Calcolo Numerico 2022-23
Esercitazione 3

A Approssimazione di un set di dati tramite Minimi Quadrati

Sia $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^m$ un set di dati, che devono essere approssimati da un polinomio

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

di grado $n \in \mathbb{N}$ fissato.
Si definisce una matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{bmatrix}$$

E i vettori

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Reimpostando il problema con la formulazione ai minimi quadrati e risolvendo quindi il problema

$$\min_{\alpha} ||A\alpha - y||_2^2$$

si ottengono i coefficienti α che definiscono in modo univoco il polinomio $p(x)$.

A.1 Risoluzione tramite equazioni normali

Quando A è di rango massimo, il problema ai minimi quadrati

$$\min_{\alpha} ||A\alpha - y||_2^2$$

può essere risolto col metodo delle equazioni normali, ossia osservando che il problema di minimo può essere riscritto come:

$$A^T A\alpha = A^T y$$

Risolvendo questo sistema lineare (i ottiene il vettore degli α che corrisponde ai coefficienti del polinomio approssimante.

A.2 Risoluzione tramite SVD

Consideriamo la decomposizione SVD della matrice A

$$A = USV^T$$

Con $U \in \mathbb{R}^{N\times N}$ e $V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrici unitarie e $S \in \mathbb{R}^{N\times n}$ diagonale.
La soluzione di minima norma del problema di minimi quadrati è data da:

$$\alpha_i = \sum_{j=o}^{n} \frac{(u_i^T y)v_i}{s_i}, \quad i = 0, \ldots n$$

Esercizio 1

i. Calcolare il polinomio di grado $n = 5$ che approssimi i seguenti dati:

   $\{(1.0, 1.18), (1.2, 1.26), (1.4, 1.23), (1.6, 1.37), (1.8, 1.37), (2.0, 1.45), (2.2, 1.42),$

   $(2.4, 1.46), (2.6, 1.53), (2.8, 1.59), (3.0, 1.50)\}$

ii. Risolvere il problema ai minimi quadrati sia con le equazioni normali che con la SVD (vedi A.1 e A.2).

iii. Valutare graficamente i polinomi di approssimazione e confrontare gli errori commessi dai due metodi sul set di punti.

Esercizio 2

Ripetere l'esercizio precedente su un dataset scaricabile al seguente indirizzo:
https://www.kaggle.com/sakshamjn/heightvsweight-for-linear-polynomial-regression
contenente i dati riguardanti il peso e l'altezza di 71 individui.
Una volta scaricato, per caricarlo su Spyder utilizzare la libreria `pandas`, nello specifico la funzione `pandas.read_csv` che fornisce come output il dataset. Questo dovrà essere poi convertito in un numpy array.

Esercizio 3

Per ognuna delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x \exp(x) \qquad x \in [-1, 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25 * x} \qquad x \in [-1, 1]$$

$$f(x) = sin(5x) + 3x \qquad x \in [1, 5]$$

Assegnati m punti equispaziati, con m fissato,

i. Per ciascun valore di $n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$, creare una figura con il grafico della funzione esatta $f(x)$ insieme a quello del polinomio di approssimazione $p(x)$. Evidenziare gli m punti noti.

ii. Per ciascun valore di $n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$, riportare il valore dell'errore commesso nel punto $x = 0$.

iii. Calcolare la norma 2 dell'errore di approssimazione, commesso sugli m nodi, per ciascun valore di $n \in \{1, 5, 7\}$.

B Compressione di una immagine tramite SVD

Esercizio 4

Utilizzando la libreria `skimage`, nello specifico il modulo `data`, caricare e visualizzare un'immagine A in scala di grigio di dimensione $m \times n$.

i. Calcolare la matrice

$$A_p = \sum_{i=1}^{p} u_i * v_i^T * \sigma_i$$

, dove $p \leq rango(A)$

ii. Visualizzare l'immagine A_p.

iii. Calcolare l' errore relativo:

$$\frac{\|A - A_p\|_2}{\|A\|_2}.$$

iv. Calcolare il fattore di compressione

$$c_p = \frac{1}{p} \min(m, n) - 1.$$

v. Calcolare e plottare l' errore relativo e il fattore di compressione al variare di p.

Esercizio 5

i. Ripetere l'esercizio precedente con 2/3 immagini con differenti caratteristiche.