Vzdálenosti v grafu

Mějme souvislý graf $G = (U, H)$, jehož hrany jsou ohodnoceny nezápornými reálnými čísly. Toto ohodnocení zapíšeme jako zobrazení

$$w: H \to R_0^+$$

kde R_0^+ označuje množinu nezáporných reálných čísel.

Čísla, jimiž jsou jednotlivé hrany ohodnoceny, budeme nazývat délkami těchto hran.

Délkou cesty budeme nazývat součet délek všech hran obsažených na této cestě.

Definice. Vzdálenost $d(u,v)$ dvou uzlů u a v souvislém grafu G je délka nejkratší cesty ze všech cest mezi oběma uzly u a v.

Věta. Jsou-li délky hran v grafu kladná čísla, pak vzdálenost v grafu splňuje axiómy metriky. Tedy pro libovolné tři uzly u, v a w platí:

I. $d(u,v) \geq 0$, přičemž $d(u,v) = 0$ právě když $u = v$

II. $d(u,v) = d(v,u)$

III. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Důkaz:

Vlastnost *I.* je zřejmá. Pokud u a v jsou různé uzly, musí na cestě mezi nimi být aspoň jedna hrana.

Vlastnost *II.* je rovněž zřejmá. Nejkratší cesta z uzlu u do v je zároveň i nejkratší cestou z uzlu v do u.

I vlastnost *III.* je poměrně zřejmá. Neboť spojením cest mezi u a w a mezi w a v dostaneme cestu mezi u a v, jejíž délka, jež je součtem vzdáleností mezi u a w a mezi w a v, nemůže být menší než vzdálenost mezi koncovými uzly cesty u a v, což je délka nejkratší z cest mezi těmito dvěma uzly.

Následující algoritmus hledá nejkratší cestu (a tím i počítá vzdálenost) mezi dvěma zvolenými uzly grafu u a v. Algoritmus pracuje tak, že jeden z koncových uzlů zvolí jako výchozí, nechť je to třeba uzel u, a postupně v ostatních uzlech počítá délky cest mezi nimi a uzlem u. Pro tyto délky má v každém uzlu proměnnou c, ve které je v každém okamžiku uložena délka nejkratší z doposud nalezených cest mezí tímto uzlem a uzlem u. Dále si zavedeme množinu S, ve které budeme mít uzly, u kterých jsme zatím neprovedli výpočet délky cest, jež jdou přes tyto uzly k jejich sousedům.

Aktuální uzel, pro který právě počítáme délky cest jdoucí od uzlu u přes tento uzel k jeho sousedům, budeme značit z.

Popis algoritmu

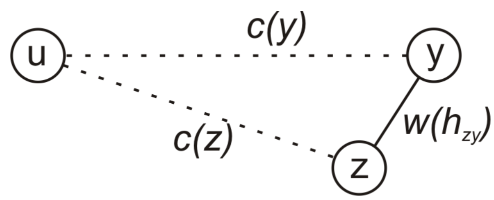
1. Počáteční nastavení.
   - $c(u) = 0$ - pro uzel u je délka nejkratší nalezené cesty = 0.
   - $c(w) = +\infty$ - pro všechny ostatní uzly $w \neq u$ je délka cesty mezi w a u na začátku nastavena na nekonečno. Tato hodnota vyjadřuje, že nebyla zatím vypočítána délka žádné cesty od uzlu u k uzlu w.
   - $S=U$ - do množiny S na začátku dáme všechny uzly grafu.
   - $z=u$ - aktuální uzel z, u kterého právě probíhá výpočet, na začátku nastavíme na výchozí uzel u.
2. Výpočet délek cest, jež vedou od uzlu u přes aktuální uzel z k sousedům aktuálního uzlu z. Pro všechny uzly y, které
   - jsou sousedé aktuálního uzlu z
   - a zároveň patří do množiny S ($y \in S$)

   vypočítáme novou délku $c(y)$ cesty mezi uzlem y a výchozím uzlem u

   $$c(y) = \min(\, c(y), c(z) + w(h_{zy}))$$

   kde h_{zy} označuje hranu mezi uzly z a y a $w(h_{zy})$ označuje délku této hrany.

   Což znamená, že je-li nová cesta mezi u a y přes uzel z kratší než doposud nalezená nejkratší cesta mezi uzly u a y, pak proměnná c vyjadřující délku nejkratší doposud nalezené cesty se v uzlu y nastaví na délku nové cesty.

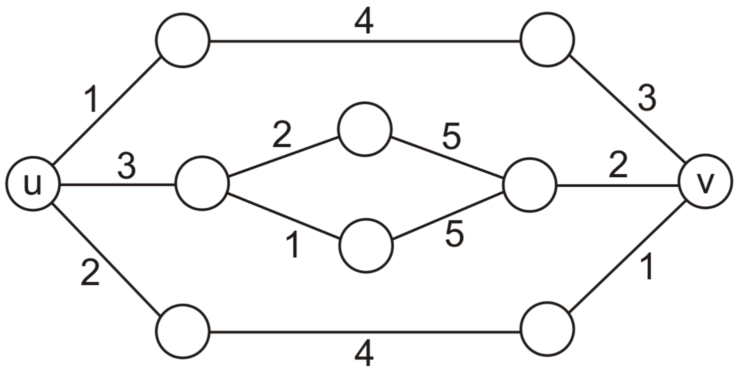
   Aktuální uzel z odebereme z množiny S, neboť délka cest jdoucích přes tento uzel k jeho sousedům už byla vypočítána:

   $$S = S - \{z\}\ .$$

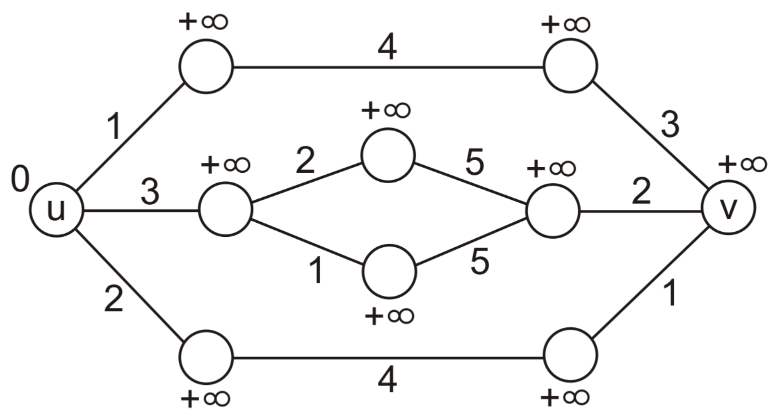
3. V množině S najdeme uzel s nejnižší hodnotou c a ten učiníme novým aktuálním uzlem z. Je-li tímto uzlem druhý koncový uzel hledané cesty v, pak výpočet končí a vzdálenost mezi uzly u a v je rovna hodnotě proměnné c v uzlu v. Tedy $d(u,v) = c(v)$.

   Jinak přejdeme ke kroku 2.

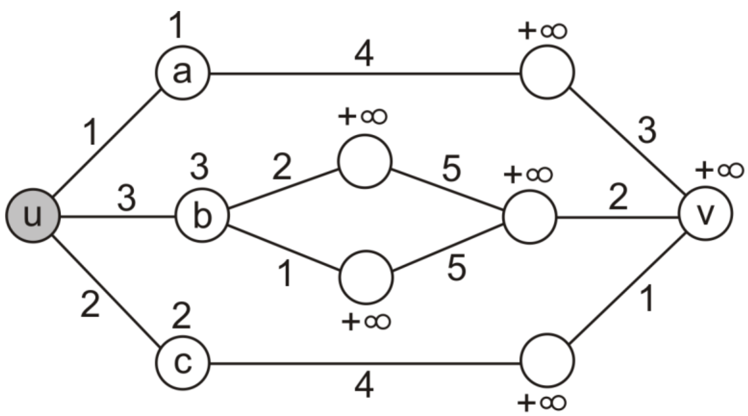
Příklad. V následujícím grafu G máme vypočítat vzdálenost mezi jeho uzly u a v.



Nastavíme příslušně ve všech uzlech počáteční hodnoty proměnné c.

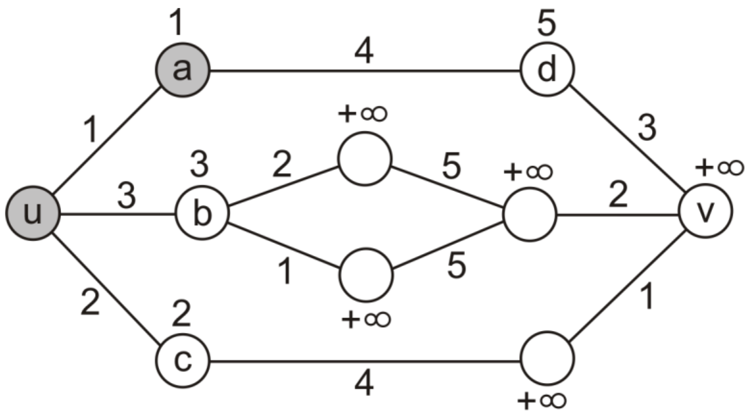


Aktuální uzel je počáteční uzel u. Provedeme pro něj výpočet a jeho vyřazení z množiny S označíme jeho obarvením.



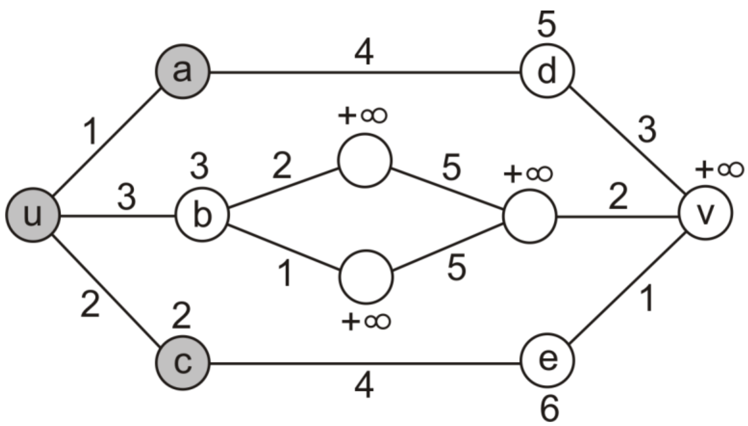
Uzel	a	b	c
Přechozí uzel cesty	u	u	u

Uzel s nejmenší hodnotou c je uzel a s hodnotou 1. Učiníme ho aktuálním uzlem a provedeme pro něj výpočet.



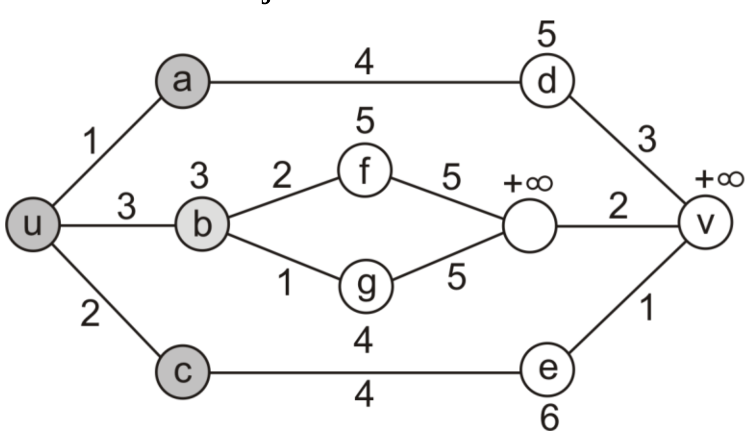
Uzel	a	b	c	d
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *c* s hodnotou 2. Ten bude nyní aktuálním uzlem.



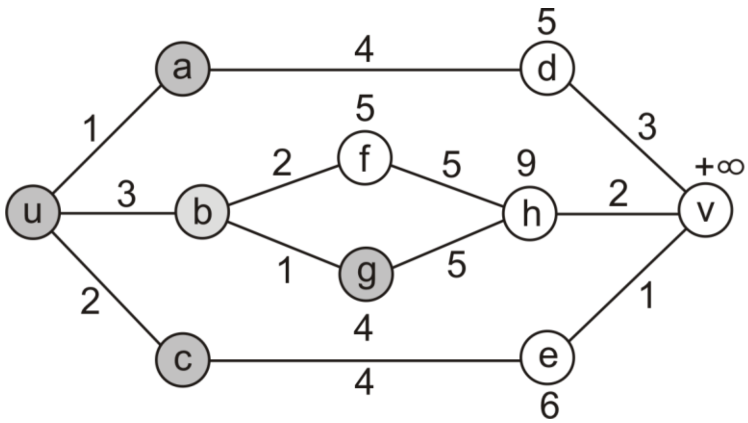
Uzel	a	b	c	d	e
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *b* s hodnotou 3. Učiníme ho aktuálním uzlem.



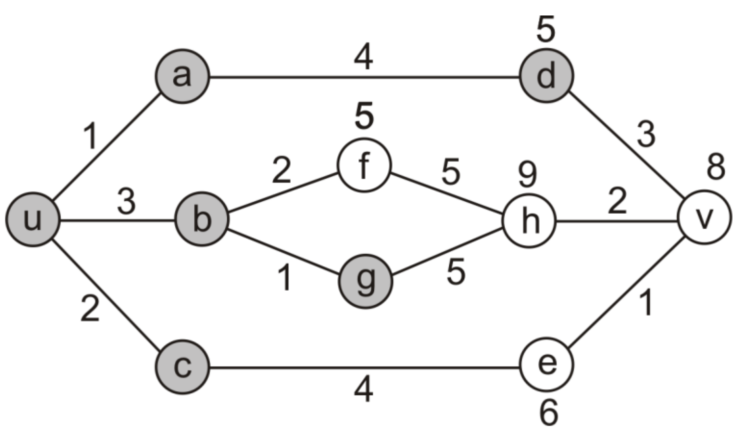
Uzel	a	b	c	d	e	f	g
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *g* s hodnotou 4. Učiníme ho aktuálním uzlem.



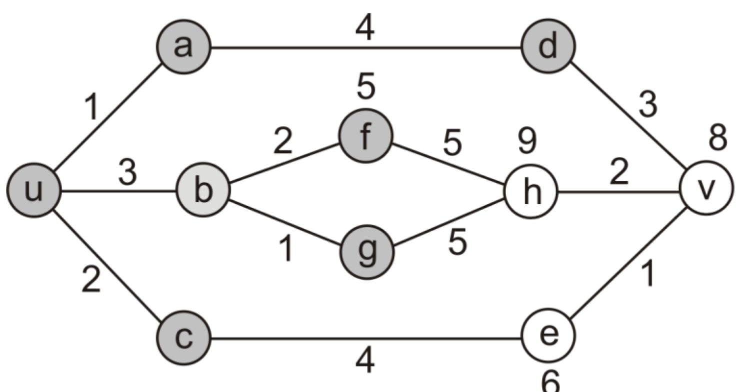
Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g

Nyní máme dva uzly *d* a *f* s nejmenší hodnotou *c*. Jako aktuální vezmeme třeba uzel *d*.



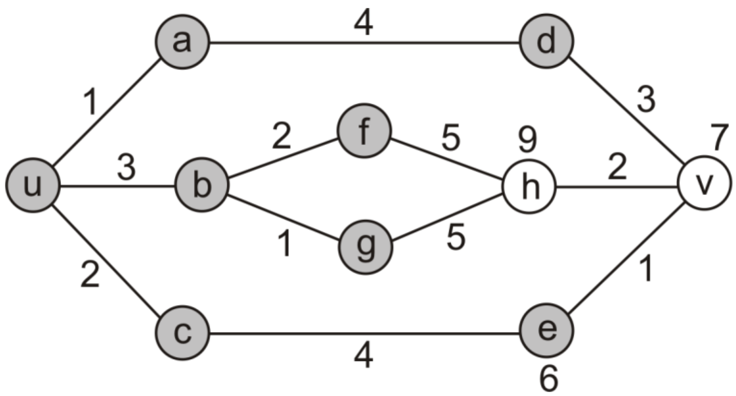
Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h	v
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g	d

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *f* s hodnotou 5. Učiníme ho aktuálním uzlem.



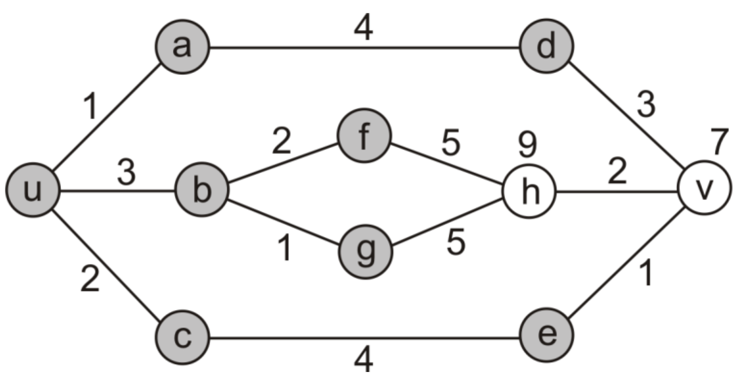
Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h	v
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g	d

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *e* s hodnotou 6. Učiníme ho aktuálním uzlem.



Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h	v
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g	e

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je nyní druhý koncový uzel cesty *v*. Výpočet tím končí a vzdálenost mezi uzly *u* a *v* je rovna 7.



Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h	v
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g	e

Nejkratší cestu lze zjistit dle předchozí tabulky a ukazuje ji následující obrázek.