

## Minimální kostry grafu

Kostra je faktor grafu, který:

- má stejný počet komponent
- neobsahuje kružnice.

Připomeňme, že faktor grafu je jeho podgraf, který má stejnou množinu uzlů.

U hranově ohodnocených grafů se v praxi vyskytuje úloha nalezení minimální kostry. Formulace této úlohy:

Máme dán graf  $G = (U, H)$ , jehož hrany jsou ohodnoceny kladnými reálnými čísly. Tedy existuje zobrazení  $w$

$$w: H \rightarrow R^+ ,$$

kde  $R^+$  označuje množinu kladných reálných čísel.

Máme najít takovou kostru  $K = (U, H')$  grafu  $G$ , jejíž součet ohodnocení hran

$$s = \sum_{h \in H'} w(h)$$

je minimální ze všech možných koster grafu  $G$ .

Existují dva algoritmy. Jeden hrany přidává, nazveme ho zařazovací, a druhý hrany ubírá, nazveme ho vyřazovací.

### Zařazovací algoritmus

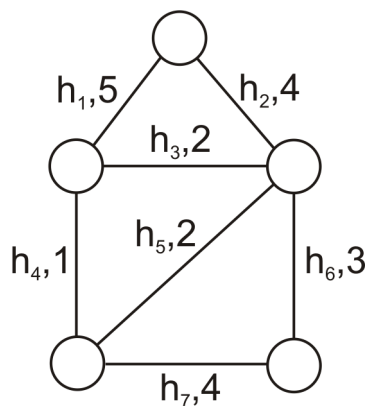
Hrany grafu  $G$  uspořádáme tak, že jejich ohodnocení tvoří neklesající posloupnost.

$$h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{in}$$

$$w(h_{i1}) \leq w(h_{i2}) \leq \dots \leq w(h_{in}) .$$

Vezmeme diskrétní podgraf  $K$  výchozího grafu  $G$  (podgraf obsahující jen uzly grafu  $G$ ). Postupně procházíme posloupnost hran od začátku směrem ke konci a u každé hrany ověřujeme, zda jejím přidáním k podgrafu  $K$  v něm nevznikne kružnice. Jestliže ne, hranu přidáme ke  $K$ .

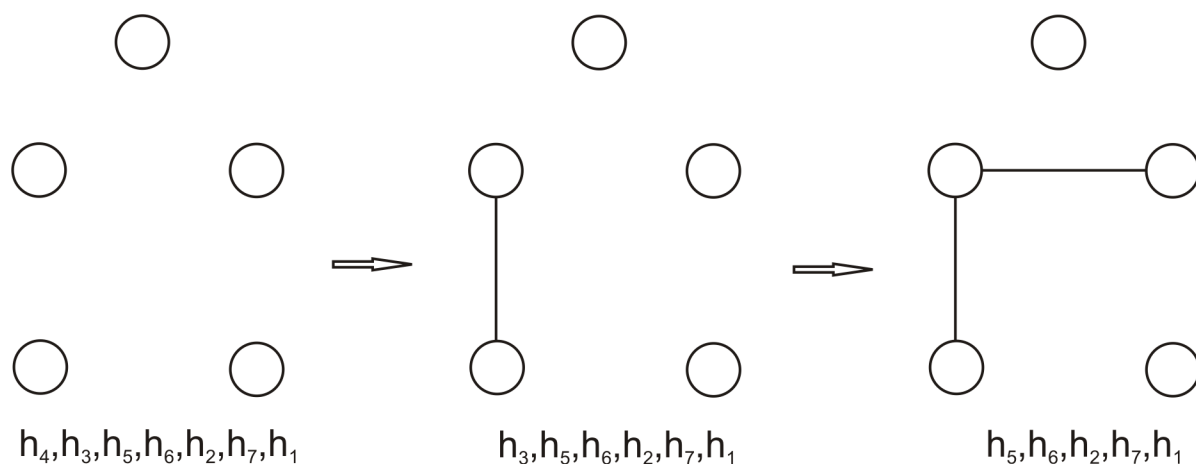
**Příklad.** V následujícím grafu máme najít jeho minimální kostru. Čísla vedle popisů hran označují ohodnocení hran.



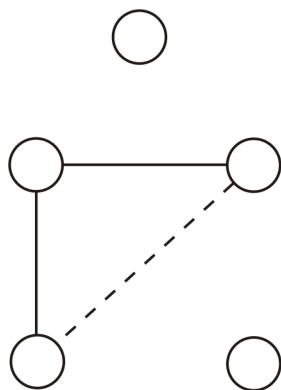
Hrany seřadíme v neklesající posloupnost jejich ohodnocení

$h_4, h_3, h_5, h_6, h_2, h_7, h_1$  .

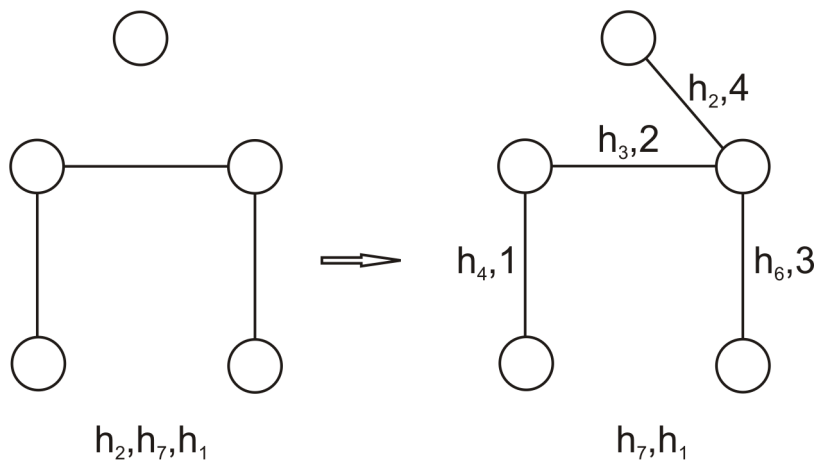
Postup přidávání hran ukazují následující obrázky.



Přidáním hrany  $h_5$  by vznikla kružnice



proto ji nepřidáme a pokračujeme další hranou  $h_6$



Přidáním zbývajících hran  $h_7$  a  $h_1$  by vznikly kružnice, proto je už nepřidáme.

Ohodnocení sestavené kostry je

$$s = w(h_2) + w(h_3) + w(h_4) + w(h_6) = 4 + 2 + 1 + 3 = 10 .$$

## Vyřazovací algoritmus

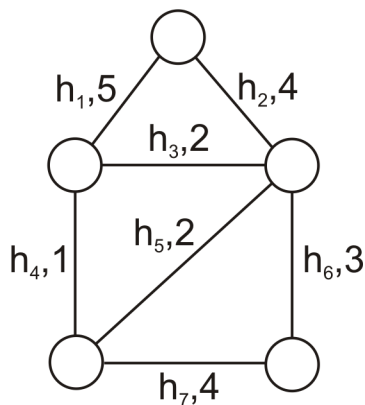
Hrany grafu  $G$  uspořádáme tak, že jejich ohodnocení tvoří nerostoucí posloupnost.

$$h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{in}$$

$$w(h_{i1}) \geq w(h_{i2}) \geq \dots \geq w(h_{in})$$

Na začátku jako podgraf  $K$  vezmeme celý výchozí graf  $G$ . Postupně procházíme posloupnost hran od začátku směrem ke konci a u každé hrany ověřujeme, zda leží na nějaké kružnici, tj. zda jejím odebráním by se neporušila souvislost podgrafu  $K$ . Pokud se souvislost neporuší, hranu odebereme z  $K$ .

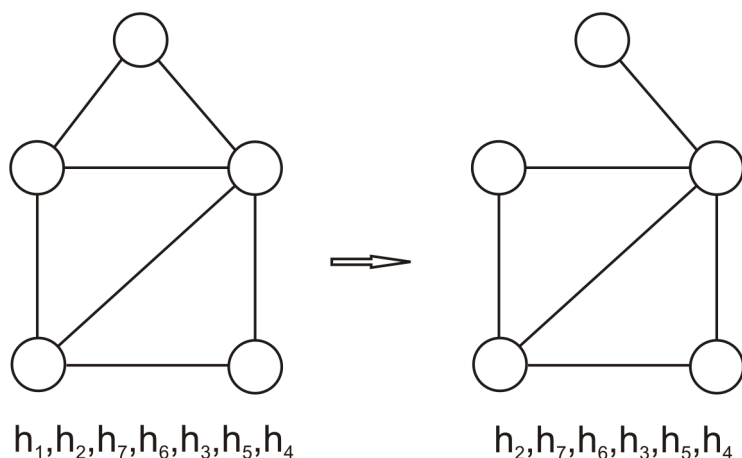
**Příklad.** Vezmeme stejný výchozí graf jako v příkladu u předchozího algoritmu.



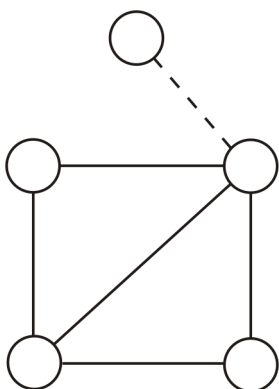
Hrany seřadíme v nerostoucí posloupnost jejich ohodnocení

$$h_1, h_2, h_7, h_6, h_3, h_5, h_4$$

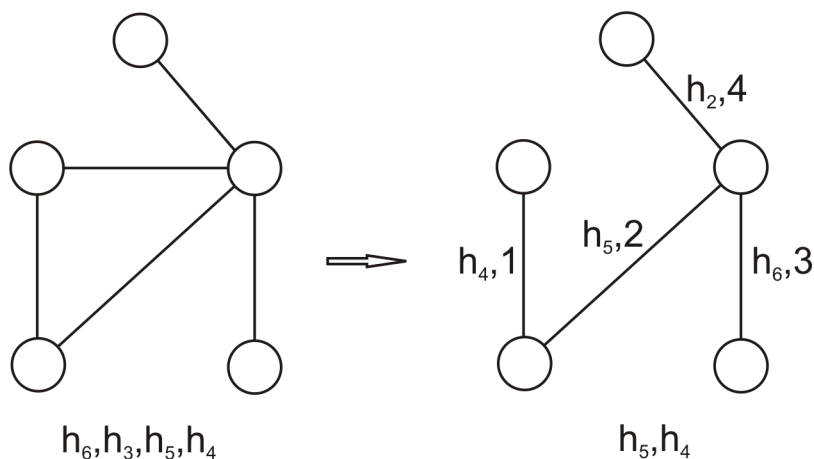
Postup odebírání hran ukazují následující obrázky.



Odebráním hrany  $h_2$  by se porušila souvislost grafu



proto ji neodebereme a pokračujeme další hranou  $h_7$



Zbývající hrany  $h_5$  a  $h_4$  už není možné odebrat, protože by se porušila souvislost grafu. Ohodnocení sestavené kostry je

$$s = w(h_2) + w(h_4) + w(h_5) + w(h_6) = 4 + 1 + 2 + 3 = 10 .$$

Dostali jsme sice jinou kostru než v minulém příkladě, ale její ohodnocení je stejné. Má-li graf více stejně ohodnocených hran, může mít více různých minimálních koster. Kterou kostru sestavíme, ovlivňuje pořadí, ve kterém stejně ohodnocené hrany dáme do posloupnosti pro zařazování nebo vyřazování hran.