Лекция 26. Выпуклость функции, точки перегиба, асимптоты

26.1. Выпуклость функции

26.1.1. Определения

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и $x_1,\ x_2 \in (a, b)$. Проведем прямую через точки с координатами $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, лежащие на графике функции $f(x)$. Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{26.1}$$

Обозначим $l(x)$ соответствие $y(x)$, задаваемое уравнением (26.1), тогда из (26.1) получаем, что прямую, проходящую через точки с координатами $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, задает функция

$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) - f(x_1)(x - x_2)}{x_2 - x_1}.$$

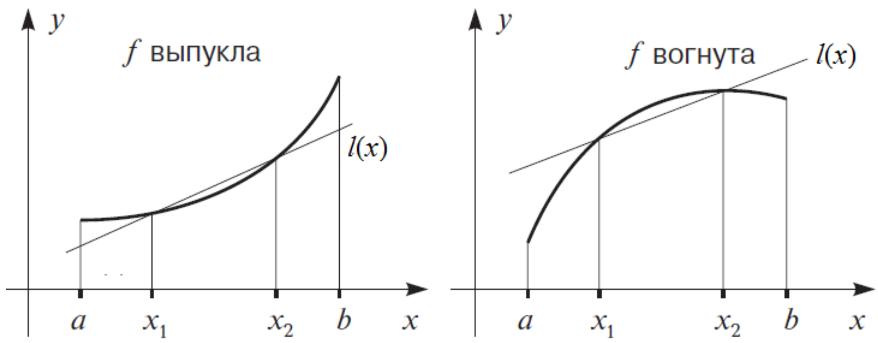

Рис. 1: Выпуклая и вогнутая функции.

Определение 26.1. Функция $f(x)$ называется выпуклой или выпуклой вниз на интервале (a, b), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и любой точки $x \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство $f(x) \leq l(x)$, то есть все точки графика f, соответствующие $x \in (x_1, x_2)$, расположены ниже отрезка с концами в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, или на этом отрезке.

Определение 26.2. Функция $f(x)$ называется вогнутой или выпуклой вверх на интервале (a, b), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и любой точки $x \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство $f(x) \geq l(x)$, то есть все точки графика f, соответствующие $x \in (x_1, x_2)$, расположены выше отрезка с концами в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, или на этом отрезке.

Определение 26.3. Функция $f(x)$ называется строго выпуклой вниз (строго выпуклой вверх) на интервале (a, b), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и любой точки $x \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство $f(x) < l(x)$ $(f(x) > l(x))$.

Определение 26.4. Всякий интервал на котором функция (строго) выпукла вниз (вверх) называется интервалом (строгой) выпуклости вниз (вверх) этой функции.

26.1.2. Необходимые и достаточные условия выпуклости

Теорема 26.1.1 (Первый критерий выпуклости)**.** *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b). Для того чтобы она была выпуклой вниз (вверх) на интервале (a,b) необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для всех $x \in (a,b)$.*

Доказательство. Достаточность. Сравним значения $f(x)$ и $l(x)$ для $x, x_1, x_2 \in (a,b)$ таких, что $a < x_1 < x < x_2 < b$:

$$f(x) - l(x) = \frac{f(x)(x_2 - x_1) - f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x - x_2)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{f(x)((x - x_1) - (x - x_2)) - f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x - x_2)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(f(x) - f(x_2))(x - x_1) + (f(x_1) - f(x))(x - x_2) +}{x_2 - x_1}.$$

Применяя теорему Лагранжа, получаем

$$f(x) - l(x) = \frac{f'(\eta)(x - x_2)(x - x_1) + f'(\xi)(x_1 - x)(x - x_2)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)[f'(\eta) - f'(\xi)]}{x_2 - x_1},$$

где $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$. Так как по условию теоремы функция $f'(x)$ непрерывна на любом $[\xi, \eta] \subset (a,b)$ и дифференцируема на (ξ, η), то применим теорему Лагранжа к приращению производной:

$$f(x) - l(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) f''(\zeta)(\eta - \xi)}{x_2 - x_1}, \tag{26.2}$$

где $x_1 < \xi < \zeta < \eta < x_2$.

Поскольку $x - x_1 > 0$, $x - x_2 < 0$, $\eta - \xi > 0$, тогда, если $f''(x) \geq 0$ на (a,b), а, значит, и $f''(\zeta) \geq 0$, то $f(x) - l(x) \leq 0$. Итак, в этом случае функция $f(x)$ выпуклая или выпуклая вниз. Если же $f''(x) \leq 0$ на (a,b), а, значит, и $f''(\zeta) \leq 0$, то $f(x) - l(x) \geq 0$, то есть функция $f(x)$ вогнутая или выпуклая вверх.

Необходимость. Пусть $f(x)$ выпукла вниз, т. е. для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ и любой точки $x \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство $f(x) - l(x) \leq 0$, то из равенства (26.2) получим, что $f''(\zeta) \geq 0$. В силу произвольности $x_1, x_2 \in (a,b)$ делаем вывод о том, что $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a,b)$. Аналогично доказывется, что, если $f(x)$ выпукла вверх, то $f''(x) \leq 0$ для всех $x \in (a,b)$. Теорема доказана.

Замечание 26.1. Связь знака $f''(x)$ на (a,b) с типом выпуклости $f(x)$ на этом интервале легко запомнить, если заметить, что случай $f''(x) \geq 0$ соответствует рту позитивного смайлика, а случай $f''(x) \leq 0$ – рту негативного смайлика (рис. 2).

Теорема 26.1.2. *Если $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) для всех $x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ строго выпукла вниз (вверх) на этом интервале.*

Доказательство аналогично доказательству достаточности предыдущей теоремы.

Замечание 26.2. Утверждение, обратное теореме 26.1.2 несправедливо. Например, $f(x) = x^4$ строго выпукла вниз, но $f''(x) = 12x^2 = 0$ при $x = 0$. Значит, если $f(x)$ строго выпукла вниз (вверх) на интервале (a,b), то это не значит, что $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для всех $x \in (a,b)$.

Рис. 2: Выпуклая и вогнутая функции.

Замечание 26.3. Отметим, что если функция f (строго) выпукла вверх (вниз) на интервале (a, b), то функция $-f$ (строго) выпукла вниз (вверх) на этом интервале.

Пример 26.1. Найти промежутки выпуклости определенного знака функции $f(x) = 3x^2 - x^3$, где $x \in R$.

◇ Вторая производная $f''(x) = 6(1 - x)$ положительна при $x < 1$ и отрицательна при $x > 1$. Следовательно, согласно достаточному условию строгой выпуклости, на интервале $(-\infty, 1)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а на интервале $(1, +\infty)$ выпукла вверх.

26.2. Точки перегиба дифференцируемой функции

26.2.1. Необходимое условие точки перегиба

Определение 26.5. Пусть функция f дифференцируема при $x = x_0$ и пусть $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 называется точкой перегиба функции f.

Геометрический смысл точки перегиба x_0 состоит в том, что график функции $f(x)$ переходит („перегибается“) в точке $(x_0, f(x_0))$ с одной стороны (от наклонной) касательной в этой точке на другую (рис. 3). Если x_0 – точка перегиба функции, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции.

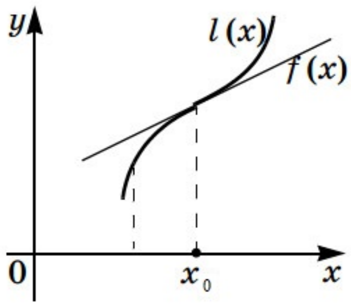

Рис. 3: Точка перегиба.

Пример 26.2. Найти точки перегиба функции $f(x) = x^3$, где $x \in R$.

◇ Вторая производная функции $f''(x) = 6x$ положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$. Поэтому на бесконечном интервале $(-\infty, 0)$ функция f строго выпукла вверх, на интервале $(0, +\infty)$ она строго выпукла вниз, а точка $x = 0$ является одновременно концом интервалов выпуклости вверх и вниз. Она является и точкой перегиба, поскольку уравнением касательной в ней является $y = 0$, и при $x < 0$ имеет место неравенство $f(x) < 0$, а при $x > 0$ – неравенство $f(x) > 0$.

Теорема 26.2.1 (Необходимое условие точки перегиба)**.** *Если в точке перегиба существует вторая производная, то она равна нулю.*

Доказательство. Пусть функция f имеет в точке x_0 вторую производную и $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, то есть

$$L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда, в силу формулы Тейлора,

$$f(x) - L(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), x \to x_0.$$

По условию теоремы x_0 – точка перегиба. Если предположить, что $f''(x_0) \neq 0$, то знак разности $f(x) - L(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 совпадает со знаком числа $f''(x_0)$. В этом случае разность $f(x) - L(x)$ не меняет знака в точке x_0, что противоречит определению точки перегиба. Итак, если x_0 – точка перегиба функции f, то $f''(x_0) = 0$.

Замечание 26.1. Утверждение, обратное доказанной теореме, не имеет места. Приведите пример, подтверждающий это.

Замечание 26.2. Дифференцируемая функция f может иметь точку перегиба, в которой f'' не существует. Например, производная функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2, & x \geq 0 \\ -x^2/2, & x < 0 \end{cases}$$

равна $f'(x) = |x|$. Отсюда $f'(0) = 0$, $L(x) \equiv 0$. Очевидно, что $f(x) - L(x) \equiv f(x)$ меняет знак при переходе через точку $x = 0$, т. е. $x = 0$ – точка перегиба функции. При этом не существует $f''(0)$, так как известно, что $f'(x) = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

Определение 26.6. Точку x_0, в которой функция f дифференцируема, назовем в о з м о ж н о й   т о ч к о й   п е р е г и б а, если $f''(x_0) = 0$ или не существует $f''(x_0)$.

26.2.2. Обобщение понятия „точка перегиба“

Пусть непрерывная функция f дифференцируема при $x = x_0$ в смысле обобщения, т.е. выполняется

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty, \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty.$$

Тогда $x = x_0$ – уравнение вертикальной касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Если разность $f(x) - f(x_0)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 назовем точкой перегиба функции f в смысле обобщения. При этом график функции $f(x)$ переходит в точке $(x_0, f(x_0))$ с одной стороны (от вертикальной) касательной в этой точке на другую (рис. 4) аналогично случаю на рис. 3.

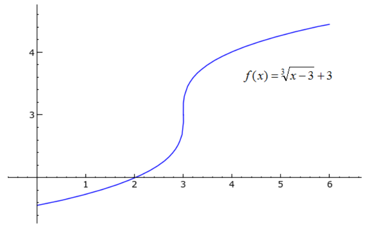

Рис. 4: Точка перегиба в смысле обобщения.

Пример 26.3. Найти точки перегиба функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, где $x \in R$.

$\diamond$ Вторая произвоная $f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, поэтому для всех $x \neq 0$ справедливо неравенство $f''(x) < 0$. Следовательно, ни в одной точке из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ не выполняется необходимое являются точки перегиба, это промежутки строгой выпуклости вверх. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ нет точек перегиба.

Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x = 0$ не имеет производной даже в смысле обобщения: $\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$, $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = +\infty$, $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = -\infty$. Поэтому $x = 0$ не является точкой перегиба даже в смысле обобщения. График функции имеет вертикальную касательную в точке $x = 0$, и его ветви, для котрых $x > 0$ и $x < 0$, лежат по разные стороны от нее, но разность $f(x) - f(0) = \sqrt[3]{x^2} \geq 0$ не меняет знак. Условно говоря, график в точке $x = 0$ не перегибается, а „возвращается назад“, поэтому точки такого типа называются т о ч к а м и в о з в р а т а (рис. 5).

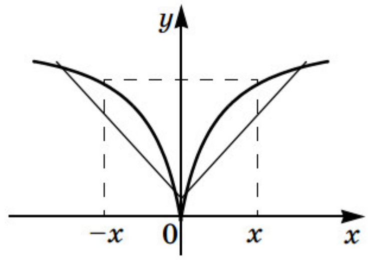

Рис. 5: Точка возврата.

26.2.3. Достаточное условие точки перегиба

Теорема 26.2.2. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $U^0_\delta(x_0)$ этой точки и вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка перегиба функции f.*

Доказательство. Ординаты точек на касательной к графику $f(x)$ в точке x_0 задаются с помощью функции $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$ в разности $f(x) - L(x)$, получим:

$$f(x) - L(x) = (f(x) - f(x_0)) - f'(x_0)(x - x_0) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0),$$

где $a < x_0 < b$, $a < x < b$, а точка ξ лежит между x и x_0. Применяя еще раз теорему Лагранжа, но уже к приращению производной $f'(\xi) - f'(x_0)$, получим

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

где точки x и ξ лежат по одну сторону от точки x_0, поэтому при $x \neq x_0$ имеем $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ и, следовательно, знак разности $f(x) - L(x)$ совпадает со знаком второй производной $f''(\eta)$.

Точка η лежит между ξ и x_0, то есть по ту же сторону от x_0, что и точка x. Отсюда имеем, что если f'' меняет знак при переходе через точку x_0, то разность $f(x) - L(x)$ меняет знак и, следовательно, x_0 является точкой перегиба.

Пример 26.4. Найти точки перегиба функции $f(x) = e^{-x^2}$.

◇ Находим производные функции

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$
$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 4(x^2 - \tfrac{1}{2})e^{-x^2} = 4(x + \tfrac{1}{\sqrt{2}})(x - \tfrac{1}{\sqrt{2}})e^{-x^2}.$$

Отсюда видно, что вторая производная функции f обращается в ноль только в точках $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ и при переходе через них меняет знак. Следовательно, согласно первому достаточному условию, эти точки являются точками перегиба (рис. 6).

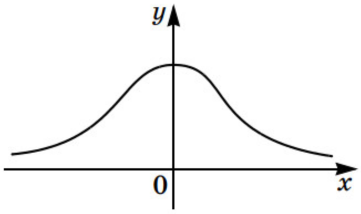

Рис. 6: Эскиз графика функции $f(x) = e^{-x^2}$.

26.3. Асимптоты графика функции

Определение 26.7. Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 26.5. График функции $y = \ln(x - 2)$ имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, так как $\lim\limits_{x\to 2+0} \ln(x - 2) = -\infty$.

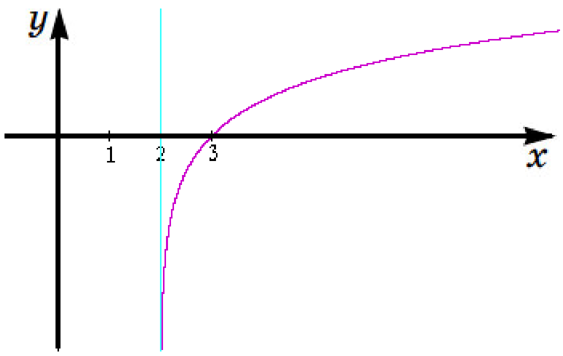

Рис. 7: Эскиз графика функции $y = \ln(x - 2)$.

Замечание 26.1. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции или на границе области определения.

Определение 26.8. Пусть функция f определена на бесконечном интервале $(a; +\infty)$. Говорят, что прямая $l(x) = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \tag{26.3}$$

Существование наклонной асимптоты у функции при $x \to +\infty$ означает, что при стремлении аргумента $x \to +\infty$ функция ведет себя „почти как линейная функция", т. е. отличается от линейной функции на бесконечно малую.

Замечание 26.2. При $k = 0$ асимптоту называют горизонтальной. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты.

Теорема 26.3.1 (Критерий наклонной асимптоты)**.** *Для того чтобы график функции $f(x)$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предельных значения*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{26.4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота $f(x)$ при $x \to +\infty$, т. е. справедливо (26.3). Тогда из связи сходящихся и бесконечно малых функций имеем

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$;
2. $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

Из условия 2 получим, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k.$$

Достаточность. Пусть существуют предельные значения (26.4). Второе из этих предельных значений дает право утверждать, что выполняется условие (26.3). Теорема доказана.

Замечание 26.3. Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается теорема 26.3.1 для случая $x \to -\infty$.

Следствие 26.3.2. *Для того чтобы график функции $f(x)$ имел при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) горизонтальную асимптоту $y = b$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \qquad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = b).$$

Замечание 26.4. На практике легче сначала проверить наличие горизонтальной асимптоты. Если, например, при $x \to +\infty$ функция имеет горизонтальную асимптоту (частный случай наклонной), то других асимптот при $x \to +\infty$ не будет. Если же при $x \to +\infty$ функция не имеет горизонтальной асимптоты, то следует поискать наклонную, найдя пределы (26.4).