

Лекция 17. Производная, дифференциал

17.1. Производная

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 . Придадим аргументу x_0 приращение Δx такое, что точка $x = x_0 + \Delta x$ принадлежит этой окрестности, и рассмотрим приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента и поставим вопрос о существовании предела этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$.

Определение 17.1. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную, если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \quad (17.1)$$

Значение этого предела обозначают¹ $f'(x_0)$ и называют производной функции f в точке x_0 . Очевидно, справедливо равенство $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, поэтому, если существует этот предел, то

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

17.2. Производные основных элементарных функций

1. Если функция f равна константе, т. е. при всех x принимает одно и то же значение C , то $\Delta f = 0$ и, таким образом, $C' = 0$.
2. Найдём производную степенной функции с действительным показателем, т. е. функции $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, в области определения $x > 0$.

Так как для любой точки $x_0 > 0$ справедливо соотношение эквивалентности

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1 \sim \alpha \frac{\Delta x}{x_0} \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1 \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^\alpha \left(\alpha \frac{\Delta x}{x_0} \right)}{\Delta x} = \alpha x_0^{\alpha-1},$$

то $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ для всех $x > 0$.

3. Найдём производную показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Так как $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0} (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0} \Delta x \ln a}{\Delta x} = a^{x_0} \ln a.$$

Таким образом, при всех x справедливо $(a^x)' = a^x \ln a$. В частности, если $a = e$, то $(e^x)' = e^x$.

¹Обозначение $f'(x)$ для производной функции f в точке x ввёл Ж. Лагранж.

4. Производные тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Для $y = \sin x$ имеем

$$\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

В силу первого замечательного предела и непрерывности функции $\cos x$ получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x_0.$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (17.2)$$

Аналогично вычисляется производная функции $y = \cos x$:

$$\Delta f(x_0) = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0 = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right);$$

в силу первого замечательного предела и непрерывности функции $\sin x$ получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = -\sin x_0.$$

Следовательно,

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (17.3)$$

Равенства (17.2) и (17.3) имеют место при всех x .

17.3. Односторонние производные

Определение 17.2. Если функция f определена в некоторой правой (левой²) окрестности точки x_0 и существует односторонний предел $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ $\left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right)$, то этот предел называют правой (левой) односторонней производной функции f в точке x_0 и обозначают

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Слово “односторонней” при этом часто опускают и говорят о правой производной или производной справа, соответственно, о левой производной или производной слева.

Очевидно, что производная функции в точке существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние производные, равные между собой.

Пример 17.1. Для функции $f(x) = |x|$ найти односторонние производные в точке 0. Имеет ли эта функция производную в точке 0?

◇ Имеем

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$, то не существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$, следовательно, не существует производной функции $f(x) = |x|$ в точке 0.

²В скобках дано определение левой односторонней производной.

17.4. Дифференцируемость функции в точке

Определение 17.3. Пусть функция $y = f(x)$ определена в $U(a)$ — окрестности точки a . Дадим приращение Δx аргументу функции f в точке a такое, чтобы $x = a + \Delta x \in U(a)$. Если соответствующее приращение f в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(a) = A \Delta x + o(\Delta x), \quad (17.4)$$

где A — некоторое число, $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, то функцию f называют *д и ф ф е р е н ц и р у е м о й* в т о ч к е a .

Иногда приращение Δf нужно рассматривать и при $\Delta x = 0$. Тогда считают, что при $\Delta x = 0$ слагаемое $o(\Delta x)$ в формуле (17.4) равно нулю.

Лемма 17.4.1. Бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx представляется в виде

$$o(\Delta x) = \alpha(\Delta x) \Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

тогда и только тогда, когда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Доказательство. Если $\alpha(\Delta x) \Delta x = o(\Delta x)$, то по определению бесконечно малой более высокого порядка имеем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \Delta x}{\Delta x} = 0$.

Обратно, пусть теперь $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$, т. е. $\alpha(\Delta x) \Delta x = o(\Delta x)$. Лемма доказана.

Пример 17.2. Исследовать по определению, является ли функция $f(x) = x^2$ дифференцируемой в некоторой произвольной точке $a \in \mathbb{R}$.

◇ Запишем приращение функции f в точке a :

$$\Delta f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + \Delta x \cdot \Delta x = 2a\Delta x + o(\Delta x).$$

Согласно (17.4) функция $f(x) = x^2$ дифференцируема в любой точке $a \in \mathbb{R}$.

Теорема 17.4.2. Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную $f'(a)$.

Доказательство. Необходимость. Если $f(x)$ дифференцируема в точке a , то приращение функции в точке a представляется в виде (17.4). Разделим обе части (17.4) на Δx :

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Устремив $\Delta x \rightarrow 0$, получим, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = A$, т. е. $f'(a) = A$.

Достаточность. Пусть $f(x)$ имеет производную $f'(a)$ в точке a , т. е. существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = f'(a)$. Из связи сходящейся и бесконечно малой функций следует, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} - f'(a) \right) = 0,$$

т. е. $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} - f'(a) = \alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда

$$\Delta f(a) = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x = f'(a)\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 17.1. Теорема 17.4.2 говорит о равносильности понятий “функция дифференцируема в точке” и “функция имеет в этой точке производную”. Вычисление производной называют дифференцированием функции.

17.5. Дифференциал функции

Если для приращения функции f справедливо представление (17.4), то слагаемое $A \Delta x$ называют *линейной частью* приращения f .

Определение 17.4. Если функция f дифференцируема в точке x , то линейную часть приращения f называют *дифференциалом функции f* в этой точке и обозначают df или $df(x)$. Таким образом, $df(x) = f'(x)\Delta x$.

В общем случае $df \neq \Delta f$, так как приращение Δf имеет ещё слагаемое $o(\Delta x)$.

Дифференциал независимой переменной dx есть ее приращение Δx : $dx = \Delta x$. Действительно, рассмотрим приращение функции $f(x) = x$. Поскольку $f'(x) = 1$, то линейная часть приращения f , а значит и дифференциал независимой переменной есть

$$df(x) = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Используя дифференциал независимой переменной, дифференциал функции f можно записать так: $df = f'(x)dx$. Отсюда $f'(x) = \frac{df}{dx}$. Следовательно, производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной. Выражение df/dx рассматривают также как другое обозначение производной. Этим обозначением пользовался Г. Лейбниц.

17.6. Связь дифференцируемости и непрерывности

Теорема 17.6.1. Если функция f дифференцируема в точке, то f непрерывна в ней.

Доказательство. Если функция f дифференцируема в точке a , то приращение функции f в точке a представляется в виде

$$\Delta f(a) = f'(a)\Delta x + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \rightarrow 0$. При $\Delta x \rightarrow 0$ выражение в правой части этого равенства стремится к нулю, т. е. $\Delta f(a) \rightarrow 0$, а это и означает непрерывность³ функции f в точке a . Теорема доказана.

Таким образом, для существования производной в точке необходима непрерывность функции в этой точке. Но это условие не является достаточным.

Пример 17.3. В самом деле, для приращения функции $f(x) = |x|$ в нуле имеем $\Delta f = |\Delta x|$. Следовательно,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0; \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases} \quad (17.5)$$

Значит, функция $|x|$ не имеет производной в нуле, хотя эта функция и непрерывна всюду.

Как уже говорилось в предыдущей лекции, односторонние пределы отношения приращения функции к приращению аргумента (17.5) при $\Delta x \rightarrow 0$ существуют, т. е. в точке 0 функция $|x|$ имеет левую и правую производные.

³Функция f называется *непрерывной* в точке a , если бесконечно малому приращению аргумента в точке a соответствует бесконечно малое приращение функции f в точке a , т. е. $\Delta f(a) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Приведём пример функции, непрерывной всюду, но не имеющей в некоторой точке даже односторонних производных.

Пример 17.4. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0; \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Так как $\Delta f(0) = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}$ стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$, то функция f непрерывна в нуле, а её непрерывность в остальных точках очевидна.

Так как предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$ не существует ни при $\Delta x \rightarrow +0$, ни при $\Delta x \rightarrow -0$, то f не имеет в нуле даже односторонних производных.