République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté d'Informatique

Département d'intelligence artificielle

Rapport du Mini projet n°2

Module

Algorithmes Avancé et Complexité

Spécialité

Informatique Visuelle

Rapport réalisé par :

- **Etudiant :** SAYOUD Lynda

  Matricule : 191931031844

  Groupe : 01

- **Etudiant :** DRAI Said

  Matricule : 191931029353

  Groupe : 01

Partie I

Développement de l'algorithme et du programme du problème des tours de Hanoi avec le langage C

1) L'algorithme récursif des tours de Hanoi :

```
Procédure Hanoi_tours (N, dep,arr,inter)
Entrée N :entier ; //Nombre de disques à déplacer
dep, inter, arr :caractère ; //les tiges par example 'A', 'B','C'

Début
    Si (N=1) alors                                              1
        Ecrire(' Disque 1 déplacé de ' dep ' vers 'arr ) ;      2
        Sinon
        //Déplacer les n-1 disques de A vers B
            Hanoi_tours(N-1, dep, inter, arr) ;                 3
        //Déplacer le n eme disque de A vers C
            Ecrire('Disque' N' déplacé de 'dep'vers' arr) ;     4
        //Déplacer les n-1 disques de B vers C
            Hanoi_tours(N-1, inter, arr, dep) ;                 5
    Fsi ;
Fin.

Algorithme Hanoi ;
Var
nbDisques :entier ;
Début
    Répéter                                                     6
        Lire(nbDisques) ;                                       7
    Jusqu'à(nbDisques >=1) ;

    // A, B et C sont les tiges(tours ou piquets)
    //A : piquet initiale, B : Piquet intermédiaire, C : piquet arrivé
    Hanoi_tours(nbDisques,'A','C','B') ;                        8
Fin.
```

2) 1. Complexité temporelle

Soit **N** le nombre d'instructions de l'algorithme Hanoi (ci-dessus), fi (i=1. . . N) la fréquence d'exécution de l'instruction Ii (i=1. . . N), et F la somme de ces fréquences.

On a : L = 8 instructions.

1- On a pour l'algorithme principal Hanoi :

f1=1 ;
f2=1 ;

f3=1 + DH(n) ; 1 Operation pour l'instruction d'appel de la fonction Hanoi_tours (n, A, C, B)

//DH(n) mesure la complexité temporelle de la fonction Hanoi_tours (n, A, C, B)

Donc, F est :

F(n)=f1 + f2 + f3→ F(n)=1+1+(1+DH(n)) → F(n)= 3+DH(n) ……(1)

2- Pour le calcul de DH(n), on procède comme suit :

2.1- On calcule les fréquences des instructions de la fonction Hanoi_tours (. . .) (instructions 1 à 5) :

f1=1 ;

f2=1 ;

f3=1 +DH(n-1) ;

f4=1 ;

f5=1 +DH(n-1) , 1 opération pour l'instruction d'appel de la fonction Hanoi_tours (n, A, C, B)

//DH(n-1) mesure la complexité temporelle de la fonction Hanoi_tours (n-1, A, B, C)

2.2- On calcule la somme de ces fréquences :

DH(n)=$\sum_{i=1}^{5}$ fi = f1+f2+f3+f4+f5→ DH(n)=1+1+(1 +DH(n-1))+1+(1 +H(n-1))

→ DH(n)=2H(n-1)+5 …….(2)

Et DH(0)=1 *// équation de récurrence*

si n=0 alors la fonction Hanoi_tours(. . .) exécute juste le test (n=1)

2.3- On résout l'équation de récurrence (2) avec la méthode de substitution comme suit :
DH(n)=2DH(n-1)+5

→ DH(n)=2 (2DH(n-2)+5)+5

→ DH(n)= 2^2 DH(n-2)+2^1*5+5

→ DH(n)= 2^2(2DH(n-3)+5)+2^1*5+5

→ DH(n)= 2^3 DH(n-3)+2^2*5+2^1*5+5

→. . .

→ DH(n)=2^nDH(n-n)+2^{n-1} *5+ 2^{n-2}*5+……..+2^0*5

→ DH(n)= 2^nDH(n-n)+5(2^{n-1} + 2^{n-2}+……..+2^0)

→ DH(n)= 2^nDH(0)+5(2^{n-1} + 2^{n-2}+……..+2^0)

→ DH(n)= 2^n*1+5((2^n-1)/(2-1))= 2^n+5(2^n-1)=6*2^n -5……..(3)
La relation (3) représente la solution en notation exacte de l'équation de récurrence (2).

Et donc:

$DH(n)= 6 * 2^n - 5 \rightarrow DH(n) \leq 6* 2^n - 5 + 5 = 6 * 2^n$.

$\rightarrow$ DH(n)= Θ **(2^n).**

DH(n) en notation asymptotique.
On conclut alors que la fonction Hanoi_tours (. . .) a une complexité temporelle **exponentielle**.

3- On calcule enfin la fonction F(n) en y remplaçant la solution DH(n) dans la relation (1)

$F(n)=3+ DH(n) \rightarrow F(n)=3+(6* 2^n - 5) = 6* 2^n - 2\ldots$ (5)

Donc : $F(n)=6 * 2^n -2$
$\rightarrow F(n) \leq 6 * 2\ n - 5 + 5 = 6 * 2^n$
$\rightarrow$ F(n)= Θ **(2^n).** ….(6)

Conclusion :
l'Algorithme du problème des « tours de Hanoi » a une complexité temporelle **exponentielle**.
En conséquence :

CT(n) = F(n) = $6 * 2^n - 2$. *en notation exacte*
CT(n) = F(n) = Θ **(2^n).** *en notation asymptotique*

***2.*Complexité Spatiale :**

Après le calcul de la complexité spatiale de l'algorithme d'hanoi :
On a : **$CS(n)$ =** $6*2^n$ -n +1. *en notation exacte*
$CS(n)$ = Θ **(2^n).** *en notation asymptotique*

3) L'algorithme en C :

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>


void toursHanoi(int N, char Dep, char Arr, char Inter)
{
      //N -> nombre de disques à deplacer
    if (N == 1)
      printf("Disque 1 de %c a %c \n" , Dep , Arr);
    else {
      // du tour de depart vers l'arrivée
      toursHanoi(N - 1, Dep, Inter, Arr);
      printf("Disque %d de %c a %c \n", N , Dep ,Arr);
      // du tour intermidiaire à l'arrivé
      toursHanoi(N - 1, Inter, Arr, Dep);
    }
}
```

```
main() {
    int N;
    do {
      printf("\n-Entrer le nombre de disques:");
      scanf("%d",&N);
      }while(N<1);
      //Les Tours sont A B C
    toursHanoi(N, 'A', 'C', 'B');

}
```

4) Les temps d'exécution T :

On complète le tableau suivant :

n	5	10	11	12	13	14	15	16	17	20
T(s)	0.006000	0.441000	0.8950	1.707000	3.46521	7.0343	14.0687	28.1375	57.11	477.7

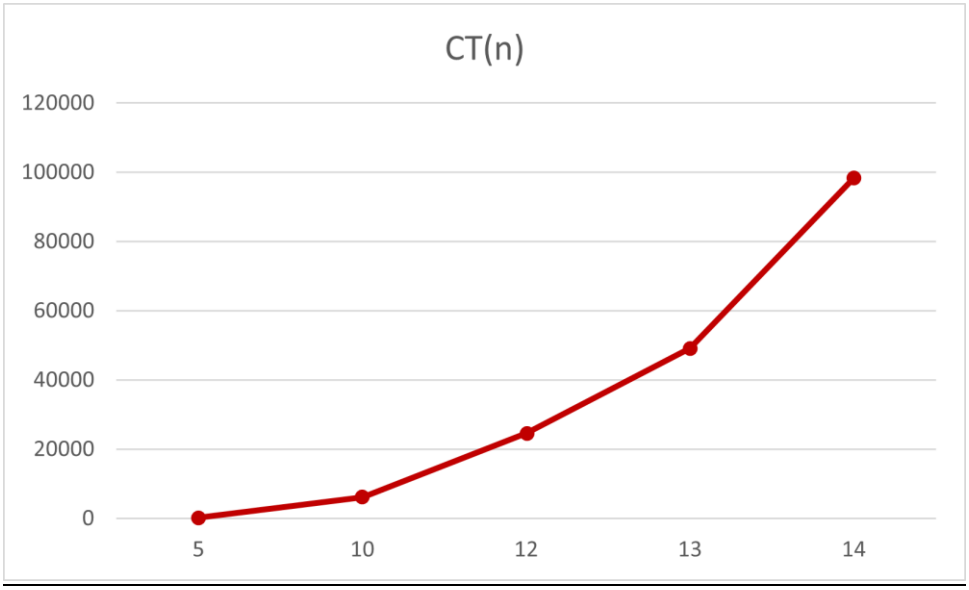
n	30	35	40	45	50
T(s)	….	….	…..	…..	…..

5) Programme de mesure de temps :

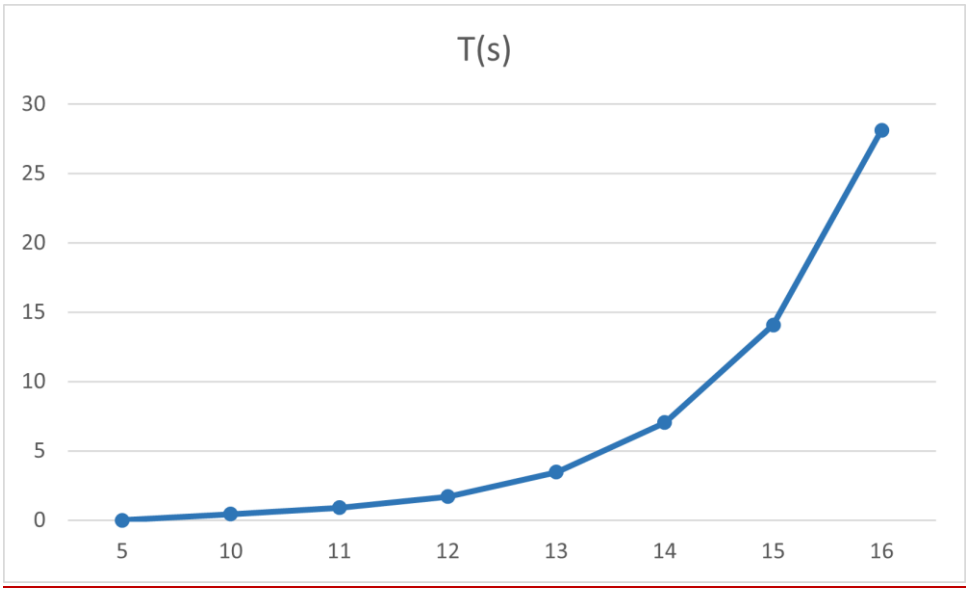
```
void mesurer_temps(int N)
{
   int T[]={0.006000, 0.441000, 0.8950, 1.707000, 3.46521, 7.0343}
   int CT ;
   CT=(6*(2**N))-2 ;
   printf(''Complexité théorique pour %d disques : %d '',N,CT) ;

}
```

6) Graphes :

1. Graphe $\mathbf{G_{CT}(n)}$ des variations de la complexité temporelle CT(n) en fonction de N :



2. Graphe **$G_T(n)$** des variations du temps d'exécution T(n) en fonction de N :



7) Interprétation des résultats :

7.a. Comparaison des mesures de temps d'exécution avec le pire et meilleur cas :
Dans cet algorithme, nous n'avons pas de complexité au pire et meilleur cas , nous comparons alors la complexité exacte obtenu et ce qui est claire à partir du graphe que les temps d'exécution suivent la même évolution, exponentielle et elle est en $O(2^n)$.

7.b. Remarque et déduction d'une fonction T(n) reliant n au temps d'exécution :

On remarque que les temps d'exécution sont approximativement multipliés par 2 lorsque N est incrémenté de 1. (quand on compare chaque nbr avec son suivant)

Exemples :

N1 = 10 ⇒ T1 = 0.441000

$N2 = 11 \approx N1 + 1 \Rightarrow T2 = 0.8950 \approx 2 * T1$
Aussi $N1 = 12 \Rightarrow T1 = 1.707000$ $N2 = 13 \approx N1 + 1 \Rightarrow T2 = 3.46521 \approx 2 * T1$
On en déduit que le temps d'exécution est proportionnel à N, ce que l'on peut représenter par la formule suivante :

$$\mathbf{T(N + 1) = 2^1 * T(N)} \quad \textit{pour tous } N \in [0 - 64]$$

(x étant la tangente d'un point sur le graphe). Nous ne pouvant pas généraliser car les tests que nous avons faits n'englobent pas toutes les valeurs possibles.

7.c. Comparaison de la complexité théorique et expérimentale :

Dans le cas des données de l'échantillon ci-dessus, la complexité expérimentale est du même ordre de grandeur que la complexité théorique, et Donc **Le modèle théorique est conforme aux mesures expérimentales.**

Partie II

Développement de l'algorithme et du programme du problème des tours de Hanoi avec le langage Java

3) L'algorithme en Java :

```
import java.io.*;
import java.math.*;
import java.util.*;
import java.time.Duration;


public class Hanoi_Tours
{
        static void Hanoi(int n, char Dep,char Arr, char Inter)
          {
            if (n == 1)
            {
               System.out.println("Disque " + n + " de "+ Dep + " a "+ Arr);
            }
            else
            {
            Hanoi(n - 1, Dep, Inter, Arr);
            System.out.println("Disque " + n + " de "+ Dep + " a "+ Arr);
            Hanoi(n - 1, Inter, Arr, Dep);
            }
          }
          public static void main(String args[])
          {
                int N;
                do {
                        Scanner sc = new Scanner(System.in);
                        System.out.println("\n-Veuillez saisir le nombre de disques:");
```

```
            N = sc.nextInt();
        }while(N<=1);

        double start, end,time;
        start = System.currentTimeMillis();

        Hanoi(N,'A','C','B');
        end = System.currentTimeMillis();
        time = (end - start) / 1000F;

        System.out.println("\n-Temps d'execution: "+ time +" secondes");
    }

}
```

4) Les temps d'exécution T :

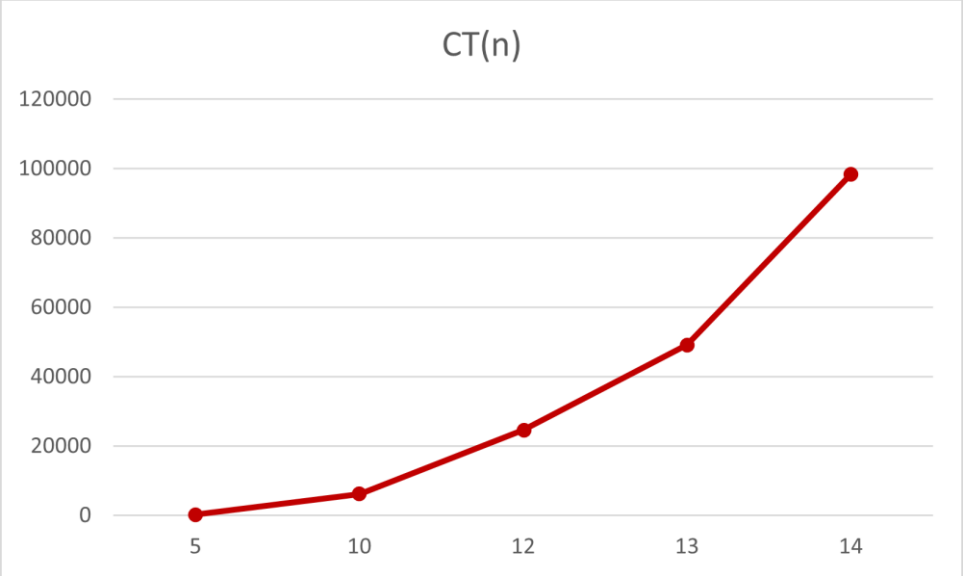
On complète le tableau suivant :

n	5	10	11	12	13	14	15	16	17
T(s)	0.035	0.565	0.907	1.896	4.238	9.0001	15.028	30.125	75.3125

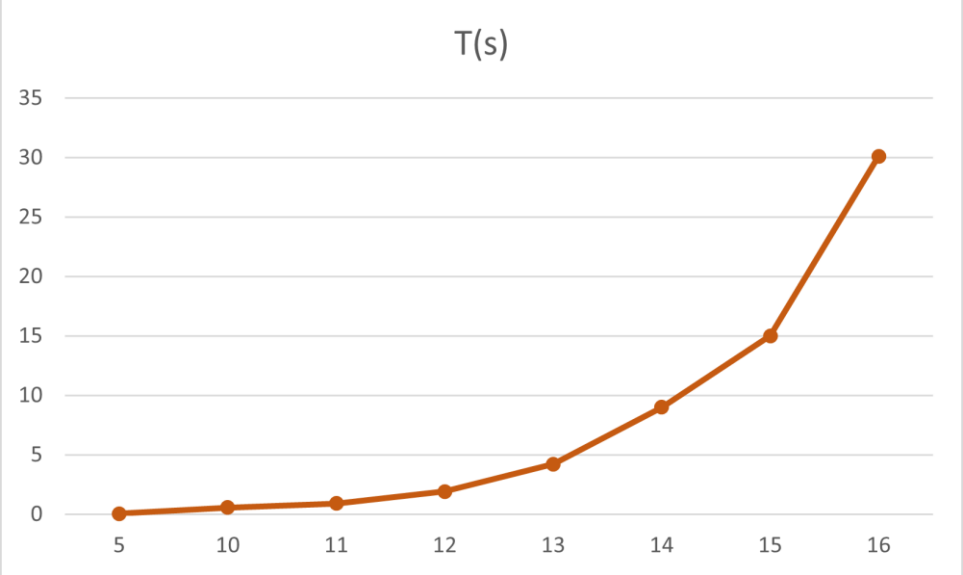
n	20	30	35	40	45	50
T(s)	1176.3409	….	….	…..	…..	…..

5) Graphes :

1. Graphe **$G_{CT}(n)$** des variations de la complexité temporelle CT(n) en fonction de N :



2. Graphe **$G_T(n)$** des variations du temps d'exécution T(n) en fonction de N :



Partie

Conclusion Générale

On note que les temps d'exécution en C sont plus petits que celles du java, autrement dit, l'exécution de l'algorithme de Hanoi en c est rapide qu'en java et cela revient à le fait que le langage C est un langage de bas-niveau et qui proche de langage machine donc une fois compilé il sera exécuté par contre le java est un langage de plus haut niveau il va être d'abord interprété et ensuite traduit en langage machine et ce qui prend un temps.