Лекция 20. Свойства дифференцируемых функций

Будем рассматривать функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемые на интервале (a, b), т. е. во всех внутренних точках отрезка.

20.1. Теорема Ферма

Теорема 20.1.1. *Пусть $f(x)$ определена на интервале (a, b) и*

1. *в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет наибольшее (наименьшее) значение;*
2. *в точке x_0 существует производная функции $f'(x_0)$.*

Тогда обязательно $f'(x_0) = 0$.

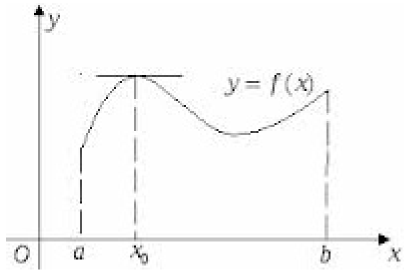

Рис. 1: Иллюстрация к теореме Ферма.

Доказательство. Пусть для определенности $f(x_0) \geq f(x)$ для всех $x \in (a, b)$, тогда $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \leq 0$ и $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$ при $\Delta x = x - x_0 > 0$, $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$ при $\Delta x < 0$.

Так как существует $f'(x_0)$, то существуют односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \leq 0, \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \geq 0,$$

равные друг другу. Это возможно только когда $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0 = f'(x_0)$, что и требовалось доказать.

20.2. Теорема Ролля

Теорема 20.2.1. *Пусть функция $f(x)$*

1. *непрерывна на отрезке $[a, b]$;*
2. *дифференцируема в интервале (a, b);*
3. *на концах отрезка $[a, b]$ принимает равные значения $f(a) = f(b)$.*

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$, в которой $f'(\xi) = 0$.

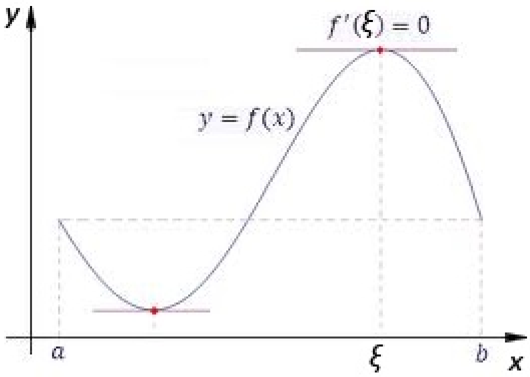

Рис. 2: Геометрическая интерпретация теоремы Ролля.

Доказательство. Из непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ согласно теореме Вейерштрасса следует, что f принимает в некоторых точках отрезка свои максимальное M и минимальное m значения. Если $M = m$, то f имеет это значение во всех точках отрезка $[a, b]$ и производная $f'(x)$ всюду на нём равна нулю.

А если $M \neq m$, то по крайней мере одно из этих значений f принимает во внутренней точке отрезка $[a, b]$. По теореме Ферма в этой точке производная f' равна нулю и теорема доказана.

Теорема Ролля показывает, что в некоторой точке интервала (a, b) касательная к графику функции f параллельна оси OX.

Замечание 20.1. Требования теоремы Ролля нельзя ослабить. Если хотя бы одно из трех не выполняется, то утверждение теоремы не выполняется.

Д/З: Приведите примеры, подтверждающие это замечание.

20.3. Теорема Лагранжа

Теорема 20.3.1. *Пусть функция* $f(x)$

1. *непрерывна на отрезке* $[a, b]$,
2. *дифференцируема в интервале* (a, b),

тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ *такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{20.1}$$

Доказательство. Подберём число λ так, чтобы для функции $F(x) = f(x) - \lambda x$ выполнялось равенство $F(a) = F(b)$. Решив уравнение $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$, видим, что нужно взять $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Поэтому согласно теореме Ролля существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $F'(\xi) = 0$.

Значит, $f'(\xi) - \lambda = 0$ и

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{20.2}$$

Отсюда следует равенство (20.1) и теорема доказана.

Равенство (20.1) называют ф о р м у л о й к о н е ч н ы х п р и р а щ е н и й Лагранжа. Она является одним из основных результатов дифференциального исчисления.

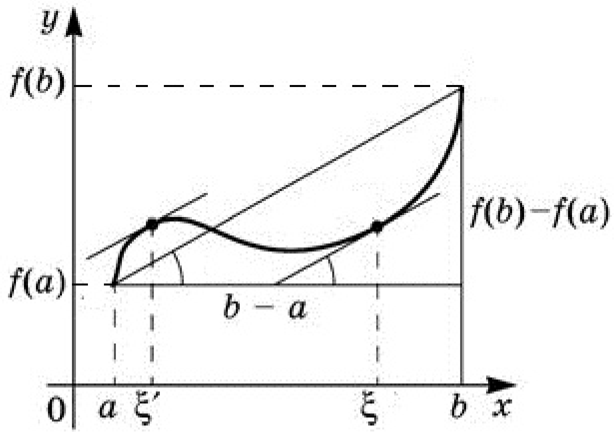

Рис. 3: Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа.

Используем равенство (20.2), чтобы выяснить геометрический смысл формулы конечных приращений.

Левая часть в (20.2) равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке ξ, а правая часть – тангенсу угла наклона прямой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции. Таким образом, теорема Лагранжа показывает, что существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a, b)$, касательная в которой параллельна прямой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Для функции, график которой изображен на рисунке 3, утверждение теоремы выполняется в точках ξ и ξ'.

В формуле 20.1 не обязательно $a < b$, она имеет место и при $a > b$, так как вместе с (20.1) выполняется равенство $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$.

20.4. Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 20.4.1. *Формула 20.1 может быть записана в виде*

$$\Delta f(x_0) = f'(\xi)\Delta x, \quad \text{где} \quad \xi \in (x_0, x_0 + \Delta x), \tag{20.3}$$

наглядно поясняющем ее название – формула конечных приращений.

Доказательство. Пусть функция дифференцируема в окрестности точки x_0, точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит этой окрестности. Положив в формуле 20.1 значения a и b равными соответственно x_0 и $x_0 + \Delta x$, получим $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x$, где ξ – некоторое число из интервала $(x_0, x_0 + \Delta x)$. Приращение Δx может быть и отрицательным, в этом случае точка $x_0 + \Delta x$ расположена левее x_0 на действительной оси, ξ лежит между ними. Следствие доказано.

Замечание 20.1. Заметим, что формула (20.3) отличается от известного приближенного равенства $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Следствие 20.4.2. *Пусть функция $f(x)$*

1. *непрерывна на отрезке $[a, b]$,*
2. *$f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$;*

тогда функция f постоянна на $[a, b]$.

Доказательство. Для каждой пары точек x^* и x^{**} из $[a, b]$ согласно формуле конечных приращений Лагранжа между x^* и x^{**} имеется точка ξ такая, что

$$f(x^*) - f(x^{**}) = f'(\xi)(x^* - x^{**}).$$

Так как ξ принадлежит интервалу (a, b), то $f'(\xi) = 0$ и, значит, $f(x^*) = f(x^{**})$. Теорема доказана, так как x^* и x^{**} – произвольные точки отрезка $[a, b]$.

Следствие 20.4.3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$*

1. *непрерывны на отрезке $[a, b]$,*

2. *дифференцируемы в интервале (a, b),*

3. *$\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = g'(x)$.*

Тогда функции f и g отличаются на постоянную: $f(x) = g(x) + c$, $c - const$.

Доказательство. Функция $F(x) = f(x) - g(x)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 20.4.2, следовательно, $F(x) \equiv c$ на отрезке $[a, b]$, где c – некоторая постоянная. Тогда $f(x) = g(x) + c$, что и требовалось доказать.

Следствие 20.4.4. *Пусть функция $f(x)$*

1. *непрерывна на промежутке $[x_0, b)$, содержащем точку x_0 $(b > x_0)$;*

2. *дифференцируема в интервале (x_0, b);*

3. *существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = A$.*

Тогда существует правая производная $f'_+(x_0) = A$.

Доказательство. Дадим аргументу функции f приращение Δx в точке x_0 так, чтобы выполнялось неравенство $x = x_0 + \Delta x < b$. Согласно следствию 20.4.1 приращение функции f в точке x_0 можно представить в виде (20.3). Поделив обе части равенства (20.3) на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to +0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} f'(\xi)$. Рассмотрим правую часть этого предельного равенства.

Так как $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$ и $\Delta x \to +0$, то $\xi \to x_0 + 0$ при $\Delta x \to +0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to +0} f'(\xi) = \lim_{x \to x_0+0} f'(\xi) = \lim_{\xi \to x_0+0} f'(\xi).$$

В силу выполнения условия (3) имеем $\lim\limits_{\xi \to x_0+0} f'(\xi) = A$, тогда существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A$, что и требовалось доказать.

Замечание 20.2. Если функция $f(x)$

1. непрерывна на промежутке $(b, x_0]$, содержащем точку x_0 $(b < x_0)$;

2. дифференцируема в интервале (b, x_0);

3. существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x) = A$;

то существует левая производная $f'_-(x_0) = A$.

Следствие 20.4.5. *Производная функции, дифференцируемой на интервале, не может иметь точек разрыва первого рода.*

Доказательство. Предположим, что производная функции f, дифференцируемой на интервале (a,b) имеет в точке $x_0 \in (a,b)$ разрыв первого рода, т. е.

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f'(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0} f'(x) \neq f'(x_0).$$

В первом случае согласно следствию 20.4.4 получим $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, что противоречит дифференцируемости $f(x)$ в точке $x_0 \in (a,b)$. Во втором случае получим противоречие следствию 20.4.4.

Замечание 20.3. Производная дифференцируемой на интервале функции может иметь точки разрыва второго рода. Например, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{при } x \neq 0,\\ 0 & \text{при } x = 0,\end{cases}$$

то

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{при } x \neq 0,\\ 0 & \text{при } x = 0.\end{cases}$$

Так как $f'(0) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ не существует, то $x = 0$ — точка разрыва второго рода функции $f'(x)$.

20.5. Теорема Коши

Теорема 20.5.1. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$

1. *непрерывны на отрезке* $[a,b]$,
2. *дифференцируемы в интервале* (a,b),
3. $\forall x \in (a,b)\ g'(x) \neq 0$.

Тогда существует точка $\xi \in (a,b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{20.4}$$

Доказательство. В случае $g(x) = x$ теорема Коши совпадает с теоремой Лагранжа. Доказательство данной теоремы будет идти по той же схеме.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$. Она непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Чтобы к $F(x)$ можно было применить теорему Ролля, составим уравнение

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b),$$

решив которое, получим $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Для этого λ имеем $F(a) = F(b)$, значит, существует точка $\xi \in (a,b)$, в которой $F'(\xi) = 0$. Таким образом,

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi) = 0.$$

Так как $g'(\xi) \neq 0$, то обе части этого равенства можно разделить на $g'(\xi)$, что даёт (20.4). Теорема доказана.