

サイコロで理解する原子核崩壊と 拡散現象

～単純化されたモデルで本質を理解する～



自己紹介

- さめ (мeг-ccк)
 - 🚗 フリーランスのソフトウェアエンジニア
 - 🎓 社会人学生として通信制大学在学中
- 得意分野:
 - 📸 コンピュータビジョン
(画像認識/点群処理)
 - 🌎 空間情報処理 (地理情報/リモートセンシング)
 - ☁ クラウドインフラ設計/IaC (AWS, GCP)
- GitHub
- YouTube
- Speaker Deck



今日話すこと

- サイコロを振って出た目によってボールを移動させる単純なゲームを考える
- このゲームで原子核崩壊や拡散現象(インクの染みの広がりなど)が再現できることを示す！
- 物理現象をシンプルなモデルで理解することの威力を実感しよう！

原子核崩壊のモデル化

原子核崩壊のおさらい

- 原子核崩壊は放射性物質が放射線を放出する現象
 - 放射線を放出した原子核は安定した原子核に変化する

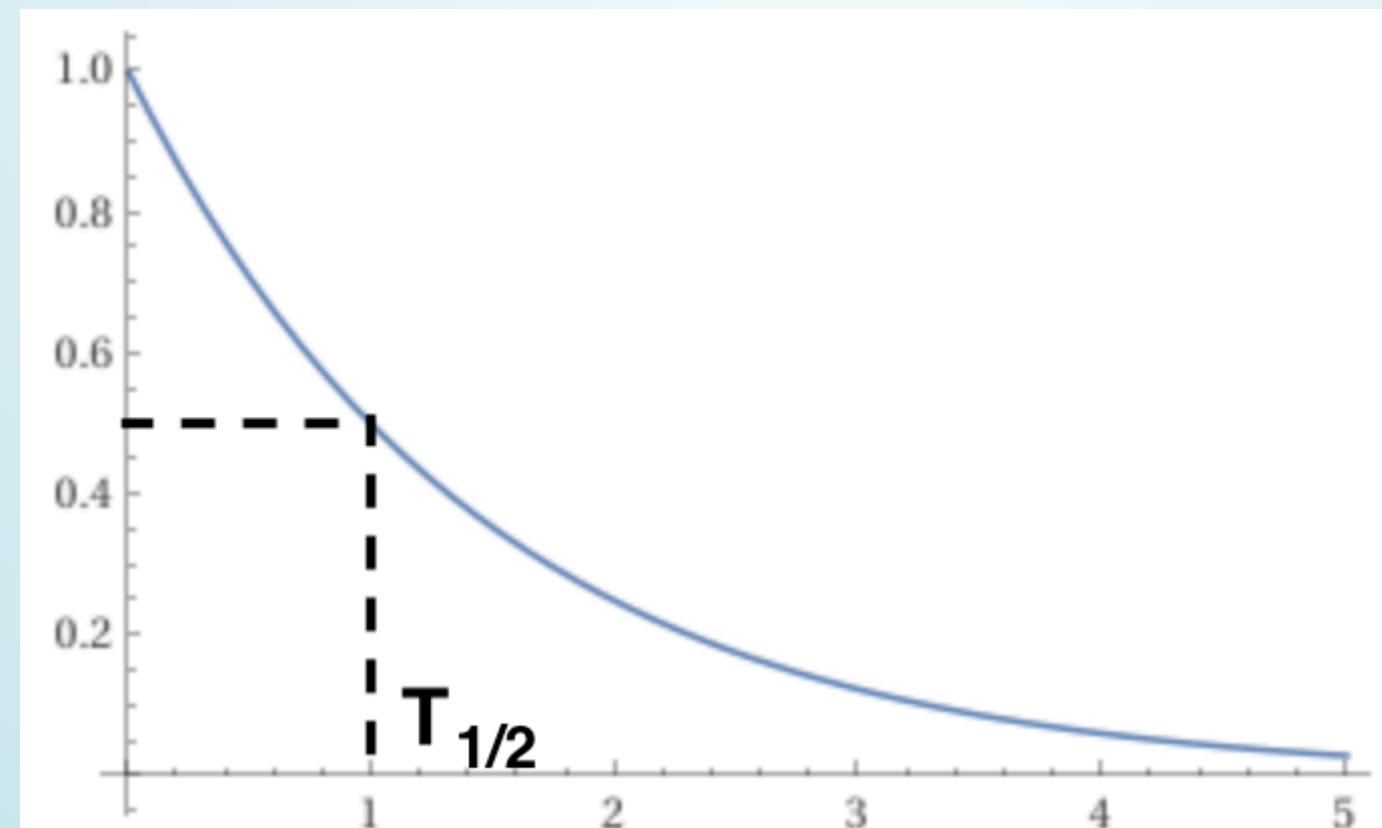


原子核崩壊の速度

- 放射性同位体の数は指数関数的に減少する:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

- 放射性同位体の数が半分になる時間を半減期 $T_{1/2}$ という
- 半減期は放射性同位体によって異なる



原子核崩壊をサイコロで再現

- 箱の中に N_0 個のボールが入っている
- サイコロを振って、偶数ならボールを取り出し、奇数ならそのまま残す
- すべてのボールに対してこの操作を行う

1回の操作でのボールの減少

- ボールが取り出される確率は: $p = \frac{1}{2}$
- ボールが残る確率は: $1 - p = \frac{1}{2}$

1回の操作を行った後のボールの数は:

$$N_1 = N_0 - N_0 p = N_0(1 - p)$$

2回の操作でのボールの減少

- 1回目の操作で生き残ったボールは: $N_0(1 - p)$
- 同じことが2回目の操作でも起きるので

2回の操作を行った後のボールの数は:

$$N_2 = N_0(1 - p)^2$$

同じ操作を繰り返す

- まったく同じ事の繰り返しなので、 n 回の操作を行った後のボールの数は：

$$N_n = N_0(1 - p)^n$$

サイコロゲームの一般化

- この操作を Δt の間に1回の頻度で行うとする
- 時刻 $t = n\Delta t$ とする
- $p = \lambda\Delta t$ とする
 - 今までの例は $\lambda = 1$ 、 $\Delta t = 1$ の場合と考えてOK
- 時刻 t におけるボールの数は:

$$N(t) = N_0(1 - p)^n = N_0(1 - \lambda\Delta t)^n$$

指数の極限

- 以下の公式を思いだそう

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

- この公式を使うと:

$$N(t) = N_0 (1 - \lambda \Delta t)^n = N_0 \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n$$

原子核崩壊の再現

- $\Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ の極限を取ると、

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

- これは原子核崩壊の式と一致する！
- サイコロゲームで原子核崩壊を再現できた！

半減期

- 半減期 $T_{1/2}$ は:

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

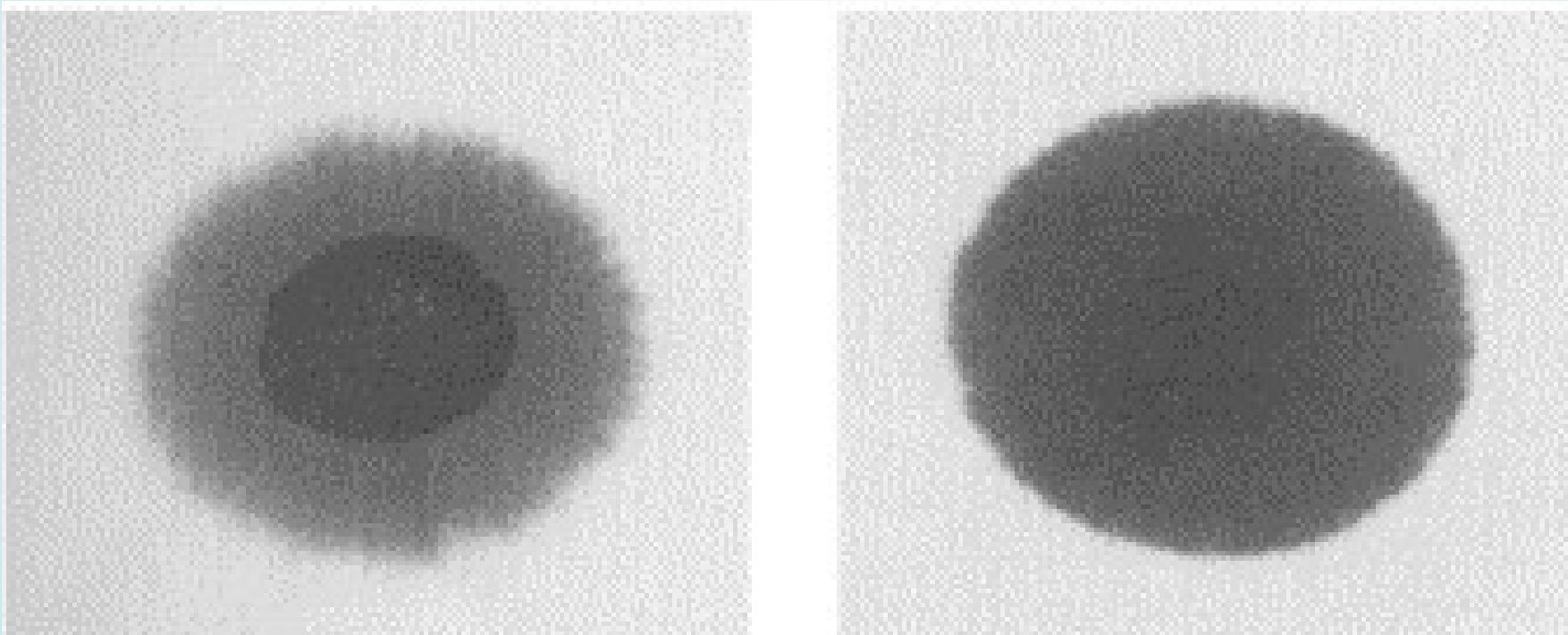
$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

- 半減期は「サイコロを振る頻度(の逆数)」と解釈できる！

拡散現象のモデル化

拡散現象のおさらい

- ガーゼの上に1滴のインクを零したとしよう
- インクはガーゼの中を拡散していく
- 時間が経つと、インクはガーゼの中に均等に広がる



[https://doi.org/10.1016/S0097-8493\(00\)00132-1](https://doi.org/10.1016/S0097-8493(00)00132-1)

拡散方程式

- 拡散現象は拡散方程式で記述される
 - D は拡散係数
 - ρ は濃度

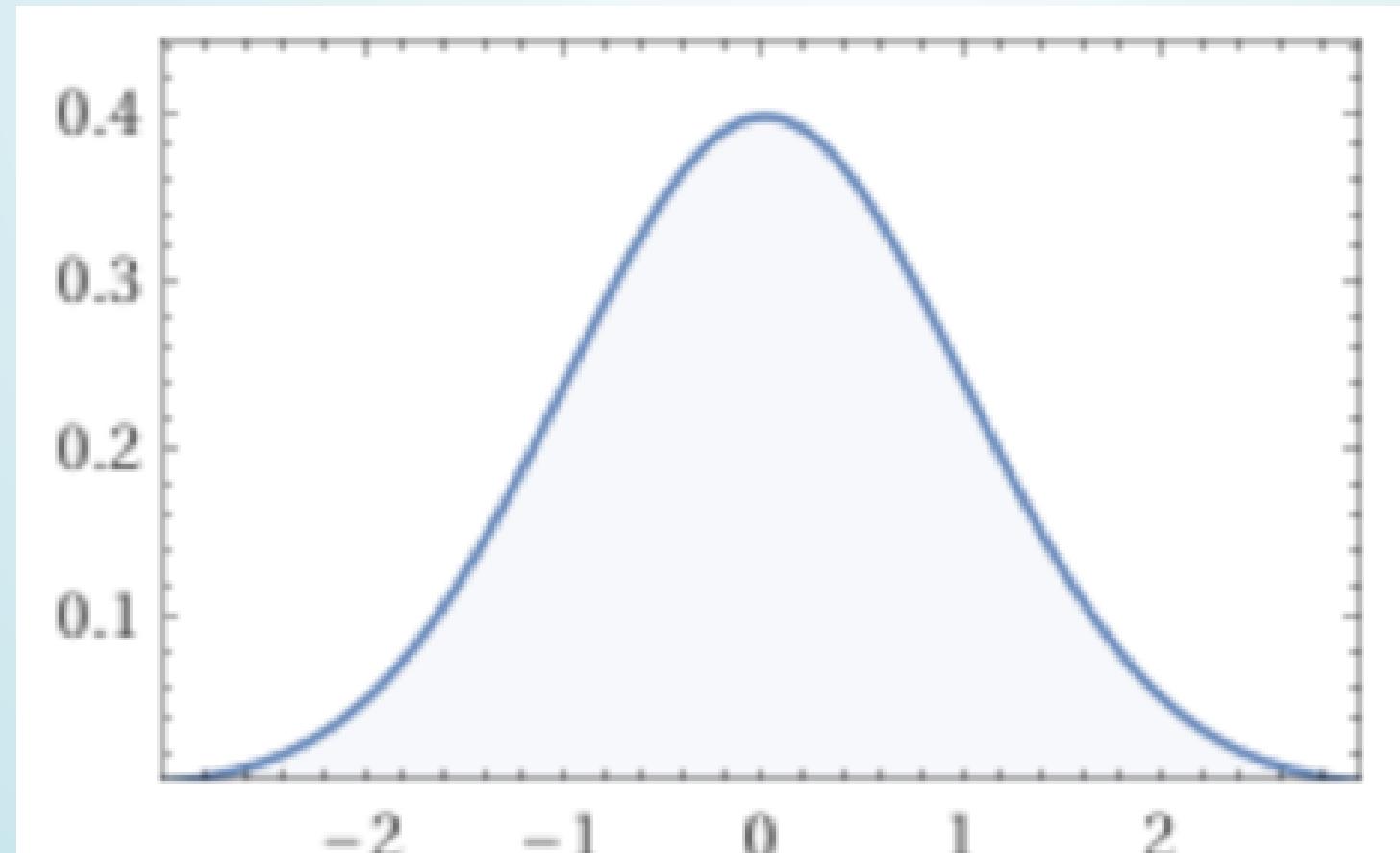
$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x^2}$$

- 初期条件は $\rho(0, x) = \delta(x)$ として解くと...

拡散方程式の解

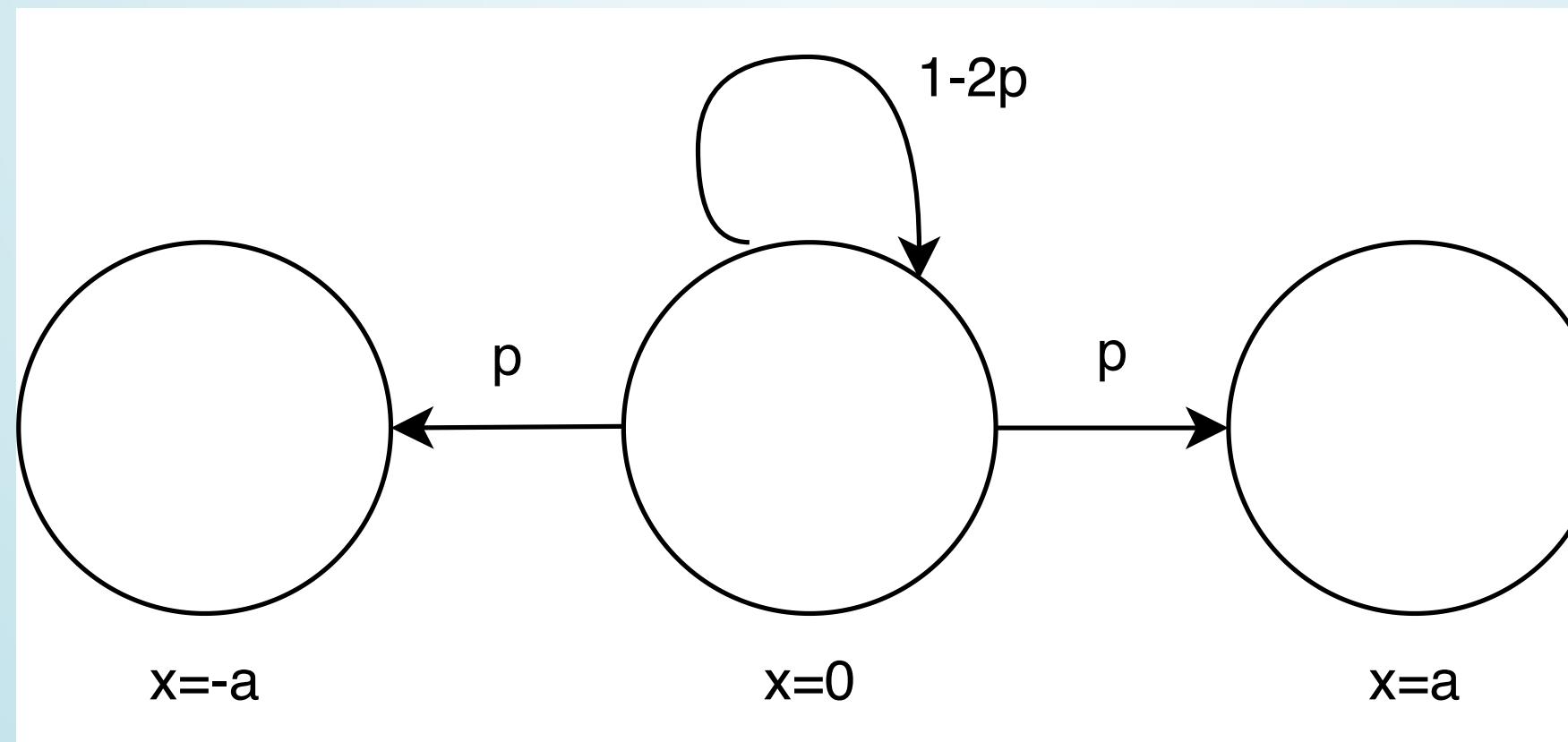
- 拡散方程式の解はガウス分布になる

$$\rho(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$



拡散をサイコロで再現

- 時刻 $t = 0$ でボールは原点 $x = 0$ にいる
- サイコロの目によってボールを移動させる
 - 1,2が出たら $+a$ だけ移動 (確率 p)
 - 3,4が出たら $-a$ だけ移動 (確率 p)
 - 5,6が出たら移動しない (確率 $1 - 2p$)



1回の操作でのボールの移動

- $t = 0$ ですべてのボールは原点 $x = 0$ にいる
- Δt の間にすべてのボールに対して 1 回この操作をする
- ボールの密度を $\rho(t, x)$ とする
- Δt 後のボールの密度は:

$$\rho(t + \Delta t, x) = a\rho(t, x) - 2pa\rho(t, x)$$

$$+pa\rho(t, x + a) + pa\rho(t, x - a)$$

ボールの密度のテイラー展開

- テイラー展開を使うと:

- 時間微分に対して

$$\rho(t + \Delta t, x) = a\rho(t, x) + \Delta t \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + O(\Delta t^2)$$

- 空間微分に対して

$$\rho(t, x \pm a) = \rho(t, x) \pm a \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x^2} + O(a^3)$$

拡散方程式の導出

- ティラー展開の式をボールの密度の式に代入:
 - ここで $D = \frac{pa^2}{2\Delta t}$ とした

$$\rho(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

- これは拡散方程式の解と一致する！
- サイコロゲームで拡散現象を再現できた！

拡散係数の物理的意味

- 拡散係数 D は拡散の速さを表す
- 拡散係数が大きいほど拡散が速い
- 確率 p が大きいほど拡散係数は大きくなる
- 時間間隔 $\Delta t \rightarrow 0$ の時、拡散係数は D に収束する
ように a は動くとした

補足事項

- なんで時間微分は1次の項までしか考えないの？
- 空間微分は2次の項まで考えるのに？
- 数学的な厳密性は**伊藤の公式**によって保証されて
いる（今日は省略）

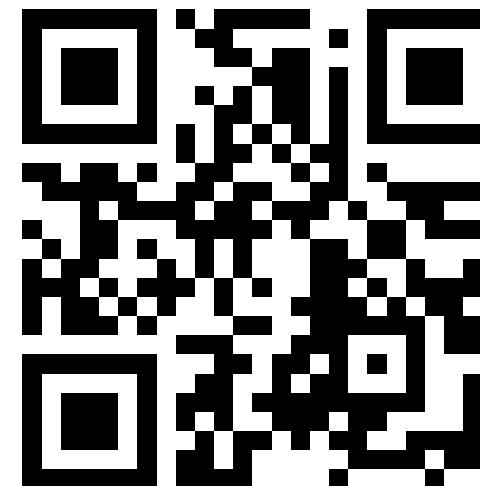


まとめ

- サイコロの目によってボールを移動させるゲームで物理現象を再現！
 - 原子核崩壊
 - 拡散現象
- シンプルなモデルで本質を理解できる！
- より複雑な物理現象もシンプルなモデルで理解される例がある
 - イジングモデル、パーコレーション理論...
- あなたも面白いモデルを考えてみませんか？

LT登壇者の募集

- 物理学集会ではLT登壇者を募集しています！
 - どんなジャンルでもOK！
 - 応募がないと主催がまたLTという名目のジャイアントリサイタルを開くことになります...
- 興味のある方は物理学集会のDiscordサーバーまで！



告知

- 次回開催は5月31日を予定しています
- LTだけでなく、YouTubeの物理の動画を「この動画をみんなで見たい！」という提案も大歓迎です！