宿題 (11 月 20 日)

宿題 1: $n^p \geq n$ $(n, p \in \mathbb{N})$ の証明
　　$\rightarrow$ 未解決のまま本番へ
宿題 2: $K\eta < \varepsilon$ をみたす $\eta > 0$ の存在について
　　$\rightarrow$ 未解決のまま本番へ

コメント

今日は笠井先生しかいなかった．

0.1 「式変形・不等式評価の根拠」

例えば，次の不等式評価は，それぞれ何を根拠としてなりたっているだろうか．ただし，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を仮定している．

$$n > N \implies |a_n| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha| < \varepsilon + |\alpha|.$$

左から 1 つ目の不等号は三角不等式，2 つ目は $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ に由来する．これを口頭で説明するにとどまらず，板書でも書くようにしたい．

0.2 「数学的帰納法」

$n^p \geq n$ $(n, p \in \mathbb{N})$ の証明で帰納法を使おうとしていたが，これはおおがかりすぎる．$n^{p-1} \geq 1$ と同値であるから，n^{p-1} の単調性と云々で片付けて O.K.

ちなみに，数学的帰納法を使うとして，左辺と右辺がどちらも動くのは不都合であり，それで証明しようとするのは悪手であり，センスが悪い．左辺 $-$ 右辺 ≥ 0 を示すならまだわかる．

0.3 「教育的配慮」

定理の証明において，どこがキモなのかを，証明が一通り終わったあとなどに一言添えられるようにする．

0.4 「0 以上の定数倍しても O.K.」

イプシロンデルタにおいて，$|\cdots| < \varepsilon$ のように，ε で抑えるのが見栄えが良い．しかし，書物をみていると，定数倍の ε で抑えられいる場合もある．この場合でも実は O.K. で，それは命題 2.10 が保証している．

命題としては $K \geq 0$ で構わないが，証明のうちでは，$K > 0$ とする．$K = 0$ だと，$K\eta < \varepsilon$ を

みたす $\eta > 0$ について，η はバカデカくても O.K. になってしまう．

0.5 「収束列ならば有界」

M を $K+L$ の正負によって変えたが，そんなことをする必要はない．$M := \max\{|K|, |L|\}$ とすればそれでよい．

上は $M := \begin{cases} |K| \ ((K+L)/2 \geq 0) \\ |L| \ ((K+L)/2 < 0) \end{cases}$ よりもスマートだと思った．これはこれで教育的らしいが，どうなのだろう．