商集合

斎藤尚 (福島大・理工)

最終更新日：2025 年 11 月 5 日

概要

商集合とそれに付随して出てくる概念である「自然な射影」がよくわかっていないまま大学 3 年生の後期を迎えた．これはまずいと思い，TEX でまとめることにした．

1　同値関係

X を集合とし，$\sim$ を X 上の関係とする．

定義 1.1 (同値関係)**.** X 上の関係 $\sim$ が**同値関係**であるとは，任意の x, y, z に対して次の 3 つがなりたつことをいう：

(i) $x \sim x$.

(ii) $x \sim y \implies y \sim x$.

(iii) $x \sim y$ かつ $y \sim z \implies x \sim z$.

□

定義 1.2 (同値類)**.** 次で定められる集合を X の同値関係 $\sim$ による**同値類**という：

$$[x] \overset{\text{def}}{=} \{y \in X : x \sim y\}.$$

□

$[x]$ について，[] 内の x を**代表元**という．

例 1.3. $X = \mathbb{Z}$ とし，関係 $\sim$ を次で定める:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } x - y = 2n.$$

つまり，$x - y$ が 2 の倍数である，という条件を考える．

まず，$\sim$ は同値関係である (証明は後ほど)．また，$[1] = [3] = [5], [2] = [4] = [6]$ のようになる．このことから，$\mathbb{Z}$ は「偶数の集合」と「奇数の集合」をもつことがわかり，次がいえる：

$$\mathbb{Z} = \{[1], [2]\}.$$

□

(同値関係であることのチェック). $x, y, z \in \mathbb{Z}$ を任意にとっておく．

(i) $x - x = 0 = 2 \cdot 0$ と $0 \in \mathbb{Z}$ より，O.K.

(ii) $x \sim y$ すなわち $\exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. $x - y = 2n$ としよう．このとき

$$y - x = -2n = 2 \cdot (-n)$$

と $-n \in \mathbb{Z}$ を合わせ，$y \sim x$ を得る．
(iii) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とする．つまり，次が成り立っている：

$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } x - y = 2n,$$
$$\exists m \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } y - z = 2m.$$

さて

$$x - z = (x - y) + (y - z) = 2n - 2m = 2(n - m)$$

と $n - m \in \mathbb{Z}$ より，$x \sim z$ がわかる． ■

2　商集合

上のセクションでは，同値関係と同値類を定義した．このセクションの初めでこの書類のメインである**商集合**を定める．

定義 2.1 (商集合)**.** X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とする．このとき，商集合 $X/\sim$ を次で定める：

$$X/\sim \overset{\text{def}}{=} \{[x] : x \in X\}.$$

□

$[x]$ が ($x \sim y$ をみたす y 全体の) 集合であったことを思い出そう．$X/\sim$ は**集合の集合**であることがわかる．

次に，**自然な射影**を次で定める:

定義 2.2 (自然な射影)**.** 次の写像 π のことを，自然な射影と呼ぶ：

$$\pi : X \ni x \mapsto [x] \in X/\sim.$$

□

また，次が従う．執筆者は，このことにずっと悩んでいたが，かなり自明であることにやっと気づいた．

Remark 2.1. π は全射である．

証明. 定義より $\pi(x) = [x]$ である．任意の $[x] \in X/\sim$ に対して，ある $x \in X$ が存在する (x は代表元！) から，π は全射であるといえる． ■