宿題 (11 月 11 日)

宿題 1: 最大数 (最小数) の条件 2 つ目を**弱める**とはどういうことか．弱めるモチベーションは何かとか，上限を考えるメリットなどを話せると素晴らしい．

宿題 2: 開区間を (a, b) と表すことがあるが，字が汚いとか (a, b) が $\mathbb{R}^2$ の座標であることと混同する場合などを鑑みると，(a, b) の記法は真煩わしいと言える．何か別の表記法はないのだろうか．
$\to$ 実は，ブルバキ流だと $]a, b[$ とかく．これだと閉区間 $[a, b]$ との対応もわかっていい気分．

コメント

0.1 集合の一致の証明方法 (笠井先生・中川先生)

A, B を集合とするとき，$A = B$ を示すには次のような方法が挙げられる．1. が最もオーソドックスな方法で，実は 2. のような方法もある．

1. $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$ であるから，右側を示す．
2. A, B の要素が一対一に対応している．

0.2 定義は 1 つ (笠井先生)

$A \subset \mathbb{R}$ とする．$-A$ の定義で 2 つかいたが，こういう定義の仕方は好ましくない．片方を定義とすると，もう片方は命題となる．だから，好きな方を定理とすればもう片方は命題として，定義から導ける．では今回は，$-A := \{x : -x \in A\}$ として，$-A = \{-y : y \in A\}$ を導こう．

上で紹介した (2) の方法で証明することにしよう．

$x \in -A$ としよう．このとき，$x = -y$ とおくと，$-x = -(-y) = y$ となり，$-y \in -A$ がいえる．よって，証明できた．[*1]

0.3 u' の範囲は？ (笠井先生)

上限の定義の 2 つ目に u' が出てきた．しかし，これが何に属しているかは明示されていない．これは，$u' \in \mathbb{R}$ と考えるべき．$u' \in A$ は少しやりすぎとなる．その論拠は，次のような集合 A を考えるとよいだろう：

$$A := [-1, -1 - 10^{-5}) \cup (-1 - 10^{-6}, 1].$$

[*1] ここ，少し曖昧なのでまた今度修正する．おそらく，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) := -x$ が全単射であることをいえばよいのだと思う．この全単射が，上述した一対一のことだと推測される．

これだと，-1 付近に穴のようなものができる．ここら辺はどうしようかという疑問が湧いてくるわけだ．これを鑑みると，$u' \in \mathbb{R}$ と考えるべきである．

0.4　命題 2.4 の否定命題は？

「上限 (下限) は存在するならば一意的である」というのが命題 2.4 の主張であった．これの証明方法として，我々は背理法を採用した．では，なぜ背理法だとうまくいくのか．

背理法とは，否定命題が偽であることが何かしらの矛盾により判明して，それをもってして，元の命題が真である，という論理で成り立っている証明方法である．したがって，今回であれば，「上限 (下限) は存在するならば一意的である」の否定命題が偽であることを示したい．

まず，命題 2.4 が次のようになるのは大丈夫であろうか．

$$\exists u = \sup A,\ \exists u' = \sup A \implies u = u'.$$

$\exists$ の使い方がちょっと違うのはご勘弁．さて，これの否定命題はつぎとなる：

$$\exists u = \sup A,\ \exists u' = \sup A \wedge u \neq u'.$$

$u \neq u'$ と仮定すると，矛盾が導けるから，否定命題が偽となって，証明完了！というわけだ．

何を否定しているか，するとしてどこまで否定しているかは意識する必要がある．