

Calcolo Numerico 2022-23

Esercitazione 5

A Deblur Immagini

Il problema di deblur consiste nella ricostruzione di un'immagine a partire da un dato acquisito mediante il seguente modello:

$$b = Ax + \eta \quad (1)$$

dove b rappresenta l'immagine corrotta, x l'immagine originale che vogliamo ricostruire, A l'operatore che applica il blur Gaussiano ed η il rumore additivo con distribuzione Gaussiana di media 0 e deviazione standard σ .

Esercizio 1

- i. Caricare l'immagine `camera()` dal modulo `skimage.data`, rinormalizzandola nel range $[0, 1]$.
- ii. Applicare un blur di tipo gaussiano con deviazione standard 3 il cui kernel ha dimensioni 24×24 utilizzando le funzioni fornite `gaussian_kernel()`, `psf_fft()` ed `A()`.
- iii. Aggiungere rumore di tipo gaussiano, con deviazione standard 0.02, usando la funzione `np.random.normal()`.
- iv. Calcolare il Peak Signal Noise Ratio (PSNR) ed il Mean Squared Error (MSE) tra l'immagine degradata e l'immagine originale usando le funzioni `peak_signal_noise_ratio` e `mean_squared_error` disponibili nel modulo `skimage.metrics`

B Soluzione naive

Una possibile ricostruzione dell'immagine originale x partendo dall'immagine corrotta b è la soluzione naive data dal minimo del seguente problema di ottimizzazione:

$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (2)$$

La funzione f da minimizzare è data dalla formula

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

il cui gradiente ∇f è dato da

$$\nabla f(x) = A^T Ax - A^T b$$

Esercizio 2

- i. Utilizzando il metodo del gradiente coniugato implementato dalla funzione `minimize`, calcolare la soluzione naive.
- ii. Analizza l'andamento del PSNR e dell'MSE al variare del numero di iterazioni.

C Soluzione regolarizzata

Per ridurre gli effetti del rumore nella ricostruzione è necessario introdurre un termine di regolarizzazione di Tikhonov. Si considera quindi il seguente problema di ottimizzazione.

$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2 \quad (3)$$

La funzione f da minimizzare diventa

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2$$

il cui gradiente ∇f è dato da

$$\nabla f(x) = A^T Ax - A^T b + \lambda x$$

Esercizio 3

- i. Utilizzando il metodo del gradiente coniugato implementato dalla funzione `minimize`, calcolare la soluzione regolarizzata.
- ii. Analizza l'andamento del PSNR e dell'MSE al variare del numero di iterazioni..
- iii. Facendo variare λ , analizzare come questo influenza le prestazioni del metodo analizzando le immagini.
- iv. Attraverso test sperimentali individuare il valore di λ che minimizza il PSNR.

Esercizio 4

Degradare due nuove immagini applicando, mediante le funzioni `gaussian_kernel()` `psf_fft()`, l'operatore di blur con parametri:

- $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5
- $\sigma = 1$ dimensione 7×7
- $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9

ed aggiungendo rumore gaussiano con deviazione standard $(0, 0.05]$.

- i. Ripetere gli esercizi 2 e 3 con le nuove immagini.
- ii. Ripetere gli esercizi 2 e 3 sostituendo il metodo del gradiente coniugato con il metodo del gradiente da voi implementato nello scorso laboratorio.