Лекция 7. Свойства пределов последовательности

7.1. Единственность предела

Теорема 7.1.1. *Если последовательность имеет предел, то он е д и н с т в е н н ы й.*

Доказательство. Предположим противное — пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \wedge \quad a \neq b,$$

для определённости положим $a < b$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{b-a}{4} > 0$, т. е. $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$.

Пользуясь сходимостью последовательности $\{a_n\}$ к a, находим число N_1 такое, что для всех $n > N_1$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \tag{7.1}$$

Точно также в силу сходимости последовательности $\{a_n\}$ к b существует число N_2 такое, что для всех $n > N_2$

$$b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon \tag{7.2}$$

Выберем число $N = \max(N_1; N_2)$. При $n > N$ выполняются оба неравенства — и (7.1), и (7.2), следовательно, для всех $n > N$

$$b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

но тогда $b - \varepsilon < a + \varepsilon$. Значит, $0 < b - a < 2\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$, так как $\varepsilon = \dfrac{b-a}{4}$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

(a) (b)

Рис. 1. Взаимное расположение графиков степенных функций

Приведенное доказательство иллюстрирует рис. 1. Мы брали $\varepsilon-$окрестности точек a и b непересекающиеся (рис. 1 (a)), а получили, что все члены последовательности с достаточно большими номерами должны принадлежать пересечению этих окрестностей (рис. 1 (b).

В доказательстве теоремы использовались неравенства (7.1) и (7.2), из которых первое имело место при $n > N_1$, второе при $n > N_2$. Чтобы выполнялись оба эти неравенства, мы брали $n > N = \max(N1; N2)$. Такой приём будет часто использоваться в дальнейшем без пояснений.

7.2. Теорема «о двух милиционерах»

7.2.1. Для сходящихся последовательностей

Теорема 7.2.1. *Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу и для всех n выполняется*

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \tag{7.3}$$

тогда последовательность $\{b_n\}$ сходится к тому же пределу.

Доказательство. Обозначим $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, тогда теорему можно сформулировать короче:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a \ \wedge \ a_n \le b_n \le c_n\right) \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ находим N такое, что при всех $n > N$ выполняются неравенства

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{и} \quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon.$$

Тогда для таких n

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon,$$

т. е. $b_n \in U_\varepsilon(a)$ для всех $n > N$, что и требовалось доказать.

Замечание 7.1. Очевидно, что теорема справедлива и в случае строгих неравенств

$$a_n < b_n < c_n.$$

Замечание 7.2. Поскольку сходимость или расходимость последовательности и значение предела, если последовательность сходится, не зависят от ее начальных членов, то теорема справедлива и в случае, когда неравенства (7.3) выполняются начиная с некоторого номера. Подобное замечание можно будет сделать и к некоторым последующим теоремам, но не будем заострять на этом внимание.

Пример 7.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n^n} = 0$.

$\diamond$ Для всех $n \ge 6$ верно неравенство $\dfrac{3}{n} \le \dfrac{1}{2}$, поэтому

$$0 < \left(\frac{3}{n}\right)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

при $n \ge 6$. Здесь слева и справа стоят члены последовательностей, имеющих пределом ноль[1]. Значит, по теореме «о двух милиционерах» и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^n} = 0.$$

7.2.2. Аналог для бесконечно больших

Теорема 7.2.2. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и для всех n выполняется $a_n \le b_n$, тогда и*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

Короче, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \wedge \ a_n \le b_n\right) \ \Rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty.$

Доказательство. Для любого $E > 0$ находим N такое, что при всех $n > N$ выполняется неравенства

$$a_n > E.$$

Тогда для таких n

$$E < a_n \le b_n,$$

т. е. $b_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ для всех $n > N$, что и требовалось доказать.

[1] Смотри предыдущую лекцию.

Пример 7.2. Доказать, используя аналог теоремы «о двух милиционерах» для бесконечно больших последовательностей, что

$$\lim_{n\to\infty}(n!) = +\infty.$$

$\diamond$ Так как для всех $n \geq 1$ справедливо соотношение $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n \geq n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(n!) = +\infty$.

Д/З: Доказать аналогичную теорему, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ и для всех n выполняется $a_n \leq b_n$.

7.3. Предельные переходы в неравенствах

Теорема 7.3.1. *Члены сходящихся последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ начиная с некоторого номера будут связаны тем же неравенством, что и их пределы, короче, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то*

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad a_n > b_n.$$

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
Возьмём $\varepsilon = \dfrac{a-b}{4} > 0$, т. е. $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ и $b+\varepsilon < a-\varepsilon$ (рис. 2).

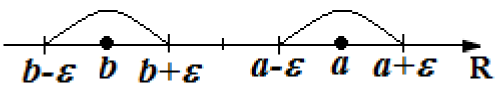

Рис. 2. Иллюстрация к доказательству теоремы 7.3.1.

Для данного ε находим N такое, что при всех $n > N$ выполняются неравенства

$$b-\varepsilon < b_n < b+\varepsilon \quad \text{и} \quad a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon.$$

Для этих n справедливо $b_n < b+\varepsilon < a-\varepsilon < a_n$, что и требовалось доказать.

Пример 7.3. Согласно теореме 7.3.1 все члены сходящейся последовательности с достаточно большими номерами положительны, если её предел положителен, и отрицательны, если предел отрицателен.

Теорема 7.3.2 (Сохранение нестрогого неравенства в пределе)**.** *Если члены сходящихся последовательностей связаны нестрогим неравенством*

$$a_n \leq b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то пределы этих последовательностей также связаны нестрогим неравенством

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Предположим противное: $a > b$, тогда из теоремы 7.3.1 следует, что

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad a_n > b_n,$$

но это противоречит условию $a_n \leq b_n$ доказываемой теоремы.

Замечание 7.1. Если в теореме 7.3.2 вместо нестрогих неравенств $a_n \le b_n$ выполненяются строгие неравенств $a_n < b_n$, то для пределов всё равно будет справедливо только нестрогое неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Это видно на примере последовательностей $a_n = 0$ и $b_n = 1/n$, для которых $a_n < b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Поэтому при переходе к пределу в строгих неравенствах необходимо соблюдать следующее правило: *если существуют пределы выражений в левой и правой частях строгого неравенства, то при переходе к пределу в этом неравенстве строгое неравенство нужно заменить на нестрогое.*

7.4. Связь ограниченности и сходимости

Определение 7.1. Последовательность ограничена, если ограничено числовое множество значений ее членов.

В символах: $\{a_n\}$ – ограниченная последовательность (ограничена), если

$$\exists C > 0 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \le C.$$

Д/З: Сформулировать в символах определения ограниченной последовательности сверху (снизу), неограниченной последовательности сверху (снизу), неограниченной последовательности.

Теорема 7.4.1. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Взяв $\varepsilon = 1$, находим N такое, что $|a_n - a| < 1$ для всех $n > N$. Тогда при этих n

$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Поэтому, положив $C = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a|\}$, получим $|a_n| \le C$ при всех n, т. е. последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Замечание 7.1. Ограниченность последовательности – необходимое условие ее сходимости, т. е. если последовательность неограниченная, то она расходится. Из ограниченности последовательности не следует ее сходимость. Например, ограниченная последовательность $a_n = (-1)^n$ является расходящейся.

Из расходимости последовательности не следует ее неограниченность. Примером является та же последовательность $\{(-1)^n\}$.

Лемма 7.4.2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$, *то*

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n > N \quad \frac{1}{2}|a| < |a_n| < \frac{3}{2}|a|.$$

Доказательство. На практике было доказано (№ 91), что
если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.
Найдём для $\varepsilon = |a|/2$ такое N, что при всех $n > N$

$$||a_n| - |a|| < \frac{1}{2}|a|.$$

Тогда
$$|a| - \frac{1}{2}|a| < |a_n| < |a| + \frac{1}{2}|a|,$$
что и требовалось доказать.

Д/З: Докажите, что, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, то
$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad \frac{1}{2}a < a_n < \frac{3}{2}a;$$
ели же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, то
$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad \frac{3}{2}a < a_n < \frac{1}{2}a.$$