宿題 (11 月 14 日)

宿題 1: 無理数が有理数よりもたくさんあること $\rightarrow$ カントールの対角線論法のお話

コメント

0.1　「有界を主張するときはギリギリを攻める必要はない」(笠井先生)

$a \in \mathbb{R}$ とし，$A \coloneqq (-\infty, a) \subset \mathbb{R}$ とおく．このとき，A は上に有界であるが，それを象徴するために定義中の a として区間右端の a を採用する義務はない．なぜかというと，$a+1$ を採用しても，上に有界であること自体は主張できるからである．

0.2　「空集合は別で約束している」(笠井先生)

定義中で $A = \emptyset$ とすると，$x \in A$ がそもそも成り立たない ($\emptyset$ は要素をもたない集合であるから)．それゆえ，空集合は別で考える必要がある．こういうものは他の概念でも出てくる．

0.3　「言い換えられる，というけれど」(笠井先生)

「言い換えられる」という言い方は，通常，必要十分条件のことを指す．したがって，$A \implies B$ を口頭で説明するとき，「A を B で言い換えると...」とするのは好ましくない．「A から B が言えるので...」ならまだわかる．

0.4　「なぜ”アルキメデスの原理”といういうのか」(笠井先生)

アルキメデスの原理の主張は以下の通りである：

定理 0.1. $a, b > 0$ を任意の実数とする．このとき，自然数 n で $an > b$ をみたすものが存在する．
□

$a = 1, b = 3$ くらいなら大してありがたみを感じない．だが，$a = 10^{-10}, b = 10^{10}$，つまり a が十分小さい，b が十分大きいとしても，$an > b$ をみたすような $n \in \mathbb{N}$ が存在することを，この定理は保証しているわけだ．

0.5　「有理数がぎっしり詰まっていることの証明」(中川先生)

$a < c < b$ となる c の存在が言えたからといって，区間上に有理数がぎっちり詰まっていることは主張できない．じゃあどのようにすればいいのか，それは次のようにしてみよう：

まず，$a < c < b$ となる c の存在は言えている．ここで，この事実は $a < c$ でも通用する．つまり，$a < c_1 < c$ となる有理数 c_1 が存在する．これは $c < b$ でも同様である．

このような操作 (?) を続けていけば，区間 (a, b) 上に有理数がぎっしり詰まっていることを示せるわけだ.

0.6 「」()

0.7 「」()