МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики

Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

на тему:

“Метод наименьших квадратов 1.3.4-x^k/2 ”

Направление: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Обучающийся: Попова Софья Ивановна

Группа: ПМ-1901 Подпись: _______________

Проверил: Хазанов Владимир Борисович

Должность: Профессор

Оценка: __________________________ Дата: ________________

Подпись: ____________________

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

Необходимые формулы

1.3.4. Метод наименьших квадратов

по значениям функции

$$\boxed{x_j,\ f(x_j),\ j=\overline{0,N}} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x_j) = f(x_j),\ j=\overline{0,N}} \quad \mathbf{\Phi a} = \mathbf{f}$$

$N > n$ $(N >> n)$, можно учесть веса ρ_j

– решение системы $\hat{\mathbf{\Phi}}\mathbf{a} = \hat{\mathbf{f}}$ с матрицей Грама: $\hat{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}$, $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{f}$

$$\boxed{\min_{a_k} \sum_{j=0}^{N} \left(f(x_j) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x_j) \right)^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{N} \varphi_k(x_j)\varphi_i(x_j) \right) a_k = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\varphi_i(x_j),\ i=\overline{0,n}}$$

– обобщенное решение несовместной системы $\mathbf{\Phi a} = \mathbf{f}$

Рисунок 1 - Формулы

Исходные данные

```
points = N@Table[{x, x^4 + 2 x}, {x, 0, 2, 1 / 4}] (*набор точек для функции  x^4+2x*)
             таблица значений
functions = Table[t^(k/2), {k, 1, 4}] (*базис*)
              таблица значений

{{0., 0.}, {0.25, 0.503906}, {0.5, 1.0625}, {0.75, 1.81641}, {1., 3.}, {1.25, 4.94141}, {1.5, 8.0625}, {1.75, 12.8789}, {2., 20.}}

{√t , t, t^(3/2), t^2}

points = N@Table[{x, Cosh[x] - x^3}, {x, 0, 2, 1 / 4}] (*набор точек для функции  Cosh[x]-x^3*)
             таблица з···  гиперболический косинус
functions = Table[t^(k/2), {k, 1, 3}] (*базис*)
              таблица значений

{{0., 1.}, {0.25, 1.01579}, {0.5, 1.00263}, {0.75, 0.872808}, {1., 0.543081}, {1.25, -0.0647011}, {1.5, -1.02259}, {1.75, -2.39519}, {2., -4.2378}}

{√t , t, t^(3/2)}

points = N@Table[{x, Sin[8 x]}, {x, 0, 2, 1 / 14}] (*набор точек для функции Sin[8x]  *)
             таблица з···  синус
functions = Table[t^(k/2), {k, 1, 8}] (*базис*)
              таблица значений

{{0., 0.}, {0.0714286, 0.540834}, {0.142857, 0.909823}, {0.214286, 0.989723}, {0.285714, 0.755147}, {0.357143, 0.280629}, {0.428571, -0.283056}, {0.5, -0.756802}, {0.57
 {0.714286, -0.538705}, {0.785714, 0.00252898}, {0.857143, 0.54296}, {0.928571, 0.91087}, {1., 0.989358}, {1.07143, 0.753487}, {1.14286, 0.278201}, {1.21429, -0.28548},
 {1.35714, -0.990434}, {1.42857, -0.907712}, {1.5, -0.536573}, {1.57143, 0.00505794}, {1.64286, 0.545082}, {1.71429, 0.91191}, {1.78571, 0.988987}, {1.85714, 0.751822},

{√t , t, t^(3/2), t^2, t^(5/2), t^3, t^(7/2), t^4}

points = N@Table[{x, Log[3 x] + 2 x^3}, {x, 1, 6, 1 / 2}] (*набор точек для функции Log[3x]+2x^3*)
             таблица з···  натуральный логарифм
functions = Table[t^(k/2), {k, 1, 2}] (*базис*)
              таблица значений

{{1., 3.09861}, {1.5, 8.25408}, {2., 17.7918}, {2.5, 33.2649}, {3., 56.1972}, {3.5, 88.1014}, {4., 130.485}, {4.5, 184.853}, {5., 252.708}, {5.5, 335.553}, {6., 434.89}}

{√t , t}
```

Рисунок 2 – исходные данные

Я рассматриваю функции $x^4 + 2x$, $\mathrm{Cosh}[x] - x^\wedge 3$, $\mathrm{Sin}[8x]$, $\mathrm{Log}[3x] + 2x^\wedge 3$.

Программа:

```
Clear[Coef]
Coef[points_, functions_, var_] := Module[{l = Length@points, x = points[[All, 1]], X, y = points[[All, 2]]},
  X = Join[ConstantArray[{1}, l], Transpose@Table[f1 /. var -> x, {f1, functions}], 2];
  Inverse[Xᵀ.X].Xᵀ.y]
Clear[Model]
Model[functions_, coefs_] := coefs.Prepend[functions, t^0]
```

Рисунок 3 – реализация

Функция Coef возвращает коэффициенты по множеству точек – points и базису – functions, функция Model возвращает готовую функцию по базису – functions, к которому мы добавляем t^0 –свободный член (ответ на комментарий) и набору коэффициентов из функции Coef.

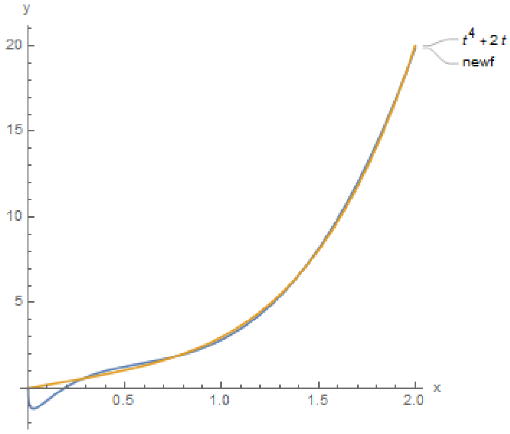
Оценка точности полученного результата:

функция $x^4 + 2x$:

```
newf = Model[functions, Coef[points, functions, t]]
Plot[{newf, t^4 + 2 t}, {t, 0, 2}, AspectRatio → 1, PlotRange → Full, AxesLabel → {"x", "y"},
 PlotLabels → "Expressions"]
```

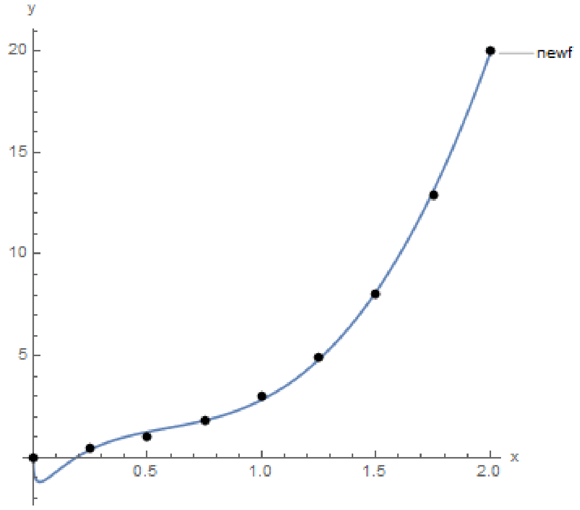
график функции | аспектное отноше··· | отображае··· | в по··· | обозначения на осях | пометки на графике

$0.0063663 - 16.36\sqrt{t} + 68.9437\,t - 88.863\,t^{3/2} + 39.1146\,t^2$




```
Plot[{newf}, {t, 0, 2}, AspectRatio → 1, PlotRange → Full, AxesLabel → {"x", "y"}, Epilog → {PointSize[0.02], Point@points},
 PlotLabels → "Expressions"]
```

график функции | аспектное отноше··· | отображае··· | в по··· | обозначения на осях | эпилог | размер точки | точка | пометки на графике



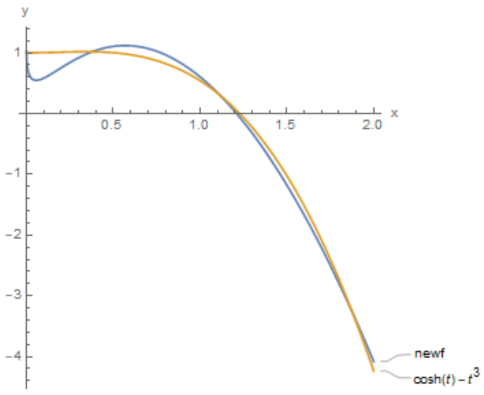
Оценка точности полученного результата:

Функция Cosh[x] − x^3:

```
newf = Model[functions, Coef[points, functions, t]]
Plot[{newf, Cosh[t] - t^3}, {t, 0, 2}, AspectRatio → 1, PlotRange → Full, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLabels → "Expressions"]
```

|график функ··· |гиперболический косинус |аспектное отноше··· |отображае··· |в по··· |обозначения на осях |пометки на графике

$1.02456 - 4.4703\sqrt{t} + 12.3654\,t - 8.31405\,t^{3/2}$

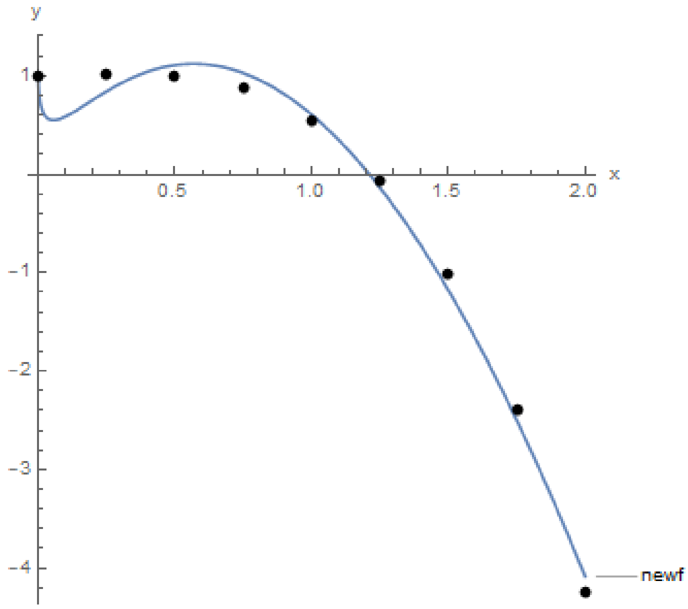



```
newf = Model[functions, Coef[points, functions, t]]
Plot[{newf}, {t, 0, 2}, AspectRatio → 1, PlotRange → Full, AxesLabel → {"x", "y"},
 Epilog → {PointSize[0.02], Point@points}, PlotLabels → "Expressions"]
```

|график функции |аспектное отноше··· |отображае··· |в по··· |обозначения на осях

|эпилог |размер точки |точка |пометки на графике

$1.02456 - 4.4703\sqrt{t} + 12.3654\,t - 8.31405\,t^{3/2}$



Оценка точности полученного результата:

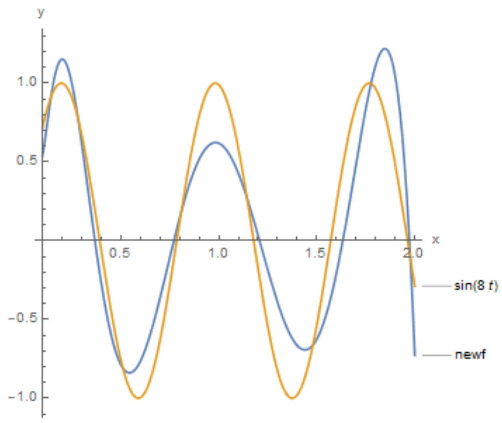
Функция $\text{Sin}[8x]$:

```
newf = Model[functions, Coef[points, functions, t]]
Plot[{newf, Sin[8 t]}, {t, 0.1, 2}, AspectRatio → 1, PlotRange → Full, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLabels → "Expressions"]
|график функ··· |синус                    |аспектное отноше··· |отображае··· |в по··· |обозначения на осях          |пометки на графике
```

```
{{0., 0.}, {0.0714286, 0.540834}, {0.142857, 0.909823}, {0.214286, 0.989723}, {0.285714, 0.755147}, {0.357143, 0.280629}, {0
 {0.714286, -0.538705}, {0.785714, 0.00252898}, {0.857143, 0.54296}, {0.928571, 0.91087}, {1., 0.989358}, {1.07143, 0.753487
 {1.35714, -0.990434}, {1.42857, -0.907712}, {1.5, -0.536573}, {1.57143, 0.00505794}, {1.64286, 0.545082}, {1.71429, 0.9119
```

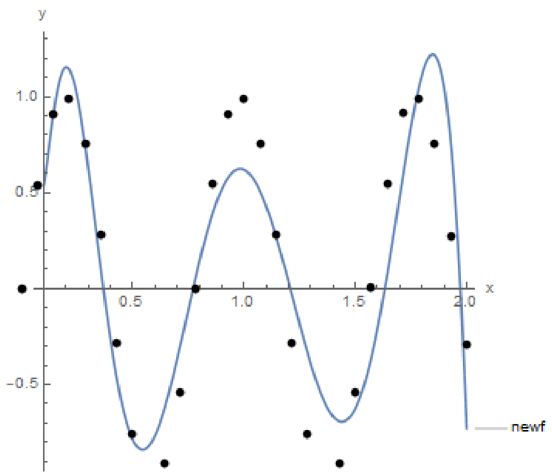
$\{\sqrt{t}, t, t^{3/2}, t^2, t^{5/2}, t^3, t^{7/2}, t^4\}$

$0.000962036 + 189.351\sqrt{t} - 2271.72\,t + 10993.1\,t^{3/2} - 27509.1\,t^2 + 38607.7\,t^{5/2} - 30636.4\,t^3 + 12831.4\,t^{7/2} - 2203.72\,t^4$




```
newf = Model[functions, Coef[points, functions, t]]
Plot[{newf}, {t, 0.1, 2}, AspectRatio → 1, PlotRange → Full, AxesLabel → {"x", "y"},
|график функции                |аспектное отноше··· |отображае··· |в по··· |обозначения на осях
 Epilog → {PointSize[0.02], Point@points}, PlotLabels → "Expressions"]
 |эпилог    |размер точки     |точка              |пометки на графике
```

$0.000962036 + 189.351\sqrt{t} - 2271.72\,t + 10993.1\,t^{3/2} - 27509.1\,t^2 + 38607.7\,t^{5/2} - 30636.4\,t^3 + 12831.4\,t^{7/2} - 2203.72\,t^4$



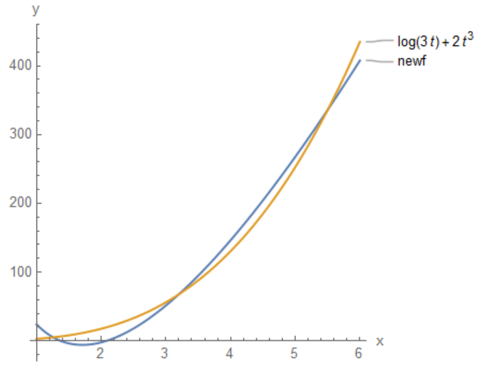
Оценка точности полученного результата:

функция $\mathrm{Log}[3x] + 2x\hat{}3$:

```
newf = Model[functions, Coef[points, functions, t]]
Plot[{newf, Log[3 t] + 2 t^3}, {t, 1, 6}, AspectRatio → 1, PlotRange → Full, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLabels → "Expressions"]
```

|график функ··· |натуральный логарифм |аспектное отноше··· |отображае··· |в по··· |обозначения на осях |пометки на графике

$535.245 - 827.696\sqrt{t} + 316.643\,t$




```
Plot[{newf}, {t, 1, 6}, AspectRatio → 1, PlotRange → Full, AxesLabel → {"x", "y"},
 Epilog → {PointSize[0.02], Point@points}, PlotLabels → "Expressions"]
```

|график функции |аспектное отноше··· |отображае··· |в по··· |обозначения на осях
|эпилог |размер точки |точка |пометки на графике

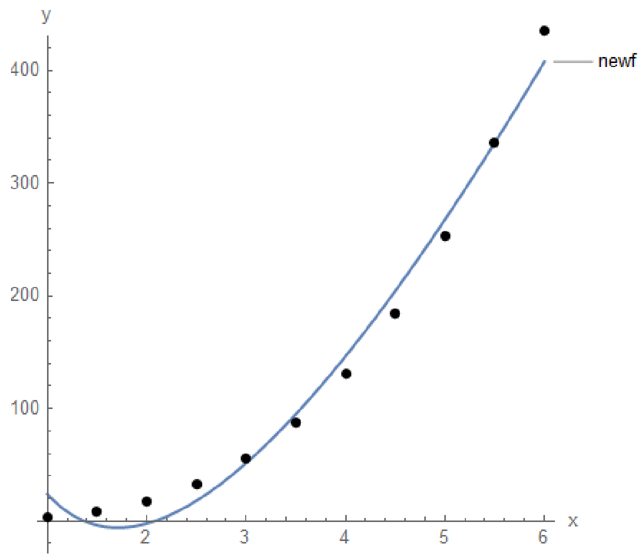


Рисунок 5 – решение встроенной функции

Оценка точности полученного результата:

Полученный результат совпадает с встроенной функцией Wolfram Mathematica .