蔵本モデルが解き明かすリズムの秘密　～拍手のリズムはなぜ揃うのか？～

01-タイトルスライド

皆さん、こんにちは。今日は「蔵本モデルが解き明かすリズムの秘密」というテーマでお話しします。サブタイトルにある通り「拍手のリズムはなぜ揃うのか？」という現象について数理モデルの観点から説明していきます。

02-自己紹介

まず簡単に自己紹介をします。私はさめ、またはмег-сскという名前で活動しているフリーランスのソフトウェアエンジニアです。現在、社会人学生として通信制大学に在学中です。

得意分野は主に3つあります。コンピュータビジョンの分野では画像認識や点群処理、空間情報処理では地理情報やリモートセンシング、そしてAWSやGCPを使ったクラウドインフラ設計やIaCなどです。

GitHubやYouTube、Speaker Deckでも情報発信していますので、興味があればぜひ見てください。

03-今日話すこと

今日は主に以下のことについてお話しします。

まず、「同期現象」、つまりバラバラだったリズムが揃う現象をモデル化できる蔵本モデルについて紹介します。

次に、蔵本モデルの数式の意味を噛み砕いて説明します。数式は少し難しく見えるかもしれませんが、実は直感的に理解できるものなので安心してください。

さらに、「ホタルの点滅」を再現した蔵本モデルのシミュレーションを実際に見ていきます。

最後に、蔵本予想と結合定数の臨界点について触れ、代表的な「相転移」の例も紹介します。

04-蔵本モデルの概要

それでは、蔵本モデルとはどういうものなのか説明していきます。

05-蔵本モデルとは？

蔵本モデルとは、「リズムが揃う」現象をモデル化するための数理モデルです。 1975年に蔵本由紀先生によって提唱されました。

面白い動画があったので見てみましょう。複数のメトロノームが同じ台の上に置かれていると、最初はバラバラだったリズムが徐々に揃っていきます。これが典型的な同期現象の例です。

06-蔵本モデルの応用例

蔵本モデルは様々な「リズムが揃う現象」をモデル化できます。

例えば、コンサートなどで起こる拍手のリズムが自然と揃っていく現象や、ホタルが集団で一斉に光る現象などです。

他にも、電力系統における発電機の周波数同期も重要な応用例だそうです。これが乱れると大停電につながることがあります。

また、医学的には心臓の鼓動のリズムもこのモデルで表現でき、その乱れが心房細動などの疾患に関係しているそうです。

07-蔵本モデルの数式

ここで蔵本モデルの数式を見てみましょう。

この式では、θ_i は i 番目の振動子の位相、ω_i はその振動子の角速度、Kは相互作用の強さを表す結合定数、そしてNは振動子の数を表しています。

一見複雑に見えるかもしれませんが、この式が表す意味は実はシンプルです。

08-蔵本モデルの右辺第2項の意味

特に重要なのは右辺の第2項です。

この式を理解するために、θ_iを自分の拍手のリズム、θ_jを他の人の拍手のリズムだと考えてみましょう。

この項は、自分と他のみんなのリズムのズレの平均を表しています。結合定数Kが大きいほど、このズレを修正する力が強くなり、結果としてリズムが揃いやすくなります。

09-結合定数Kの意味

結合定数Kについてもう少し詳しく説明します。

Kが大きいほど、リズムは揃いやすくなります。逆にKが小さいと、それぞれが自分のリズムを維持しようとするため、リズムは揃いにくくなります。

拍手の例で言えば、Kは「どれだけ他の人の拍手のリズムを意識して合わせようとするか」という意識の強さを数値化したものと考えられます。

K=0の場合は、相手の拍手のリズムをまったく意識せず、自分のリズムだけを維持しようとする状態です。

この後のシミュレーションで、実際にKの値によってどのように挙動が変わるか見ていきましょう。

10-蔵元モデルの式をもう一度見る

もう一度、蔵本モデルの式を見てみましょう。

この式は、「自分のリズムの変化率」が「自分の自然なリズム」と「他の人とのリズムのズレの平均」によって決まることを示しています。

結合定数K=0の時は右辺第2項が消えるので、自分のリズムの速さω_iでいつまでも動き続けます。

Kが大きくなるほど、他の人とのリズムのズレが自分のリズムの変化率に影響を与えるようになります。

11-蔵本モデルのシミュレーション

ここからは、蔵本モデルのシミュレーションを見ていきましょう。

12-蔵本モデルのシミュレーション

GitHubに蔵本モデルのシミュレーションのコードを公開してくれている方がいたので、そのコードを少し改変して遊んでみました。興味のある方は、スライドに表示されているURLからアクセスできます。

このコードを使って、ホタルの点滅のリズムが揃う様子をシミュレーションしてみました。結合定数Kの値を変えながら、どのような違いが出るかを見ていきましょう。

13-ホタルの点滅: K=2

まず、K=2の場合です。

時間の経過とともに徐々にリズムが揃っていくことがわかります。最初はバラバラだった点滅のタイミングが、少しずつ同期していき、最終的にはほぼ完全に揃います。

14-ホタルの点滅: K=5

次に、K=5の場合です。

結合定数が大きくなると、リズムがすぐに揃うことがわかります。K=2の時よりもはるかに速く同期が起こっています。これは、他のホタルのリズムに合わせようとする力が強いためです。

15-ホタルの点滅: K=0

対照的に、K=0の場合はどうでしょうか。

結合定数が0の時、つまり他のホタルのリズムを全く気にしない時は、いつまでもリズムは揃いません。それぞれが自分の固有のリズムを維持し続けるため、永遠にバラバラのままです。

16-結合定数の不思議な振る舞い

ここで興味深い現象があります。K=1.59の時とK=1.6の時で、システムの振る舞いが大きく変わります。

左側のK=1.59の場合、いくら時間が経過してもリズムが揃いません。

一方、右側のK=1.6の場合は、時間はかかりますが、最終的にリズムが揃います。

わずか0.01の差ですが、システムの振る舞いが質的に変化しています。これは何を意味するのでしょうか？

17-蔵本予想と相転移

ここからは、蔵本予想と相転移について説明します。

18-蔵本予想

蔵本予想とは、結合定数が臨界点K_cを超えると、急激にリズムが揃うようになるという予想です。

これは、0°Cで水が急に氷になるようなイメージです。臨界点を境に、システムの性質が質的に変化します。

臨界点K_cはこのような式で表されます。

ここで、g(ω)は角速度の分布関数、g(0)はω=0の時の分布関数の値です。

19-臨界点の計算

今回のシミュレーションでは、角速度の分布関数として、 平均0、標準偏差1の標準正規分布を使用しています。 標準正規分布の式を使って臨界点を計算していきます。

20-平均場の周波数

振動子全体の平均的な角速度は0になります。これを「平均場の周波数」と呼びます。

系全体の分布をg(0)で代表できるということです。標準正規分布の場合、g(0)は1/√(2π)となります。

21-臨界点の計算

先ほどの式に値を代入して計算すると：

K_c ≃ 1.596

となります。

これで、なぜK=1.6はリズムが揃い、K=1.59ではリズムが揃わなかったのかが説明できます。K=1.6は臨界点をギリギリ超えているので、リズムが揃います。一方、K=1.59は臨界点を下回っているので、リズムは揃いません。

このように、臨界点を超えると急激に性質が変化する現象を「相転移」と呼びます。

22-相転移の例

相転移は様々な物理現象で現れます。

例えば、水が0°Cで氷になる現象や、水が100°Cで蒸発する現象は相転移の典型例です。また、磁石が高温で磁性を失う現象も相転移の一種です。

さらに壮大なスケールでは、宇宙の始まりも真空の相転移として説明されることがあります。

23-蔵本予想の証明

最後に、蔵本モデルと蔵本予想の歴史について少し触れておきます。

蔵本モデルは1975年に提唱され、1984年に蔵本予想が定式化されました。

そして、この予想は2012年に当時九州大学の千葉逸人先生によって証明されました。スライドには論文のリンクも載せてありますので、興味のある方はぜひご覧ください。

このように数学的に証明されたことから、今後は「蔵本-千葉定理」と呼ぶべきだというわたしは思います。

24-まとめ

今日のお話をまとめます。

「リズムが揃う」様々な現象を蔵本モデルによって説明できることを見てきました。

結合定数Kは、周りとのリズムがズレているのを合わせようとする作用の強さを表しています。

そして、結合定数が臨界点を超えると、急激にリズムが揃うようになります。これが蔵本予想であり、2012年に証明されました。

蔵本モデルは代表的な相転移現象のモデルとして、様々な分野で応用されています。

25-LT登壇者の募集

物理学集会ではLT登壇者を募集しています！どんなジャンルでもOKですので、興味のある方は物理学集会のDiscordサーバーまでご連絡ください。

告知

最後に、次回開催は6月28日を予定していることをお知らせします。

LTだけでなく、「この物理の動画をみんなで見たい！」というYouTube動画の提案も大歓迎だそうです。

以上で発表を終わります。ご清聴ありがとうございました。