سید مصطفی احمدی
تمرین اوّل SML
۹۴۳۱۰۵۳

پاسخ سؤال اوّل:

$P(C1) = 0.5$
$P(C2) = 0.7$
$P(C1, C2) = 0.4$

a: سؤال غلط املایی دارد. اگر فرض کنیم کامپیوتر دوم با احتمال ۰٫۷ آلوده می‌شود، خواهیم داشت:

خواسته‌ی سؤال: $P(C2|C1)$ است.

$$P(C2|C1) = \frac{P(C1, C2)}{P(C1)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

b:

$$P(\overline{C1}) = 0.5$$

می‌دانیم:

$$P(C2) = P(C2, C1) + P(C2, \overline{C1}) = 0.4 + P(C2, \overline{C1}) = 0.7 \Rightarrow P(C2, \overline{C1}) = 0.3$$

$$P(C2|\overline{C1}) = \frac{P(C2, \overline{C1})}{P(\overline{C1})} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

پاسخ سؤال دوّم:

a:

$$F_X(x) = \begin{cases} x < 0 : 0 \\ 0 < x < 1 : \int_0^x \frac{1}{4} dz = \frac{z}{4}\Big|_{z=0}^{z=x} = \frac{x}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \\ 1 < x < 3 : \frac{1}{4} \\ 3 < x < 5 : \frac{1}{4} + \int_3^x \frac{3}{8} dz = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} z \Big|_{z=3}^{z=x} = \frac{1}{4} + \frac{3x - 9}{8} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{8} \\ 5 < x : 1 \Rightarrow f(x) = 0 \end{cases}$$

b:

$$Y = r(X) = \frac{1}{X} \qquad A_y = \{x \mid r(x) < y\} = \{x \mid \frac{1}{x} < y\}$$

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow y < 0 : \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx = 0 \\ 0 < x < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x} < \infty \Rightarrow 1 < y < \infty : \frac{3}{4} + \int_{\frac{1}{y}}^{1} f(x)\,dx = \frac{3}{4} + \frac{x}{4}\Big|_{\frac{1}{y}}^{1} = 1 - \frac{1}{4y} \\ 1 < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < y < 1 : \frac{3}{4} + \int_{\frac{1}{y}}^{3} 0\,dx = \frac{3}{4} \\ 3 < x < 5 \Rightarrow \frac{1}{5} < y < \frac{1}{3} : \int_{\frac{1}{y}}^{5} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{y}}^{5} \frac{3}{8}\,dx = \frac{3}{8} x \Big|_{\frac{1}{y}}^{5} = \frac{15 - \frac{3}{y}}{8} \\ 5 < x \Rightarrow 0 < y < \frac{1}{5} : \int_0^y f(x)\,dx = \int_0^y 0\,dx = 0 \end{cases}$$

در همه این بازه‌ها لحاظ شده
$\{x : \frac{1}{x} < y\} \Rightarrow \{x : x > \frac{1}{y}\}$

$$\Rightarrow P(Y \leq y) = \begin{cases} y < 0 : 0 \\ 0 < y < \frac{1}{5} : 0 \\ \frac{1}{5} < y < \frac{1}{3} : \frac{15 - \frac{3}{y}}{8} \\ \frac{1}{3} < y < 1 : \frac{3}{4} \\ 1 < y : 1 - \frac{1}{4y} \end{cases}$$

پاسخ سؤال سوم:

از تعریف واریانس استفاده می‌کنیم:

$$\int (x-\mu)^2 f(x) = 0 \begin{cases} \to f(x)=0 & \text{در نقاطی که چگالی احتمال صفر است، واریانس صفر است} \\ \text{یا} \\ \to f(x)\neq 0 \Rightarrow (x-\mu)^2=0 \Rightarrow x=\mu & \text{در نقاطی که چگالی احتمال غیر صفر است} \end{cases}$$

فقط $x=\mu$ است. یعنی تنها یک نقطه

$\Rightarrow$ x فقط یک مقدار دارد : $x=\mu=c$

اما اگر $P(X=c)=1$ پس $\mu=c$ و $E(x-\mu)^2=0$

پاسخ سؤال چهارم:

a) ابتدا باید توزیع حاشیه‌ای X را به دست آوریم:

$$f_X(x)=\int_{x\leq y}^{1} f(x,y)\,dy = \int_0^1 16xy\,dy = 8xy^2\Big|_0^1 = 8x$$

$$E(X)=\int_0^{0.5} x f(x)\,dx = 8\int_0^{0.5} x^2\,dx = \frac{8}{3}x^3\Big|_0^{0.5} = \frac{1}{3}$$

b) مانند بالا:

$$f_Y(y)=\int_0^{0.5} 16xy\,dy = 8yx^2\Big|_0^{0.5} = 2y$$

$$E(Y)=\int_0^1 2y\times y\,dy = 2\int y^2 = 2\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

پاسخ سؤال پنجم: برای تابع توزیع تجمعی Y_n باید نوشت:

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n\leq y) = P(X_1\leq y, X_2\leq y, \dots, X_n\leq y)$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{چون توزیع‌های } X_i \\ \text{از هم مستقل‌اند}}}{=} P(X_1\leq y)\times\dots\times P(X_n\leq y) \underset{\substack{\downarrow \\ 0\leq y\leq 1}}{=} y\times\dots\times y = y^n \Rightarrow f_Y(y) = ny^{n-1}$$

$$\Rightarrow E(Y_n)=\int_0^1 ny^{n-1}\times y\,dy = n\int_0^1 y^n\,dy = n\times\frac{y^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

پاسخ سؤال ششم: این سؤال فقط انتگرال‌گیری است؟

$$F_Y(y)=P(Y\leq y) = P(e^X\leq y) = P(X\leq \ln y) = \int_{-\infty}^{\ln y} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \Rightarrow f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{\ln y}{2}}}{y\sqrt{2\pi}}$$

$$E(e^X)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \quad ,\quad V(Y)=E(e^{2X})-(E(e^X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\right)^2$$

پاسخ سؤال هفتم:

a) با احتمال $\frac{1}{2}$، $Unif(0,1)$ است، با احتمال $\frac{1}{2}$ هم $Unif(3,4)$. پس:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\times\frac{1}{2}\times 1\,dx + \int_3^4 x\times\frac{1}{2}\times 1\times dx$$

$$= \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{4}\Big|_3^4 = \frac{1}{4}+\frac{7}{4} = 2$$

b)

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2 = \left(\int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx + \int_3^4 \frac{x^2}{2}\,dx\right) - 4 = \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{6}\Big|_3^4 - 4 = \frac{1}{6}+\frac{37}{6}-4 = \frac{38-24}{6} = \frac{14}{6}$$

$$= \frac{7}{3}$$

$\Rightarrow$ standard deviation $= \sqrt{\frac{7}{3}}$