発表原稿: なぜエネルギーは保存する？ 〜自由落下でわかる"対称性"とネーターの定理〜

タイトルスライド

みなさん、こんにちは。今日は「なぜエネルギーは保存する？ 〜自由落下でわかる"対称性"とネーターの定理〜」というタイトルでお話しします。

自己紹介

まず簡単に自己紹介させてください。さめ、またはмег-сскと申します。VRChat物理学集会の主催をしております。現在、社会人学生として通信制大学に在学中です。

得意分野としては、コンピュータビジョン、特に画像認識や点群処理、そして空間情報処理、特に地理情報やリモートセンシング、さらにクラウドインフラ設計やIaCといった分野を扱っています。

今日話すこと

さて、今日話すことですが、物理にはいろんな保存則があります。エネルギー保存則、運動量保存則、角運動量保存則など、多くの保存則が存在します。

では、なぜこれらの物理量は保存するのでしょうか？実は、保存則は対称性から導かれるんです。今日は自由落下という最もシンプルな運動を使って、対称性と保存則の関係を見ていきます。

そして、その謎を解くのが「ネーターの定理」です。

ネーターの定理と自由落下

それでは本題に入りましょう。ネーターの定理と自由落下の関係について見ていきます。

ネーターの定理

ネーターの定理の主張は、「対称性があると保存則がある」というものです。ただ、これだけだとよくわかりませんよね？ですので、自由落下のような簡単な例から考えていきましょう。

スライドに写っているのは、エミー・ネーターという数学者です。1882年から1935年まで生きた方で、このネーターの定理を発見しました。

自由落下運動とエネルギー保存則

まず、自由落下運動とエネルギー保存則について確認しましょう。

重力加速度gの地球上で、質量mの物体を地面からの高さq=hの位置で静止させ、そこから自由落下させます。このとき、地面に到達する時の速度Vはいくつになるでしょうか？

エネルギー保存則

みなさんご存知のように、位置エネルギーと運動エネルギーの和は保存します。

式で書くと、$mgq + (1/2)mv^2 =$ 一定、となります。

地面に到達する時、位置エネルギーがすべて運動エネルギーになるので、速度Vは、$mgh = (1/2)mV^2$という式から、$V = -\sqrt{(2gh)}$と求まります。

負になるのは、鉛直上向きを正としたq軸の逆方向に落下するからです。

エネルギー保存則の時間対称性と空間対称性の破れ

ここからが本題です。エネルギー保存則と、時間対称性、そして空間対称性の破れについて見ていきましょう。

自由落下運動の時間対称性

自由落下の結果は時間に依存しません。高さhから物体を落とした時、地面に衝突する時の速度Vは、今日の0時に落としても、明日の12時に落としても、時間によらず結果は変わりません。

つまり、自由落下運動は時間に対して対称性を持つ、ということができます。

もちろん、ものすごく長い時間スケールで考えると地球の質量分布が変わって重力加速度gが変わることはあり得ますが、通常の時間スケールではこの対称性が成り立ちます。

自由落下運動の空間対称性の破れ

一方で、自由落下の結果は鉛直方向の変化によって変わります。高さ$h + \delta h$から物体を落とした時、速度は$V = -\sqrt{(2g(h + \delta h))}$となり、高さによって位置エネルギーが変化し、速度が変わります。

つまり、重力によって空間は鉛直方向に一様ではありません。高さによって位置エネルギーが変化するため、鉛直方向の並進対称性が破れているのです。

重力が破る鉛直方向の対称性

もう少し詳しく見てみましょう。水平方向には対称性があります。物体を水平方向にδxだけずらしても、重力は鉛直下向きに一様にかかるので、自由落下の結果は変わりません。

しかし、鉛直方向には対称性がありません。地球の重力場が存在するため、高さqによって位置エネルギーmgqが変わります。つまり、空間が一様ではないのです。重力が鉛直方向の空間対称性を破っているわけです。

対称性とは？

ここで、物理における対称性について整理しましょう。

対称性とは、ある変換に対して性質が変わらないことを指します。

例えば、自由落下運動では、時間を$t \to t + \delta t$にずらしても結果は変わりません。一方で、高さを$q \to q + \delta q$にずらすと結果が変わります。

そして、対称性がある場合、対称性に対応する保存量があります。これがネーターの定理の核心です。

自由落下の運動方程式

ここで、別のアプローチから自由落下を解いてみましょう。

自由落下の運動方程式（解法）

ニュートンの運動方程式を使います。$f = ma = -mg$より、加速度$a = -g$です。

物体が距離hを移動するのに必要な時間は、$h = (1/2)gt^2$より、$t = \sqrt{(2h/g)}$です。

したがって、速度Vは、$V = at = -gt = -\sqrt{(2gh)}$となります。

同じ問題を2つのアプローチから解けた

エネルギー保存則を使った方法と、運動方程式を使った方法、この2つのアプローチで同じ答えが得られました。両者の間に何か密接な関係がありそうですよね。

実は、何が両者を結びつけるかというと、対称性とネーターの定理、そしてオイラー-ラグランジュ方程式なのです。

ラグランジアン

ここで、ラグランジアンLを以下のように定義します。

$L = T - V$

Tは運動エネルギー、Vは位置エネルギーです。

最小作用の原理

最小作用の原理について説明します。

まず、作用Sを、ラグランジアンLの時間積分として定義します。$S = \int$(t1からt2まで) L dt となります。

そして、最小作用の原理とは、物体は作用の変分$\delta S = 0$となる経路を通って運動する、というものです。

この原理から、オイラー-ラグランジュ方程式が導かれます。

オイラー-ラグランジュ方程式

ラグランジアンLが定まると、運動方程式は以下のように書けます。

$d/dt\ (\partial L/\partial \dot{q}) = \partial L/\partial q$

ここで、qは位置、$\dot{q}$は速度（位置の時間微分）、$\ddot{q}$は加速度（位置の2階時間微分）です。

この式は最小作用の原理から導出可能ですが、今日は詳細は割愛します。

自由落下のラグランジアン

自由落下のラグランジアンLは、

$L = T - V = (1/2)m\dot{q}^2 - mgq$

となります。

このラグランジアンLをEL方程式に代入してみましょう。

自由落下のEL方程式

左辺は、$d/dt\,(\partial/\partial\dot{q}\,((1/2)m\dot{q}^2 - mgq)) = m\ddot{q}$ となります。

右辺は、$\partial/\partial q\,((1/2)m\dot{q}^2 - mgq) = -mg$ となります。

左辺 = 右辺より、$\ddot{q} = -g$ が得られます。

つまり、ラグランジアンがわかれば運動方程式は決まるのです！

ラグランジアンの全微分と対称性

ここからが重要です。ラグランジアンの全微分と対称性の関係を見ていきましょう。

ラグランジアンの全微分-1

ラグランジアン$L(q, \dot{q}, t)$を位置q、速度$\dot{q}$、時刻tの関数として考え、全微分します。

$dL = (\partial L/\partial q)dq + (\partial L/\partial\dot{q})d\dot{q} + (\partial L/\partial t)dt$

時間で割ると、

$dL/dt = (\partial L/\partial q)\dot{q} + (\partial L/\partial\dot{q})\ddot{q} + \partial L/\partial t$

となります。

ラグランジアンの全微分-2

ライプニッツ則 $(fg)' = f'g + fg'$ を使います。

$d/dt\,(\dot{q}\,\partial L/\partial\dot{q}) = \ddot{q}\,\partial L/\partial\dot{q} + \dot{q}\,d/dt\,(\partial L/\partial\dot{q})$

EL方程式を右辺第2項に代入すると、

$d/dt\,(\dot{q}\,\partial L/\partial\dot{q}) = \ddot{q}\,\partial L/\partial\dot{q} + \dot{q}\,\partial L/\partial q$

この式は、ラグランジアンの全微分の第1項と第2項と一致します。

ラグランジアンの全微分-3

ライプニッツ則から得られた結果を、ラグランジアンの全微分の式に代入すると、

$dL/dt = d/dt\ (\dot{q}\ \partial L/\partial \dot{q}) + \partial L/\partial t$

整理すると、

$d/dt\ (\dot{q}\ \partial L/\partial \dot{q} - L) = -\partial L/\partial t$

という関係が得られます。

$\partial L/\partial t = 0$ の時の保存量

自由落下運動でLは時間変化しないので、$\partial L/\partial t = 0$ です。

すると、

$d/dt\ (\dot{q}\ \partial L/\partial \dot{q} - L) = 0$

つまり、

$\dot{q}\ \partial L/\partial \dot{q} - L$ = 時間変化に対して一定

という保存量が得られます。

時間対称性とエネルギー保存則

この時間変化に対して不変な量 $\dot{q}\ \partial L/\partial \dot{q} - L$ をエネルギーと呼びます！

実際に計算してみると、

$\dot{q}\ \partial L/\partial \dot{q} - L = \dot{q}\ \partial/\partial \dot{q}((1/2)m\dot{q}^2 - mgq) - ((1/2)m\dot{q}^2 - mgq) = (1/2)m\dot{q}^2 + mgq$ = エネルギー

となります。運動エネルギーと位置エネルギーの和、つまりエネルギーが保存されることがわかります。

自由落下のラグランジアンと対称性

改めてまとめると、

$L = (1/2)m\dot{q}^2 - mgq$

Lは時間tによって変化しません。一方で、高さqの変化によってLも変化します。

時間並進対称性から保存量が得られ、この保存量がエネルギーなのです！

ネーターの定理の核心

ネーターの定理の核心は、対称性が保存量を生み出すメカニズムです。

ある変換に対してラグランジアンLが不変であれば、ラグランジアンの全微分から保存量が導かれます。

つまり、保存則は数学的帰結なのです。エネルギー保存則のような基本法則でさえ、ラグランジアンの対称性から導かれる数学的結果です。対称性から保存量へという普遍的な構造があるのです。

ネーターの定理の一般系

ネーターの定理の一般形を示します。

連続的な対称性変換 $q \to q + \varepsilon\, \delta q$ に対して、ラグランジアンが不変 $\delta L = 0$ ならば、保存量Q（Noether charge）が存在します。

$Q = (\partial L/\partial \dot{q}) \cdot \delta q =$ 一定

この定理は相対論や統計力学でも活躍する非常に重要な定理です。

補足とまとめ

ここからは補足とまとめです。

運動量保存則と角運動量保存則

他の保存則についても簡単に触れておきます。

運動量保存則は、空間並進対称性 $\partial L/\partial q = 0$ が成り立つ時、運動量 $p = \partial L/\partial \dot{q} = m\dot{q}$ が保存されます。

角運動量保存則は、空間が回転対称性（ラグランジアンが回転に対して不変）を持つ時、角運動量 $L = r \times p$ が保存されます。

より進んだ内容: 4元運動量

より進んだ内容として、相対論では時間と空間を統一的に扱います。

エネルギーと運動量をまとめた4元運動量は、

$p^\mu = (E/c, p) = (E/c, p_x, p_y, p_z)$

と表されます。

時空の対称性から2つの保存則が同時に導かれます。時間並進対称性からエネルギー保存則、空間並進対称性から運動量保存則が導かれ、相対論では両者が統一されるのです。

まとめ

それではまとめです。

なぜエネルギーは保存するのでしょうか？

自由落下の結果は、いつ落としても変わりません。この時間対称性がエネルギー保存則の源なのです。

ラグランジアンが時間に依存しない時、そこから自然に保存量が導かれます。このときの保存量がエネルギーです。

ネーターの定理の本質は、対称性があれば保存則がある、ということです。

主要参考文献

今日の発表の主要参考文献を紹介します。

江沢洋『解析力学』培風館（2007年）は、ものすごく丁寧に広い話題を扱った教科書で、光学や量子力学への応用例も豊富です。

小出昭一郎『解析力学』岩波書店（1983年）は、初学者向けの教科書で、最初はこれがオススメです。

竹内修『解析力学』は、筑波大学のウェブサイトで公開されており、強制振動や空気抵抗のラグランジアンなど、より発展的な話題を取り上げています。

LT登壇者の募集

最後に、物理学集会ではLT登壇者を募集しています！どんなジャンルでもOKですので、興味のある方は物理学集会のDiscordサーバーまでお越しください。

スライドにQRコードを載せていますので、ぜひアクセスしてみてください。

ご清聴ありがとうございました！