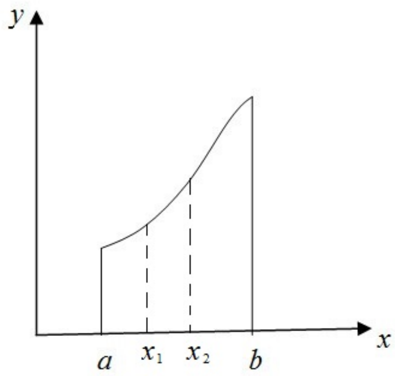
Лекция 25. Монотонность и экстремум

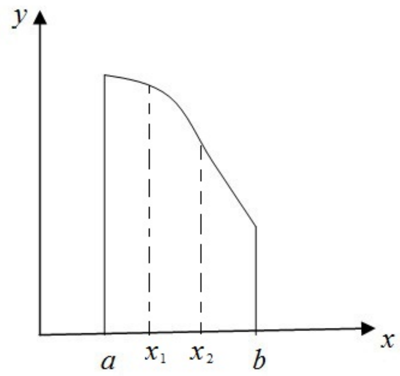
25.1. Условия монотонности функции на интервале

Прежде всего, напомним определения монотонности функции на интервале.

Определение 25.1. Говорят, что функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на интервале (a, b), если для любых двух точек x_1 и x_2 интервала (a, b), удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

Определение 25.2. Говорят, что функция $f(x)$ строго монотонно возрастает (убывает) на интервале (a, b), если для любых двух точек x_1 и x_2 интервала (a, b), связанных условием $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.





Теорема 25.1.1. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ монотонно возрастала (убывала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции была неотрицательной (неположительной) всюду на этом интервале.*

Доказательство. 1). Достаточность. Пусть $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$ всюду на интервале (a, b). Требуется доказать, что $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на интервале (a, b). Пусть x_1 и x_2 – любые две точки интервала (a, b), удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. Функция $f(x)$ непрерывна всюду на отрезке $[x_1, x_2]$, т. к. $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \supset [x_1, x_2]$, и дифференцируема на (x_1, x_2). Поэтому к $f(x)$ можно применить на отрезке $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, в результате чего получим

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \tag{25.1}$$

где $x_1 < \xi < x_2$.

По условию $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$, $x_2 - x_1 > 0$. Поэтому правая часть (25.1) неотрицательна (неположительна), что и доказывает монотонное возрастание (убывание) $f(x)$ на интервале (a, b).

2). Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и монотонно возрастает (убывает) на этом интервале. Требуется доказать, что $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$ всюду на этом интервале. Возьмем произвольные точки x_1 и x_2 на интервале (a, b). Пусть $x_2 > x_1$, тогда $f(x_2) \ge f(x_1)$ $(f(x_2) \le f(x_1))$ в силу монотонности, и $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge 0$. Поскольку $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1)$, и в пределе сохраняется знак нестрогого неравенства, то $f'(x_1) \ge 0$ $(f'(x_1) \le 0)$, что и требовалось доказать.

Теорема 25.1.2. *Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ строго монотонно возрастает (убывает) на этом интервале.*

Доказательство провести самостоятельно.

Замечание 25.1. Утверждение, обратное теореме 25.1.2 несправедливо. Например, $f(x) = x^3$ строго монотонно возрастает, но $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$. Значит, если $f(x)$ строго монотонно возрастает (убывает) на интервале (a,b), то это не значит, что $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a,b)$.

Пример 25.1. Является ли монотонной функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

на интервале $(0, \pi/2)$? Найти односторонние производные функции $f(x)$ в граничных точках отрезка определения.

Так как $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, то функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$. На интервале $(0, \pi/2)$ функция $f(x)$ дифференцируема как частное дифференцируемых функций. Для все $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ имеем

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0,$$

так как $x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, функция $f(x)$ строго убывает на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, поэтому $f(0) > f(x) > f(\frac{\pi}{2})$, т.е.

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ и существует предел

$$\lim_{x \to \pi/2 - 0} f'(x) = \lim_{x \to \pi/2 - 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = -\frac{4}{\pi^2},$$

то в силу следствия 4 из теоремы Лагранжа $f'_-(\pi/2) = -\frac{4}{\pi^2}$. Аналогично можно найти и производную $f'_+(0)$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to +0} \frac{x(1 + o(x)) - x + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \to +0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0.$$

Заметим, что $x \cdot o(x) = o(x^2)$, $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$. Можно найти производную в точке $x = 0$ справа и по определению:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sin \Delta x - \Delta x}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x + o(\Delta x^2) - \Delta x}{\Delta x^2} = 0.$$

25.2. Экстремум функции.

25.2.1. Необходимое условие экстремума

Определение 25.3. Пусть функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки c. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность точки c, что для любого $x \neq c$ из этой окрестности $f(c) \geq f(x)$ $(f(c) \leq f(x))$.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке c строгий локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность точки c, что для любого $x \neq c$ из этой окрестности $f(c) > f(x)$ $(f(c) < f(x))$.

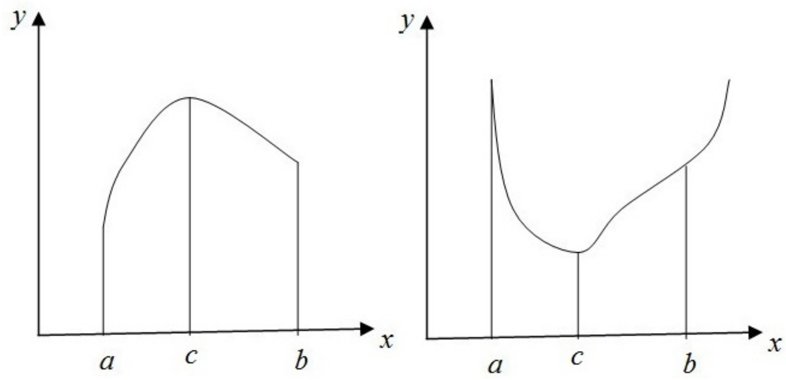


Рис. 1: Локальный максимум и локальный минимум.

Здесь слово "локальный" показывает, что с $f(c)$ сравниваются значения функции только в некоторой малой окрестности точки c в отличие от "глобального" максимума или минимума, которые относятся ко всей области определения функции.

Локальный максимум и локальный минимум называют экстремумами функции.

Теорема 25.2.1 (Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции)**.** *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в этой точке экстремум, то $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть c – точка максимума функции $f(x)$. Тогда существует $U_\varepsilon(c)$ — ε-окрестность точки c, в которой выполнены условия теоремы Ферма:

1. $f(c) = \max\limits_{U_\varepsilon(c)} f(x)$,
2. $\exists\ f'(c)$.

Значит, $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Определение 25.4. Точки, в которых производная функции равна нулю, называются с т а ц и о н а р н ы м и точками функции. Внутренние точки области определения функции, в которых не существует производной функции, называются к р и т и ч е с к и м и точками функции.

Замечание 25.1. Функция $f(x) = |x|$, очевидно, имеет в точке $x = 0$ локальный минимум, но, как известно, не существует $f'(0)$. Следовательно, если функция в точке c имеет экстремум, то точка c является стационарной или критической точкой функции. Обратное утверждение несправедливо. В стационарной или критической точке может не быть экстремума. Например, $f(x) = x^3$ имеет производную $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но $f(x)$ строго монотонно возрастает и не имеет экстремума в точке $x = 0$.

Д/З: Привести пример непрерывной функции, которая в критической точке, не имеет экстремума.

Стационарные и критические точки будем называть т о ч к а м и в о з м о ж н о г о э к с т р е м у м а.

25.2.2. Первое достаточное условие экстремума

Определение 25.5. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки c всюду, кроме, может быть самой точки c. Говорят, что функция $f(x)$ меняет знак при переходе через точку c с плюса на минус (с минуса на плюс), если существует ε-окрестность точки c такая, что $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ при $c - \varepsilon < x < c$ и $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ при $c < x < c + \varepsilon$.

Теорема 25.2.2. *Пусть точка c является точкой возможного экстремума непрерывной функции $f(x)$, и пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой проколотой окрестности точки c. Тогда, если при переходе через точку c производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум). Если при переходе через точку c функция $f'(x)$ знак не меняет, то экстремума в точке c нет.*

Доказательство. 1). Пусть производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку c с плюса на минус. Требуется доказать, что значение $f(c)$ является наибольшим среди всех значений $f(x)$ в рассматриваемой окрестности. Обозначим x_0 любое значение аргумента из рассматриваемой окрестности, отличное от c. Достаточно доказать, что $f(c) - f(x_0) > 0$. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[c, x_0]$. Применяя к $f(x)$ на отрезке $[c, x_0]$ теорему Лагранжа, будем иметь

$$f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0),$$

где ξ - некоторое значение аргумента между c и x_0. Поскольку производная $f'(\xi)$ меняет знак при переходе через точку c с плюса на минус, выражение в правой части равенства $f'(\xi)(c - x_0)$ положительно при любом x_0 из рассматриваемой окрестности, следовательно, c — точка строгого локального максимума.

Д/З: Доказать случай, когда производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку c .

2). Пусть теперь производная $f'(x)$ не меняет свой знак при переходе через точку c. Обозначая чрез x_0 любое значение аргумента, отличное от c, и повторяя проведенные выше рассуждения, можно доказать, что выражение в правой части равенства $f'(\xi)(c - x_0)$ имеет разные знаки при $x_0 < c$ и при $x_0 > c$. Это доказывает отсутствие экстремума в точке c.

25.2.3. Второе достаточное условие экстремума

Теорема 25.2.3. *Пусть c — стационарная точка функции $f(x)$. Если $f''(c) \neq 0$, то c — точка строгого локального минимума (максимума) при $f''(c) > 0$ $(f''(c) < 0)$.*

Доказательство. Пусть $f''(c) > 0$. Так как c стационарная точка функции $f(x)$, то $f'(c) = 0$. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x) - f(c) = f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2).$$

В достаточно малой окрестности точки c знак правой части определяется первым слагаемым. Следовательно, при $f''(c) > 0$ в этой окрестности $f(x) - f(c) > 0$ при $x \neq c$, то есть c-точка минимума. При $f''(c) < 0$ аналогично доказывается, что c-точка максимума.

Пример 25.2. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^m(1-x)^n$, где $x \in R, m, n \in N$.

$\diamond$ Находим производную функции f и приравниваем её к нулю:

$$f'(x) = (m + n)x^{m-1}(1 - x)^{n-1}(\frac{m}{m + n} - x) = 0.$$

Стационарные точки: $x = 0$ $(m > 1)$, $x = 1$ $(n > 1)$, $x = \frac{m}{m+n}$. В них выполнено необходимое условие экстремума. Проверим достаточные условия.

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{m}{m+n}$. При m четном $f'(-\varepsilon) < 0$, $f'(\varepsilon) > 0$, следовательно в точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет минимум, равный нулю; при m нечетном $f'(-\varepsilon) > 0$, $f'(\varepsilon) > 0$, т. е. экстремума нет.

Аналогично для точки $x = 1$: при n четном $f'(1-\varepsilon) < 0$, $f'(1+\varepsilon) > 0$, поэтому функция $f(x)$ в этой точке имеет минимум, равный нулю; при n нечетном $f'(1-\varepsilon) > 0$, $f'(1+\varepsilon) > 0$, т. е. экстремума нет.

Наконец, для точки $x = \frac{m}{m+n}$ имеем

$$f'(\frac{m}{m+n} - \varepsilon) > 0, f'(\frac{m}{m+n} + \varepsilon) < 0.$$

Таким образом, в точке $x = \frac{m}{m+n}$ функция $f(x)$ имеет максимум

$$f(\frac{m}{m+n}) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

Случай, когда $m = 1$ $(n = 1)$, рассмотреть самостоятельно.

25.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то согласно второй теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ на $[a, b]$ достигает своих точных граней. Это означает существование точек $c, d \in [a, b]$: $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(d)$. В этом случае M – глобальный максимум (наибольшее значение), m – глобальный минимум (наименьшее значение) функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Точки c и d при этом называют соответственно точкой глобального максимума и точкой глобального минимума.

Если наибольшее значение достигается во внутренней точке c отрезка $[a, b]$, то $M = f(c)$ будет локальным максимумом функции $f(x)$, так как в этом случае существует окрестность точки c такая, что $f(x) \le f(c)$. Однако свое наибольшее или наименьшее значение функция $f(x)$ может принимать и на концах отрезка $[a, b]$.

Следовательно, непрерывная на отрезке функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в точке локального экстремума или в граничной точке отрезка.

Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции

1. Находим стационарные и критические точки функции.
2. Вычисляем значения функции в этих и граничных точках.
3. Выбираем из полученных значений наибольшее и наименьшее.