Лекция 22. Правило Лопиталя

22.1. Раскрытие неопределенности 0/0

Мы уже находили пределы вида
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},\tag{22.1}$$
когда $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Например, был доказан первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

В таких случаях нельзя переходить к пределу отдельно в числителе и в знаменателе дроби. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$, то предел (22.1) бесконечен. Поэтому интересен случай, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Настоящая лекция посвящена изучению правил раскрытия неопределенности $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью производных.

Теорема 22.1.1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:*

1. $f(a)=g(a)=0$,
2. *существуют производные $f'(a)$ и $g'(a)$,*
3. $g'(a)\neq 0$.

Тогда предел (22.1) существует и справедливо равенство
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.\tag{22.2}$$

Доказательство. Для $x\neq a$ в силу дифференцируемости функций f и g в точке $x=a$ имеем
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\begin{Bmatrix} x-a=\Delta x\\ \Delta x\to 0\end{Bmatrix}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{g(a+\Delta x)-g(a)}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(a)\Delta x+o(\Delta x)}{g'(a)\Delta x+o(\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(a)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}{g'(a)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Теорема доказана.

В этой теореме можно говорить об односторонних производных функций f и g и соответствующем одностороннем пределе в (22.2). В следующих далее теоремах 22.1.2 и 22.2.1 имеются в виду односторонние пределы.

Теорема 22.1.2. *Пусть a — число или бесконечность определенного знака; $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;
2. *$f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой односторонней окрестности $U^0(a)$;*
3. $g'(x)\neq 0\ \forall\, x\in U^0(a)$;

4. существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел (22.1) *(конечный или бесконечный) и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Будем сначала считать a конечным. Положим $f(a)=0$, $g(a)=0$, т. е. доопределим (или переопределим) функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a. Тогда эти функции становятся непрерывными в соответствующей окрестности точки a. Доопределенные функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Коши[1] в соответствующей окрестности точки a. Значит, при некотором $\xi\in(a,x)$ (или $\xi\in(x,a)$)

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

По условию предел дроби из правой части этого равенства при $x\to a$ существует. Отсюда вытекает утверждение теоремы для конечных a.

Пусть теперь a – бесконечный символ, для определённости $a=+\infty$. Рассмотрим функции $\varphi(t)=f(1/t)$ и $\psi(t)=g(1/t)$. При достаточно малых положительных t функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и

$$\varphi'(t)=f'(1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right);\quad \psi'(t)=g'(1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\neq 0.$$

Поэтому

$$\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$$

и существует предел

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{x+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Так как $\varphi(t)\to 0$; $\psi(t)\to 0$ при $t\to+0$, то по уже доказанному имеем

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось только заметить, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}.$$

[1] Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

1. непрерывны на отрезке $[a,b]$,
2. дифференцируемы в интервале (a,b),
3. $\forall x\in(a,b)$ $g'(x)\neq 0$.

Тогда существует точка $\xi\in(a,b)$ такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

22.2. Раскрытие неопределенности „частное бесконечностей“

Теорема 22.2.1. *Пусть a – число или бесконечность определенного знака; $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
2. *$f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой односторонней окрестности $U^0(a)$;*
3. $g'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in U^0(a)$;
4. *существует конечный или бесконечный* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел (22.1) *и* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство приведено в учебном издании: Основы математического анализа: В 2-х ч, Часть 1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, авторы – Ильин В.А., Позняк Э.Г. на стр. 272 – 273.

Замечание 22.1. Отметим, что существование предела $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ является достаточным условием существования предела $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, но не является необходимым.

Например, если $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ и $g(x) = \sin x$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

согласно свойству бесконечно малых[2] Вместе с тем, дробь

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

при $x \to 0$ предела не имеет. Доказать это можно используя следствие[3] из критерия существования предела по Гейне. Следовательно, для вычисления предела $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ **правило Лопиталя неприменимо.**

22.3. Примеры

Пример 22.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}^2 x \ln(1+x)}{\operatorname{tg} x - x}$.

[2] Произведение бесконечно малой величины на ограниченную есть бесконечно малая.

[3] Если существуют последовательности $\{\bar{x}_n\}$ и $\{\bar{\bar{x}}_n\}$ точек из области определения функции f, сходящихся к точке a и отличных от a, для которых последовательности $\{f(\bar{x}_n)\}$ и $\{f(\bar{\bar{x}}_n)\}$ соответствующих значений функции сходятся к разным пределам, то функция $f(x)$ при $x \to a$ предела не имеет.

$\diamond$ При $x \to 0$ имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Сначала в произведении (в числителе) заменим бесконечно малые функции их эквивалентными: $\operatorname{sh} x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$. В разности (в знаменателе) эквивалентными функциями заменять нельзя! Затем применим к раскрытию неопределенности $\dfrac{0}{0}$ правило Лопиталя (Lop.).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x \ln(1+x)}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\operatorname{tg} x - x} = \left\{\frac{0}{0}; Lop.\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x = 1$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos^2 x} = \left\{\frac{0}{0}; Lop.\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{-2\cos x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{-2\cos x} : \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -3,$$

то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}^2 x \ln(1+x)}{\operatorname{tg} x - x} = \lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{1-\cos^2 x} = -3.$

Пример 22.2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left\{\frac{0}{0}; Lop.\right\} = \lim_{x\to 1} \frac{2x + 1/x}{e^x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+1}{xe^x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 1} xe^x} = \frac{3}{e}.$$

Правило Лопиталя не является универсальным средством для раскрытия неопределенности $0/0$ или ∞/∞. В некоторых примерах его нельзя применять, в некоторых оно не помогает избавиться от неопределенности или даже ухудшает ситуацию. Это демонстрируют следующие примеры.

Пример 22.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x + 2x}{\cos x + 3x}$.

$\diamond$ Так как дробь $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\cos x + 2}{-\sin x + 3}$ при $x \to \infty$ предела не имеет, то для нахождения предела $\lim\limits_{x\to\infty} \Big(f(x)/g(x)\Big)$ правило Лопиталя применять нельзя. Вычислим данный предел, поделив числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x + 2x}{\cos x + 3x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin x}{x} + 2}{\frac{\cos x}{x} + 3} = \frac{2}{3}.$$

Пример 22.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Формальное применение правила Лопиталя не дает результата:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}; Lop.\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}; Lop.\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

$\diamond$ Этот предел, конечно, легко вычисляется без правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x} = 1.$$

Пример 22.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{\operatorname{sh}x-\sin x}$. Применение правила Лопиталя не дает результата:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{\operatorname{sh}x-\sin x}=\left\{\frac{\infty}{\infty};Lop.\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}x+\sin x}{\operatorname{ch}x-\cos x}=\left\{\frac{\infty}{\infty};Lop.\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{ch}x+\cos x}{\operatorname{sh}x+\sin x}=\left\{\frac{\infty}{\infty};Lop.\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}x-\sin x}{\operatorname{ch}x+\cos x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{\operatorname{sh}x-\sin x}.$$

◇ Вычислим данный предел без правила Лопиталя.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{\operatorname{sh}x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{e^x-e^{-x}-2\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}-2e^{-x}\cos x}{1-e^{-2x}-2e^{-x}\sin x}=1,$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\cos x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\sin x=0$.

Пример 22.6. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x}$. После применения правила Лопиталя ситуация лишь ухудшается:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=\left\{\frac{0}{0};Lop.\right\}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-1/x^2}2x^{-3}}{1}=2\lim_{x\to0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^3}.$$

◇ Сделаем сначала замену переменных, потом применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=\left\{\begin{matrix}1/x=t\\ t\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty};Lop.\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{t^2}2t}=0.$$