上極限と下極限

斎藤尚（福島大・理工）

最終更新日：2025 年 11 月 5 日

概要

ルベーグ積分の演習問題を解いているとき，不等式評価の場面でしれっと上極限をとった議論に出会した．上極限の定義とそれがもつ基本的な性質については知っていた．しかし，実際に使いこなせているかと問われると自信をもって「はいもちろんです」と答えることは今の私にはできない．

この文書の目標は，上極限使用への抵抗を少しでも減らすことである．そういうわけで，上極限の性質をまとめたのち，Cesàro 平均の証明をそれを使って行うことにより，上極限へ慣れ親しんでみたいと思う．

1 定義と性質

まず，数列に対して上極限と下極限の定義から始める．

定義 1.1 (上極限・下極限（数列）)**.** 数列 $\{a_n\}$ に対して，**上極限，下極限**を次で定める：

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} a_k), \tag{1.1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} a_k). \tag{1.2}$$

$\{a_n\}$ が上に非有界の場合は $\limsup a_n = \infty$ とし，下にそうである場合は $\liminf a_n = -\infty$ とする． □

上極限と下極限に関する基本的な性質を挙げておこう．

命題 1.2.

$$-\infty \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \infty.$$

□

命題 1.3.

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n,$$
$$\liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

□

命題 1.4. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ ならば

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

□

命題 1.5. $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \iff \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

□

命題 1.6. 非負数列 $\{a_n\}$(つまり $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$) に対して

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

$\square$

証明. $(\Rightarrow)$ $0 \leq a_n \leq \sup_{k\geq n} a_k$ について $n \to \infty$ としたとき，仮定と合わせて $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる．$(\Leftarrow)$ 命題 1.5 より，明らか． $\blacksquare$

2 実際の応用例

Cesàro 平均の証明では，多くの書物で ε-N 論法によるものが掲載されている．実は $\limsup$ を使えば，ε に依存する N が云々とか考えずに，証明することができる．

定理 2.1 (Cesàro 平均)**.** 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ をみたすとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = \alpha.$$

$\square$

証明. まず，$1 \leq k \leq n$ として

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - \alpha\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_j - \alpha)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}(a_j - \alpha) + \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}(a_j - \alpha)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}|a_j - \alpha| + \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}|a_j - \alpha| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}|a_j - \alpha| + \frac{n-(k-1)}{n}\sup_{j\geq k}|a_j - \alpha| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}|a_j - \alpha| + \sup_{j\geq k}|a_j - \alpha|.
\end{aligned}$$

両辺 n についての上極限をとると

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - \alpha\right| &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}|a_j - \alpha| + \sup_{j\geq k}|a_j - \alpha| \\
&= \sup_{j\geq k}|a_j - \alpha|.
\end{aligned}$$

$k \to \infty$ とすると

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - \alpha \right| &\le \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{j\ge k} |a_j - \alpha| \right) \\
&= \limsup_{k\to\infty} |a_k - \alpha| \\
&= \lim_{k\to\infty} |a_k - \alpha| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

上から 2,3,4 つ目の等号はそれぞれ，$\limsup$ の定義，命題 1.4，$\lim a_n = \alpha$ による．したがって

$$(0 \le) \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - \alpha \right| \le 0$$

から，再び命題 1.4 を用いると

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - \alpha \right| = 0$$

がわかり，結論を得る． ■

両辺 $\limsup$ をとるという操作は，Cesàro 平均に限った話に収まらない．冒頭でも話したように，(ルベーグ積分での) 不等式評価でも出てくる．

ちなみに，次のような疑問が出てくるのは自然だろう：

「$\limsup$ じゃなくて普通に $\lim$ とればいいじゃん．それはいけないの？」

それはしてはいけないのが結論である．$\lim$ は極限の存在があってのものだからである．$\limsup$ は $+\infty$ 含め常に存在するから，両辺 $\limsup$ をとるという操作は許されるわけだ．

参考文献

[1] 小澤徹「上極限と下極限」https://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/limit_sup.pdf

[2]「上極限と下極限の求め方【例題】」https://takataninote.com/analysis/limsup.html

[3]「上限と下限 (sup と inf)【例題】」https://takataninote.com/analysis/sup-inf.html