# Лекция 19. Геометрический смысл производной; производная параметрически заданных функций

## 19.1. Геометрический смысл производной

Выясним свойства графика функции, соответствующие существованию производной.

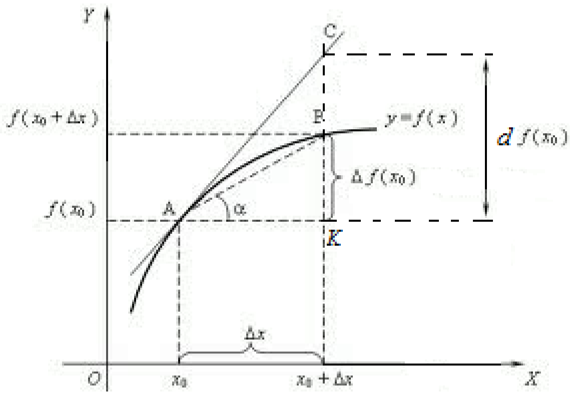


Рис. 1: Геометрическая интерпретация производной в точке.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$. Будем придавать аргументу $f$ в точке $x_0$ малые приращения $\Delta x$, чтобы точки $x_0 + \Delta x$ не выходили из области определения функции.

Отметим на графике функции $f$ (рис. 1) точки $A(x_0; f(x_0))$, $B(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ и проведём через эти точки прямую $AB$. Эту прямую называют *секущей*.

Пусть $\alpha$ – угол, который прямая $AB$ образует с осью абсцисс $OX$. Угол $\alpha$ считаем положительным, если прямая $AB$ правее точки пересечения с осью $OX$ лежит выше оси (как на рис. 1), в противном случае $\alpha$ считаем отрицательным. Если прямая $AB$ параллельна оси $OX$, полагаем $\alpha = 0$.

Разным $\Delta x$ будут соответствовать разные $\Delta f(x_0)$ и соответственно – разные секущие.

Напишем уравнение *секущей* $AB$. Точка с координатами $(x; y)$ принадлежит прямой, проходящей через точки $A(x_0; f(x_0))$ и $B(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{y - f(x_0)}{\Delta f(x_0)} = \frac{x - x_0}{\Delta x}.$$

Отсюда

$$y - f(x_0) = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0),$$

где

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (19.1)$$

В силу непрерывности функции $f$ в точке $x_0$ точка $B$ при $\Delta x \to 0$ приближается к точке $A$. При этом значение угла $\alpha$ зависит от $\Delta x$: $\alpha(\Delta x)$.

Равенство (19.1) показывает, что существование производной $f'(x_0)$ равносильно существованию предела $\operatorname{tg}\alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Так как на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ тангенс является непрерывной строго монотонной функцией, существование предела $\operatorname{tg}\alpha(\Delta x)$ равносильно существованию предельного значения угла $\alpha(\Delta x)$, обозначим его $\alpha_0$. Значит, при $\Delta x \to 0$ секущая $AB$ занимает предельное положение (на рис. 1 положение $AC$), соответствующее углу наклона $\alpha_0 = \angle KAC$.

Прямую, являющуюся предельным положением секущей, называют *касательной* к графику функции $f(x)$ в точке $x_0$. При этом $\operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0)$ и касательная не параллельна оси $OY$, её называют *наклонной*.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 19.1.1.** *Для существования наклонной касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ необходимо и достаточно существование производной $f'(x_0)$. При этом тангенс угла наклона касательной равен значению производной; уравнение касательной имеет вид*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{19.2}$$

Приращению аргумента $\Delta x$ в точке $x_0$ соответствует некоторая точка с координатами $(x_0 + \Delta x, y)$, принадлежащая касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x_0$ (точка $C$ на рис. 1). Разность $y - f(x_0)$ называют *приращением ординаты касательной* в точке $x_0$, соответствующим приращению аргумента $\Delta x$.

На рис. 1 для выбранного $\Delta x$ приращение ординаты касательной в точке $x_0$ есть длина отрезка $CK$. Из прямоугольного треугольника $\triangle KAC$, в котором $|AK| = \Delta x$, $\operatorname{tg}(\angle KAC) = f'(x_0)$ имеем

$$|CK| = f'(x_0)\Delta x = df(x_0),$$

т. е. *дифференциал функции равен приращению ординаты касательной при заданном* $\Delta x$. Таким образом, дифференциал – это линейная функция, графиком которой является касательная.

## 19.2. Обобщение понятия производной

**Определение 19.1.** Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$, то говорят, что функция $f$ в точке $x_0$ имеет *бесконечную положительную производную*. Аналогично, функция $f$ в точке $x_0$ имеет *бесконечную отрицательную производную*, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$.

Заметим, что это обобщение понятия производной. В этом случае $f$ не имеет производной в смысле ранее сформулированного определения[1], т. е. $f$ является недифференцируемой в точке $x_0$.

**Пример 19.1.** Доказать, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ имеет бесконечную положительную производную.

◇ Дадим приращение $\Delta x$ аргументу функции в точке $x = 0$. Функция при этом получит приращение $\Delta y(0) = y(\Delta x) - y(0) = \sqrt[3]{\Delta x}$. Составим отношение $\dfrac{\Delta y(0)}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$ и найдем его предел при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty,$$

что и требовалось доказать.

[1]Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0$ производную, если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

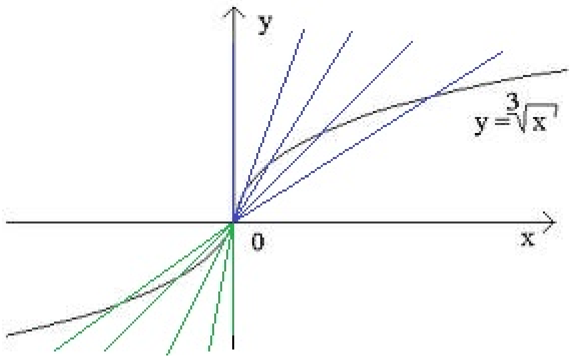


Рис. 2: $y = \sqrt[3]{x}$ и секущие к графику функции в точке $x = 0$.

Для существования производной функции, в том числе и в смысле обобщения, необходимо и достаточно существование в этой точке правой и левой производных и их равенство.

**Пример 19.2.** Доказать, что функция $y = \sqrt[3]{|x|}$ в точке $x = 0$ не имеет производной даже в смысле обобщения.

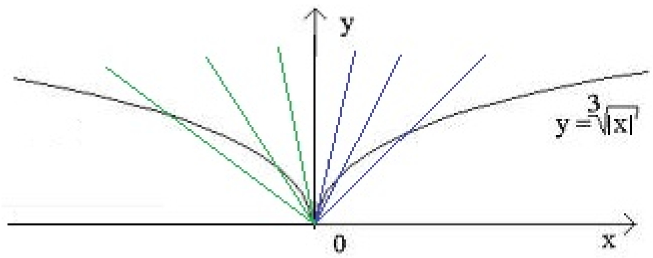


Рис. 3: $y = \sqrt[3]{|x|}$ и секущие к графику функции в точке $x = 0$.

$\diamond$ Дадим приращение $\Delta x$ аргументу функции в точке $x = 0$. Функция при этом получит приращение $\Delta y(0) = y(\Delta x) - y(0) = \sqrt[3]{|\Delta x|}$. Составим отношение

$$\frac{\Delta y(0)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}, & \text{если } \Delta x > 0; \\ -\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

$$y'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty,$$

$$y'_-(0) \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y(0)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = -\infty.$$

Так как $y'_+(0) \neq y'_-(0)$, то функция $y = \sqrt[3]{|x|}$ в точке $x = 0$ не имеет производной даже в смысле обобщения.

**Определение 19.2.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \infty$, то касательная к графику функции в точке $x_0$ называется в е р т и к а л ь н о й, ее уравнение $x = x_0$.

В этом случае график функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x_0$ имеет вид, схематически изображенный на рис. 2-4.

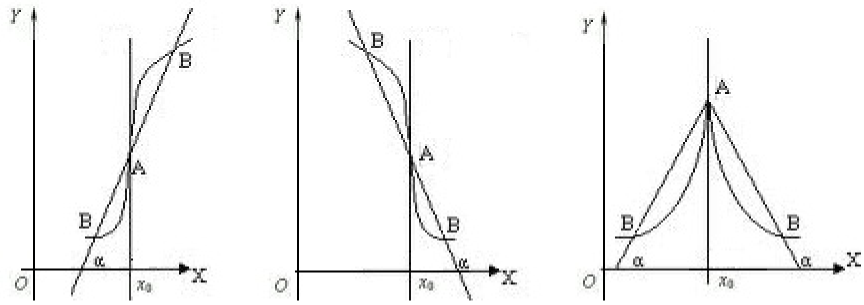

Рис. 4: Вертикальные касательные.

## 19.3. Обобщение производной обратной функции

Формула для нахождения производной обратной функции к $y = f(x)$

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{19.3}$$

не имеет смысла, если $f'(x_0) = 0$. Выясним, что можно сказать о производной обратной функции в этом случае.

Если функция $f$ строго возрастает, то приращения $\Delta y$ и $\Delta x$ имеют одинаковые знаки. Поэтому их отношение положительно и при $\Delta y \to 0$ (или, что то же самое, при $\Delta x \to 0$), видим, что

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = +\infty.$$

А если $f$ строго убывает, то отношение приращений $\Delta y$ и $\Delta x$ отрицательно. Значит, в этом случае

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\infty.$$

Таким образом, можно считать, что формула (19.3) справедлива и при $f'(x_0) = 0$, если договориться, что в этом случае она означает существование бесконечной производной обратной функции, равной $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от того, возрастает или убывает функция $f$.

В соответствии с этим соглашением считают, что если существует одна из производных $\frac{df}{dx}(x_0)$ или $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0)$, конечная или бесконечная, то существует и другая производная и их значения связаны соотношением (19.3).

**Пример 19.3.**

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Эти равенства справедливы при всех $x \in [-1; 1]$. Они показывают, что при $x = \pm 1$ существуют бесконечные односторонние производные.

## 19.4. Физический смысл производной и дифференциала

Физический смысл производной: производная – это скорость изменения зависимой переменной $y$ как функции независимой переменной $x$.

Предположим, что функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии (т. е. зависимость пути $y$, пройденного точкой от начала отсчета, от времени $x$). Тогда, как известно, разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{19.4}$$

определяет среднюю скорость точки за промежуток времени от $x$ до $x+\Delta x$. В таком случае производная $f'(x)$, т. е. предел разностного отношения (19.4) при $\Delta x \to 0$, определяет мгновенную скорость точки в момент времени $x$. Итак, *производная функции, описывающей закон движения, определяет мгновенную скорость точки.*

Пусть функция $y = f(x)$ определяет количество электричества $y$, протекшего через поперечное сечение проводника за время $x$. (При этом момент времени $x = 0$ берется за начало отсчета.) В таком случае производная $f'(x)$ будет определять *силу тока*, проходящего через поперечное сечение проводника в момент времени $x$.

Вообще, если функция описывает некоторый процесс, то производная характеризует скорость протекания этого процесса в данный момент.

Дифференциал показывает, как менялась бы функция (в приведенных выше примерах это путь или количество электричества), если бы в течение всего времени изменение функции проходило с той же скоростью, что и в данный момент $x$.

Применение дифференциалов основано на том, что “в малом”, т. е. при достаточно малых $\Delta x$, приращение дифференцируемой функции незначительно отличается от дифференциала и, таким образом, при малых $\Delta x$ дифференциал дает хорошее приближение для приращения функции:

$$\Delta f(x) \approx df(x) = f'(x)\Delta x.$$

## 19.5. Производная параметрически заданной функции

Простейший пример параметрического задания функции даёт параметрическое уравнение прямой на плоскости

$$x = at + b, \quad y = ct + d, \tag{19.5}$$

где $t \in (-\infty; +\infty)$. Если $a \neq 0$, то $t = (x-b)/a$ и, подставив это значение $t$ во второе уравнение (19.5), получим $y = \frac{c}{a}(x-b)+d$. Таким образом, исключив из (19.5) параметр $t$, мы нашли явное выражение $y$ через $x$.

Сложнее обстоит дело с параметрическим заданием эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad a > 0,\ b > 0, \quad t \in [0; 2\pi). \tag{19.6}$$

Исключив из уравнений (19.6) параметр $t$, получим $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Отсюда

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{19.7}$$

Поскольку для каждого $x$ знак перед корнем можно брать произвольно, то формула (19.7) задаёт бесконечно много функций $y$ аргумента $x$. Если потребовать непрерывность функций на $[-a; a]$, то таких функций будет две.

В общем случае, когда заданы функции

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{19.8}$$

на некотором промежутке изменения параметра $t$, исключить из (19.8) параметр $t$ и получить явное выражение $y$ через $x$ не всегда просто, а иногда невозможно.

Покажем, что при некоторых естественных условиях на функции (19.8) можно найти параметрическое представление производной функции $y = f(x)$ через производные функций $x(t)$ и $y(t)$.

**Теорема 19.5.1.** *Пусть функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности точки $t_0$ и функция $x(t)$ строго монотонна в этой окрестности. Тогда, если $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке $t_0$ производные $\dfrac{dx}{dt}(t_0) = x'_t(t_0)$, $\dfrac{dy}{dt}(t_0) = y'_t(t_0)$ и $x'_t(t_0) \neq 0$, то функция $y = y(t(x)) = f(x)$ в точке $x_0 = x(t_0)$ также имеет производную $\dfrac{df}{dx}(x_0) = f'_x(x_0)$, которая находится по формуле*

$$f'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{19.9}$$

**Доказательство.** Если в некоторой окрестности точки $t_0$ функция $x(t)$ строго монотонна, то в некоторой окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ существует функция $t = t(x)$, обратная $x(t)$, и формулы (19.8) параметрически задают функцию $y(t(x)) = f(x)$. Производную функции $f(x)$ находим по правилу дифференцирования суперпозиции функций: $f'_x = y'_t \cdot t'_x$, где производная $t'_x$ функции, обратной для $x(t)$, вычисляется по формуле $t'_x = 1/x'_t$. Таким образом, в точке $x_0 = x(t_0)$ справедлива формула (19.9). Теорема доказана.

Мы получили $f'_x$ как функцию от $t$, таким образом, производная функции $y = f(x)$, задаваемой параметрическими уравнениями (19.8), также задается параметрически:

$$x = x(t), \quad f'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \psi(t).$$