JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

Stephanie Vidovic
k01505694,
Simon Grundner
k12136610
Institute of
Signal Processing

@ k01505694@students.jku.at
@ k12136610@students.jku.at
https://jku.at/isp

2. April 2025

UE01 Signalverarbeitung

Protokoll

Gruppe 13 - SoSe 2025

Schlagwörter Einführung in zeitdiskrete Signale, LTI, Faltung

INSTITUTE OF SIGNAL PROCESSING

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ
Altenberger Straße 69
4040 Linz, Austria
jku.at

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabe

LTI Systeme - Zeitinvarianz (6 Punkte)

Bestimmen Sie, ob die folgenden Systeme mit Eingang $x[n]$ und Ausgang $y[n]$ zeitinvariant sind. Alle nötigen Zwischenschritte sind dabei anzuführen!

(a)

$$y[n] = f(x[n]) = 10 \sin(0.1\pi n)\ x[n]$$

(b)

$$y[n] = f(x[n]) = x[n+1] - x[1-n]$$

Die Systeme sind zeitinvariant, wenn die Forderung

$$y[n-n_0] \stackrel{!}{=} f(x[n-n_0])$$

erfüllt ist, also wenn eine Zeitverschiebung am Eingang eine Zeitverschiebung am Ausgang verursacht.

(a)

$$y[n-n_0] = 10 \sin(0.1\pi(n-n_0))\ x[n-n_0] \qquad \text{(ZVA)}$$
$$x[n] \mapsto 10 \sin(0.1\pi n)\ x[n-n_0] \qquad \text{(ZVE)}$$

Die beiden Terme sind nicht gleich und das System ist daher **zeitvariant**.

Alternative Begründung: Das System hat die Form $y[n] = f(n, x[n])$ und ist aufgrund der Abhängigkeit von n außerhalb des Arguments von $x[n]$ zeitvariant.

(b)

$$\begin{aligned} y[n-n_0] &= x[(n-n_0)+1] - x[1-(n-n_0)] && \text{(ZVA)} \\ &= x[n-n_0+1] - x[1-n+n_0] \\ x[n] &\mapsto x[n+1-n_0] - x[1-n-n_0] && \text{(ZVE)} \end{aligned}$$

Die beiden Ausdrücke sind unterschiedlich, daher ist das System **zeitvariant**. Hier ist folgendes zu beachten:

ZVE: Bei der Verschiebung am Eingang wird zum gesamten Argument $-n_0$ angehängt, unabhängig was im Argument von $x[n]$ steht.

ZVA: Bei der Verschiebung am Ausgang, geht das Symbol n über auf $n-n_0$, es ist also beim einsetzen das Vorzeichen von n auch für n_0 zu berücksichtigen

2. Aufgabe

LTI Systeme - Zeitinvarianz (6 Punkte)

Bestimmen Sie, ob die folgenden Systeme mit Eingang $x[n]$ und Ausgang $y[n]$ zeitinvariant sind. Alle nötigen Zwischenschritte sind dabei anzuführen!

(a)

$$y[n] = f(x[n]) = 10 \sin(0.1\pi n)\, x[n]$$

(b)

$$y[n] = f(x[n]) = x[n+1] - x[1-n]$$

Das zeitdiskrete Signal $x[n]$ ist periodisch mit der ganzzahligen Periode N, wenn gilt:

$$x[n] = x[n+N]$$

Das kleinste N, das die Gleichung erfüllt, ist die gesuchte Grundperiode. Für trigonometrische Funktionen muss ebenfalls die Periodizität gelten.

$$\sin(\varphi(n)) = \sin(\varphi(n) + 2\pi k) \quad \cos(\varphi(n)) = \cos(\varphi(n) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{30}{105}\pi(n+N)\right) &\stackrel{!}{=} \cos\left(\frac{30}{105}\pi n + 2\pi k\right) && \Big|\ \arccos \\
\frac{30}{105}\pi(n+N) &\stackrel{!}{=} \frac{30}{105}\pi\left(n + 2k\cdot\frac{105}{30}\right) && \Big|\ \frac{105}{30\pi}\ \Big|\ -n \\
N &\stackrel{!}{=} \frac{105}{15}k = 7k
\end{aligned}$$

Das kleinste ganzzahlige Ergebnis liefert $k = 1 \implies N = 7$. In den folgenden Rechnungen wird die Forderung direkt an das Argument der Winkelfunktion gestellt.

(b)

$$\begin{aligned}
0.02\pi(n+N) &\stackrel{!}{=} 0.02\pi n + 2\pi k \\
\frac{1}{50}\pi(n+N) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{50}\pi(n + 100k) \\
N &\stackrel{!}{=} 100k \implies N = 100
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
5(n+N) &\stackrel{!}{=} 5n + 2\pi k \\
5n + 5N &\stackrel{!}{=} 5n + 2\pi k \\
5N &\stackrel{!}{=} 2\pi k
\end{aligned}$$

π ist irrational, daher ist das Signal nicht periodisch.

(d)

$$
\begin{aligned}
5\pi(n+N) &\overset{!}{=} 5\pi n + 2\pi k \\
5\pi n + 5\pi N &\overset{!}{=} 5\pi n + 2\pi k \\
5\pi N &\overset{!}{=} 2k\pi \\
N &\overset{!}{=} \frac{2}{5}k \implies N = 2
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\frac{62}{10}\pi(n+N) &\overset{!}{=} \frac{62}{10}\pi n + 2\pi k \\
\frac{62}{10}\pi n + \frac{62}{10}\pi N &\overset{!}{=} \frac{62}{10}\pi n + 2\pi k \\
N &\overset{!}{=} \frac{20}{62}k = \frac{10}{31}k \implies N = 10
\end{aligned}
$$

Veranschaulicht durch `stem` Plots:

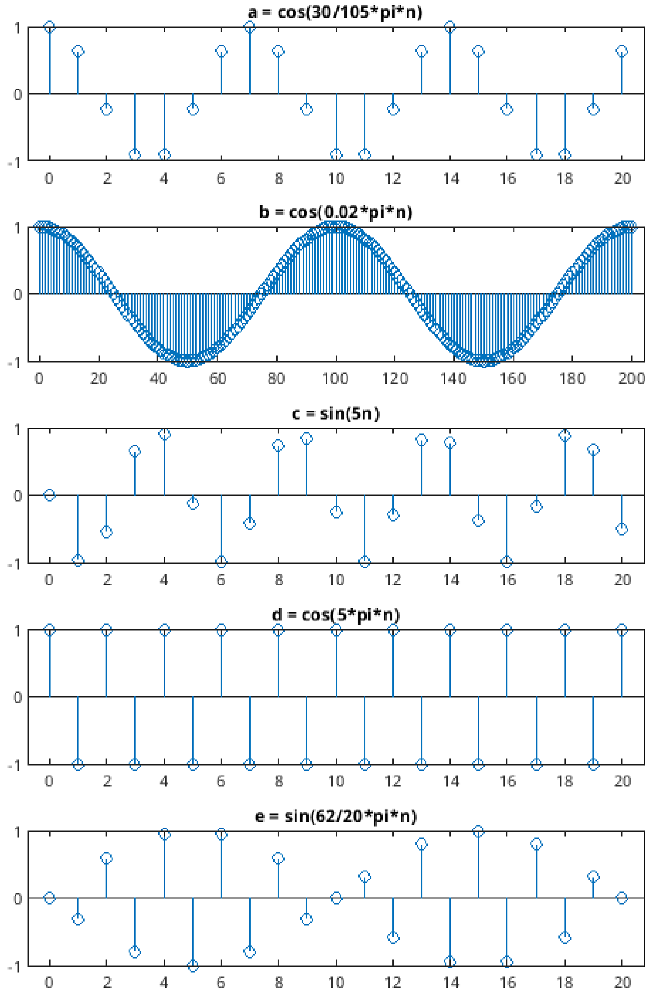
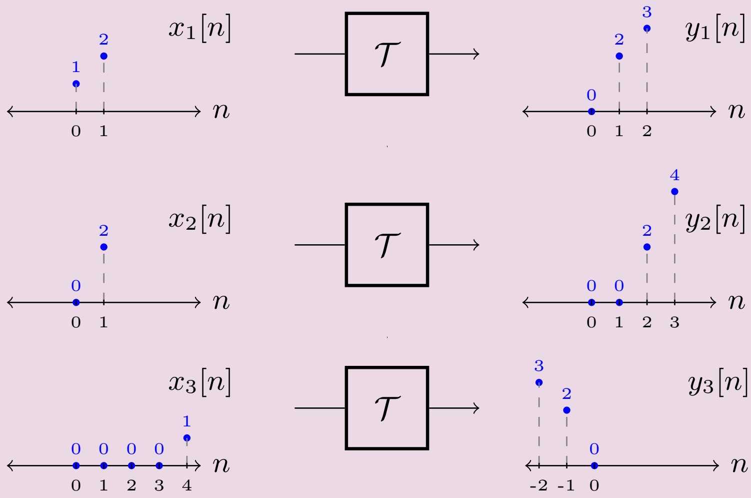


Abbildung 1: Signale

3. Aufgabe

LTI Systeme (6 Punkte)

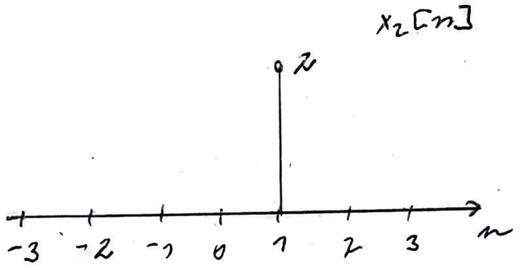
Über das System $\mathcal{T}$ ist bekannt, dass es zeitinvariant ist. Wenn am Eingang des Systems die Signale: $x_1[n]$, $x_2[n]$ oder $x_3[n]$ anliegen, so erhält man die Systemantworten: $y_1[n]$, $y_2[n]$ bzw. $y_3[n]$, wie im folgenden Bild:

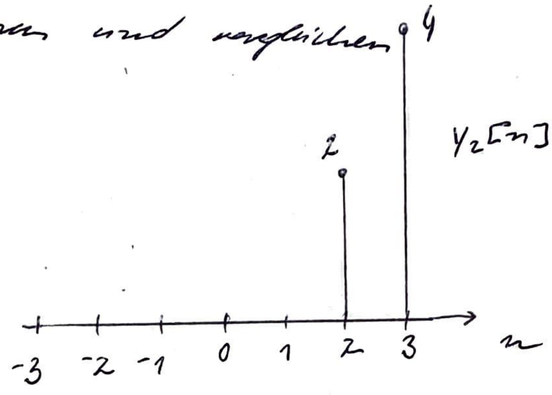


Stellen Sie fest, ob das System $\mathcal{T}$ linear sein kann.

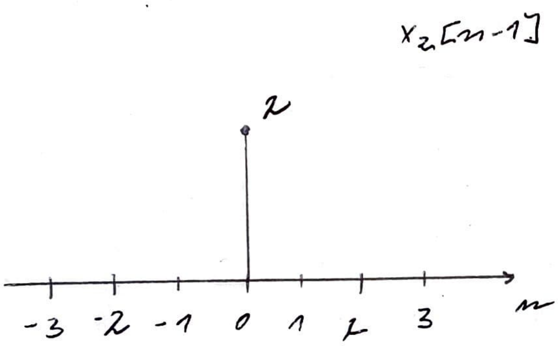
Aufgabe 3.

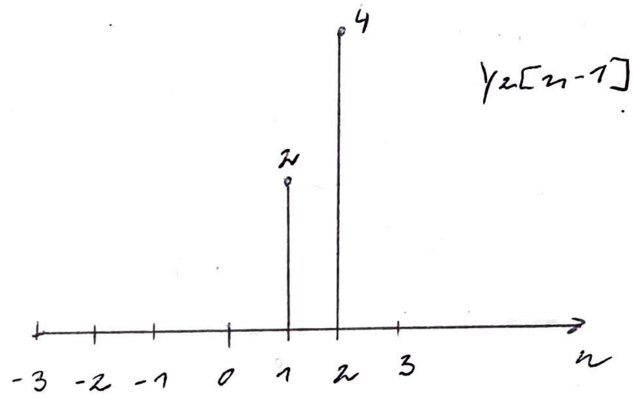
Impulsantwort berechnen und vergleichen





Verschiebung möglich (Zeitinvariant)

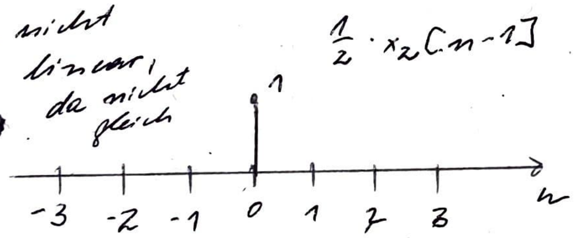


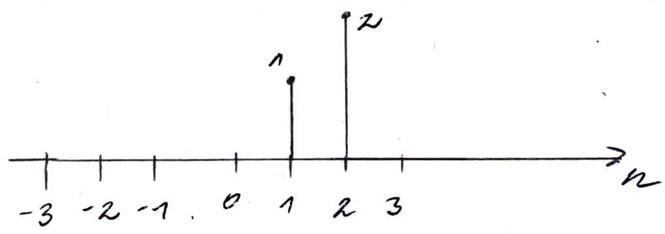


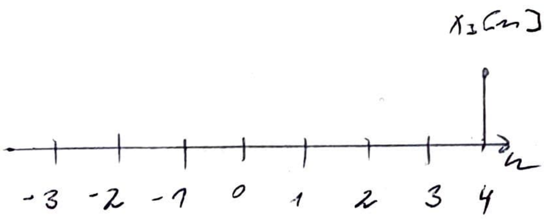
Skalierung (Skalierbarkeit, wenn LTI)

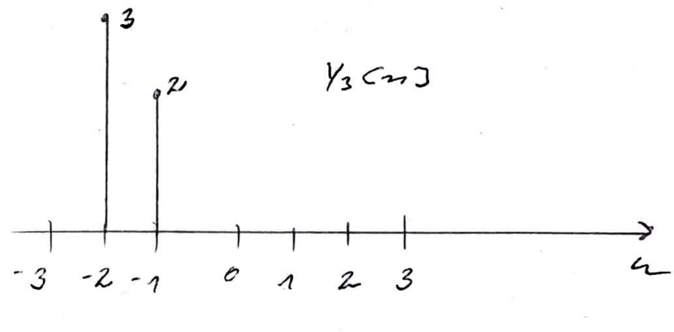
$\frac{1}{2} \cdot y_2[n-1] = h[n]$

≠ nicht linear, da nicht gleich

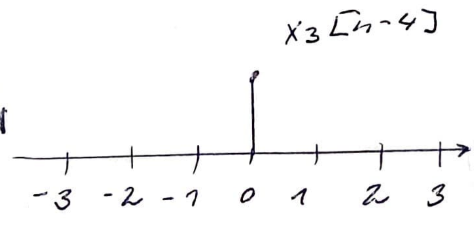


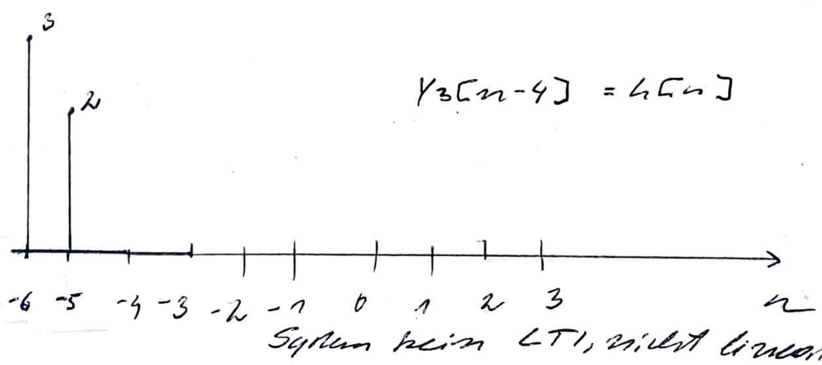






Verschiebung





System kein LTI, nicht linear

4. Aufgabe

Impuls- und Sprungantwort einfacher LTI Systeme (10 Punkte)

In diesem Besipiel betrachten wir 4 einfache diskrete Systeme.

(a) Zeichnen Sie zunächst die Blockdiagramme der Systeme, welche über die folgenden Differenzengleichungen definiert sind:

(i) Kammfilter: $y_K[n] = x[n] - x[n-4]$

(ii) Integrator: $y_I[n] = x[n] + y_I[n-1]$

(iii) Leaky Integrator: $y_{LI}[n] = Ax[n] + (1-A)y_{LI}[n-1], \quad A \in [0,1]$

(iv) Differenzierer: $y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n-2]$

(b) Skizzieren Sie nun die Impulsantworten $h[n]$ der 4 (kausalen) Systeme ($A = 0.5$)

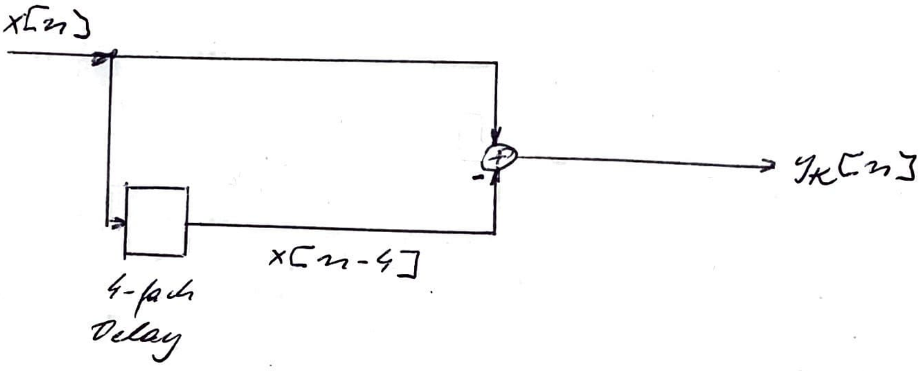
(c) Speziell in der Regelungstechnik ist des öfteren auch die Sprungantwort $g[n]$ von Interesse. Diese kann über 2 äquivalente Definitionen beschrieben werden: Erstens, $g[n]$ ist die Antwort des Systems auf den Einheitssprung $u[n]$ (alle Eingangswerte sind 1 für $n \geq 0$, sonst 0. Eine zweite Definition lautet, dass $g[n]$ die kumulative Summe der Impulsantwort $h[n]$ ist. Mathematisch formuliert bedeutet das:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

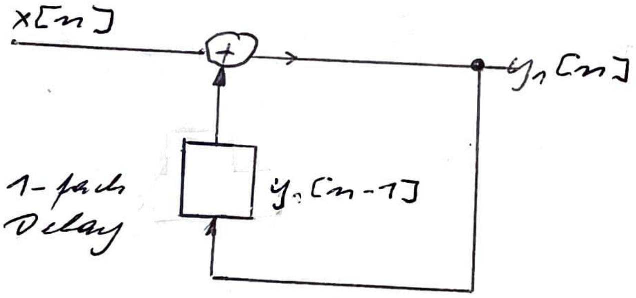
Das bedeutet also, dass $g[n]$ zum Zeitindex n gleich der Summe von allen vorigen Impulsantworten ist, bis inklusive der Impulsantwort $h[n]$. Skizzieren Sie, basierend auf diesem Wissen, die Sprungantworten der obigen 4 (kausalen) Systeme ($A = 0.5$)

Aufgabe 4

i.) a. Kammfilter: $y_K[n] = x[n] - x[n-4]$



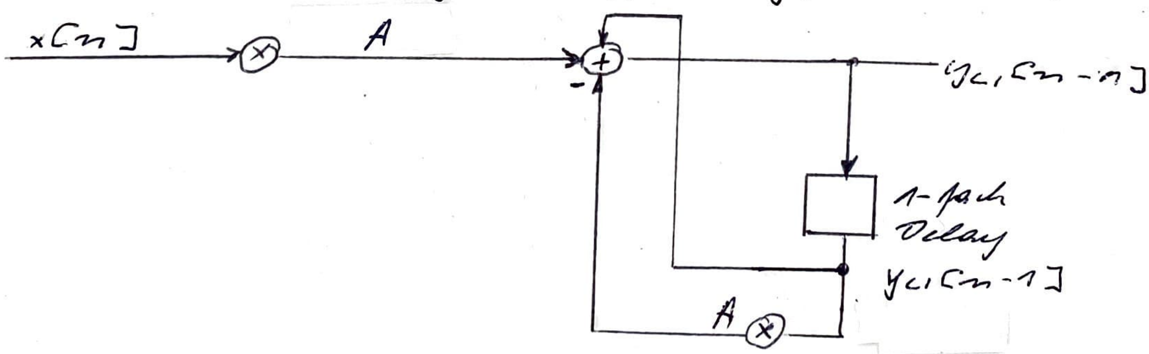
b. Integrator: $y_I[n] = x[n] + y_I[n-1]$



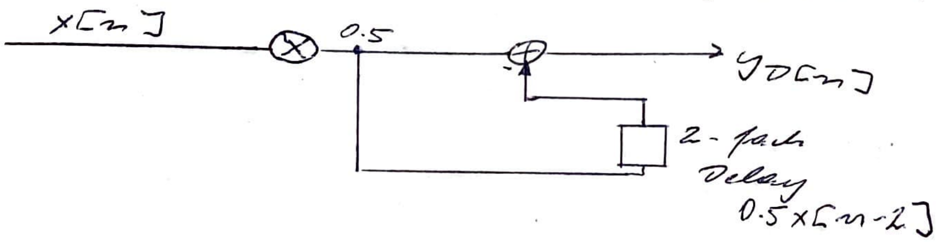
c. Leaky Integrator: $y_{LI}[n] = Ax[n] + (1-A)y_{LI}[n-1]$

wobei A zw. 0 und 1

$y_{LI}[n] = Ax[n] + y_{LI}[n-1] - A \cdot y_{LI}[n-1]$

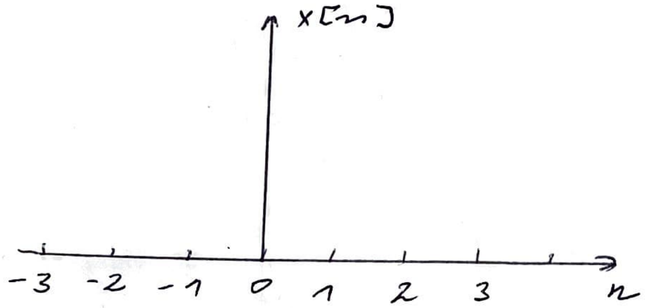


d. Differenzierer: $y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n-2]$

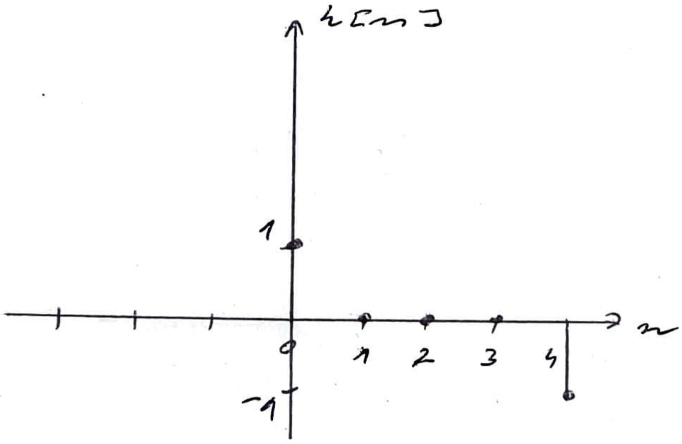


ii) $h[n]$ 4/ kaskade Systeme) $(A = 0.5)$

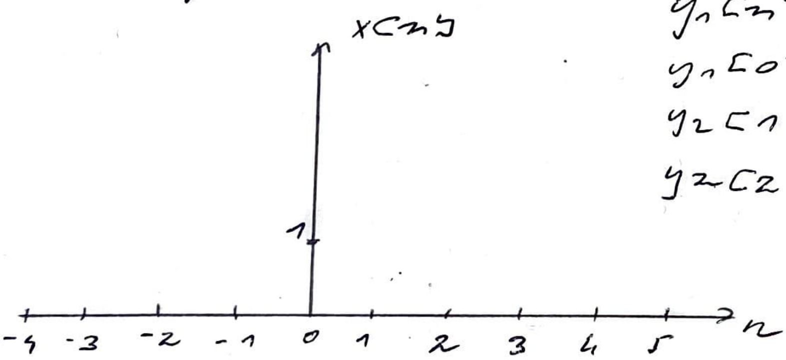
Kammfilter



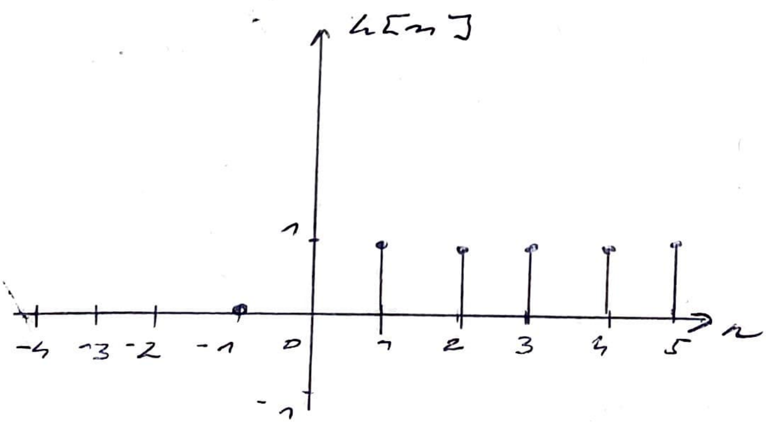
$$y_K[n] = x[n] - x[n-4]$$
$$y_K[0] = \underline{x[0]} - x[0-4]$$
$$1 \quad - \quad 0$$



Integrator



$$y_I[n] = x[n] + y[n-1]$$
$$y_I[0] = x[0] + y[0-1]$$
$$y_I[1] = x[1] + y[1-1]$$
$$y_I[2] = x[2] + y[2-1]$$
$$\vdots$$



Leaky Integrator

$A = 0.5 \quad y_{LI}[n] = A x[n] + (1-A) \cdot y_{LI}[n-1]$

$y_{LI}[0] = 0.5 x[0] + 0.5 \cdot y_{LI}[0-1]$

$0.5 + 0.5 \cdot 0$

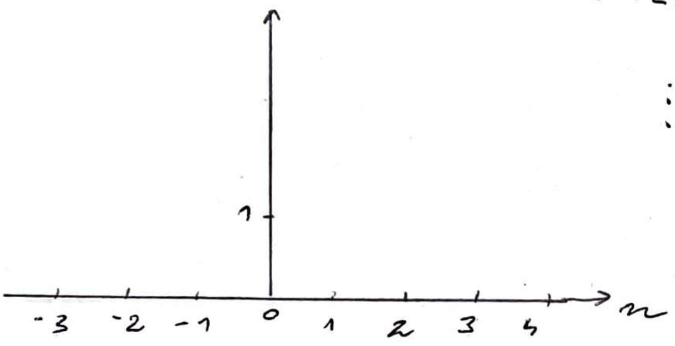
$y_{LI}[1] = 0.5 x[1] + 0.5 y_{LI}[0]$

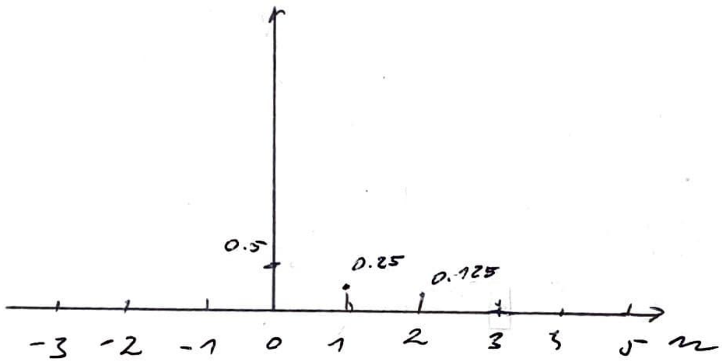
$0.5 \cdot 0 + 0.25$

$y_{LI}[2] = 0.5 x[2] + 0.5 y_{LI}[1]$

$0 + 0.5 \cdot 0.25$

$\vdots$





Differenzierer

$y_D[n] = 0.5 x[n] - 0.5 x[n-2]$

$y_D[0] = 0.5 x[0] - 0.5 x[0-2]$

$0.5 - 0$

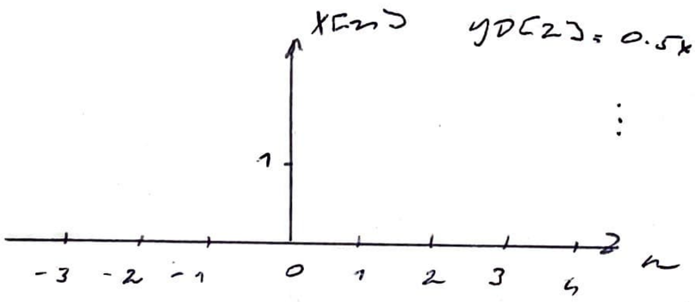
$y_D[1] = 0.5 x[1] - 0.5 x[-1]$

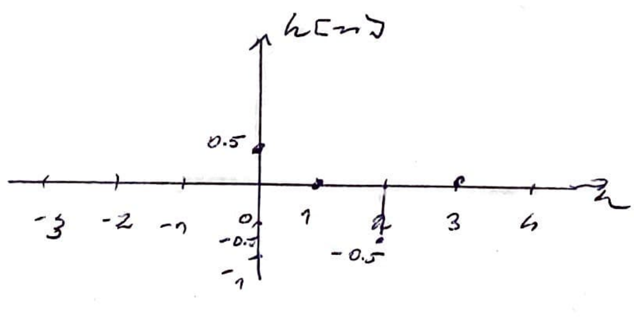
$0 - 0$

$y_D[2] = 0.5 x[2] - 0.5 x[0]$

$0 - 0.5$

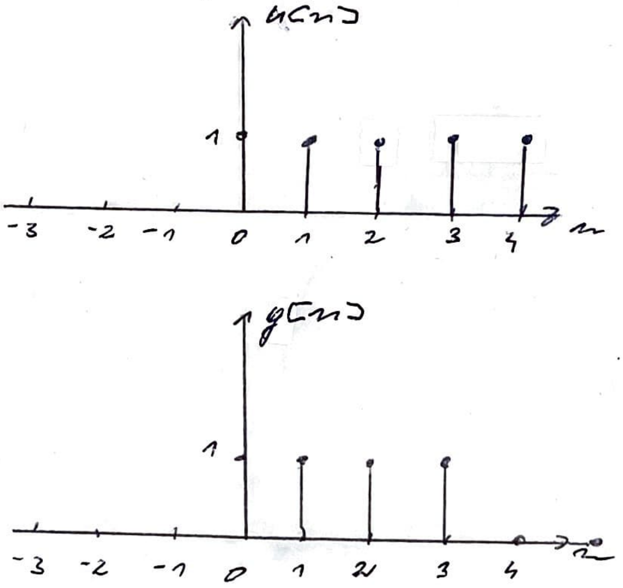
$\vdots$



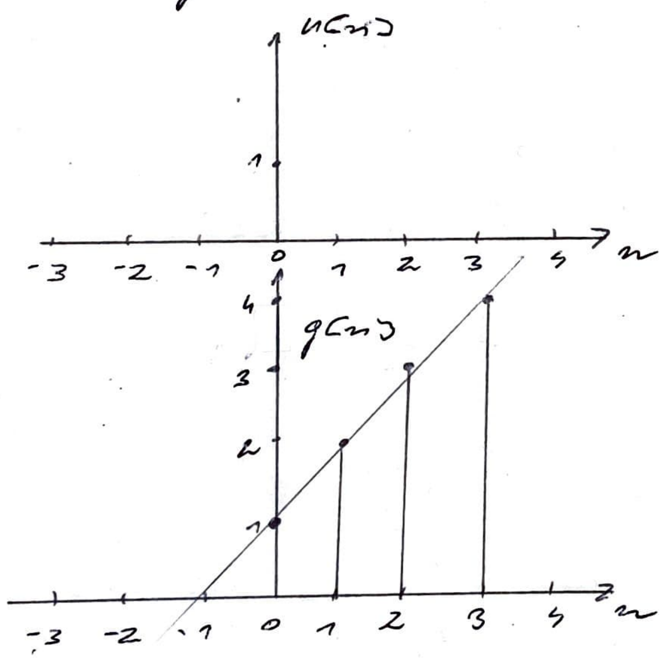


iii.)

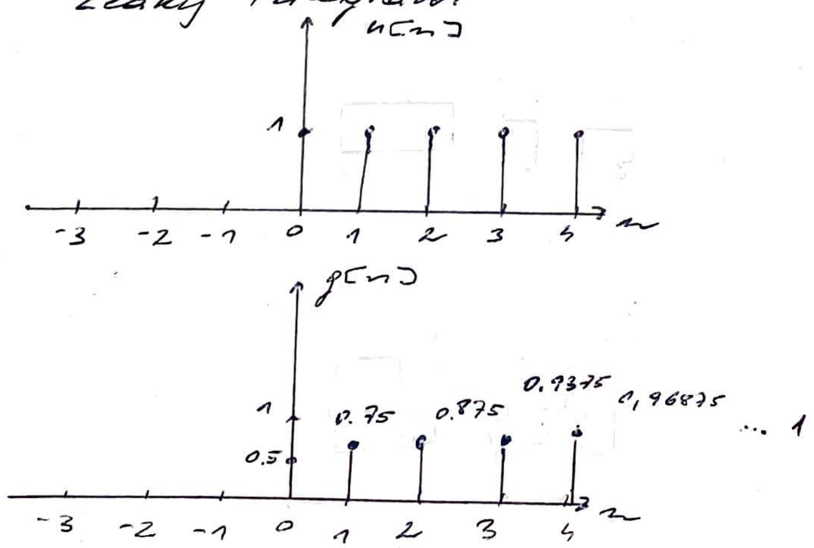
Kammfilter



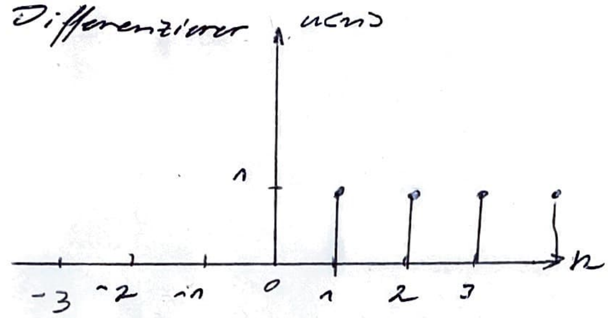
Integrator

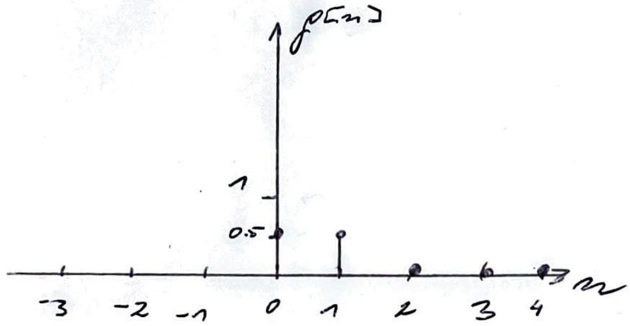


Leaky Integrator



Differenzierer





5. Aufgabe

Faltungsmatrix (12 Punkte)

Die Faltung kann über die Differenzengleichung

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots a_{N_a-1} x[n - N_a + 1] \tag{1}$$

beschrieben werden. Der Eingang $x[n]$ und die konstante Koeffizienten-Sequenz $a[n]$ seien dabei $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N_x - 1]]^T$ und $\mathbf{a} = [a[0], a[1], \dots, a[N_a - 1]]^T$. Die Ausgangssequenz sei definiert durch

$$\mathbf{y}_a = [y_a[0], y_a[1], \dots, y_a[N_{ya} - 1]]^T$$

wobei $N_{ya} = N_x$ gilt, d.h. (1) wird bis zu einem maximalen $n = N_x$ ausgewertet. Es wird angenommen, dass $x[n] = 0$ wenn $n \notin [0, N_x - 1]$, und $a[n] = 0$ wenn $n \notin [0, N_a - 1]$.

(a) Gleichung (1) kann auch in Matrix Form

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2}$$

geschrieben werden, wobei $\mathbf{A}$ die sogenannte Faltungsmatrix ist. Diskutieren Sie die Struktur von $\mathbf{A}$. Was sind die resultierenden Dimensionen dieser Matrix? Geben Sie eine detaillierte Beschreibung für diese und die folgenden Fragen in Ihrem Protokoll.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB` Funktion `[ya,A] = mtxfilter(a,x)` welche Gleichung (1) implementiert und zusätzlich die Matrix $\mathbf{A}$ zurückgibt. Sie dürfen dabei die built-in Funktionen `convmtx` und `conv` **NICHT** verwenden! Die Funktion muss für Übergabeprameter `(a,x)` beliebiger Länge funktionieren.

(c) Testen Sie Ihre Funktion mit dem Zeitsignal

$$x[n] = \sin\left(2\pi\frac{8n}{N_x}\right) + \sin\left(2\pi\frac{16n}{N_x}\right) + \sin\left(2\pi\frac{80n}{N_x}\right), \quad n = 0, \dots, N_x - 1$$

und den Filterkoeffizienten

$$a[n] = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{\sin(0.5\pi(n-D))}{0.5\pi(n-D)} & \text{für } n = 0, 1, \dots, D-1, D+1, \dots, N_a - 1 \\ 1 & \text{für } n = D \end{cases}$$

Setzen Sie $N_x = 256$, $N_a = 33$ und $D = 16$ und führen Sie die folgenden Experimente aus:

Verwenden Sie Ihre Funktion `mtxfilter` um die Ausgangssequenz `ya[n]` zu berechnen. Visualisieren Sie ihre Resultate in einer Abbildung. Verwenden Sie dabei wiederum die Funktion `subplot`, um die Eingangs-Sequenz, die Impulsantwort und die Ausgangs-Sequenz in der gleichen Abbildung darzustellen. Verwenden Sie die Funktionen `xlabel` und `ylabel` um die Achsen korrekt zu beschriften.

(d) Betrachten Sie nun eine weiter Filterfunktion gegeben als

$$b[n] = \delta[n-2]$$

mit $N_b = 3$. Wiederholen Sie die Schritte aus der vorigen Aufgabe, indem Sie den Filter $b[n]$ verwenden und berechnen Sie $y_b[n]$

(e) Summieren Sie die Signale $y_a[n]$ und $y_b[n]$ um das Ausgangssignal $y[n]$ zu erhalten. Berechnen Sie also

$$y[n] = y_a[n] + y_b[n]$$

und plotten Sie es in der Zeitdomäne. Wie können Sie die Matrizen **A** und **B** (welche von den Funktionen `[ya, A] = mtxfilter(a,x)` bzw. `[yb,B] = mtxfilter(b,x)` zurückgegeben werden) kombinieren, um eine neue Matrix **C** zu erhalten, sodass $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$? Berechnen und plotten Sie $\mathbf{y}' = \mathbf{C}\mathbf{x}$ zum Vergleich.

(a)

$N_{ya} = N_x$: Ein- und Ausgang sind gleichgroß:

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_{ya} \times N_x}$$

Die Matrix ist quadratisch. Einsetzen für n in (1) liefert:

$$\begin{aligned}
y[0] &= a_0 x[0] \\
y[1] &= a_0 x[1] + a_1 x[0] \\
y[2] &= a_0 x[2] + a_1 x[1] + a_2 x[0] \\
&\vdots \\
y[N_{ya}-1] &= a_0 x[N_{ya}-1] + a_1 x[N_{ya}-2] + \cdots + a_{N_{ya}-1} x[0]
\end{aligned}$$

Eingesetzt in den Vektor $\mathbf{y}_a$:

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N_{ya}-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 x[0] \\ a_1 x[0] + a_0 x[1] \\ a_2 x[0] + a_1 x[1] + a_0 x[2] \\ \vdots \\ a_{N_{ya}-1} x[0] + \cdots + a_1 x[N_{ya}-2] + a_0 x[N_{ya}-1] \end{pmatrix}$$

Durch erkennen der Linearkombination der Vektorelemente aus $\mathbf{x}$, lässt sich die Gleichung schreiben wie:

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_{ya}-1} & a_{N_{ya}-2} & a_{N_{ya}-3} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}$$

(b)

Auch als Matlab-Skript im Anhang.

```
function [ya,A] = mtxfilter(a,x)
    %calculate signal length and length of kernel
    sigLen = length(x);
    coeffLen = length(a);

    n = sigLen;
    m = sigLen+coeffLen-1;

    A = zeros(m,n);

    for i = 1:n
        A(i:i+length(a)-1,i) = a;
    end

    ya = A*x';
end
```

(c)

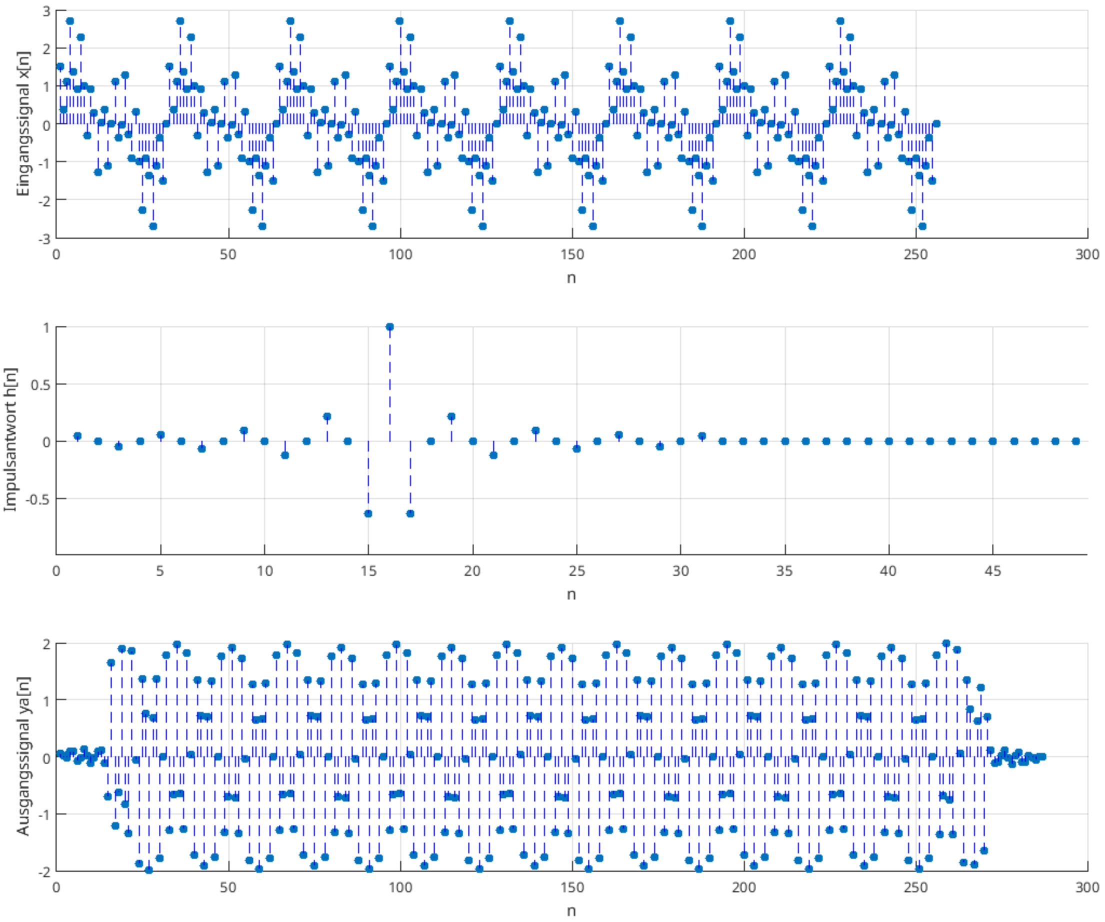


Abbildung 2: Eingangssignal $\mathbf{x}$, Impulsantwort von $\mathbf{A}$, Ausgangssignal $\mathbf{y}$ zu $\mathbf{x}$

(d)

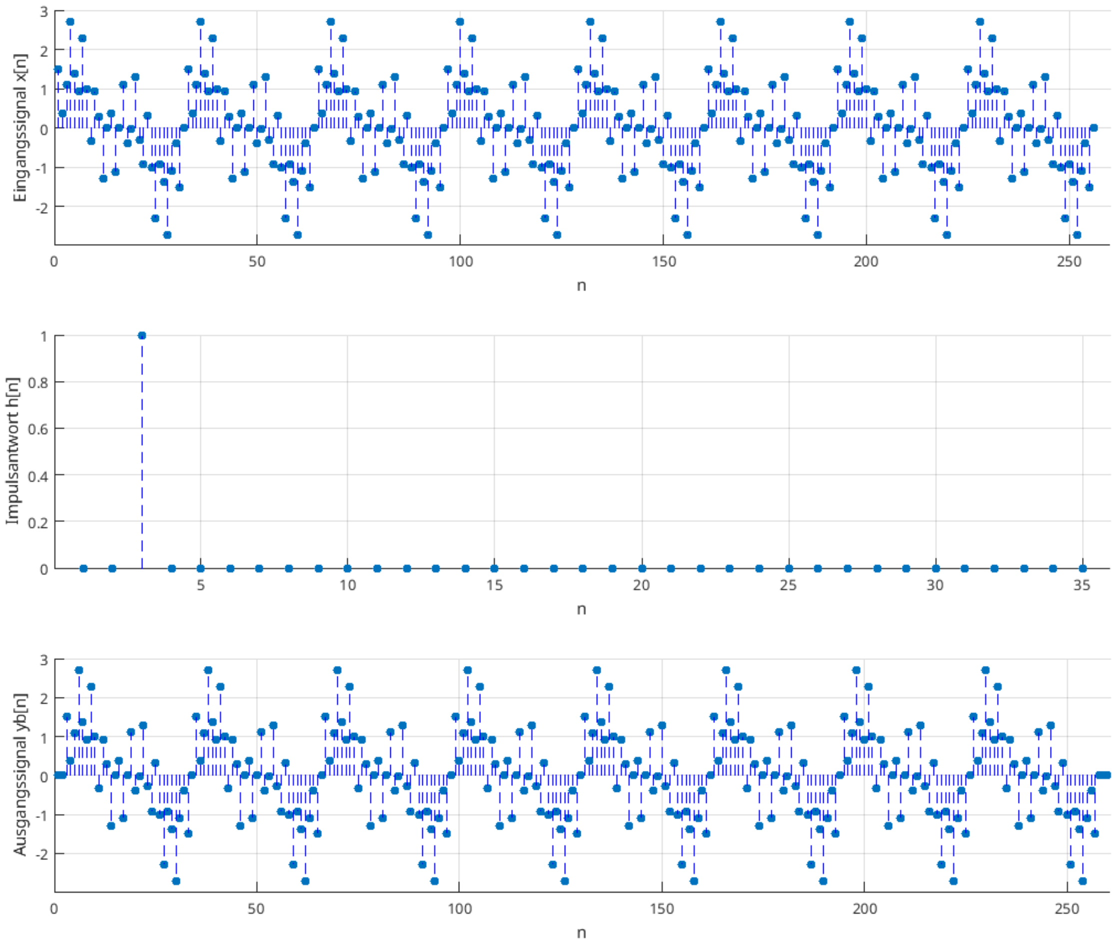


Abbildung 3: Antwort auf $b[n]$

(e)

Da die Eingänge lediglich addiert werden, lässt sich für die Matrix **C** einfach **A** und **B** addieren.

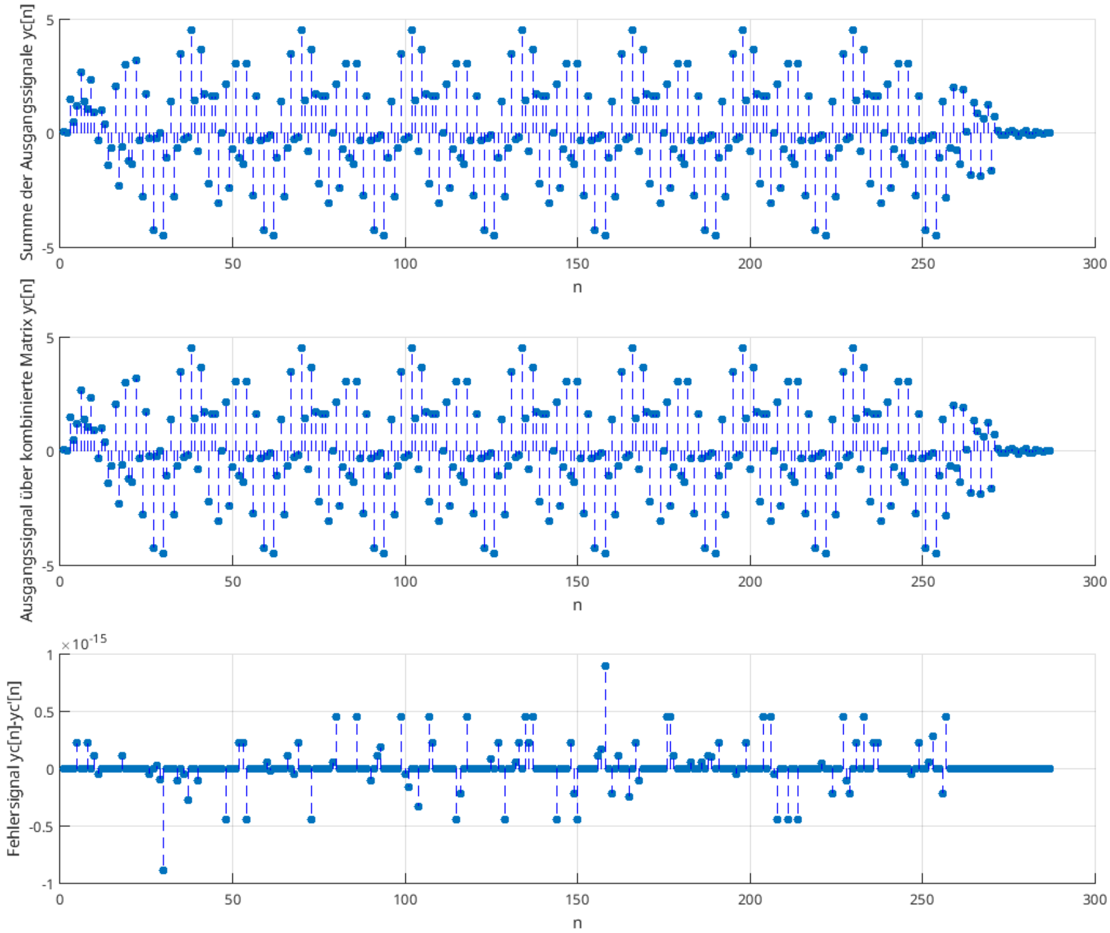


Abbildung 4: Summe der Ausgänge, Filter mit **C**, Absoluter Fehler

Anhang

Feedback

Anmerkungen Florian:

1.b. Zeitvariant -2P; (Simon: ausgebessert)

Schöne Ausarbeitung!

Anmerkungen Raimund:

4) z^{-n} für Verzögerung um n Zeitschritte;

Sonst sehr gut