Souvislost grafu

Definice. Nechť je dán graf $G = (U, H)$ a dva jeho uzly *u* a *v*. Sledem mezi uzly *u* a *v* nazveme posloupnost uzlů a hran

$$u, h_{i1}, u_{i1}, h_{i2}, u_{i2}, \ldots, u_{ik-1}, h_{ik}, v$$

pro kterou platí

$$h_{ir} = \{u_{ir-1}, u_{ir}\} \quad \text{pro} \quad r = 1, \ldots, k .$$

Dále si označíme

$$u_{i0} = u \ \text{ a } \ u_{ik} = v .$$

Tedy sled je na sebe navazující posloupnost hran, kdy vždy dvě za sebou následující hrany ve sledu mají společný koncový uzel, který je ve sledu uveden mezi nimi.

Je-li $u=v$ (počáteční a koncový uzel sledu je stejný), jde o uzavřený sled.

Tah mezi uzly *u* a *v* je sled mezi těmito dvěma uzly, ve kterém se žádná hrana nevyskytuje vícekrát. Tj. $h_{ir} \neq h_{is}$ pro $r \neq s$. Je-li $u=v$, jde o uzavřený tah.

Cesta mezi uzly *u* a *v* je tah mezi těmito dvěma uzly, ve kterém se žádný jeho vnitřní uzel nevyskytuje vícekrát. Tj. $u_{ir} \neq u_{is}$ pro $r \neq s$, $r=0, \ldots, k$, $s=1, \ldots, k-1$. Uzavřená cesta (je-li $u=v$) je označována jako kružnice grafu.

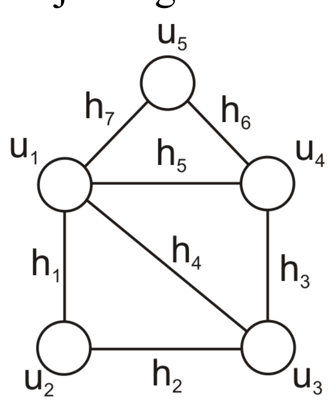
Pro orientované grafy mám pojmy:

Orientovaný sled – všechny jeho hrany mají stejnou orientaci – od počátečního uzlu *u* ke koncovému uzlu *v*. Jednotlivé hrany v orientovaném sledu jsou

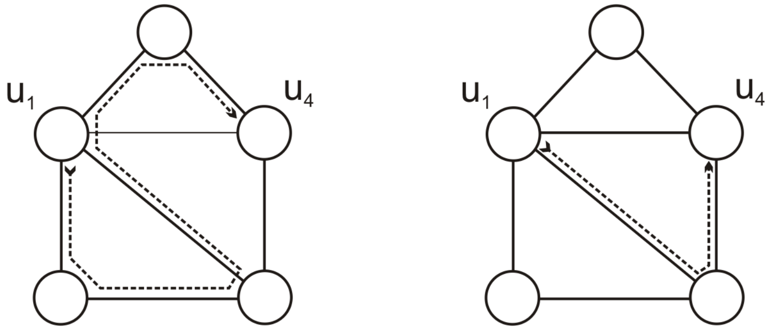
$$h_{ir} = \langle u_{ir-1}, u_{ir} \rangle \ \text{ pro } \ r = 1, \ldots, k, \ \ u_{i0} = u, \ \ u_{ik} = v$$

Dále jsou to pojmy orientovaný tah, orientovaná cesta a cyklus. Cyklus je označení pro orientovanou kružnici.

Příklad. V následujícím grafu



je u_1, h_1, u_2, h_2, u_3, h_4, u_1, h_7, u_5, h_6, u_4 je tah mezi uzly u_1 a u_4. A dále u_1, h_4, u_3, h_3, u_4 je cesta mezi těmito uzly. Jejich průběh ukazuje následující obrázek.



Věta. Z každého sledu spojující dva různé uzly u a v lze vybrat cestu, která je spojuje.

Důkaz: Vezměme sled

$$u=u_{i0},\ h_{i1},\ u_{i1},\ \ldots,\ h_{ir},\ u_{ir},\ h_{ir+1},\ \ldots,\ h_{is},\ u_{is},\ h_{is+1},\ \ldots,\ u_{ik-1},\ h_{ik},\ u_{ik}=v$$

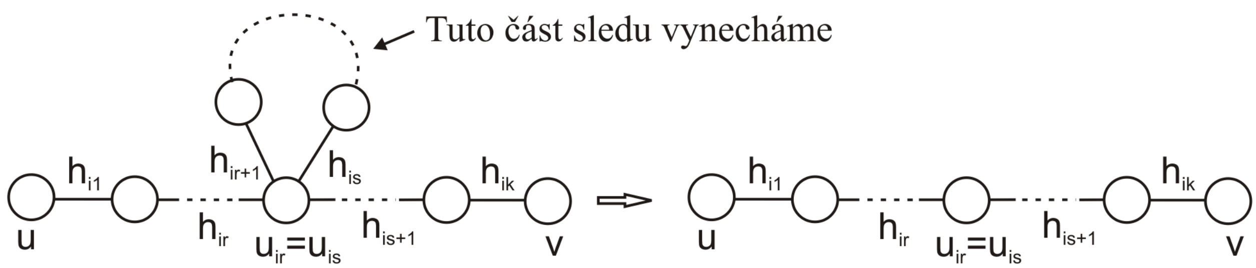
A nechť některý uzel u_{ir} je ve sledu stejný jako uzel u_{is}, kde $r<s$. Pak můžeme ve sledu jeho část

$$h_{ir+1},\ \ldots,\ h_{is},\ u_{is}$$

vynechat a dostaneme tím kratší sled spojující uzly u a v

$$u=u_{i0},\ h_{i1},\ u_{i1},\ \ldots,\ h_{ir},\ u_{ir}=u_{is},\ h_{is+1},\ \ldots,\ u_{ik-1},\ h_{ik},\ u_{ik}=v$$

Vynechání části ukazuje následující obrázek



Tento postup opakujeme tak dlouho, dokud ve sledu nejsou odstraněny všechny násobné výskyty uzlů. Tím se ze sledu stane cesta.

Příklad. V předchozím příkladu jsme měli tah u_1, h_1, u_2, h_2, u_3, h_4, u_1, h_7, u_5, h_6, u_4. V něm se uzel u_1 vyskytuje dvakrát. Podle důkazu předchozí věty v tahu vynecháme jeho část h_1, u_2, h_2, u_3, h_4, u_1. Zůstane nám u_1, h_7, u_5, h_6, u_4, což je už cesta mezi uzly u_1 a u_4.

Definice. Graf, mezi jehož každými dvěma uzly existuje cesta, nazveme souvislým grafem.

Příklad.

Souvislý graf　　　　Nesouvislý graf

Věta. Souvislý (neprázdný) graf s m uzly má nejméně m-1 hran.

Důkaz: Matematickou indukcí podle počtu uzlů v grafu.

1. Pro m=1 je graf tvořen jen jedním uzlem. Hranu nemá žádnou, čímž je splněno, že má nejméně m-1 hran.
2. Nechť tvrzení věty platí pro nějaké m. Dokážeme, že platí i pro m+1. Souvislý graf s m+1 uzly vytvoříme tak, že jako výchozí vezmeme souvislý graf s m uzly. Ten má podle indukčního předpokladu nejméně m-1 hran. Nyní k němu přidáme ještě jeden uzel. Aby graf zůstal souvislý, musíme tento uzel spojit aspoň jednou hranou s některým uzlem ze stávajícího grafu. Po přidání uzlu a aspoň jedné hrany bude graf mít nejméně m hran, což můžeme napsat jako (m+1)-1 hran, tedy tvrzení věty platí i pro graf s m+1 uzly.

Definice. Komponentou grafu nazveme každý jeho maximální souvislý podgraf. Přitom souvislý podgraf daného grafu považujeme za maximální, jestliže ho už nelze zvětšit přidáním dalších hran, či uzlů daného výchozího grafu tak, aby podgraf byl stále souvislý. Tedy není vlastním podgrafem jiného souvislého podgrafu.

Věta. Nechť graf s m uzly má p komponent. Pak má nejméně m-p hran.

Důkaz: Označme m_1, m_2, …, m_p počty uzlů v jednotlivých komponentách grafu. Protože množiny uzlů jednotlivých komponent jsou disjunktní, zřejmě platí

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = m \quad .$$

Komponenty jsou souvislými podgrafy. Tudíž podle předchozí věty platí, že

1. komponenta obsahuje nejméně m_1-1 hran

2. komponenta obsahuje nejméně m_2-1 hran

……….

p-tá komponenta obsahuje nejméně m_p-1 hran

Odtud sečtením dostaneme, že graf obsahuje nejméně hran:

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots + (m_p - 1) = m_1 + m_2 + \ldots + m_k - p = m - p$$

U orientovaného grafu rozeznáváme dva stupně souvislosti: souvislý a silně souvislý graf.

Definice. Orientovaný graf je souvislý, jestliže mezi každými jeho dvěma uzly u a v existuje orientovaná cesta buďto z uzlu u do uzlu v nebo z uzlu v do uzlu u. Orientovaný graf je silně souvislý, jestliže mezi každými jeho dvěma uzly u a v existuje orientovaná cesta z uzlu u do uzlu v a rovněž opačná cesta z uzlu v do uzlu u.