МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики

Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

на тему:

«**Численное интегрирование (3.1.10aL)**»

Направление: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Обучающийся: Попова Софья Ивановна

Группа: ПМ-1901 Подпись: ______________

Проверил: Хазанов Владимир Борисович

Должность: Профессор

Оценка: ________________________ Дата: _______________

Подпись: ___________________

Санкт-Петербург

2021

Оглавление

Необходимые формулы

Квадратурные формулы Гаусса-Кристоффеля

3.1.8. Квадратурные формулы Гаусса-Кристоффеля $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ – интерполяционная кв. формула с n узлами: $\underline{m \geq n-1}$

$$\text{заданы } [a,b],\ \rho(x),\ n,\ \underline{x_k - ?},\ k = \overline{1,n} \overset{?}{\Rightarrow} \underline{m = (n-1)+n}$$

Теорема $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),\ R_n[f]=0,\ \forall f(x) \in \mathcal{P}_{2n-1}) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ –интерполяционная, $\omega(x) \perp q(x),\ \omega(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j),\ \forall q(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$

$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),\ R_n[f]=0,\ \forall f(x) \in \mathcal{P}_{2n-1}) \Rightarrow$ интерполяционность $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ следует из Теоремы п. 3.1.2

$$q(x) \in \mathcal{P}_{n-1},\ f(x) = \omega(x)q(x) \in \mathcal{P}_{2n-1} \Rightarrow \int_a^b \rho(x)\omega(x)q(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \omega(x_k)q(x_k) = 0, \text{ т.е. } \omega(x) \perp q(x)$$

$\Leftarrow\ \omega(x) \perp q(x),\ \forall q(x) \in \mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{P}_{2n-1},\ f(x) = \omega(x)q(x) + r(x),\ r(x) \in \mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \underbrace{\int_a^b \rho(x)\omega(x)q(x)dx}_{=0} + \int_a^b \rho(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k r(x_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \Rightarrow R_n[f]=0\ (R_n[r]=0)$$

$$\int_c^d f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}z\right)dz =$$

$$= \frac{b-a}{2}\sum_{m=1}^{M} w_m f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}z_m\right) + e_M(f).$$

Исходные данные

Интегрирование функций: $x^2, x^3, e^3, \mathrm{Cos}[x] + S\mathrm{in}[x], \frac{1}{x+2}, \sqrt[3]{-1+x}, \frac{1}{\sqrt{2-x+x^3}}$

Программа

```
Clear[x,  gaussCrist];

gaussCrist[f_, n_] := Module[{Integr, x1 = {}, y, a = {}, xi, Ai, p, a1 = -1, b1 = 1, s = {}, ylocal, q, I}, p = D[(x^2 - 1)^n, {x, n}] / (2^n * n!);

  y = #[[1, 2]] & /@ Solve[p == 0, x];

  xi = 1/2 * (a1 + b1) + 1/2 (b1 - a1) * ylocal;

  AppendTo[x1, N[xi /. ylocal :> #]] & /@ y;

  a = 2 / ((1 - #^2) * (D[p, x] /. x :> #)^2) & /@ x1;

  Integr = ∑_{k=1}^{n} a[[k]] * (f /. x :> x1[[k]]);

  Print["∫_{-1}^{1} ", f, "= ", Integr,  "  Узлы - ", x1, " Веса - ", a]]
```

Рисунок 2 – реализация

Оценка точности полученного результата:

```
gaussCrist[x^2, 5]
N@Integrate[x^2, {x, -1, 1}]
```
интегрировать

$\int_{-1}^{1} x^2 = 0.666667$ Узлы – {0., -0.538469, 0.538469, -0.90618, 0.90618} Веса – {0.568889, 0.478629, 0.478629, 0.236927, 0.236927}

0.666667

```
gaussCrist[x^3, 5]
N@Integrate[x^3, {x, -1, 1}]
```
интегрировать

$\int_{-1}^{1} x^3 = 0.$ Узлы – {0., -0.538469, 0.538469, -0.90618, 0.90618} Веса – {0.568889, 0.478629, 0.478629, 0.236927, 0.236927}

0.

```
gaussCrist[Exp[3], 5]
```
показательная функция

```
N@Integrate[Exp[3], {x, -1, 1}]
```
интегриров··· показательная функция

$\int_{-1}^{1} e^3 = 40.1711$ Узлы – {0., -0.538469, 0.538469, -0.90618, 0.90618} Веса – {0.568889, 0.478629, 0.478629, 0.236927, 0.236927}

40.1711

```
gaussCrist[Cos[x] + Sin[x], 4]
```
косинус синус

```
N@Integrate[Cos[x] + Sin[x], {x, -1, 1}]
```
интегриров··· косинус синус

$\int_{-1}^{1} \mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x] = 1.68294$ Узлы – {-0.339981, 0.339981, -0.861136, 0.861136} Веса – {0.652145, 0.652145, 0.347855, 0.347855}

1.68294

$$\text{gaussCrist}\left[\frac{1}{x+2}, 5\right]$$

$$\text{N@Integrate}\left[\frac{1}{x+2}, \{x, -1, 1\}\right]$$

интегрировать

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x} = 1.09861$ Узлы – {0., -0.538469, 0.538469, -0.90618, 0.90618} Веса – {0.568889, 0.478629, 0.478629, 0.236927, 0.236927}

1.09861

```
gaussCrist[CubeRoot[x - 1], 5]
```
кубический корень

```
N@Integrate[CubeRoot[x - 1], {x, -1, 1}]
```
интегриров··· кубический корень

$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{-1+x} = -1.89273$ Узлы – {0., -0.538469, 0.538469, -0.90618, 0.90618} Веса – {0.568889, 0.478629, 0.478629, 0.236927, 0.236927}

-1.88988

$$\text{gaussCrist}\left[\frac{1}{\text{Sqrt}[x\text{^}3 - x + 2]}, 10\right]$$

$$\text{N@Integrate}\left[\frac{1}{\text{Sqrt}[x\text{^}3 - x + 2]}, \{x, -1, 1\}\right]$$

интегрировать

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2 - x + x^3}} = 1.42453$ Узлы – {-0.148874, 0.148874, -0.433395, 0.433395, -0.67941, 0.67941, -0.865063, 0.865063, -0.973907, 0.973907}

Веса – {0.295524, 0.295524, 0.269267, 0.269267, 0.219086, 0.219086, 0.149451, 0.149451, 0.0666713, 0.0666713}

1.42453

Оценка точности полученного результата:

Вывод: Полученный результат совпадает с встроенной функцией Wolfram Mathematica.