Лекция 16. Свойства непрерывных функций; точки разрыва

16.1. Сохранение знака непрерывной функции

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма 16.1.1. *Пусть $f(x)$ непрерывна в точке a, при этом $f(a) \neq 0$, тогда существует δ-окрестность точки a, в которой $f(x)$ имеет тот же знак, что и в точке a.*

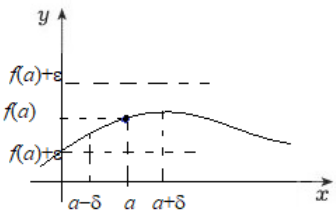

Рис. 1: Иллюстрация к лемме.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) > 0$. Так как $f(x)$ непрерывна в точке a, то согласно определению

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall\, x \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon,$$

в том числе для $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2} > 0$ при всех $x \in U_\delta(a)$ справедливо

$$0 < \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}.$$

Если $f(a) < 0$, то надо взять $\varepsilon = -\dfrac{f(a)}{2} > 0$. Лемма доказана.

16.2. Теоремы Вейерштрасса

Определение 16.1. Функцию называют непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b), а также непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Теорема 16.2.1. *Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Ограниченность функции f на отрезке $[a, b]$ означает существование такого числа C, что $|f(x)| \le C$ при всех $x \in [a, b]$.

Докажем теорему от противного. Предположим, что функция f непрерывна на $[a, b]$, но не является ограниченной на $[a, b]$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такая точка $x_n \in [a, b]$, что $|f(x_n)| > n$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Последовательность точек x_n ограничена, так как все они принадлежат отрезку $[a, b]$. Значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}. Пусть $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, тогда $\xi \in [a, b]$.

В силу непрерывности функции f в точке ξ (если ξ – один из концов отрезка, имеется в виду односторонняя непрерывность) для любой сходящейся к ξ последовательности точек t_k из $[a,b]$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k)=f(\xi)$.

Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=f(\xi)$. Но из $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$ следует равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=\infty$ и мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Отметим, что для функций, непрерывных на интервале, утверждение, подобное теореме 16.2.1, не верно. Это видно на примере функции $1/x$, которая на интервале $(0,1)$ непрерывна, но неограничена.

Определение 16.2. Говорят, что функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a,b]$ своей точной верхней грани и точной нижней грани, если существуют x', $x''\in[a,b]$ такие, что

$$f(x')=\sup_{[a,b]} f(x),\quad f(x'')=\inf_{[a,b]} f(x).$$

Теорема 16.2.2. *Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своей точной верхней и точной нижней граней.*

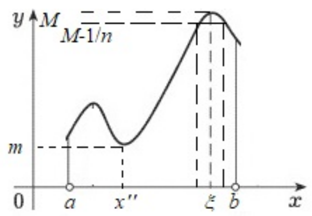

Рис. 2: Иллюстрация к теореме 16.2.2.

Доказательство. Докажем достижимость точной верхней грани. Заметим, что точная верхняя грань значений функции существует, так как согласно теореме 16.2.1 из непрерывности функции на отрезке следует её ограниченность.

Пусть $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Для каждого натурального n существует точка $x_n\in[a;b]$ такая, что $f(x_n)>M-1/n$. Так как $f(x_n)\le M$ при всех n, то по теореме „о двух милиционерах“

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M \tag{16.1}$$

Последовательность x_n согласно теореме Больцано-Вейерштрасса имеет сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Пусть $\xi=\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, тогда $\xi\in[a,b]$. Так как f непрерывна в точке ξ, то $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=f(\xi)$, и из (16.1) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=M$. Значит, $M=f(\xi)$.

Для точной нижней грани рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Таким образом, можно говорить о максимальном значении функции, непрерывной на отрезке, и писать в этом случае не $\sup\limits_{[a,b]} f(x)$, а $\max\limits_{[a,b]} f(x)$.

Замечание 16.1. Для функций, непрерывных на интервале, утверждение, подобное теореме 16.2.2, не имеет места, даже если дополнительно предполагать ограниченность функции. Например, $f(x)=x$, $x\in(a,b)$, – непрерывная на (a,b), ограниченная, но не достигает своих точных граней.

Замечание 16.2. Теорема 16.2.2 не является конструктивной, так как только констатирует существование точки на отрезке, в которой функция достигает своей точной верхней (нижней) грани, но не дает алгоритма поиска этой точки.

16.3. Теоремы Больцано-Коши

Теорема 16.3.1. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, тогда существует точка $\xi \in [a,b]$, в которой $f(\xi) = 0$.*

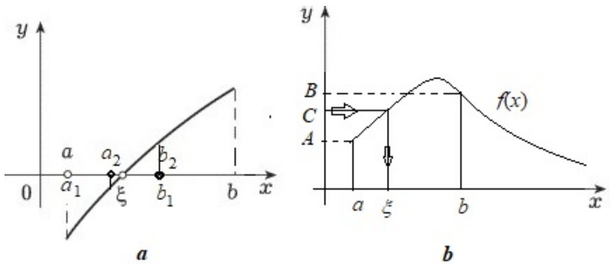

Рис. 3: (***a***) Иллюстрация к теореме 16.3.1; (***b***) к теореме 16.3.2.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам. Если в точке деления значение функции равно нулю, то в качестве ξ можно взять эту точку деления.

Если в точке деления значение функции f отлично от нуля, то в концах одного из получившихся отрезков значения f имеют разные знаки: в левом конце значение f меньше нуля, в правом – больше нуля. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Заметим, что

$$b_1 - a_1 = (b-a)/2.$$

Делим теперь отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и повторяем предыдущее рассуждение. Если в точке деления функция обращается в нуль, то нужная точка уже найдена. В противном случае выбираем тот из полученных отрезков, обозначив его $[a_2, b_2]$, в концах которого $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$. Длина $[a_2, b_2]$ в два раза меньше длины отрезка $[a_1, b_1]$.

Продолжим этот процесс. Если мы не встретим нуль функции на каком-то шаге, то получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, длины которых

$$b_n - a_n = (b-a)/2^n$$

стремятся к нулю. Значит, согласно принципу вложенных отрезков существует точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам, при этом

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \xi, \quad f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0.$$

В силу непрерывности $f(x)$ и сохранения в пределе лишь нестрогого неравенства имеем

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Отсюда следует, что $f(\xi) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 16.3.2. *(Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции). Если непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, $A \neq B$, то она принимает любое значение между ними, т. е.*

$$\forall\, C \in [A,B] \quad \exists\, \xi \in [a,b]: \quad f(\xi) = C.$$

Доказательство. Пусть для определенности $A < B$. Введём функцию $g(x) = f(x) - C$. Функция g непрерывна на отрезке $[a, b]$ и

$$g(a) = f(a) - C = A - C < 0, \quad g(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Значит, по уже доказанной теореме 16.3.1 существует точка $\xi \in [a, b]$, в которой $g(\xi) = 0$. Таким образом, $f(\xi) - C = 0$ и $f(\xi) = C$. Теорема доказана.

Следствие 16.3.3. *Множество значений непрерывной на отрезке функции есть отрезок.*

Доказательство. Во-первых, множество значений непрерывной на отрезке функции ограничено по теореме 16.2.1.

Во-вторых, согласно теореме 16.2.2 точки минимума и максимума функции входят в множество значений функции.

В-третьих, согласно теореме 16.3.2 все числа между максимумом и минимумом функции также входят в множество значений функции. Следствие доказано.

16.4. Равномерная непрерывность на множестве

Если функция f непрерывна на промежутке X, то для каждой точки $x_0 \in X$ и произвольного положительного ε существует такое положительное число δ, что при всех x из области определения функции f таких, что $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

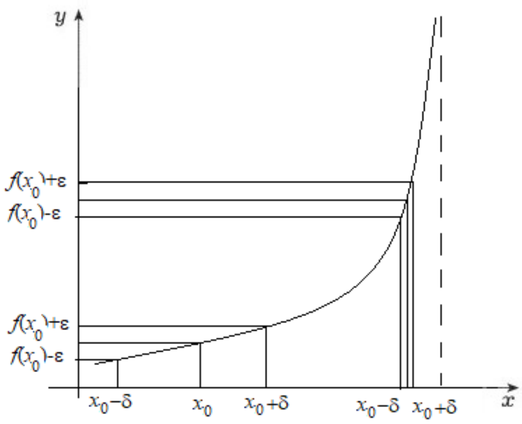

Рис. 4: Иллюстрация к определению непрерывности функции на промежутке.

При этом для каждой точки промежутка X при одном и том же ε имеем, вообще говоря, своё δ. Таким образом, δ зависит не только от ε, но и от x_0. Если же δ можно выбрать зависящим только от ε, говорят о равномерной непрерывности функции на промежутке X.

Определение 16.3. Функцию f, заданную на промежутке X, называют равномерно непрерывной на этом промежутке, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых точек x' и x'' из X, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Промежуток, о котором говорится в этом определении, может быть отрезком, интервалом или полуотрезком, в том числе и неограниченным.

Очевидно, что равномерно непрерывная на промежутке функция является непрерывной на этом промежутке. Обратное утверждение не справедливо.

Пример 16.1. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$. Докажем, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на этом интервале, т. е.

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists x',\, x'' \in (0,1) \quad |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

$\diamond$ Заметим, что $1/x \in (1, +\infty)$ при $x \in (0,1)$.

Возьмем $\varepsilon = 1/2$. Для произвольного положительного δ выберем x'_n, $x''_n \in (0,1)$:

$$x'_n = \frac{1}{n}, \quad x''_n = \frac{1}{2n}, \quad f\left(x'_n\right) = n, \quad f\left(x''_n\right) = 2n,$$

для которых неравенство $|x'_n - x''_n| = \dfrac{1}{2n} < \delta$ имеет место начиная с некоторого номера N, в то время как $|f(x'_n) - f(x''_n)| = n > \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Пример 16.2. Функция $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$. Докажем, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на этом интервале, т. е.

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists x',\, x'' \in (0,1) \quad |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

$\diamond$ Заметим, что $1/x \in (1, +\infty)$ при $x \in (0,1)$, поэтому $\sin \frac{1}{x}$ принимает любые значения из отрезка $[-1, 1]$.

Возьмем $\varepsilon = 1/2$. Для произвольного положительного δ выберем x'_n, $x''_n \in (0,1)$:

$$x'_n = \frac{1}{\pi n}, \quad x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad f\left(x'_n\right) = 0, \quad f\left(x''_n\right) = 1,$$

для которых неравенство $|x'_n - x''_n| = \dfrac{1/2 + n}{n(1/2 + 2n)} < \delta$ имеет место начиная с некоторого номера N, в то время как $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1 > \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 16.4.1. *(Теорема Кантора). Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Предположим противное: пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной. Тогда $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, \delta > 0$ найдутся такие точки x' и x'' из $[a, b]$, что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

Выбирая δ, равные $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, находим для каждого n пару точек x'_n и x''_n из $[a, b]$ такую, что $|x'_n - x''_n| < 1/n$ и $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$. Она ограничена, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$. Пусть $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k}$, тогда $\xi \in [a, b]$. Так как

$$|x''_{n_k} - \xi| \leq |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - \xi|, \quad \text{то и} \quad \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = \xi.$$

Из непрерывности f в точке ξ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x'_{n_k}\right) = f\left(\xi\right)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x''_{n_k}\right) = f\left(\xi\right)$, а это противоречит неравенству $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon$. Теорема доказана.

Отметим, что функции, непрерывные на интервале, подобным свойством не обладают.

16.5. Классификация точек разрыва

Перед тем, как дать определение точки разрыва функции, дадим еще одно определение непрерывности $f(x)$ в точке a.

Определение 16.4. Функцию f называют непрерывной в точке a, где a – предельная точка области определения $D(f)$, если

1. функция f определена в этой точке, т. е. $\exists\, f(a)$;
2. существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, т. е. существуют односторонние пределы и $f(a-) = f(a+)$;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

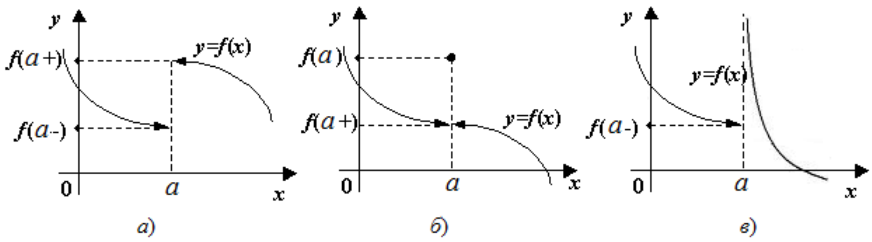

Рис. 5: Точки разрыва.

Определение 16.5. Предельную точку a области $D(f)$ называют точкой разрыва функции f, если хотя бы одно из трех условий в определении 16.4 не выполняется.

Замечание 16.1. Непрерывные функции могут иметь точки разрыва. Это точки, предельные для области определения функции, но не принадлежащие этой области. На рис. 5 (а, в) точка разрыва a не принадлежит области определения функции. Такие функции мы называем непрерывными.

Определение 16.6. Функцию f называют разрывной, если хотя бы одна точка разрыва функции f принадлежит области определения $D(f)$ (рис. 5 б).

Точку разрыва классифицируют по второму условию в определении 16.4.

Если a является точкой разрыва функции f и существуют конечные односторонние пределы $f(a+)$ и $f(a-)$, то a называют точкой разрыва I рода (рис. 5 а, б).

Если a – точка разрыва функции I рода и $f(a+) = f(a-)$, то либо f не определена в точке a, либо f определена в этой точке, но $f(a) \neq f(a+)$. Положив $f(a) = f(a+)$, т. е. доопределив или переопределив f в точке a, получим непрерывную функцию. Такие точки разрыва называют устранимыми (рис. 5 б).

Точку разрыва I рода называют точкой неустранимого разрыва, если

$$f(a+) \neq f(a-).$$

В этом случае нельзя получить непрерывную функцию, доопределив или переопределив f в точке a (рис. 5 а).

Если точка разрыва функции не является точкой разрыва I рода, то ее называют точкой разрыва II рода (рис. 5 в).

Если хотя бы один из односторонних пределов в точке разрыва не существует даже в обобщенном смысле (т. е. не равен бесконечности с определенным знаком), то такую точку называют точкой существенного разрыва.

Если точка разрыва II рода не является точкой существенного разрыва, то ее называют точкой бесконечного разрыва (рис. 5 в).