

# Odebrání prvku z ČČ stromu

Označení:

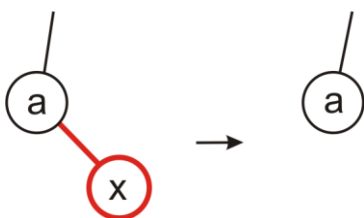
$x$  - odebíraný prvek

1. Vyhledáme prvek  $x$  ve stromu. Vyhledání může skončit třemi způsoby:

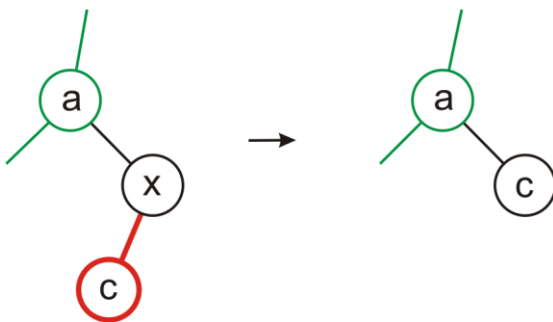
- Prvek  $x$  nebyl ve stromu nalezen – není co odebrat.
- Prvek byl nalezen v uzlu  $v$ , který má nejvýše jednoho následníka. Tento uzel zrušíme.
- Prvek byl nalezen v uzlu  $v$ , který má dva následníky. V tomto případě do uzlu  $v$  přesuneme buďto nejpravější (největší) prvek z jeho levého podstromu anebo nejlevější (nejmenší) prvek z jeho pravého podstromu a uzel, z kterého byl prvek přesunut, zrušíme.

2. Další postup závisí na tom, jakou barvu má rušený uzel.

- Rušený uzel má červenou barvu. V tom případě zrušení uzlu neovlivní počet černých uzlů (a černých hran) a odebrání je ukončeno.

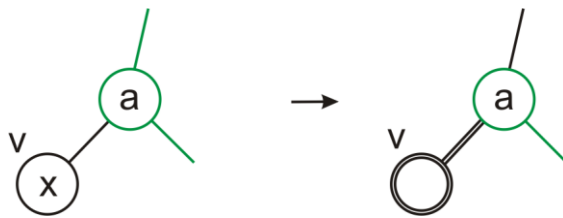


- Rušený uzel má černou barvu a má červeného následníka. Následníka přebarvíme na černou barvu. Tím počet černých uzlů (a černých hran) zůstane zachován a odebrání je ukončeno.



Zelené obarvení znamená, že daná hrana nebo daný uzel může mít černou nebo červenou barvu.

- Rušený uzel  $v$  má černou barvu a nemá červeného následníka. Uzel  $v$  obarvíme jako dvojitý černý. Toto obarvení vyjadřuje, že zrušením uzlu by nastal deficit černé barvy na cestách od kořenu k listům, na kterých tento uzel leží.



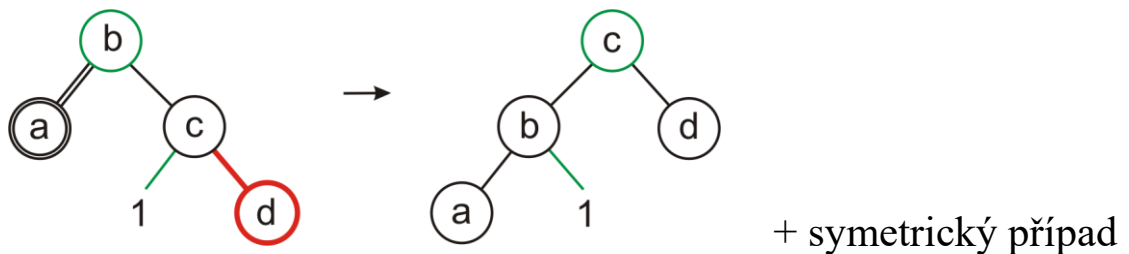
Další postup je transformacemi dosáhnout, aby ve stromu nebyl žádný uzel s dvojitým černým obarvením. Přitom u uzlu, který chceme zrušit, lze při odstranění jeho dvojitého černého obarvení již tento uzel ze stromu odstranit, aniž to bude mít vliv na počet černých hran na cestách, na kterých tento uzel leží.

## Odstranění dvojitého černého obarvení uzlu

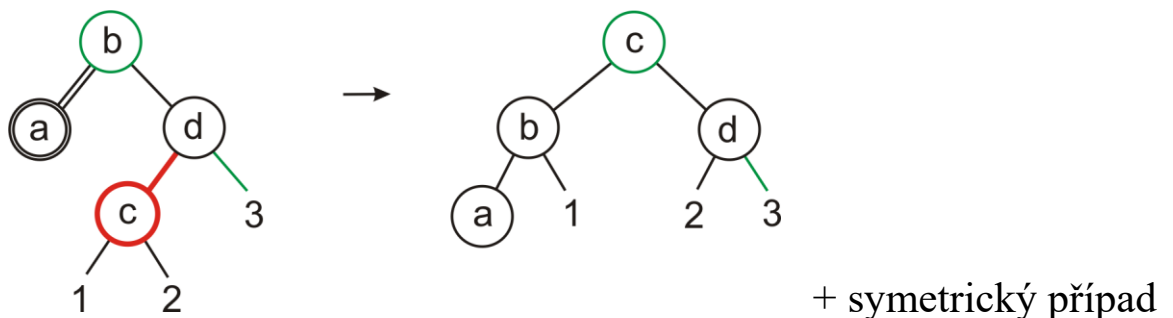
K tomu používáme podle situace dva typy transformací:

- rotace
  - výměna barev
- Sourozenec uzlu s dvojitým černým obarvením je černý uzel a tento má přitom aspoň jednoho červeného následníka – jednoduchá nebo dvojitá rotace (spojená s určitou změnou barvy uzlů).

Jednoduchá rotace:

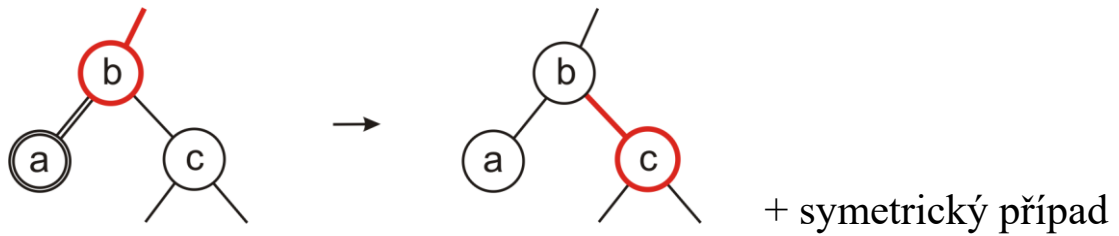


Dvojitá rotace:

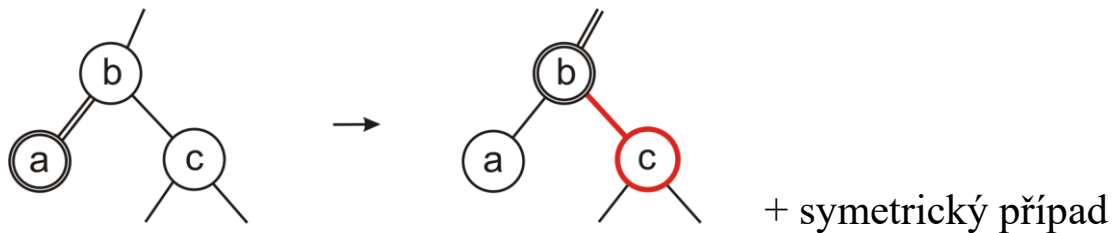


- Sourozenec uzlu  $v$  s dvojitým černým obarvením je černý uzel a tento přitom nemá žádného červeného následníka. Jedno černé obarvení od obou uzlů (uzlu  $v$  a jeho sourozence) odebereme a k předchůdci těchto uzlů naopak jedno černé obarvení přidáme. Uzel  $v$  bude tímto mít jedno černé obarvení a jeho sourozenec bude červeně obarven.

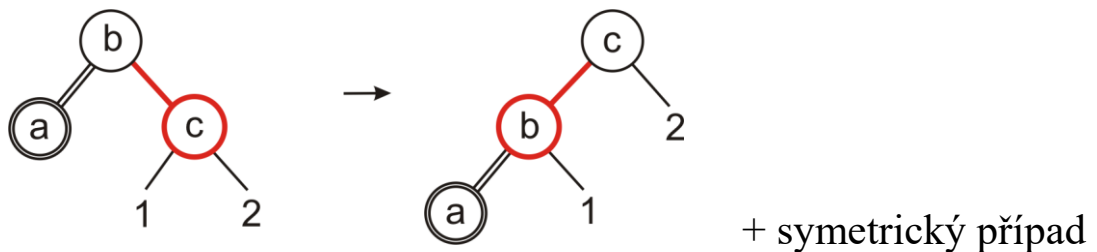
Předchůdce uzlu  $v$  je červený uzel – nyní bude černý uzel:



Předchůdce uzlu  $v$  je černý uzel. Pokud to není kořen, bude mít nyní dvojité černé obarvení (a proces odstranění dvojitého černého obarvení bude dál pokračovat tímto uzlem):

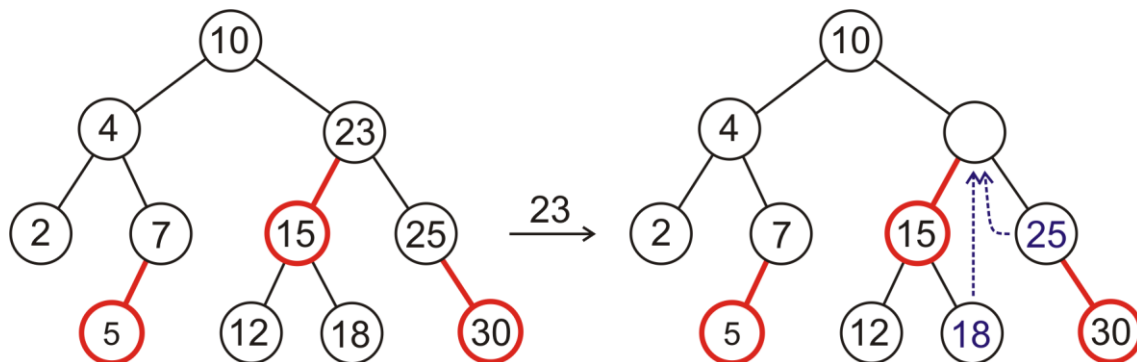


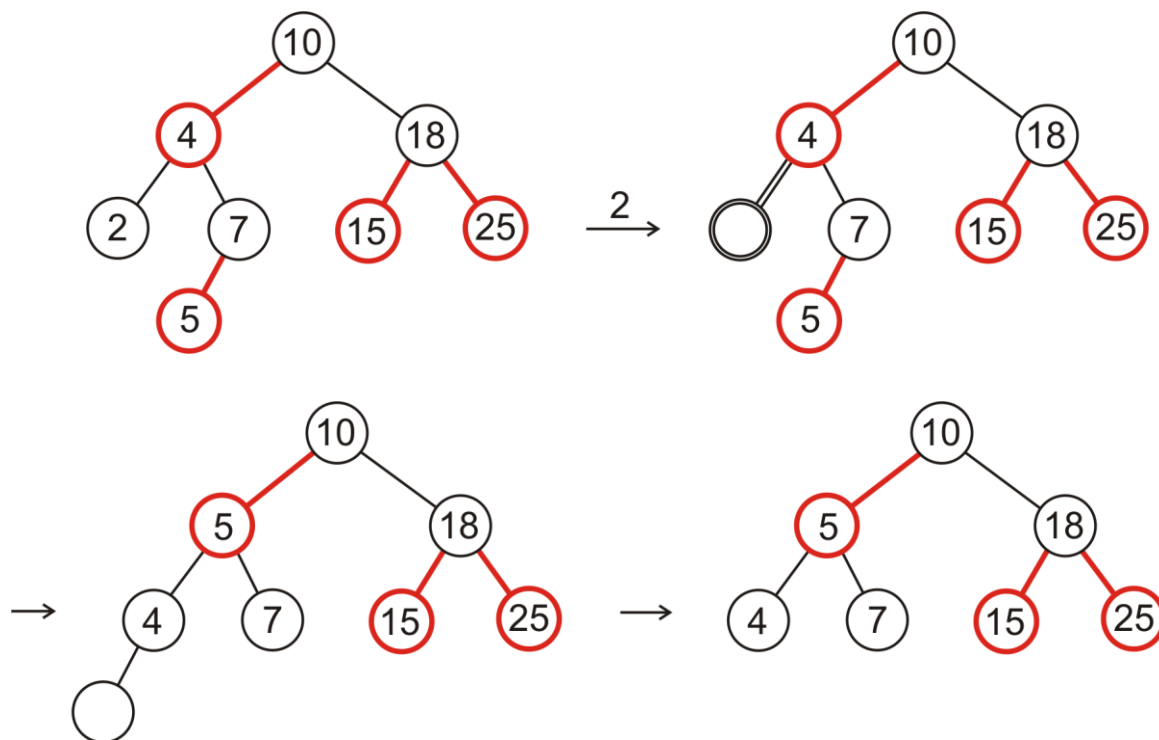
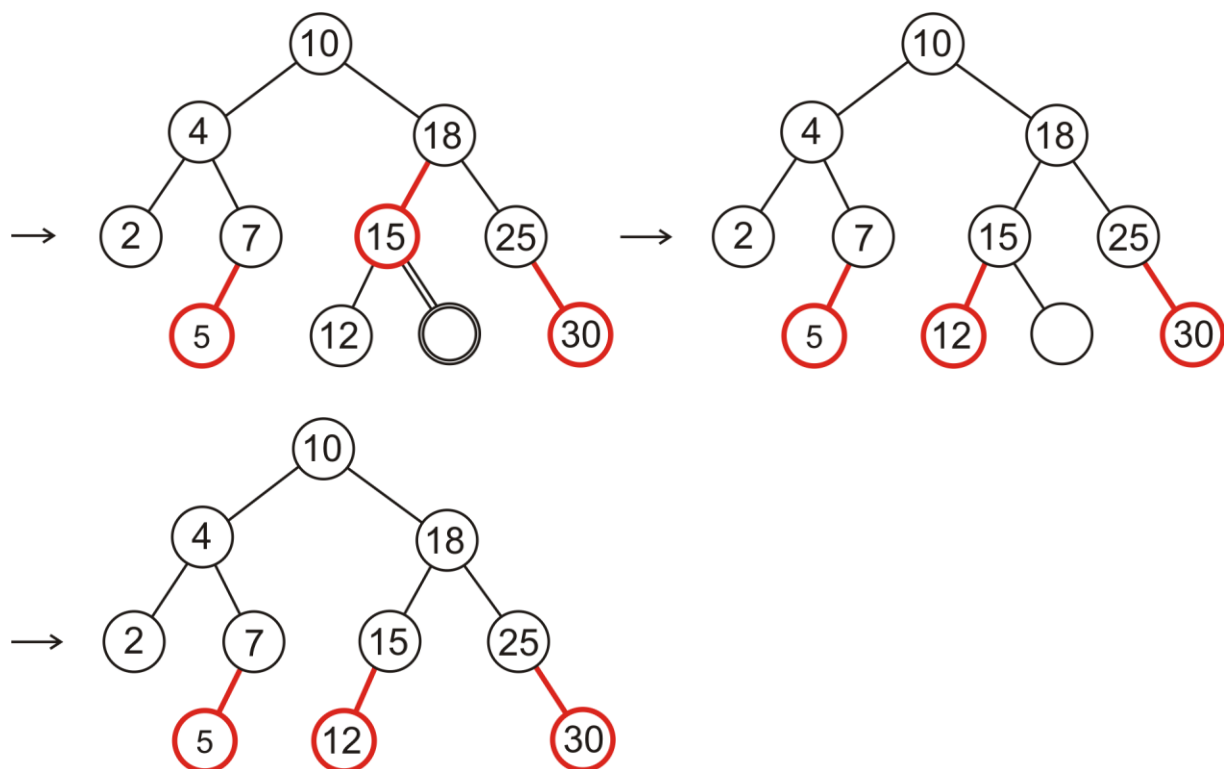
- Sourozenec uzlu  $v$  s dvojitém černým obarvením je červený uzel – jednoduchá rotace.



Původní levý následník uzlu  $c$  (na obrázku označen číslem 1) musel mít černou barvu. Tento je nyní černým sourozencem uzlu s dvojitém černým obarvením – můžeme nyní použít některou z předchozích transformací (rotaci nebo přebarvení).

## Příklady





## Časová složitost operací

Časová složitost operací je závislá na výšce červeno-černého stromu. Z vlastností červeno-černého stromu uvedených na začátku popisu těchto stromů plyne, že výška je maximálně  $2h + 1$ , kde  $h$  je výška B-stromu řádu 4, ze kterého lze červeno-černý strom sestavit. A výška B-stromu logaritmicky závisí na počtu prvků v něm uložených. Odtud plyne, že i výška červeno-černého stromu

logaritmicky závisí na počtu prvků v něm uložených. Tím složitost operací v červeno-černém stromu je opět  $\Theta(\ln(n))$ .