

Лекция 23. Формула Тейлора

23.1. Многочлен Тейлора

Известно, что наиболее простыми функциями в смысле вычисления являются многочлены. Возникает вопрос о возможности замены функции f в окрестности точки x многочленом некоторой степени.

Из определения дифференцируемости функции f в точке x_0 следует, что если $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то ее приращение в некоторой достаточно малой окрестности $U_\delta(x_0)$ можно представить в виде $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, где $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

Другими словами, существует многочлен первой степени

$$P_1(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0),$$

такой что при $x \rightarrow x_0$ имеет место представление $f(x) = P_1(x) + o(x - x_0)$, причем $P_1(x)$ удовлетворяет следующим условиям: $P_1(x_0) = f(x_0)$, $P_1'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$.

Обозначим, через $r_1(x)$ разность значений данной функции $f(x)$ и построенного многочлена $P_1(x)$: $r_1(x) = f(x) - P_1(x) = o(x - x_0)$. $r_1(x)$ есть погрешность, возникающая при замене функции $y = f(x)$ многочленом $P_1(x)$. Для значений из окрестности $U_\delta(x_0)$, для которых погрешность $r_1(x)$ достаточно мала, многочлен $P_1(x)$ дает приближенное представление функции.

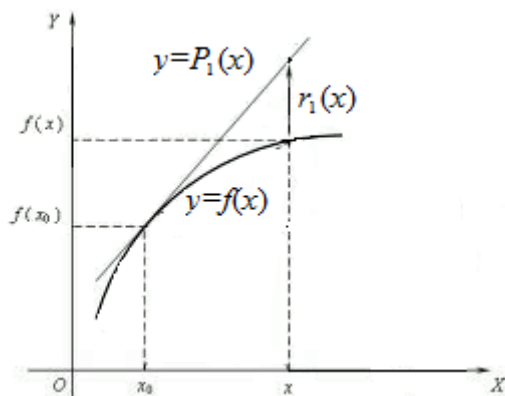


Рис. 1: Погрешность при замене функции $f(x)$ многочленом $P_1(x)$.

Таким образом, зная значение функции и производной в точке x_0 можно приближенно вычислить значение функции в окрестности $U_\delta(x_0)$. Предположим, что в точке x_0 известны n производных функции f в точке x_0 . Какую информацию о характере поведения функции они несут?

Рассмотрим сначала в качестве функции f многочлен $Q(x)$ степени n относительно переменной x . Запишем его как многочлен по степеням $x - x_0$:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

и покажем, что коэффициенты a_k можно выразить через значения производных многочлена $Q(x)$ в точке x_0 . Так как производные функции $Q(x)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} Q'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}, \\ Q''(x) &= 2!a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ Q^k(x) &= k!a_k + (k+1)!(x - x_0) + \dots + n(n-1) \dots (n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k}, \\ &\dots\dots\dots \\ Q^n(x) &= n!a_n, \end{aligned}$$

то $Q^{(k)}(x_0) = k!a_k$, $k = \overline{0, n}$, и все коэффициенты многочлена $Q(x)$ выражаются через значения производных функции $Q(x)$ в точке x_0 : $a_k = \frac{Q^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = \overline{0, n}$. Нулевая производная есть значение функции в точке: $Q^{(0)}(x_0) = Q(x_0)$. Многочлен n -го порядка полностью определяется своими производными:

$$Q_n(x) = Q(x) = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Для произвольной функции $f(x)$, имеющей в точке x_0 производные до порядка n включительно, построим многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (23.1)$$

Многочлен $P_n(x)$, заданный формулой (23.1), называют **многочленом Тейлора** порядка n функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 .

Обозначим, через $r_n(x)$ разность значений функции $f(x)$, имеющей в точке x_0 производные до порядка n включительно, и её многочлена Тейлора порядка n :

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (23.2)$$

$r_n(x)$ есть погрешность, возникающая при замене функции $y = f(x)$ многочленом $P_n(x)$. Для значений из окрестности $U_\delta(x_0)$, для которых погрешность $r_n(x)$ достаточно мала, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление функции (рис. 2).

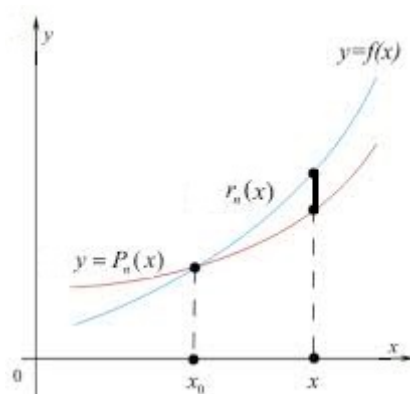


Рис. 2: Погрешность при замене функции $f(x)$ многочленом $P_n(x)$.

Определение 23.1. Формулой Тейлора порядка n функции f в окрестности точки x_0 называют равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x). \quad (23.3)$$

Функцию $r_n(x)$ называют остаточным членом формулы Тейлора.

Формулу (23.3) при $x_0 = 0$ нередко называют формулой Маклорена.

Пример 23.1. Для функции $f(x)$, заданной параметрически уравнениями

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in (0; \pi), \quad (23.4)$$

написать многочлен Тейлора третьего порядка в окрестности точки $x_0 = 0$.

◇ Точка $x_0 = 0$ соответствует значению параметра $t = \pi/2$. Определяем значение функции f в точке $x_0 = 0$: $f(0) = y(\pi/2) = 1$.

Функции $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы при $t = \pi/2$, и $x'_t = -\sin t \neq 0$ при $t = \pi/2$. По правилу дифференцирования параметрически заданной функции находим

$$f'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \quad f''_{xx} = \frac{-(\operatorname{ctg} t)'}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t},$$

$$f'''_{xxx} = \frac{-(\sin^{-3} t)'}{-\sin t} = -3 \frac{\sin^{-4} t \cos t}{\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin^5 t}, \quad t \in (0; \pi).$$

Соответственно,

$$f'(0) = -\operatorname{ctg} t \Big|_{t=\pi/2} = 0, \quad f''(0) = -\frac{1}{\sin^3 t} \Big|_{t=\pi/2} = -1, \quad f'''(0) = -\frac{\cos t}{\sin^5 t} \Big|_{t=\pi/2} = 0.$$

Многочлен Тейлора третьего порядка функции f в окрестности точки $x_0 = 0$ имеет вид

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Для функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$ совпадают многочлены Тейлора нулевого и первого порядка: $P_0(x) = P_1(x) = 1$, а также многочлены Тейлора второго и третьего порядка: $P_2(x) = P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

На рис. 3 изображены графики функции $f(x)$ и ее многочленов Тейлора до третьего порядка включительно в окрестности точки $x_0 = 0$.

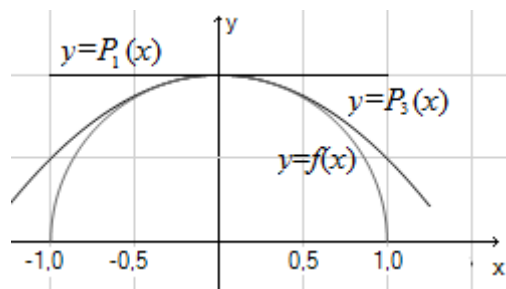


Рис. 3: Графики функции $f(x)$ и ее многочленов Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$.

23.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Теорема 23.2.1 (Локальная формула Тейлора). Если функция $y = f(x)$ определена и n раз дифференцируема в точке x_0 , то при $x \rightarrow x_0$ ¹ имеет место формула Тейлора (23.3) с остаточным членом $r_n(x)$ в форме Пеано:

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

Доказательство. Легко видеть из равенства (23.3), что в точке x_0 функция

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

и все её производные до порядка n обращаются в нуль:

$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = r''_n(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Докажем, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. Применим n раз правило Лопиталья для раскрытия неопределенности $\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}$ вида $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r''_n(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = 0, \end{aligned}$$

следовательно, при $x \rightarrow x_0$ функция $r_n(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка², чем бесконечно малая функция $(x - x_0)^n$, что и требовалось доказать.

Теорема 23.2.2 (Единственность представления функции формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Если для некоторой функции справедливо представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0, \quad (23.5)$$

то коэффициенты a_k в нем определяются единственным образом.

Доказательство. Действительно, если наряду с (23.5) имеем разложение

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0, \quad \text{то} \\ \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) (x - x_0)^k &= o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0. \end{aligned} \quad (23.6)$$

¹Иными словами – в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 .

²Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$.

Так как согласно определению степенной функции $(x-x_0)^0 \equiv 1$, то при переходе в (23.6) к пределу при $x \rightarrow x_0$, получим $a_0 = b_0$. Поэтому в (23.6) можно опустить слагаемое, соответствующее $k = 0$:

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) (x - x_0)^k = o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0. \quad (23.7)$$

Если $n \geq 1$, то разделив левую и правую части равенства в (23.7) на $x - x_0$, находим

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) (x - x_0)^{k-1} = o((x - x_0)^{n-1}), \quad x \rightarrow x_0.$$

В последнем равенстве вновь переходим к пределу при $x \rightarrow x_0$ и получаем $a_1 = b_1$.

Продолжив этот процесс, видим, что $a_k = b_k$ при всех $k \leq n$. Таким образом, если для функции справедливо представление (23.5), то коэффициенты a_k в этом разложении определяются однозначно. Теорема доказана.

23.3. Стандартные разложения.

Рассмотрим несколько важнейших элементарных функций и найдём для них многочлены Тейлора при $x_0 = 0$.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Все её производные совпадают с ней: $f^{(k)}(x) = e^x$, так что коэффициенты Тейлора в точке $x_0 = 0$ равны

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} e^0 = \frac{1}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому локальная формула Тейлора порядка n

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (23.8)$$

для экспоненты в окрестности точки $x_0 = 0$ такова:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \quad (23.9)$$

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Её производные чередуются в таком порядке:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x,$$

а затем цикл повторяется, т. е. $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + \frac{\pi k}{2})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Поэтому при подстановке $x_0 = 0$ в производные также возникает повторение:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0 = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \dots$$

Все производные с чётными номерами оказываются равными 0; производные с нечётными номерами равны 1 или -1 :

$$f^{(k)}(0) = (\sin x)^{(k)} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ (-1)^{m-1}, & \text{при } k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты Тейлора равны

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{(-1)^{m-1}}{k!}, & \text{при } k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Получаем формулу Тейлора для синуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}). \quad (23.10)$$

Заметим, что мы можем записать остаточный член $o(x^{2m})$ вместо $o(x^{2m-1})$ (как можно было бы подумать), поскольку можно считать, что слагаемое порядка $2m$, с коэффициентом, равным 0, тоже включено в многочлен Тейлора.

3. Для функции $f(x) = \cos x$ производные также чередуются с циклом длины 4, как и для синуса, так как $(\cos x)^{(k)} = \cos(x + \frac{\pi k}{2})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Значения в точке $x_0 = 0$ имеют то же чередование:

$$\begin{aligned} f(0) = \cos 0 = 1, \quad f'(0) = -\sin 0 = 0, \quad f''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f'''(0) = \sin 0 = 0, \\ f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1, \dots \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\ (-1)^m, & \text{при } k = 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Поэтому разложение косинуса по формуле Тейлора имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}). \quad (23.11)$$

Здесь мы также считаем, что последним в многочлене Тейлора выписано слагаемое, содержащее x^{2m+1} с нулевым коэффициентом.

4. Для функции $f(x) = \ln(1+x)$ производная k -го порядка находится по формуле

$$(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Имеем $f^0(0) = f(0) = 0$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ для всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому в окрестности точки $x_0 = 0$ имеет место разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n). \quad (23.12)$$

5. Для функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ при фиксированном $\alpha \in \mathbb{R}$ производная k -го порядка находится по формуле

$$((1+x)^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Имеем $f^0(0) = f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому в окрестности точки $x_0 = 0$ имеет место разложение

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n). \quad (23.13)$$

Если в полученной формуле (23.13) принять $\alpha = n$, где n — натуральное число, и учесть, что $f^{(k)}(x) = 0$ при $k \geq n + 1$, то получим известную формулу

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + x^n,$$

называемую формулой бинома Ньютона.

На основе полученных разложений (23.9)–(23.13) можно получать формулы Тейлора многих других функций без явного использования (23.8). Поскольку представление функции формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (локальной формулой Тейлора) единственно (теорема 23.2.2), то разложение, полученное с использованием формул (23.9)–(23.13), будет совпадать с формулой (23.8).

Пример 23.2. Получить представление гиперболических функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ в окрестности точки $x_0 = 0$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

◇ Нетрудно получить искомое представление по формуле (23.8), а можно получить это же представление, используя стандартное разложение (23.9), что мы и сделаем.

Начнём с того, что напомним ранее найденное разложение для экспоненты (23.9):

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n),$$

и положим в нём $t = -x$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Подставив разложения для e^x и e^{-x} в выражения $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, получим

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}).$$

Сравните найденные разложения с разложениями для $\sin x$ и $\cos x$.

23.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано удобно использовать для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ путем выделения главной части бесконечно малых функций³.

Пусть требуется найти предел при $x \rightarrow x_0$ отношения $f(x)/g(x)$, в котором функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$. Если для этих функций выполнены условия теоремы 23.2.1, то при $x \rightarrow x_0$ можно построить представление вида

$$f(x) = a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad g(x) = b_m(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m),$$

³Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$, причем $\beta = o(\alpha)$ при $x \rightarrow x_0$, то говорят, что $\alpha(x)$ — главная часть бесконечно малой функции $\alpha(x) + \beta(x)$.

где $a_n, b_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, ограничившись в них лишь первыми не равными нулю слагаемыми. Тогда

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)}{b_m(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m)} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{n-m}$$

и в зависимости от соотношения между n и m возможны три случая

1. $L = 0$ при $n > m$;
2. $L = a_n/b_m$ если $n = m$;
3. $L = \infty$ при $n < m$.

Другие виды неопределенности могут быть сведены к неопределенности $0/0$. Если $x_0 \neq 0$, то для удобства представления функций $f(x)$ и $g(x)$ целесообразно ввести новую переменную $t = x - x_0$. Это позволяет воспользоваться стандартными разложениями (23.9)–(23.13). Случай $x \rightarrow \infty$ заменой $x = 1/t$ также сводится к случаю $t \rightarrow 0$.

Пример 23.3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}}$.

◇ Для начала найдём разложение по формуле Тейлора в точке 0 для числителя:

$$-1 - x + e^x = -1 - x + 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Разложим функции в знаменателе:

$$\sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{1/2(-1/2)}{2!}(-x)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2),$$

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2!}(\sqrt{x})^2 - \frac{1}{4!}(\sqrt{x})^4 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2).$$

После приведения подобных членов, получаем представление функции по формуле Тейлора в знаменателе

$$\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x} = -\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right)x^2 + o(x^2).$$

Заметим, что $o(x^2) \pm o(x^2) = o(x^2)$. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right)x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right)} = -3.$$

Заметим, что этот способ раскрытия неопределённостей типа $0/0$ в некоторых случаях, подобных разобранному в примере, менее трудоёмок, чем применение правила Лопиталя.

Д/З: Доказать, что формула Тейлора в окрестности $x = 0$ четной (нечетной) функции f содержит в себе члены только четной (нечетной) степени x :

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{2m}x^{2m} + o(x^{2m+1})$$

$$(f(x) = a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{2m-1}x^{2m-1} + o(x^{2m})) .$$