Лекция 10. Принцип вложенных отрезков; теорема Больцано-Вейерштрасса; критерий Коши

10.1. Теоремы о вложенных отрезках

Определение 10.1. Систему отрезков

$$\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}} = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots\}$$

называют системой в л о ж е н н ы х отрезков, если выполняются неравенства

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1. \tag{10.1}$$

Теорема 10.1.1. *Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет непустое пересечение: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \ne \emptyset$.*

Доказательство. Обозначим множества левых и правых концов отрезков соответственно $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. В силу неравенств (10.1) последовательность $\{a_n\}$ в о з р а с т а е т, а последовательность $\{b_n\}$ у б ы в а е т. Тогда для любых n и m справедливо неравенство $a_n \le b_m$. Действительно, если $n < m$, то $a_n \le a_m \le b_m$; если $n > m$, то $a_n \le b_n \le b_m$. Сославшись на аксиому непрерывности[1] справедливую для множеств A и B, можно утверждать, что

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \le c \le b_n,$$

таким образом, $\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, что и требовалось доказать.

Определение 10.2. Систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ называют с т я г и в а ю щ е й с я, если $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Теорема 10.1.2. ***Принцип вложенных отрезков.*** *Если $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ – стягивающаяся система вложенных отрезков, то существует только одна точка c на числовой прямой, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = c,$$

при этом $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = c$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = c$.

Доказательство. Пусть существуют неравные числа c и d, принадлежащие всем отрезкам $[a_n; b_n]$, и для определённости $c < d$. Тогда из условий

$$a_n \le c < d \le b_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

находим $b_n - a_n \ge d - c > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$, т. е. длины отрезков не стремятся к нулю. Полученное противоречие доказывает единственность числа, принадлежащего всем отрезкам $[a_n, b_n]$.

---

[1] $\forall\, A, B \subset \mathbb{R} \quad (A, B \ne \varnothing) \wedge (\forall\, a \in A\ \forall\, b \in B \quad a \le b) \quad \exists\, c \in \mathbb{R} : \quad \forall\, a \in A \quad \forall\, b \in B \quad a \le c \le b.$

В этом случае, очевидно, $c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$ (вспомните доказательство теоремы о существовании точных граней ограниченного множества). Согласно теоремам о пределе монотонно возрастающей (убывающей) последовательности, ограниченной сверху (снизу) $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = c$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = c$. Теорема доказана.

Замечание 10.1. При доказательстве принципа вложенных отрезков мы опирались на аксиому непрерывности и неявным образом на теорему о существовании точных граней ограниченного множества, так как ссылались на теоремы о пределе монотонных ограниченных последовательностей. Надо отметить, что аксиома непрерывности, теорема о существовании точных граней ограниченного множества и принцип вложенных отрезков это „три кита“ математического анализа. Любую из них можно принять за аксиому и вывести из нее остальные теоремы.

Замечание 10.2. Система стягивающихся интервалов общей точки не имеет.

В самом деле, в последовательности интервалов $(0; 1/n)$ каждый следующий интервал вложен в предыдущий, длины этих интервалов равны $1/n$ и стремятся к нулю при $n \to \infty$. Но никакое число не может принадлежать всем интервалам $(0; 1/n)$: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(0; 1/n) = \emptyset$. В случае же отрезков $[0; 1/n]$: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[0; 1/n] = 0$.

10.2. Подпоследовательности; теорема Больцано - Вейерштрасса

Определение 10.3. Последовательность $\{y_k\}$ будем называть п о д п о с л е д о в а т е л ь - н о с т ь ю последовательности $\{a_n\}$, если

1. $\{y_k\}$ состоит из членов последовательности $\{a_n\}$;
2. в последовательности $\{y_k\}$ сохранен тот же порядок следования элементов, какой они имели в последовательности $\{a_n\}$.

Условия 1-2 в символьной записи:

1. $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_k \in \mathbb{N}: \quad a_{n_k} = y_k$;
2. $n_{k'} > n_{k''} \qquad \Leftrightarrow \qquad k' > k''$.

Можно сказать, что мы записываем подряд все члены последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, затем "вычеркиваем" некоторые её элементы, сохранив при этом бесконечно много элементов, и полученную последовательность называем подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.

Д/З: Доказать, что если последовательность сходится к конечному или бесконечному пределу ($+\infty$ или $-\infty$), то любая её подпоследовательность сходится к тому же самому пределу.

Если последовательность расходится, то это не означает, что все ее подпоследовательности расходятся. Так, последовательность $\{(-1)^n\}$ наряду с расходящимися подпоследовательностями имеет сходящиеся, например, стационарные последовательности $\{-1\}$, $\{1\}$.

Теорема 10.2.1. ***Теорема Больцано–Вейерштрасса.*** *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность и отрезок $[a, b]$, содержит все члены последовательности $\{x_n\}$.

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если последовательность содержит бесконечно много членов, равных $\dfrac{a+b}{2}$, то теорема доказана. Иначе, по крайней мере, один из полученных отрезков содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $[a_1, b_1]$ тот из отрезков, который содержит бесконечно много членов последовательности, а если таковы оба отрезка, то – любой из них. Возьмём произвольный элемент последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий отрезку $[a_1, b_1]$. Пусть это будет x_{n_1}.

Разделим теперь пополам отрезок $[a_1, b_1]$. Если последовательность содержит бесконечно много членов, равных $\dfrac{a_1+b_1}{2}$, то теорема доказана. Иначе, обозначим $[a_2, b_2]$ один из получившихся отрезков, содержащий бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Выберем элемент последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий отрезку $[a_2, b_2]$, такой, что его индекс n_2 больше, чем n_1. Так выбран элемент x_{n_2}.

На следующем шаге делим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам. Если не бесконечно много членов совпадает со значением $\dfrac{a_2+b_2}{2}$, берём отрезок $[a_3, b_3]$, содержащий бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, и выбираем в $[a_3, b_3]$ элемент x_{n_3} такой, что $n_3 > n_2$.

Если на каком-то шаге мы не наткнемся на стационарную подпоследовательность, то продолжив процесс „ловли льва в пустыни“[2], получим систему стягивающихся вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$, так как длины отрезков, равные $\dfrac{b-a}{2^k}$, стремятся к нулю при $k \to \infty$. Каждый из отрезков $[a_k, b_k]$ содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Мы выбирали члены подпоследовательности x_{n_k} так, чтобы $a_k \le x_{n_k} \le b_k$. Согласно принципу вложенных отрезков существует единственное число c:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] = c, \quad \lim_{k\to\infty}\{a_k\} = c, \quad \lim_{k\to\infty}\{b_k\} = c.$$

Тогда из теоремы «о двух милиционерах» следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_{n_k}\} = c$.

Таким образом, из ограниченной последовательности мы выделили сходящуюся подпоследовательность. Теоремма доказана.

Теорема 10.2.2. ***Аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченных последовательностей.*** *Из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.*

Д/З: Доказательство провести самостоятельно.

10.3. Критерий Коши

Словом "критерий" обычно называют необходимые и достаточные условия. В этом пункте будет установлен критерий существования у последовательности конечного преде-

[2]Рассекаем пустыню, окруженную предварительно решеткой, линией, проходящей с севера на юг. Лев находится либо в восточной части пустыни, либо в западной. Предположим для определенности, что он находится в западной части. Рассекаем ее линией, идущей с запада на восток. Лев находится либо в северной части, либо в южной. Предположим для определенности, что он находится в южной части, рассекаем ее линией, идущей с севера на юг. Продолжаем этот процесс до бесконечности, воздвигая после каждого шага крепкую решетку вдоль разграничительной линии. Площадь последовательно получаемых областей стремится к нулю, так что лев в конце концов оказывается окруженным решеткой произвольно малого периметра. На самом деле, конечно, льва мы не поймаем, потому что львы не водятся в пустыне, но данный метод помогает понять, как мы „ловим“ сходящуюся подпоследовательность.

ла.

Определение 10.4. Последовательность $\{a_n\}$ называют ф у н д а м е н т а л ь н о й (п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю К о ш и или с х о д я щ е й с я в с е б е), если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\,n > N, \quad \forall\,m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{10.2}$$

Это означает, что для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ существует элемент последовательности, начиная с которого все элементы последовательности находятся друг от друга на расстоянии менее, чем заданное ε.

Справедливы следующие три свойства.

1. *Если последовательность сходится, то она фундаментальная.*

   Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится к некоторому числу a. В силу этого $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\,n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon/2$. Поэтому, если $n > N$ и $m > N$, то

   $$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

2. *Если последовательность фундаментальна, то она ограничена.*

   Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ – фундаментальная, т. е. выполнено (10.2). Для $\varepsilon = 1$ найдём натуральное N такое, что при всех n, $m > N$ справедлива оценка $|a_n - a_m| < 1$. Положив $m = N + 1$, имеем для $n > N$

   $$|a_n - a_{N+1}| < 1$$

   и, значит, $|a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$. Поэтому, если

   $$C = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\},$$

   то $|a_n| \leq C$ при всех n.

3. *Если последовательность фундаментальная, то она сходится.*

   Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ – фундаментальная, т. е.

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_1,\, \forall m > N_1 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon/2.$$

   Тогда по сойству 2 она ограниченная.

   Из ограниченной последовательности согласно теореме Больцано–Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность$\{a_{n_k}\}$, сходящуюся при $k \to \infty$ к некоторому числу a:

   $$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,K(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\,k > K \quad |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2.$$

   Покажем, что a является пределом всей последовательности $\{a_n\}$.

   Выберем $N = \max\{N_1, K\}$. При всех $n > N$ имеем

   $$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ сходится к a.

Доказанные свойства фундаментальных последовательностей и составляют критерий Коши.

Теорема 10.3.1 (Критерий Коши)**.** *Для того чтобы последовательность была сходящейся в $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Множество называется п о л н ы м, если любая фундаментальная последовательность элементов этого множества сходится к элементу этого же множества.

Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной, но не каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу из своего множества.

Например, мы знаем, что последовательность рациональных чисел

$$2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

сходится к иррациональному числу e. Этот факт говорит о неполноте множества рациональных чисел.

Критерий Коши выражает свойство полноты множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

На практике используют также эквивалентную формулировку критерия Коши: последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\,n > N, \quad \forall\,p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Поскольку критерий Коши – это необходимое и достаточное условие сходимости последовательности, это означает, что если

$$\exists\,\varepsilon > 0 \quad \forall\,N \in \mathbb{N}: \quad \exists\,n > N, \quad \exists\,p \in \mathbb{N}: \quad |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon, \tag{10.3}$$

то последовательность $\{a_n\}$ расходится. Очевидно, что (10.3) является необходимым и достаточным условием расходимости последовательности $\{a_n\}$.