Лекция 18. Вычисление производных и дифференциалов

18.1. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями

Теорема 18.1.1. *Пусть функции u и v имеют производные в точке x, тогда*

1. $\big(u(x) \pm v(x)\big)' = u'(x) \pm v'(x)$;
2. $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
3. *если* $v(x) \neq 0$, *то* $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Доказательство.

Докажем, что производная произведения находится по формуле 2. Приращение произведения функций $u(x)$ и $v(x)$, соответствующее приращению Δx:

$$\Delta(uv) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x).$$

Так как $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, то $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$. Поэтому

$$\Delta(uv) = \big(u(x) + \Delta u\big)\big(v(x) + \Delta v\big) - u(x)v(x) = \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Каждое слагаемое в правой части полученного равенства имеет предел при $\Delta x \to 0$, причем последнее слагаемое стремится к нулю, так как $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции v. Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Прежде, чем доказать равенство 3, рассмотрим случай, когда $u(x) \equiv 1$, т. е. найдём производную дроби $1/v(x)$.

Так как функция v в точке x непрерывна и $v(x) \neq 0$, то v не обращается в нуль в некоторой окрестности точки x. Поэтому при достаточно малых приращениях Δx имеем

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x + \Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \frac{-\Delta v}{v(x + \Delta x)v(x)}.$$

Отсюда

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) : \Delta x = -\frac{1}{v(x + \Delta x)v(x)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Выражение в правой части этого равенства имеет предел при $\Delta x \to 0$. Значит, существует предел выражения в левой части и, таким образом,

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теперь с помощью формулы производной произведения находим производную частного в общем случае:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\frac{1}{v(x)} - u(x)\frac{v'(x)}{v^2(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Равенство 1 докажите самостоятельно, тогда теорема будет доказана.

Отметим, что представление дроби $\frac{u(x)}{v(x)}$ в виде произведения $u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$ нередко используется, когда нужно найти производную дроби.

Следствие 18.1.2. *Пусть функция u имеет производную в точке x, c — некоторая постоянная, тогда*

$$\big(c \cdot u(x)\big)' = c \cdot u'(x).$$

Пример 18.1. Производные функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Мы уже находили производные функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то для вычисления производных функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ можно воспользоваться теоремой 18.1.1 (точнее, формулой, выражающей производную частного).

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Равенства эти справедливы при всех x из области определения тангенса и, соответственно, котангенса.

18.2. Правила вычисления дифференциалов, связанные с арифметическими действиями над функциями

Теорема 18.2.1. *Пусть функции u и v дифференцируемы в некоторой точке x. Тогда существуют в этой точке следующие дифференциалы и для них справедливы равенства*

1. $d\big(u \pm v\big) = du \pm dv$;
2. $d\big(u \cdot v\big) = udv + vdu$;
3. *если* $v(x) \neq 0$, *то* $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Доказательство. Равенства эти доказываются однотипно. Например, второе получаем с помощью определения дифференциала $dy = y'(x)dx$ и равенства 2

$$d(uv) = (uv)'dx = u'vdx + uv'dx = vdu + udv.$$

Д/З: Остальные равенства доказать самостоятельно.

18.3. Производная обратной функции

Теорема 18.3.1. *Если функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 непрерывна, строго монотонна и имеет неравную нулю производную $f'(x_0)$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную $\dfrac{df^{-1}}{dy}(y_0)$ и справедливо равенство*

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{18.1}$$

Доказательство. Если функция $y = f(x)$ на интервале (a, b) непрерывна и строго монотонна и (c, d) – образ интервала (a, b) при отображении, осуществляемом функцией f, то согласно теореме о существовании непрерывной строго монотонной обратной функции на (c, d) существует обратная f функция $x = f^{-1}(y)$. Эта функция также непрерывна и строго монотонна.

Непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 означает, что из $\Delta x \to 0$ следует, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$. А непрерывность функции $x = f^{-1}(y)$ означает, что из $\Delta y \to 0$ следует $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) \to 0$.

Таким образом, условия $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ равносильны.

Придадим аргументу y обратной функции в точке y_0 произвольное отличное от нуля приращение Δy. Этому приращению отвечает приращение Δx обратной функции, причем в силу строгого возрастания (или убывания) функции $x = f^{-1}(y)$ приращение $\Delta x \neq 0$. Таким образом, мы имеем право написать следующее тождество:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}. \tag{18.2}$$

Пусть теперь в тождестве (18.2) $\Delta y \to 0$. Пользуясь равносильностью условий $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$, из (18.2) находим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Тогда по определению производной

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

что и требовалось доказать.

Используем формулу производной обратной функции для вычисления производных элементарных функций.

Пример 18.2. Производные логарифмической и обратных тригонометрических функций.

1. Так как логарифмическая функция является обратной показательной функции, производную которой мы знаем, то по формуле (18.1) найдем производную логарифмической функции. Если $y = \log_a x$, то $x = a^y$ и $\dfrac{da^y}{dy} = a^y \ln a$. Поэтому согласно (18.1) имеем
$$(\log_a x)' = \frac{1}{da^y/dy} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$
для всех $x > 0$. В частности, при $a = e$ имеем $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2. Пусть $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$. Тогда $x = \sin y$, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$. Значит,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{18.3}$$

для всех $x \in (-1; 1)$.

3. Пусть $y = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$. Имеем $x = \cos y$, $y \in [0; \pi]$, и

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{18.4}$$

для всех $x \in (-1; 1)$.

4. Если $y = \operatorname{arctg} x$, то $x = \operatorname{tg} y$ и для всех $x \in \mathbb{R}$ согласно (18.1)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. Аналогично для $y = \operatorname{arcctg} x$ при всех $x \in \mathbb{R}$ находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

18.4. Производная сложной функции

Теорема 18.4.1. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, $f(x_0) = y_0$ и функция $z = g(y)$ имеет производную в точке y_0. Тогда композиция функций*

$$z(x) = g\left(f(x)\right)$$

имеет производную в точке x_0 и справедливо равенство

$$z'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0). \tag{18.5}$$

Доказательство.

Для приращения функции g в силу ее дифференцируемости в точке y_0 справедливо равенство

$$\Delta z(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\cdot\Delta y, \tag{18.6}$$

где $\alpha(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$, $y_0 = f(x_0)$.

Поделим обе части равенства (18.6) на Δx:

$$\frac{\Delta z(f(x_0))}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

и устремим Δx к нулю.

Так как $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, значит, f непрерывна в точке x_0, т. е. бесконечно малому приращению аргумента Δx в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$; тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha\left(\Delta y\right) = 0$; при этом по определению производной функции f в точке x_0

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

В результате имеем

$$z'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z(f(x_0))}{\Delta x} = g'(y_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta y) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(y_0) f'(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Понятно, что эта теорема справедлива и для односторонних производных.

Представив производные как отношения дифференциалов, формулу 18.5 можно записать следующим образом:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}.$$

Пример 18.3. Производные гиперболических функций

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Поэтому

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Д/З: Найти производные обратных гиперболических функций:

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$$

18.5. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Ее дифференциал

$$dy = f'(x)dx \tag{18.7}$$

называют также *первым дифференциалом*.

Найдем дифференциалы от сложной функции $y = f(x(t))$, где t — независимая переменная, а x — зависимая переменная или промежуточный аргумент.

Согласно формуле (18.7) и правилу 18.5 дифференцирования сложной функции первый дифференциал имеет вид

$$dy = f'(t)dt = f'(x)x'(t)dt.$$

С другой стороны, $x'(t)dt = dx$, значит, для первого дифференциала dy сложной функции справедливы формулы

$$dy = f'(t)dt \tag{18.8}$$

и

$$dy = f'(x)dx. \tag{18.9}$$

Эти формулы выглядят одинаково, но их принципиальная разница состоит в том, что dt в (18.8) является дифференциалом независимой переменной (равным приращению независимой переменной), а в формуле (18.9) величина dx является дифференциалом зависимой переменной (промежуточного аргумента x, зависящего от t).

Свойство первого дифференциала, заключающееся в неизменности выражения его через дифференциалы независимой и зависимой переменной называют инвариантностью формы первого дифференциала.