1]$$

$$y_2[2] = x[2] + y[1-1]$$

⋮



leaky Integrator $A=0.5$ $y_{L1}[n] = Ax[n] + (1-A)y_{L1}[n-1]$

$$y_{L1}[0] = 0.5x[0] + 0.5 \cdot y_{L1}[0-1]$$

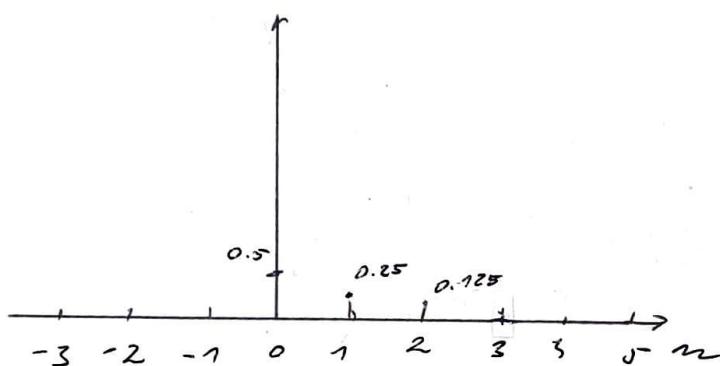
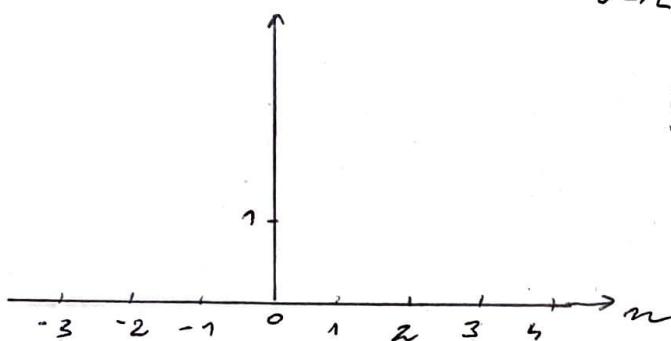
$$0.5 + 0.5 \cdot 0$$

$$y_{L1}[1] = 0.5x[1] + 0.5y_{L1}[0]$$

$$0.5 \cdot 0 + 0.25$$

$$y_{L1}[2] = 0.5x[2] + 0.5y_{L1}[1]$$

$$0 + 0.5 \cdot 0.25$$



Differenzierer

$$y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n-2]$$

$$y_D[0] = 0.5x[0] - 0.5x[-2]$$

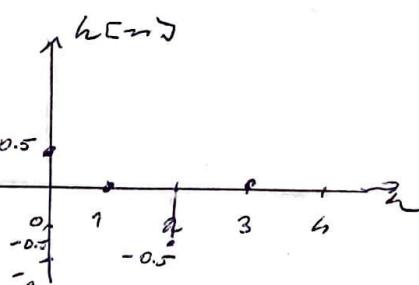
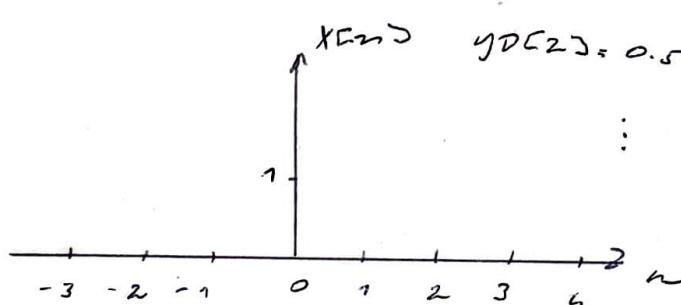
$$0.5 - 0$$

$$y_D[1] = 0.5x[1] - 0.5x[-1]$$

$$0 - 0$$

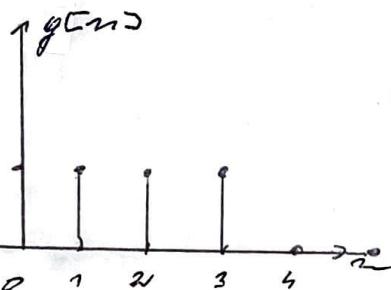
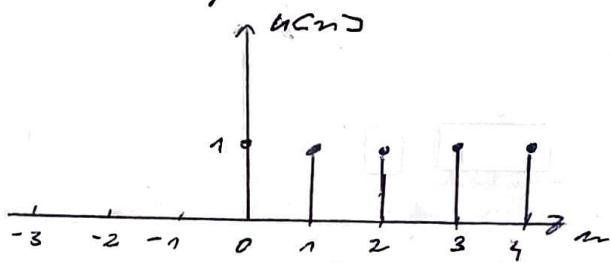
$$y_D[2] = 0.5x[2] - 0.5x[0]$$

$$0 - 0.5$$

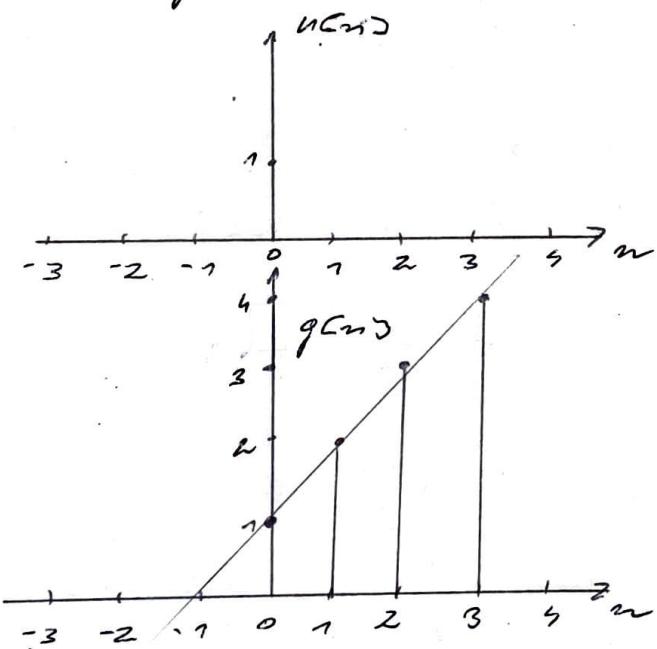


iii.)

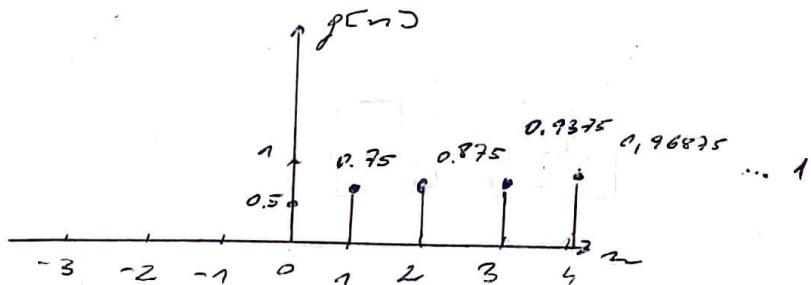
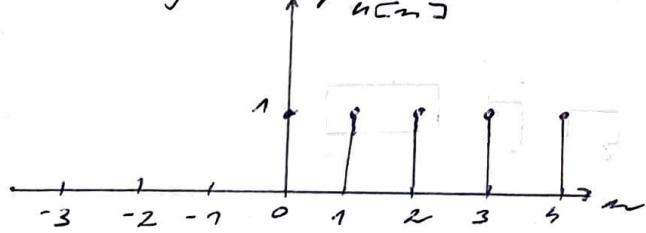
Kammfilter



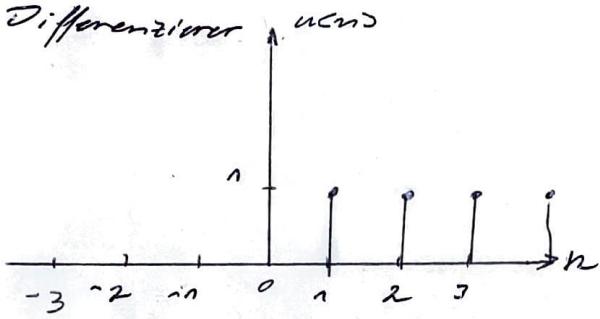
Integrator



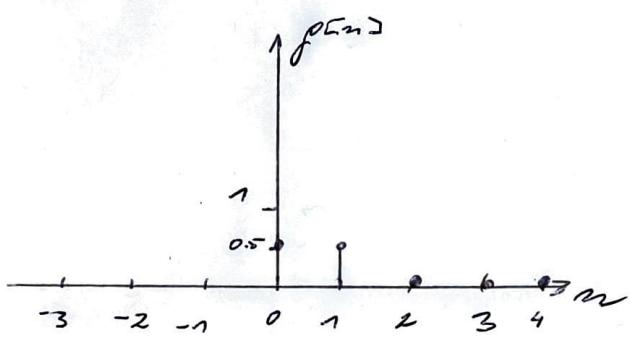
Leaky Integrator



Differenzierbar



$f^{\rho(n)}$



5. Aufgabe

Faltungsmatrix (12 Punkte)

Die Faltung kann über die Differenzengleichung

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + \dots + a_{N_a-1}x[n-N_a+1] \quad (1)$$

beschrieben werden. Der Eingang $x[n]$ und die konstante Koeffizienten-Sequenz $a[n]$ seien dabei $x = [x[0], x[1], \dots, x[N_x - 1]]^T$ und $a = [a[0], a[1], \dots, a[N_a - 1]]^T$. Die Ausgangssequenz sei definiert durch

$$\mathbf{y}_a = [y_a[0], y_a[1], \dots, y_a[N_{ya} - 1]]^T$$

wobei $N_{ya} = N_x$ gilt, d.h. (1) wird bis zu einem maximalen $n = N_x$ ausgewertet. Es wird angenommen, dass $x[n] = 0$ wenn $n \notin [0, N_x - 1]$, und $a[n] = 0$ wenn $n \notin [0, N_a - 1]$.

- (a) Gleichung (1) kann auch in Matrix Form

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{Ax} \quad (2)$$

geschrieben werden, wobei \mathbf{A} die sogenannte Faltungsmatrix ist. Diskutieren Sie die Struktur von \mathbf{A} . Was sind die resultierenden Dimensionen dieser Matrix? Geben Sie eine detaillierte Beschreibung für diese und die folgenden Fragen in Ihrem Protokoll.

- (b) Schreiben Sie eine MATLAB Funktion $[ya, A] = \text{mtfilter}(a, x)$ welche Gleichung (1) implementiert und zusätzlich die Matrix \mathbf{A} zurückgibt. Sie dürfen dabei die built-in Funktionen `convmtx` und `conv` NICHT verwenden! Die Funktion muss für Übergabeparameter (a, x) beliebiger Länge funktionieren.
- (c) Testen Sie Ihre Funktion mit dem Zeitsignal

$$x[n] = \sin\left(2\pi \frac{8n}{N_x}\right) + \sin\left(2\pi \frac{16n}{N_x}\right) + \sin\left(2\pi \frac{80n}{N_x}\right), \quad n = 0, \dots, N_x - 1$$

und den Filterkoeffizienten

$$a[n] = \begin{cases} (-1)^n \frac{\sin(0.5\pi(n-D))}{0.5\pi(n-D)} & \text{für } n = 0, 1, \dots, D-1, D+1, \dots, N_a-1 \\ 1 & \text{für } n = D \end{cases}$$

Setzen Sie $N_x = 256$, $N_a = 33$ und $D = 16$ und führen Sie die folgenden Experimente aus:

Verwenden Sie die Funktion `filter` und die Ausgangssequenz $ya[n]$ zu berechnen. Visualisieren Sie ihre Resultate in einer Abbildung. Verwenden Sie dabei wiederum die Funktion `subplot`, um die Eingangs-Sequenz, die Impulsantwort und die Ausgangs-Sequenz in der gleichen Abbildung darzustellen. Verwenden

Stephanie Vidovic (K01505694), Simon Gründner (K12136610)

(d) Betrachten Sie nun eine weiter Filterfunktion gegeben als

$$b[n] = \delta[n - 2]$$

mit $N_b = 3$. Wiederholen Sie die Schritte aus der vorigen Aufgabe, indem Sie den Filter $b[n]$ verwenden und berechnen Sie $y_b[n]$

(e) Summieren Sie die Signale $y_a[n]$ und $y_b[n]$ um das Ausgangssignal $y[n]$ zu erhalten. Berechnen Sie also

$$y[n] = y_a[n] + y_b[n]$$

und plotten Sie es in der Zeitdomäne. Wie können Sie die Matrizen **A** und **B** (welche von den Funktionen $[y_a, A] = \text{mtxfilter}(a, x)$ bzw. $[y_b, B] = \text{mtxfilter}(b, x)$ zurückgegeben werden) kombinieren, um eine neue Matrix **C** zu erhalten, sodass $y = Cx$? Berechnen und plotten Sie $y' = Cx$ zum Vergleich.

(a)

$N_{ya} = N_x$: Ein- und Ausgang sind gleichgroß:

$$y_a = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{N_{ya} \times N_x}$$

Die Matrix ist quadratisch. Einsetzen für n in (1) liefert:

$$\begin{aligned} y[0] &= a_0 x[0] \\ y[1] &= a_0 x[1] + a_1 x[0] \\ y[2] &= a_0 x[2] + a_1 x[1] + a_2 x[0] \\ &\vdots \\ y[N_{ya} - 1] &= a_0 x[N_{ya} - 1] + a_1 x[N_{ya} - 2] + \cdots + a_{N_{ya}-1} x[0] \end{aligned}$$

Eingesetzt in den Vektor y_a :

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N_{ya} - 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 x[0] \\ a_1 x[0] + a_0 x[1] \\ a_2 x[0] + a_1 x[1] + a_0 x[2] \\ \vdots \\ a_{N_{ya}-1} x[0] + \cdots + a_1 x[N_{ya} - 2] + a_0 x[N_{ya} - 1] \end{pmatrix}$$

Durch erkennen der Linearkombination der Vektorelemente aus \mathbf{x} , lässt sich die Gleichung schreiben wie:

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_y a - 1} & a_{N_y a - 2} & a_{N_y a - 3} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}}_A \mathbf{x}$$

(b)

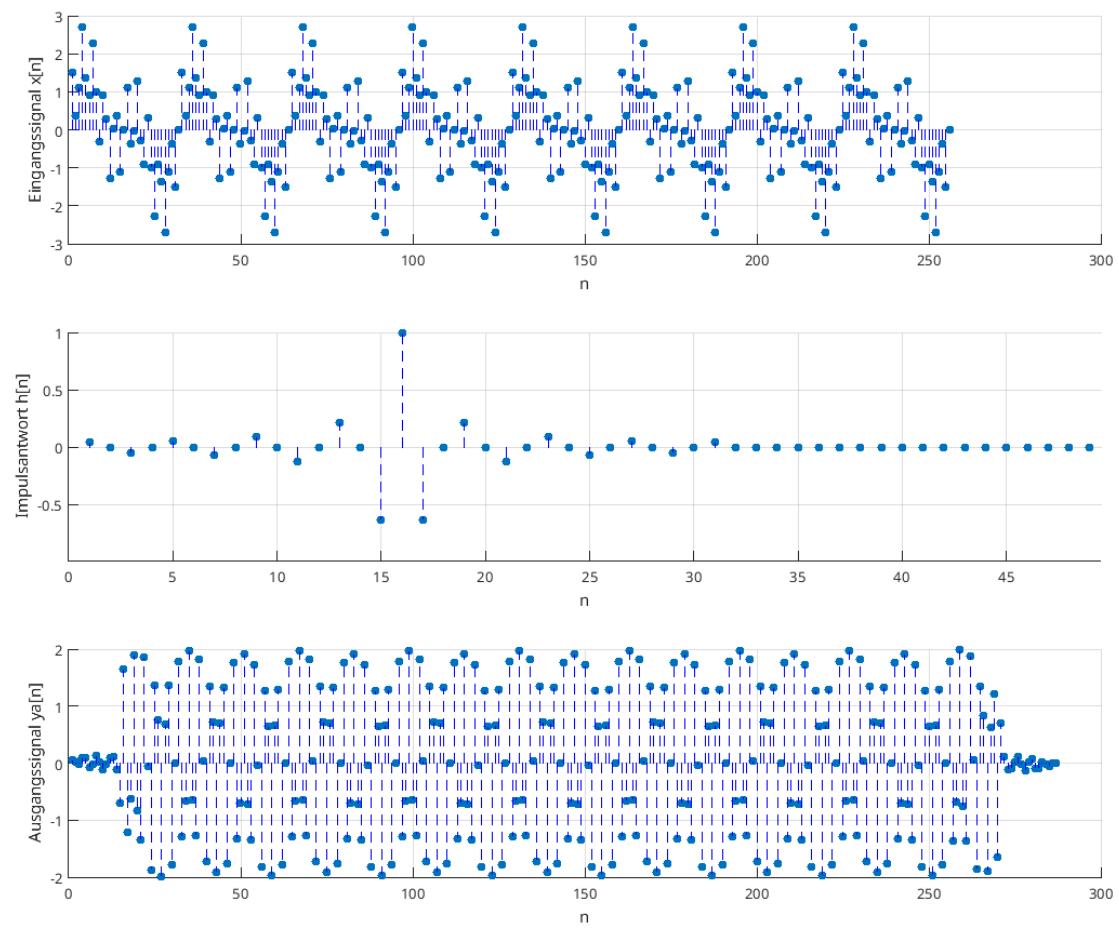
Auch als Matlab-Skript im Anhang.

```

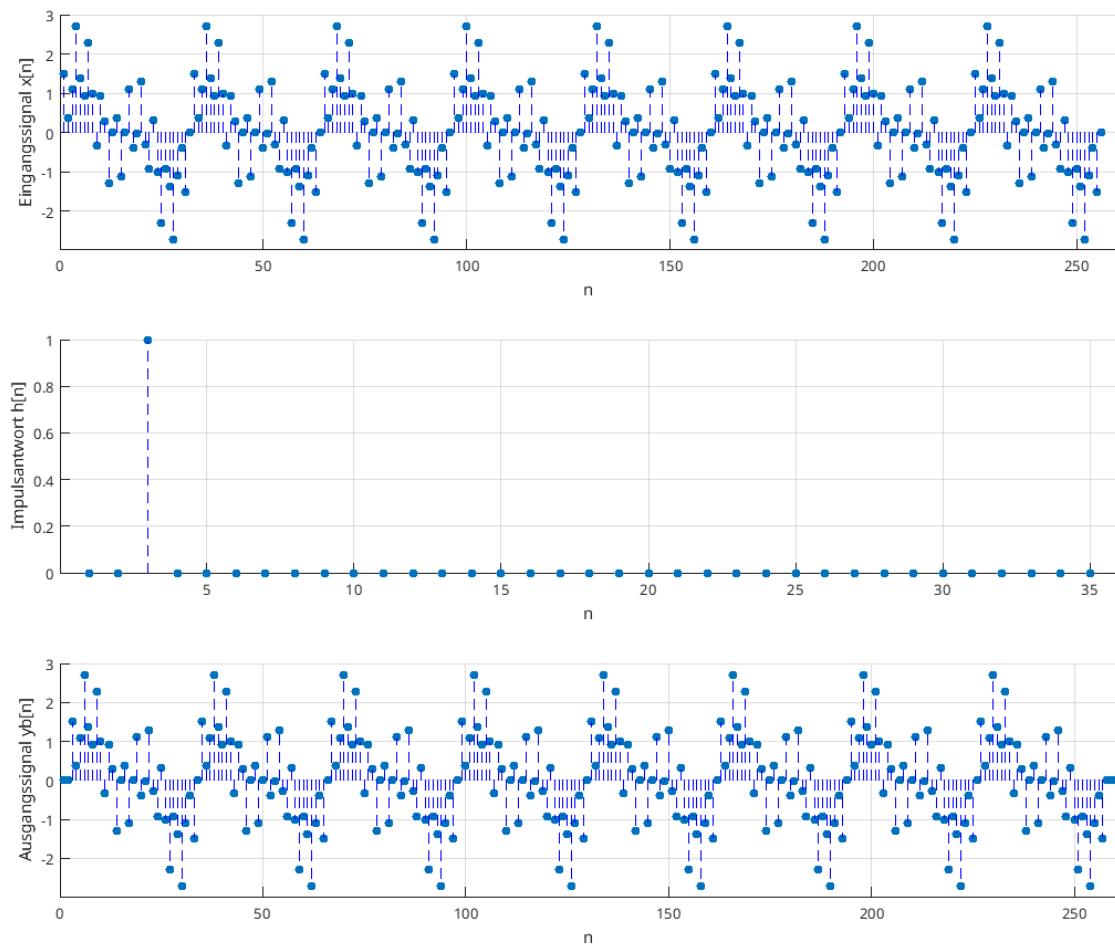
1 function [ya,A] = mtxfilter(a,x)
2 %calculate signal length and length of kernel
3 sigLen = length(x);
4 coeffLen = length(a);
5
6 n = sigLen;
7 m = sigLen+coeffLen-1;
8
9 A = zeros(m,n);
10
11 for i = 1:n
12     A(i:i+length(a)-1,i) = a;
13 end
14
15 ya = A*x';
16 end

```

(c)

Abbildung 2: Eingangssignal x , Impulsantwort von A , Ausgangssignal y zu x

(d)

Abbildung 3: Antwort auf $b[n]$

(e)

Da die Eingänge lediglich addiert werden, lässt sich für die Matrix **C** einfach **A** und **B** addieren.

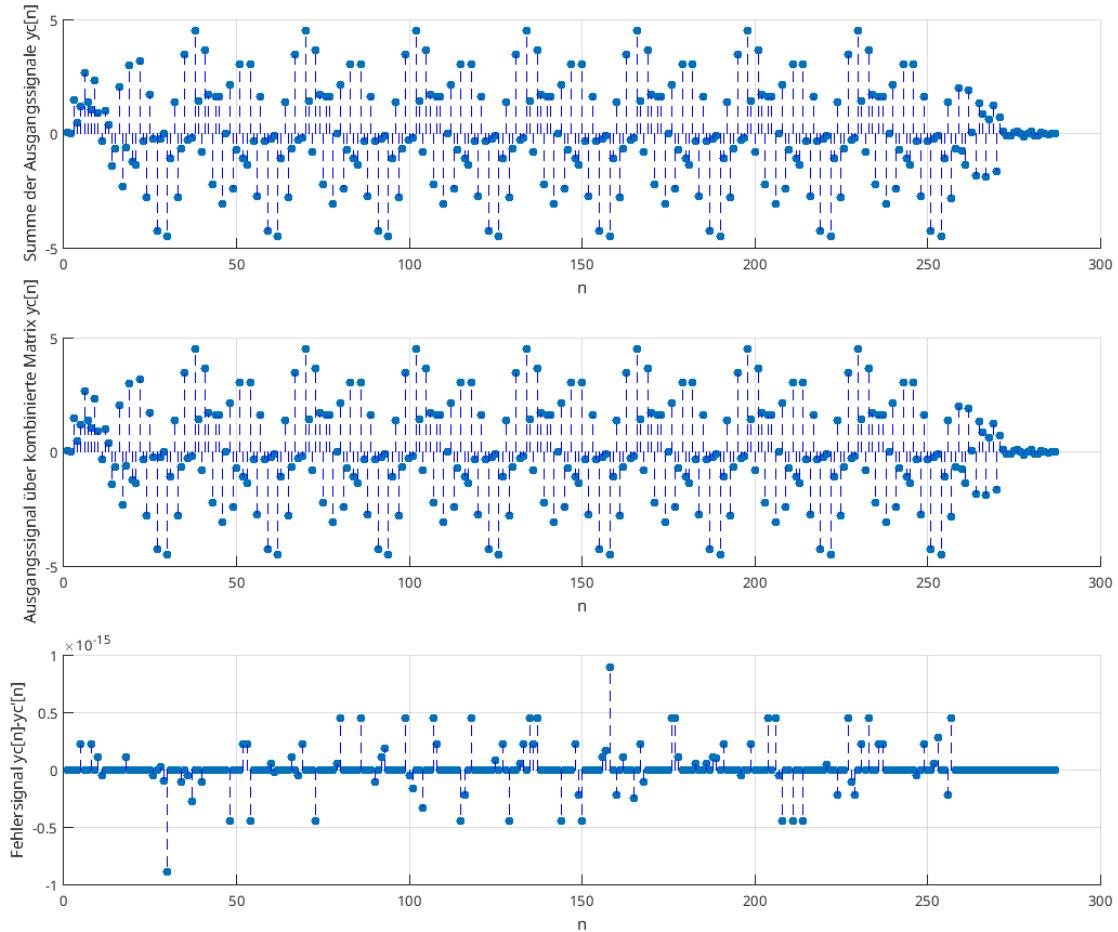


Abbildung 4: Summe der Ausgänge, Filter mit **C**, Absoluter Fehler

Anhang

Feedback

Durchgestrichenes Korrigiert

1.b. Zeitvariant -2P

4. z^{-n} für Verzögerung um n Zeitschritte

SG: Wortwahl statt n-Fach Delay