Лекция 21. Производные и дифференциалы высших порядков

21.1. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$. Производную $f'(x)$ называют производной первого порядка или первой производной функции $f(x)$. Если первая производная $f'(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$,то ее производную называют второй производной или производной второго порядка функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Для производной второго порядка приняты следующие обозначения:

$$f''(x),\ f^{(2)}(x),\ \frac{d^2f}{dx^2}(x),\ f''_{xx},\ f''_{x^2}.$$

Производная третьего порядка $f'''(x)$ вводится как первая производная производной второго порядка $f''(x)$ и т. д.

Определение 21.1. Производной порядка n, функции $f(x)$ называется первая производная производной порядка $n-1$, т. е. по определению

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \quad n \in \mathbb{N};$$

при этом под производной $f^{(0)}(x)$ нулевого порядка подразумевается функция $f(x)$.

Функция может иметь производную первого порядка, но не иметь производной второго порядка. Например, если $y = x|x|$, то $y' = 2|x|$. Значит, функция $x|x|$ не имеет производной второго порядка в нуле.

Можно указать функции, имеющие в точке производную порядка $n > 1$, у которых в этой точке нет производной порядка $n+1$.

Основные элементарные функции имеют производные любого порядка в своей естественной области определения. Например,

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n;$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right);$$

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}.$$

О производных степенной функции отметим, что если положительное число a не целое, то функция x^a имеет в нуле производные справа до порядка $[a]$ включительно, но не имеет конечной производной порядка $[a]+1$.

Если в некоторой точке или в каждой точке некоторого промежутка функция имеет производную второго порядка, функцию называют дважды дифференцируемой соответственно в точке или на промежутке. Если при этом производная второго порядка непрерывна, то говорят, что функция дважды непрерывно дифференцируема.

Функции, имеющие производные любого порядка, называют бесконечно дифференцируемыми соответственно в точке или на промежутке. Заметим, что бесконечно дифференцируемая в точке функция является бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 21.1.1. *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные порядка n в точке x, то функции $\alpha u(x) + \beta v(x)$, где α и β – постоянные, и $u(x)v(x)$ также имеют производные порядка n в точке x, причем в точке x справедливы равенства*

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}, \tag{21.1}$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}. \tag{21.2}$$

Последняя формула называется формулой Лейбница[1].

Доказательство. Докажем формулу Лейбница по индукции. При $n = 1$ формула (21.2) имеет вид

$$(uv)' = \sum_{k=0}^{1} C_1^k u^{(k)} v^{(1-k)} = uv' + u'v;$$

т. е. это – выражение первой производной произведения двух функций. Теперь, пользуясь равенством (21.2) для $n = m$, $m \in \mathbb{N}$, докажем его при $n = m + 1$. Имеем

$$(uv)^{(m+1)} = \left((uv)^{(m)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(u^{(k)} v^{(m-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(u^{(k+1)} v^{(m-k)} + u^{(k)} v^{(m-k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} C_m^{i-1} u^{(i)} v^{(m-(i-1))} + \sum_{i=0}^{m} C_m^i u^{(i)} v^{(m-i+1)} =$$

$$= C_m^0 u^{(0)} v^{(m+1)} + \sum_{i=1}^{m} \left(C_m^i + C_m^{i-1}\right) u^{(i)} v^{(m-i+1)} + C_m^m u^{(m+1)} v^{(0)}$$

Учитывая свойства биномиальных коэффициентов

$$C_m^i + C_m^{i-1} = C_{m+1}^i, \quad C_m^0 = 1 = C_{m+1}^0, \quad C_m^m = 1 = C_{m+1}^{m+1},$$

получим формулу (21.2) для $n = m + 1$. Таким образом, на основании принципа математической индукции можно заключить, что равенство (21.2) справедливо при любом натуральном n. Формула Лейбница доказана.

Д/З: Доказать формулу (21.1) самостоятельно.

21.2. Производные параметрически заданной функции

Ранее было установлено, что производная функции $y = f(x)$, задаваемой параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{21.3}$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемые на промежутке (α, β), и $x_t' \neq 0$ также задается параметрически:

$$x = x(t), \quad f_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{21.4}$$

[1] Сравните формулу Лейбница с формулой бинома Ньютона.

Если функция $\psi(t)$ имеет производную по t (так будет во всяком случае, когда существуют вторые производные $x''(t)$ и $y''(t)$), то производная функции, заданной уравнениями (21.4), является второй производной f''_{xx} функции $f(x)$, заданной уравнениями (21.3). f''_{xx} также задается параметрически уравнениями

$$x = x(t), \quad f''_{xx} = \frac{\psi'_t}{x'_t} = \frac{(f'_x)'_t}{x'_t}.$$

Подобным образом можно находить производные функции $f(x)$ и более высокого порядка, например, третьего:

$$x = x(t), \quad f'''_{x^3} = \frac{(f''_{xx})'_t}{x'_t}.$$

21.3. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Ее дифференциал

$$dy = f'(x)dx,$$

который называют также ее *первым дифференциалом*, зависит от двух переменных: x и dx. Пусть производная $f'(x)$ также дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда при фиксированном dx дифференциал dy является функцией только x, для которой также можно вычислить дифференциал:

$$d\left(f'(x)dx\right) = d(f'(x)) \cdot dx = f''(x)\Delta x \cdot dx,$$

причем в качестве приращения Δx независимой переменной x берется то же самое приращение, которое было выбрано при нахождении первого дифференциала функции $f(x)$, т. е. dx. Вычисленный при этом условии дифференциал от первого дифференциала называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* функции $f(x)$ и обозначается d^2y или d^2f.

Таким образом, по определению

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = d(f'(x)) \cdot dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2.$$

Квадрат дифференциала независимой переменной $(dx)^2$ принято обозначать dx^2, т. е. dx считается единым символом, который возводится в квадрат. С учетом этого обозначения второй дифференциал функции $y = f(x)$, где x – независимая переменная находится по формуле

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{21.5}$$

Аналогично, в случае, когда функция $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$ имеет производную порядка n, определяется n-й дифференциал функции $f(x)$.

Определение 21.2. *Дифференциалом n-го порядка* функции $f(x)$ называется первый дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала при условии, что при вычислении дифференциала в качестве приращения Δx берется то же приращение dx, которое выбиралось при вычислении $(n-1)$-го дифференциала:

$$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right).$$

Методом индукции для n-го дифференциала получается формула

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n, \tag{21.6}$$

где dx^n обозначает n-ю степень дифференциала независимой переменной, равного ее приращению.

Дифференциал n-го порядка независимой переменной x при $n > 1$ по определению считается равным нулю, т. е.

$$d^n x = 0 \quad \text{при} \quad n > 1.$$

Теорема 21.3.1. *Если для функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференциалы $d^n u$ и $d^n v$ существуют, то функции $\alpha u(x) + \beta v(x)$, где α и β — постоянные, и $u(x)v(x)$ также имеют дифференциалы n-го порядка, причем справедливы равенства*

$$d^n (\alpha u + \beta v) = \alpha d^n u + \beta d^n v,$$

$$d^n (uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k u \cdot d^{n-k} v.$$

Доказательство этой теоремы проведите самостоятельно, опираясь на теорему 21.1.1.

21.4. Дифференциалы сложной функции

Заметим, что формула (21.5) и формула (21.6) при $n > 1$ справедливы только тогда, когда x является независимой переменной.

Формула (21.5) для сложной функции обобщается с учетом свойства инвариантности формы первого дифференциала следующим образом:

$$d^2 y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right) dx + f'(x) d\left(dx\right) = f''(x) dx dx + f'(x) d^2 x,$$

т. е.

$$d^2 y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x. \tag{21.7}$$

Сравнение формул (21.5) и (21.7) показывает, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности — его представление зависит от того, выражен он через дифференциалы независимой переменной или через дифференциалы зависимой переменной. Формула (21.5) получается из формулы (21.7), когда x — независимая переменная и, соответственно, $d^2 x = 0$.

Найдём ещё выражение третьего дифференциала через дифференциалы зависимой переменной. Имеем

$$\begin{gathered} d^3 y = d(d^2 y) = d\left(f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x\right) = \\ = d\left(f''(x)\right) dx^2 + f''(x) d\left(dx^2\right) + d\left(f'(x)\right) d^2 x + f'(x) d\left(d^2 x\right). \end{gathered}$$

Здесь $d\left(dx^2\right)$ вычисляем с помощью свойства инвариантности формы первого дифференциала. Обозначим $u = dx$, тогда

$$d\left(dx^2\right) = d(u^2) = 2u du = 2dx d(dx) = 2dx d^2 x.$$

Окончательно получим

$$\begin{gathered} d^3 y = f'''(x) dx^3 + f''(x) 2dx d^2 x + f''(x) dx d^2 x + f'(x) d^3 x = \\ = f'''(x) dx^3 + 3f''(x) dx d^2 x + f'(x) d^3 x. \end{gathered} \tag{21.8}$$

Запоминать формулы (21.7) и (21.8) нет необходимости, рекомендуется выводить их заново каждый раз, когда они нужны.