Contents

1. Aufgabe

LTI Systeme - Zeitinvarianz (6 Punkte)

Bestimmen Sie, ob die folgenden Systeme mit Eingang $x[n]$ und Ausgang $y[n]$ zeitinvariant sind. Alle nötigen Zwischenschritte sind dabei anzuführen!

(a)
$$y[n] = f(x[n]) = 10 \sin(0.1\pi n)\ x[n]$$

(b)
$$y[n] = f(x[n]) = x[n+1] - x[1-n]$$

Die Systeme sind zeitinvariant, wenn die Forderung

$$y[n-n_0] \stackrel{!}{=} f(x[n-n_0])$$

erfüllt ist, also wenn eine Zeitverschiebung am Eingang eine Zeitverschiebung am Ausgang verursacht.

(a)

$$\begin{aligned} y[n-n_0] &= 10 \sin(0.1\pi(n-n_0))\ x[n-n_0] \\ f(x[n-n_0]) &= 10 \sin(0.1\pi n)\ x[n-n_0] \end{aligned}$$

Die beiden Terme sind nicht gleich und das System ist daher **zeitvariant**.

Alternative Begründung: Das System hat die Form $y[n] = f(n, x[n])$ und ist aufgrund der Abhängigkeit von n außerhalb des Arguments von $x[n]$ zeitvariant.

(b)

$$\begin{aligned} y[n-n_0] &= x[(n-n_0)+1] - x[1-(n-n_0)] \\ &= x[n-n_0+1] - x[1-n+n_0] \\ f(x[n-n_0]) &= x[n-n_0+1] - x[1-n+n_0] \end{aligned}$$

Die beiden Ausdrücke sind äquivalent, daher ist das System **zeitinvariant**. Auch hat das System tatsächlich die Form $y[n] = f(x[n])$, woran man alternativ die Zeitinvarianz erkennen kann.

2. Aufgabe

Periodizität von zeitdiskreten Signalen (6 Punkte)

Gegeben ist das zeitdiskrete Signal. Welche dieser Signale sind periodisch? Berechnen Sie gegebenenfalls die Grundperiode.

(a) $\cos\left(\frac{30}{105}\pi n\right)$

(b) $\cos(0.02\pi n)$

(c) $\sin(5n)$

(d) $\cos(5\pi n)$

(e) $\sin\left(\frac{62}{10}\pi n\right)$

Das zeitdiskrete Signal $x[n]$ ist periodisch mit der ganzzahligen Periode N, wenn gilt:

$$x[n] = x[n+N]$$

Das kleinste N, das die Gleichung erfüllt, ist die gesuchte Grundperiode. Für trigonometrische Funktionen muss ebenfalls die Periodizität gelten.

$$\sin(\varphi(n)) = \sin(\varphi(n) + 2\pi k) \quad \cos(\varphi(n)) = \cos(\varphi(n) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{30}{105}\pi(n+N)\right) &\stackrel{!}{=} \cos\left(\frac{30}{105}\pi n + 2\pi k\right) && \Big|\arccos \\
\frac{30}{105}\pi(n+N) &\stackrel{!}{=} \frac{30}{105}\pi\left(n + 2k\cdot\frac{105}{30}\right) && \Big|\frac{105}{30\pi}\Big| - n \\
N &\stackrel{!}{=} \frac{105}{15}k = 7k
\end{aligned}$$

Das kleinste ganzzahlige Ergebnis liefert $k = 1 \implies N = 7$. In den folgenden Rechnungen wird die Forderung direkt an das Argument der Winkelfunktion gestellt.

(b)

$$\begin{aligned}
0.02\pi(n+N) &\stackrel{!}{=} 0.02\pi n + 2\pi k \\
\frac{1}{50}\pi(n+N) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{50}\pi(n+100k) \\
N &\stackrel{!}{=} 100k \implies N = 100
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
5(n+N) &\stackrel{!}{=} 5n + 2\pi k \\
5n + 5N &\stackrel{!}{=} 5n + 2\pi k \\
5N &\stackrel{!}{=} 2\pi k
\end{aligned}$$

π ist irrational, daher ist das Signal nicht periodisch.

(d)

$$
\begin{aligned}
5\pi(n+N) &\overset{!}{=} 5\pi n + 2\pi k \\
5\pi n + 5\pi N &\overset{!}{=} 5\pi n + 2\pi k \\
5\pi N &\overset{!}{=} 2k\pi \\
N &\overset{!}{=} \frac{2}{5}k \implies N = 2
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\frac{62}{10}\pi(n+N) &\overset{!}{=} \frac{62}{10}\pi n + 2\pi k \\
\frac{62}{10}\pi n + \frac{62}{10}\pi N &\overset{!}{=} \frac{62}{10}\pi n + 2\pi k \\
N &\overset{!}{=} \frac{20}{62}k = \frac{10}{31}k \implies N = 10
\end{aligned}
$$

Veranschaulicht durch <MINTED> Plots:

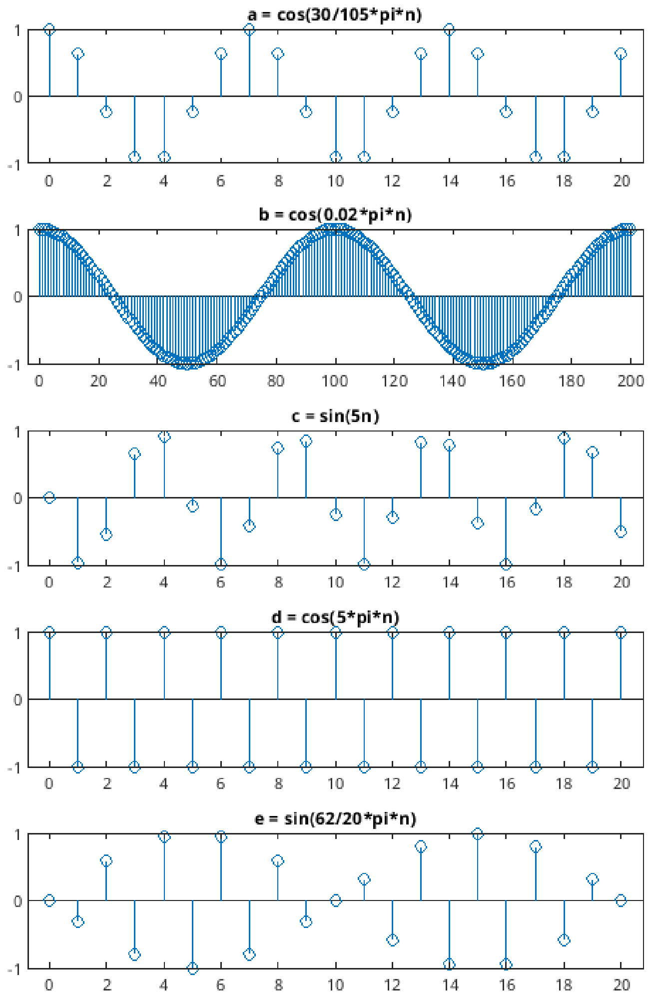
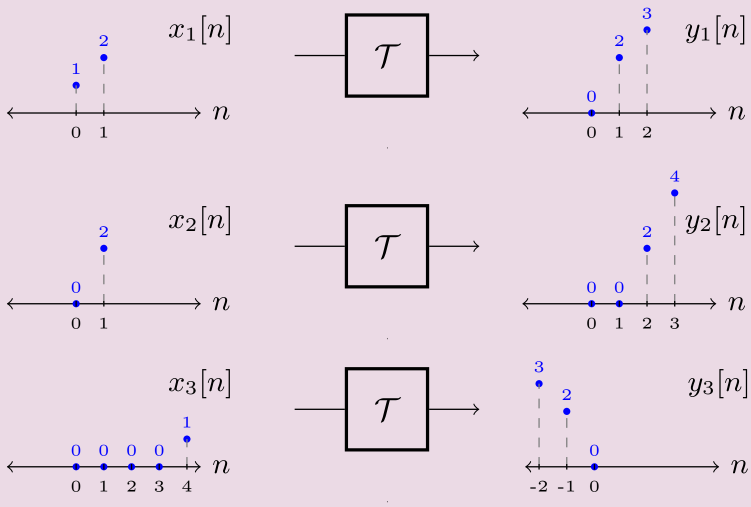


Figure 1: Signale

3. Aufgabe

LTI Systeme (6 Punkte)

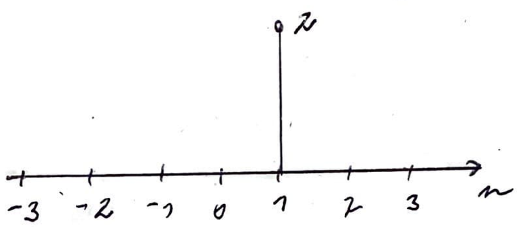
Über das System $\mathcal{T}$ ist bekannt, dass es zeitinvariant ist. Wenn am Eingang des Systems die Signale: $x_1[n]$, $x_2[n]$ oder $x_3[n]$ anliegen, so erhält man die Systemantworten: $y_1[n]$, $y_2[n]$ bzw. $y_3[n]$, wie im folgenden Bild:

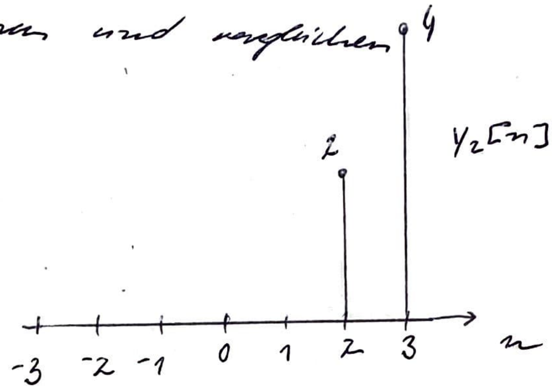


Stellen Sie fest, ob das System $\mathcal{T}$ linear sein kann.

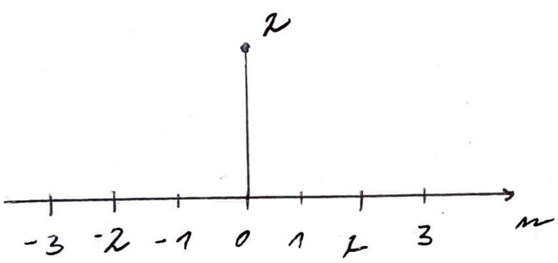
Aufgabe 3.

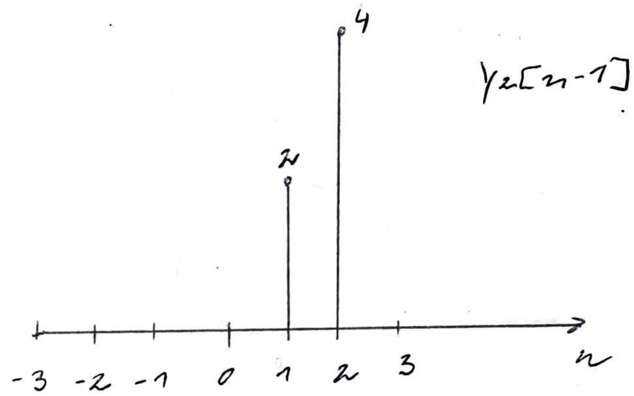
Impulsantwort berechnen und vergleichen





Verschiebung möglich (Zeitinvariant)

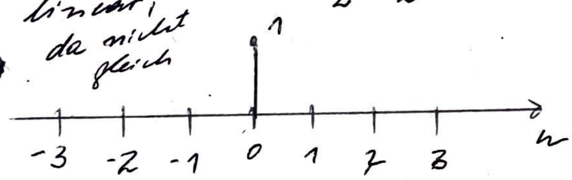


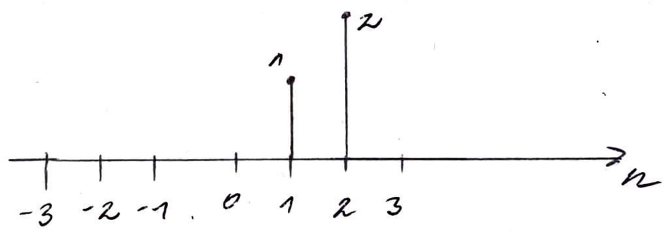


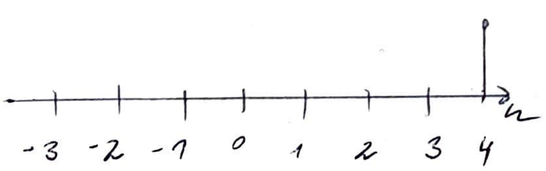
Skalierung (Skalierbarkeit, wenn LTI)

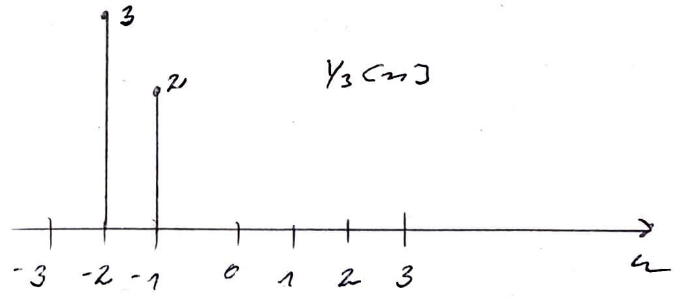
$\frac{1}{2} \cdot y_2[n-1] = h[n]$

≠ nicht linear, da nicht gleich

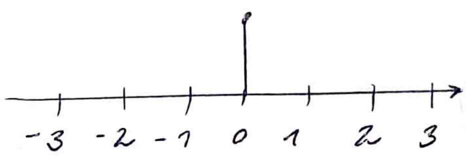




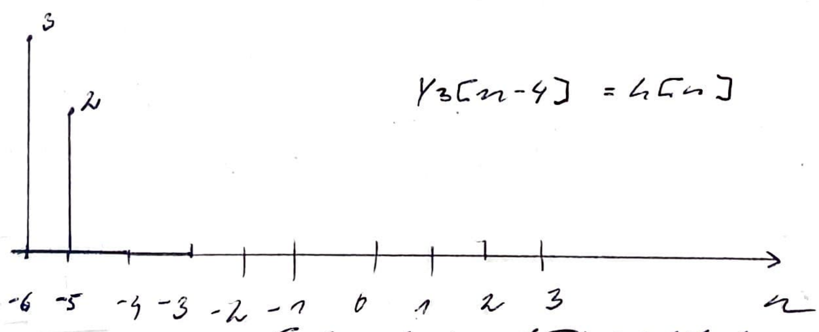




Verschiebung



$y_3[n-4] = h[n]$



System kein LTI, nicht linear

4. Aufgabe

Impuls- und Sprungantwort einfacher LTI Systeme (10 Punkte)

In diesem Besipiel betrachten wir 4 einfache diskrete Systeme.

(a) Zeichnen Sie zunächst die Blockdiagramme der Systeme, welche über die folgenden Differenzengleichungen definiert sind:

(i) Kammfilter: $y_K[n] = x[n] - x[n-4]$

(ii) Integrator: $y_I[n] = x[n] + y_I[n-1]$

(iii) Leaky Integrator: $y_{LI}[n] = Ax[n] + (1-A)y_{LI}[n-1], \quad A \in [0,1]$

(iv) Differenzierer: $y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n-2]$

(b) Skizzieren Sie nun die Impulsantworten $h[n]$ der 4 (kausalen) Systeme ($A = 0.5$)

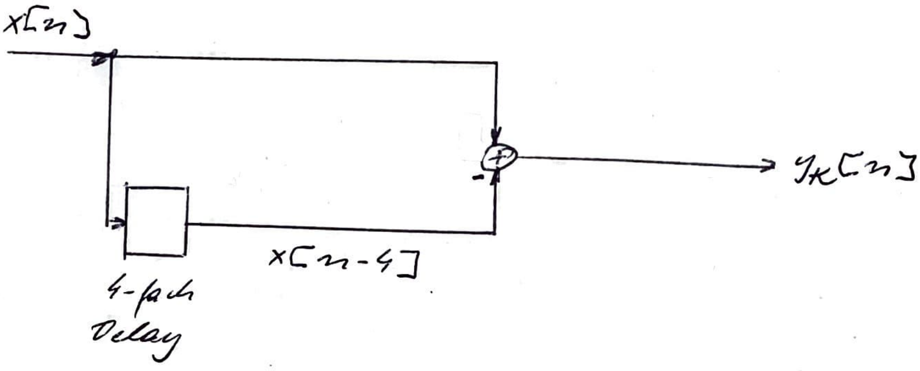
(c) Speziell in der Regelungstechnik ist des öfteren auch die Sprungantwort $g[n]$ von Interesse. Diese kann über 2 äquivalente Definitionen beschrieben werden: Erstens, $g[n]$ ist die Antwort des Systems auf den Einheitssprung $u[n]$ (alle Eingangswerte sind 1 für $n \geq 0$, sonst 0. Eine zweite Definition lautet, dass $g[n]$ die kumulative Summe der Impulsantwort $h[n]$ ist. Mathematisch formuliert bedeutet das:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

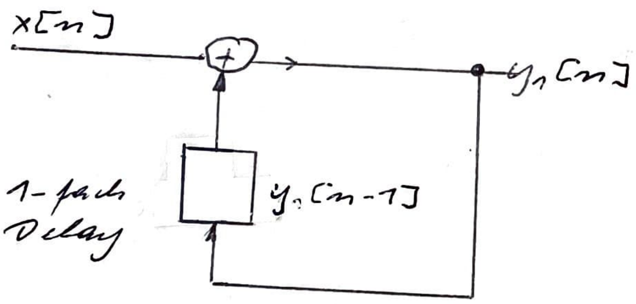
Das bedeutet also, dass $g[n]$ zum Zeitindex n gleich der Summe von allen vorigen Impulsantworten ist, bis inklusive der Impulsantwort $h[n]$. Skizzieren Sie, basierend auf diesem Wissen, die Sprungantworten der obigen 4 (kausalen) Systeme ($A = 0.5$)

Aufgabe 4

i.) a. Kammfilter: $y_K[n] = x[n] - x[n-4]$



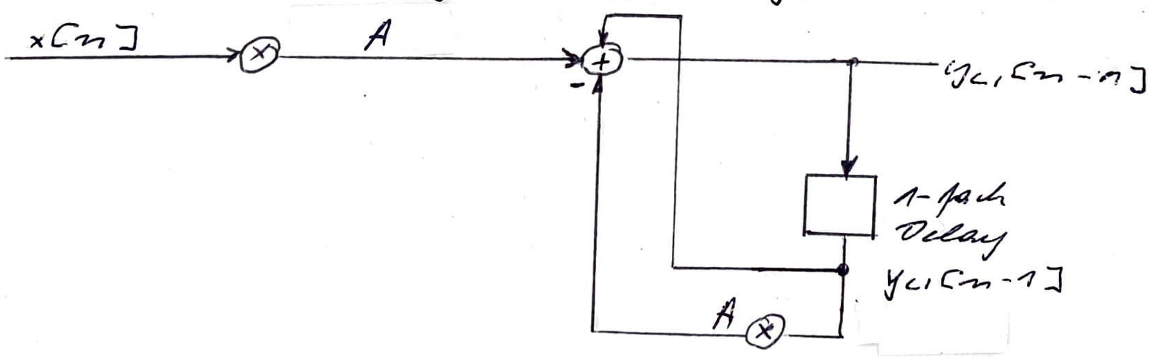
b. Integrator: $y_I[n] = x[n] + y_I[n-1]$



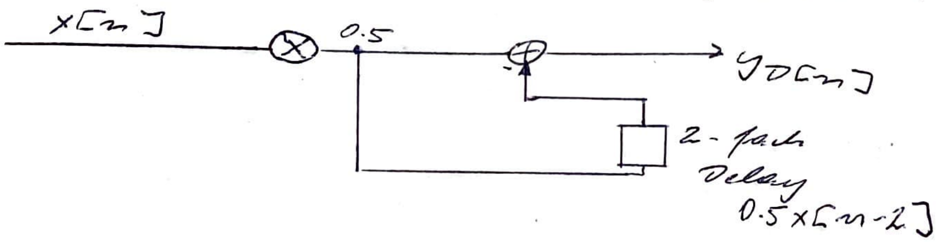
c. Leaky Integrator: $y_{LI}[n] = Ax[n] + (1-A)y_{LI}[n-1]$

wobei A zw. 0 und 1

$y_{LI}[n] = Ax[n] + y_{LI}[n-1] - A \cdot y_{LI}[n-1]$

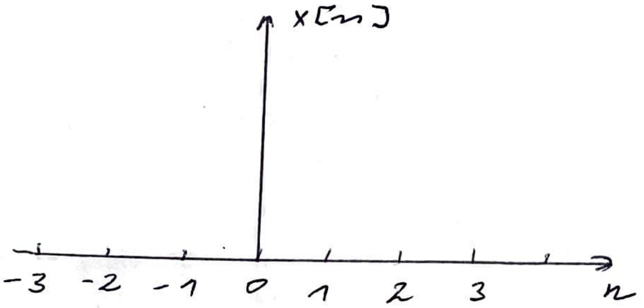


d. Differenzierer: $y_D[n] = 0.5x[n] - 0.5x[n-2]$

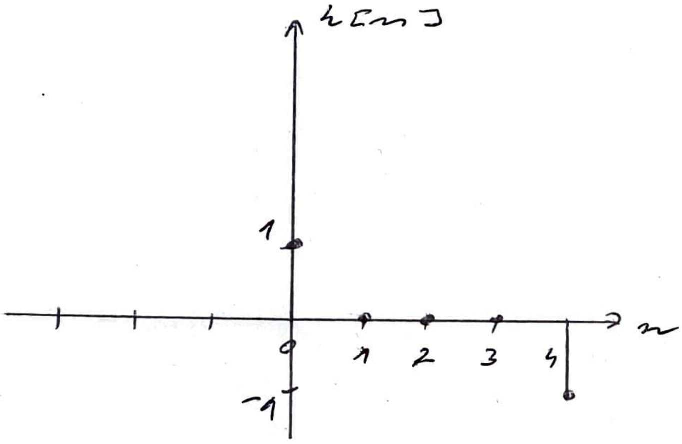


ii) $h[n]$ (kaskadierte Systeme) $(A=0.5)$

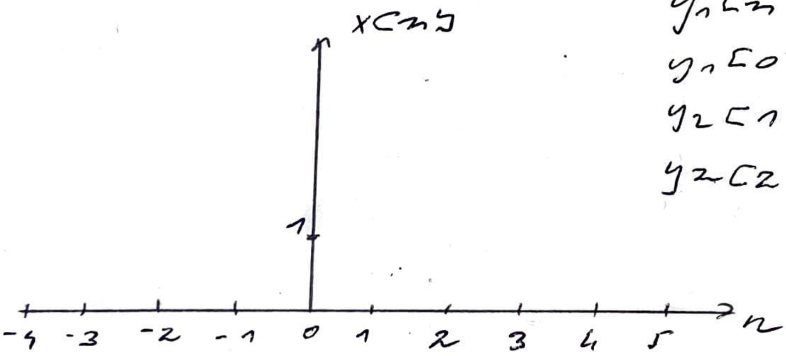
Kammfilter



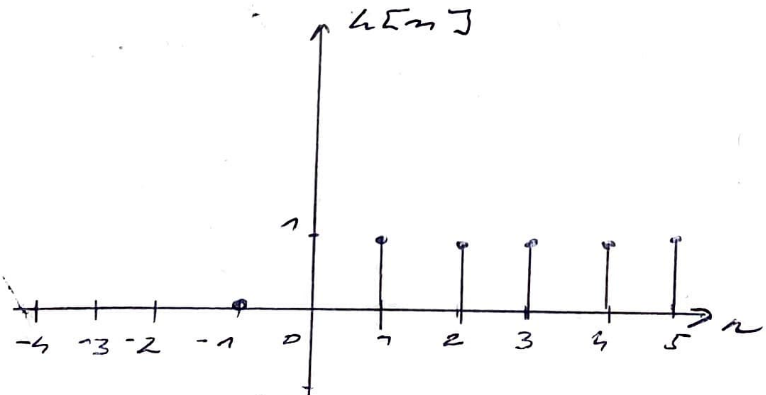
$$y_K[n] = x[n] - x[n-4]$$
$$y_K[0] = \underline{x[0]} - x[0-4]$$
$$1 \quad - \quad 0$$



Integrator



$$y_I[n] = x[n] + y[n-1]$$
$$y_I[0] = x[0] + y[0-1]$$
$$y_I[1] = x[1] + y[1-1]$$
$$y_I[2] = x[2] + y[2-1]$$
$$\vdots$$



Leaky Integrator $A=0.5$ $y_{LI}[n] = A x[n] + (1-A) \cdot y_{LI}[n-1]$

$y_{LI}[0] = 0.5 x[0] + 0.5 \cdot y_{LI}[0-1]$

$0.5 + 0.5 \cdot 0$

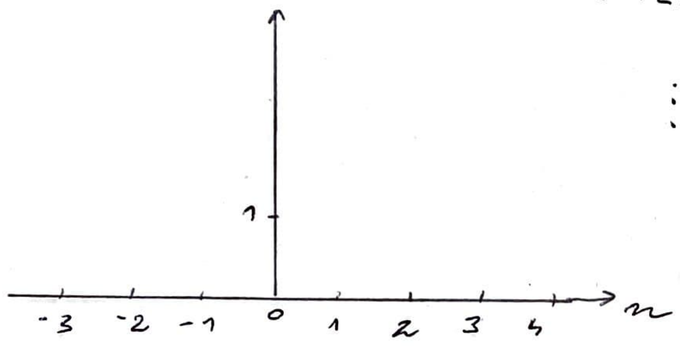
$y_{LI}[1] = 0.5 x[1] + 0.5 y_{LI}[0]$

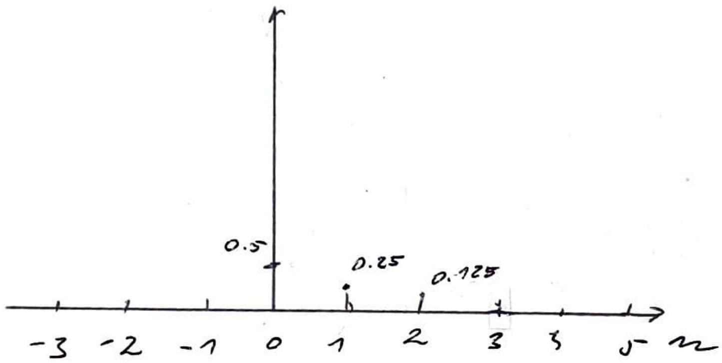
$0.5 \cdot 0 + 0.25$

$y_{LI}[2] = 0.5 x[2] + 0.5 y_{LI}[1]$

$0 + 0.5 \cdot 0.25$

$\vdots$





Differenzierer

$y_D[n] = 0.5 x[n] - 0.5 x[n-2]$

$y_D[0] = 0.5 x[0] - 0.5 x[0-2]$

$0.5 - 0$

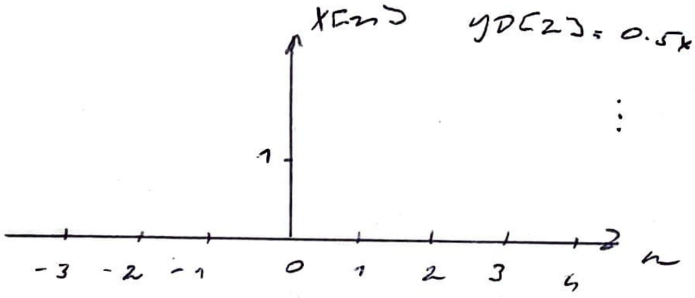
$y_D[1] = 0.5 x[1] - 0.5 x[-1]$

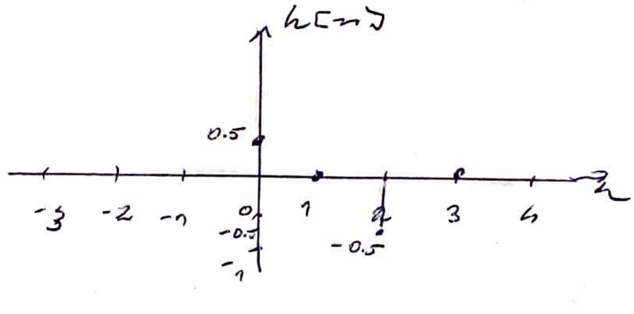
$0 - 0$

$y_D[2] = 0.5 x[2] - 0.5 x[0]$

$0 - 0.5$

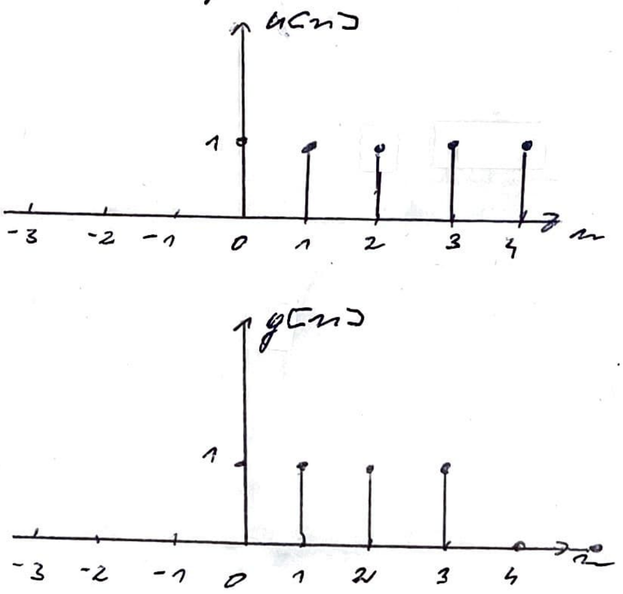
$\vdots$



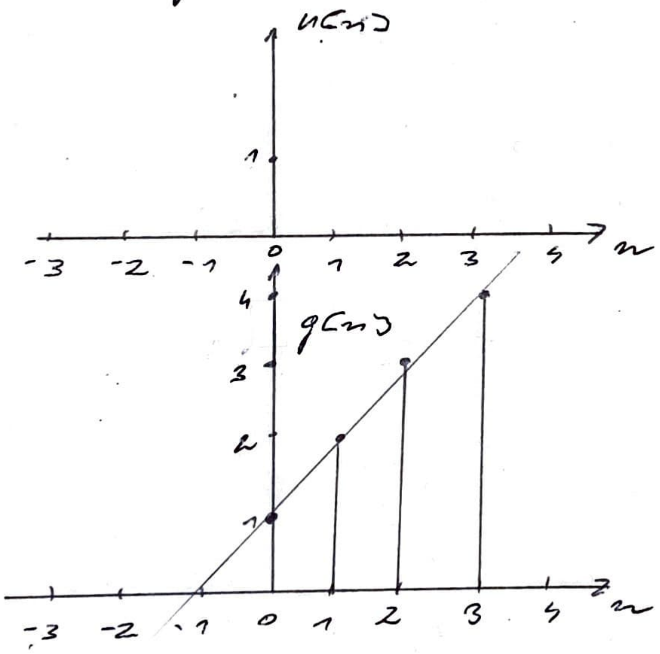


iii.)

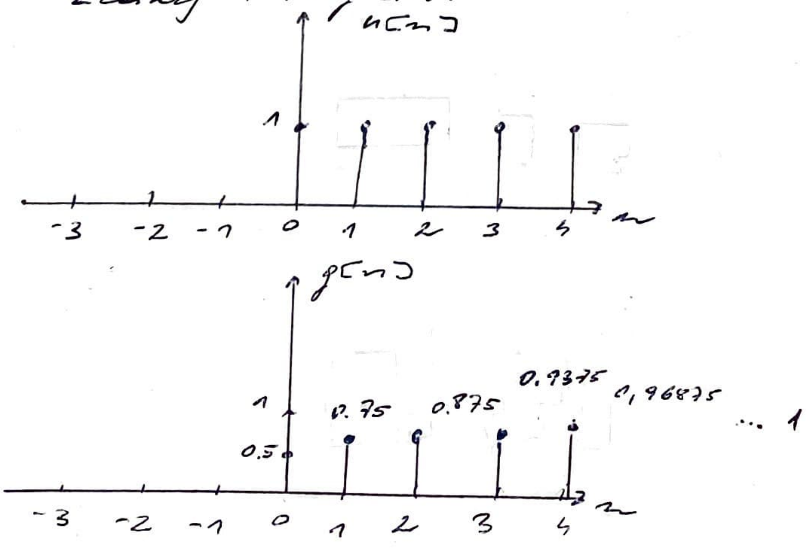
Kammfilter



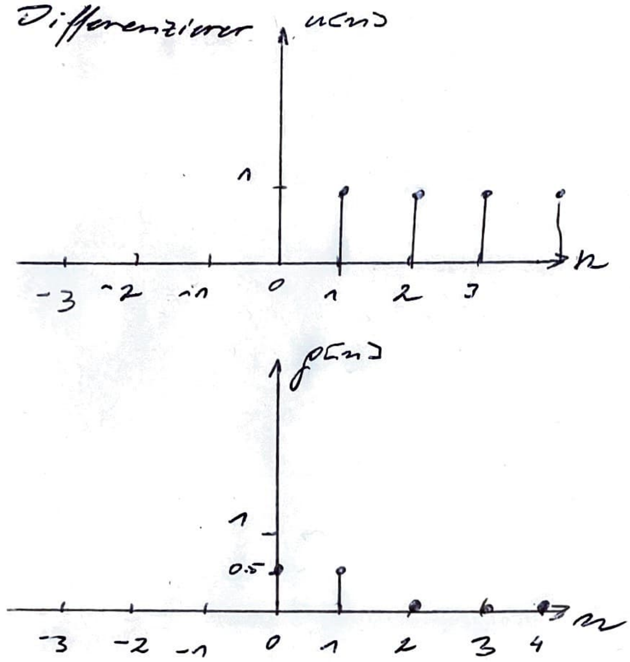
Integrator



Leaky Integrator



Differenzierer



5. Aufgabe

Faltungsmatrix (12 Punkte)

Die Faltung kann über die Differenzengleichung

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots a_{N_a-1} x[n - N_a + 1] \tag{1}$$

beschrieben werden. Der Eingang $x[n]$ und die konstante Koeffizienten-Sequenz $a[n]$ seien dabei $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N_x - 1]]^T$ und $\mathbf{a} = [a[0], a[1], \dots, a[N_a - 1]]^T$. Die Ausgangssequenz sei definiert durch

$$\mathbf{y}_a = [y_a[0], y_a[1], \dots, y_a[N_{ya} - 1]]^T$$

wobei $N_{ya} = N_x$ gilt, d.h. (**??**) wird bis zu einem maximalen $n = N_x$ ausgewertet. Es wird angenommen, dass $x[n] = 0$ wenn $n \notin [0, N_x - 1]$, und $a[n] = 0$ wenn $n \notin [0, N_a - 1]$.

(a) Gleichung (**??**) kann auch in Matrix Form

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2}$$

geschrieben werden, wobei $\mathbf{A}$ die sogenannte Faltungsmatrix ist. Diskutieren Sie die Struktur von $\mathbf{A}$. Was sind die resultierenden Dimensionen dieser Matrix? Geben Sie eine detaillierte Beschreibung für diese und die folgenden Fragen in Ihrem Protokoll.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB` Funktion **<MINTED>** welche Gleichung (**??**) implementiert und zusätzlich die Matrix $\mathbf{A}$ zurückgibt. Sie dürfen dabei die built-in Funktionen **<MINTED>** und **<MINTED>** **NICHT** verwenden! Die Funktion muss für Übergabeprameter **<MINTED>** beliebiger Länge funktionieren.

(c) Testen Sie Ihre Funktion mit dem Zeitsignal

$$x[n] = \sin\left(2\pi \frac{8n}{N_x}\right) + \sin\left(2\pi \frac{16n}{N_x}\right) + \sin\left(2\pi \frac{80n}{N_x}\right), \quad n = 0, \dots, N_x - 1$$

und den Filterkoeffizienten

$$a[n] = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{\sin(0.5\pi(n-D))}{0.5\pi(n-D)} & \text{für } n = 0, 1, \dots, D-1, D+1, \dots, N_a - 1 \\ 1 & \text{für } n = D \end{cases}$$

Setzen Sie $N_x = 256$, $N_a = 33$ und $D = 16$ und führen Sie die folgenden Experimente aus:

Verwenden Sie Ihre Funktion **<MINTED>** um die Ausgangssequenz **<MINTED>** zu berechnen. Visualisieren Sie ihre Resultate in einer Abbildung. Verwenden Sie dabei wiederum die Funktion **<MINTED>**, um die Eingangs-Sequenz, die Impulsantwort und die Ausgangs-Sequenz in der gleichen Abbildung darzustellen. Verwenden Sie die Funktionen **<MINTED>** und **<MINTED>** um die Achsen korrekt zu beschriften.

(d) Betrachten Sie nun eine weiter Filterfunktion gegeben als

$$b[n] = \delta[n-2]$$

mit $N_b = 3$. Wiederholen Sie die Schritte aus der vorigen Aufgabe, indem Sie den Filter $b[n]$ verwenden und berechnen Sie $y_b[n]$

(e) Summieren Sie die Signale $y_a[n]$ und $y_b[n]$ um das Ausgangssignal $y[n]$ zu erhalten. Berechnen Sie also

$$y[n] = y_a[n] + y_b[n]$$

und plotten Sie es in der Zeitdomäne. Wie können Sie die Matrizen **A** und **B** (welche von den Funktionen <MINTED> bzw. <MINTED> zurückgegeben werden) kombinieren, um eine neue Matrix **C** zu erhalten, sodass $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$? Berechnen und plotten Sie $\mathbf{y}' = \mathbf{Cx}$ zum Vergleich.

(a)

$N_{ya} = N_x$: Ein- und Ausgang sind gleichgroß:

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_{ya} \times N_x}$$

Die Matrix ist quadratisch. Einsetzen für n in (**??**) liefert:

$$\begin{aligned} y[0] &= a_0 x[0] \\ y[1] &= a_0 x[1] + a_1 x[0] \\ y[2] &= a_0 x[2] + a_1 x[1] + a_2 x[0] \\ &\vdots \\ y[N_{ya}-1] &= a_0 x[N_{ya}-1] + a_1 x[N_{ya}-2] + \cdots + a_{N_{ya}-1} x[0] \end{aligned}$$

Eingesetzt in den Vektor $\mathbf{y}_a$:

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N_{ya}-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 x[0] \\ a_1 x[0] + a_0 x[1] \\ a_2 x[0] + a_1 x[1] + a_0 x[2] \\ \vdots \\ a_{N_{ya}-1} x[0] + \cdots + a_1 x[N_{ya}-2] + a_0 x[N_{ya}-1] \end{pmatrix}$$

Durch erkennen der Linearkombination der Vektorelemente aus $\mathbf{x}$ lässt sich die Gleichung schreiben wie:

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_{ya}-1} & a_{N_{ya}-2} & a_{N_{ya}-3} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}$$

(b)

Auch als Matlab-Skript im Anhang.

<MINTED>

(c)

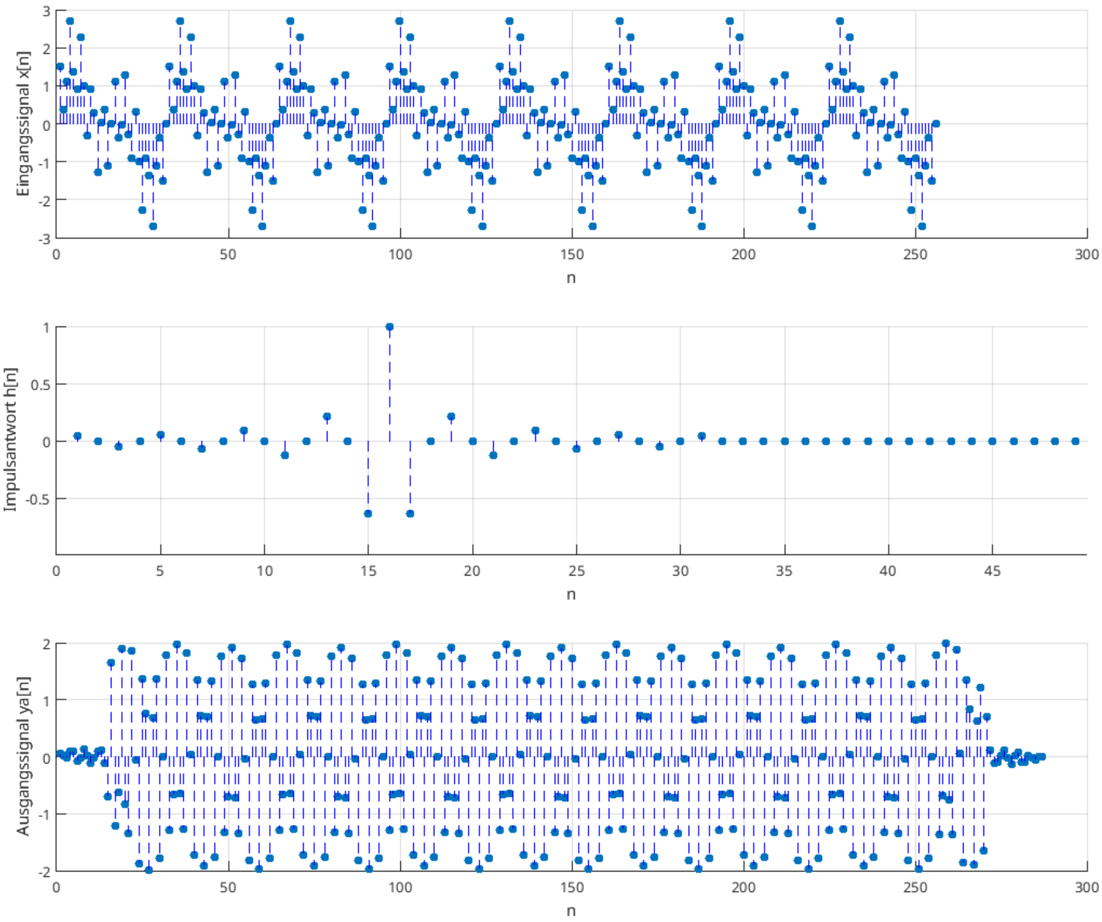


Figure 2: Eingangssignal $\mathbf{x}$, Impulsantwort von $\mathbf{A}$, Ausgangssignal $\mathbf{y}$ zu $\mathbf{x}$

(d)

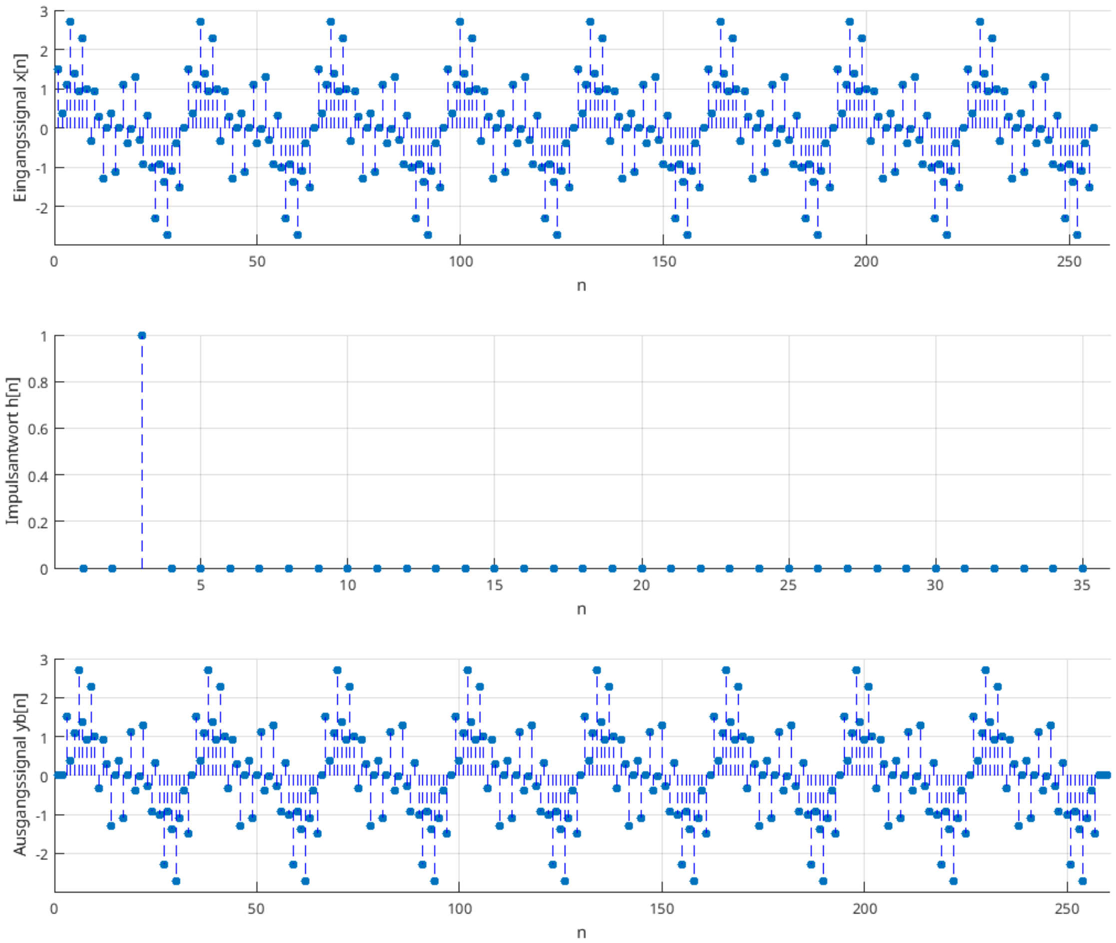


Figure 3: Antwort auf $b[n]$

(e)

Da die Eingänge lediglich addiert werden, lässt sich für die Matrix **C** einfach **A** und **B** addieren.

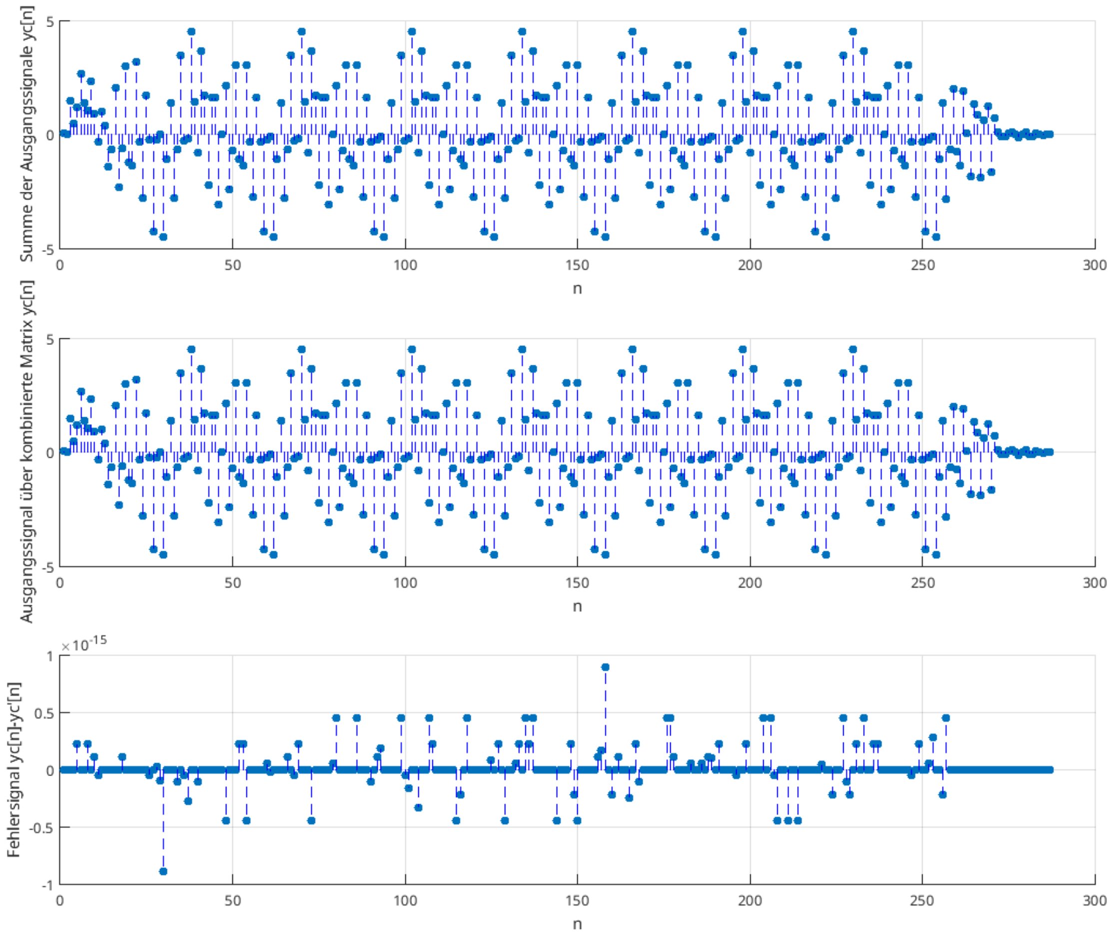


Figure 4: Summe der Ausgänge, Filter mit **C**, Absoluter Fehler

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.