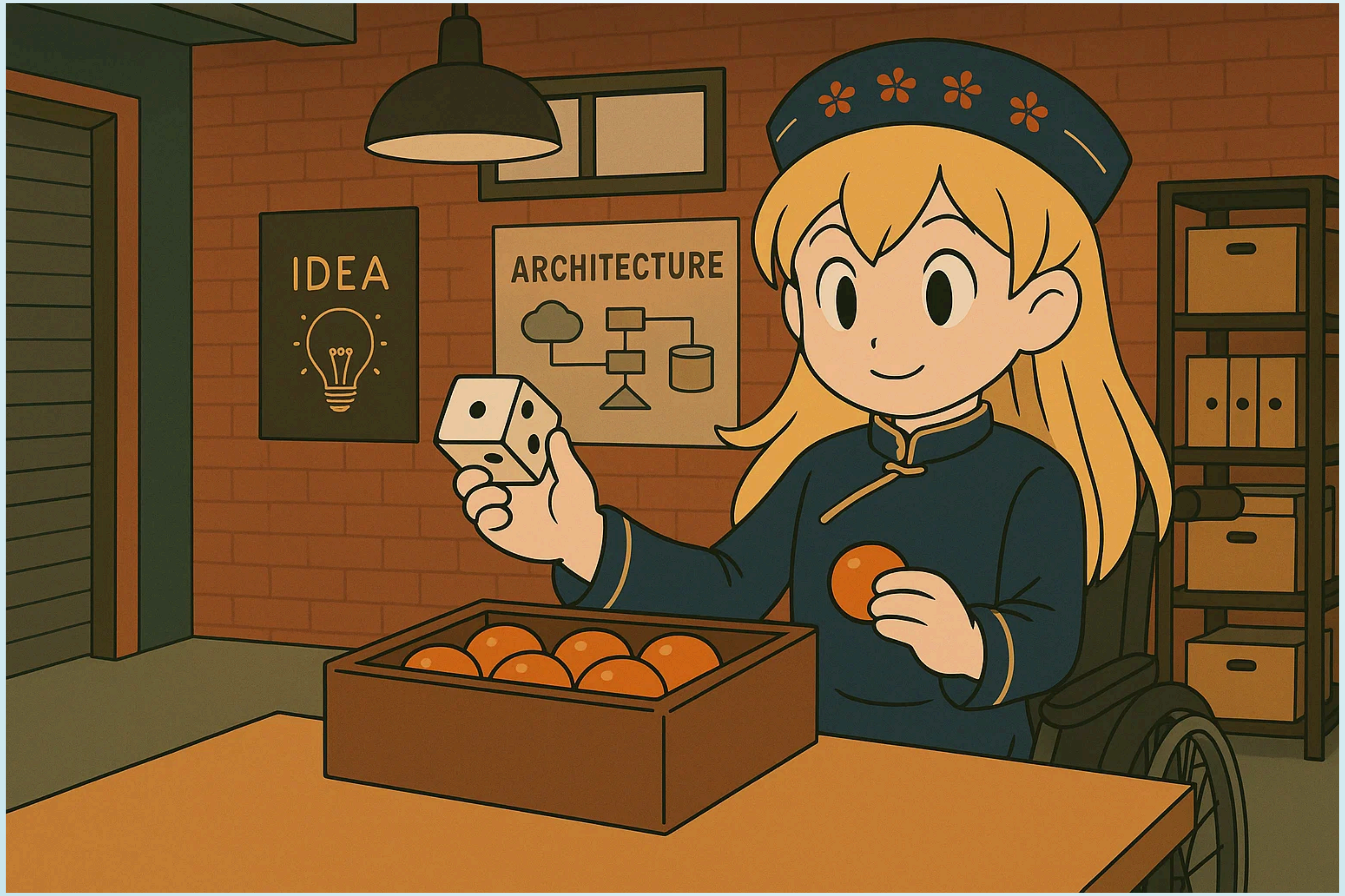
サイコロで理解する原子核崩壊と拡散現象

～単純化されたモデルで本質を理解する～



自己紹介

- さめ(meg-ssk)
    - 🧑‍💻 フリーランスのソフトウェアエンジニア
    - 🧑‍🎓 社会人学生として通信制大学在学中
- 得意分野:
    - 📸 コンピュータビジョン(画像認識/点群処理)
    - 🌍 空間情報処理 (地理情報/リモートセンシング)
    - ☁️ クラウドインフラ設計/IaC (AWS, GCP)
- GitHub
- YouTube
- Speaker Deck

今日話すこと

- サイコロを振って出た目によってボールを移動させる単純なゲームを考える
- このゲームで原子核崩壊や拡散現象(インクの染みの広がりなど)が再現できることを示す！
- **物理現象をシンプルなモデルで理解することの威力を実感しよう！**

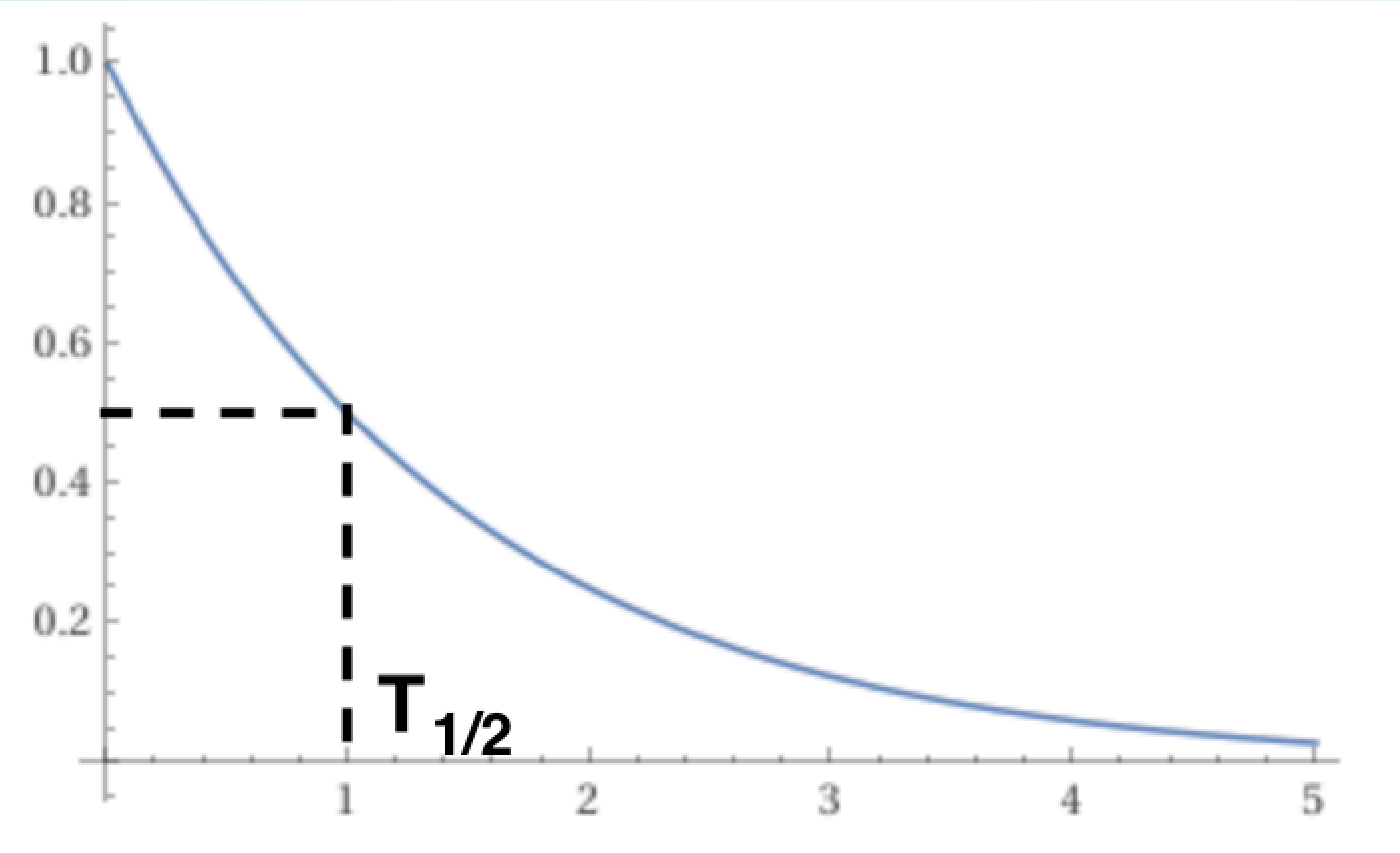
原子核崩壊のモデル化

原子核崩壊のおさらい

- 原子核崩壊は放射性物質が放射線を放出する現象
  - 放射線を放出した原子核は安定した原子核に変化する

原子核崩壊の速度

- 放射性同位体の数は指数関数的に減少する: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
  - 放射性同位体の数が半分になる時間を半減期 $T_{1/2}$ という
  - 半減期は放射性同位体によって異なる



原子核崩壊をサイコロで再現

- 箱の中にN_0個のボールが入っている
- サイコロを振って、偶数ならボールを取り出し、奇数ならそのまま残す
- すべてのボールに対してこの操作を行う

1回の操作でのボールの減少

- ボールが取り出される確率は: $p = \frac{1}{2}$
- ボールが残る確率は: $1 - p = \frac{1}{2}$

1回の操作を行った後のボールの数は:

$$N_1 = N_0 - N_0 p = N_0(1 - p)$$

2回の操作でのボールの減少

- 1回目の操作で生き残ったボールは: $N_0(1-p)$
- 同じことが2回目の操作でも起きるので

2回の操作を行った後のボールの数は:

$$N_2 = N_0(1-p)^2$$

同じ操作を繰り返す

- まったく同じ事の繰り返しなので、n回の操作を行った後のボールの数は:

$$N_n = N_0(1-p)^n$$

サイコロゲームの一般化

- この操作をΔtの間にλ回の頻度で行うとする
- 時刻$t = n\Delta t$とする
- $p = \lambda\Delta t$とする
  - 今までの例は$\lambda = 1$、$\Delta t = 1$の場合と考えてOK

- 時刻tにおけるボールの数は:

$$N(t) = N_0(1-p)^n = N_0(1-\lambda\Delta t)^n$$

指数の極限

- 以下の公式を思いだそう

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

- この公式を使うと:

$$N(t) = N_0\left(1-\lambda\Delta t\right)^n = N_0\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n$$

原子核崩壊の再現

- $\Delta t \to 0, n \to \infty$の極限を取ると、

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

- これは原子核崩壊の式と一致する！
- サイコロゲームで原子核崩壊を再現できた！

半減期

- 半減期$T_{1/2}$は:

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

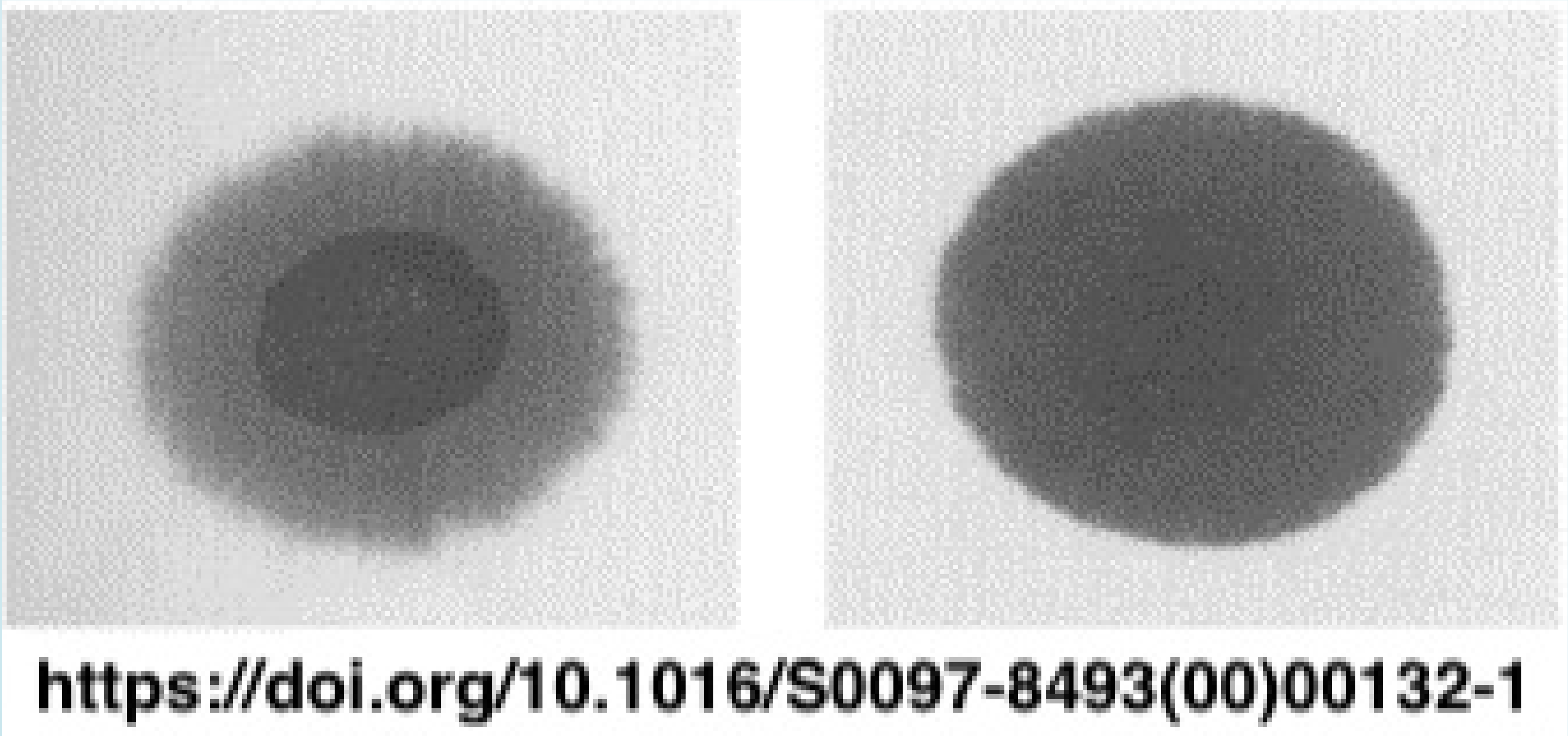
$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

- 半減期は「サイコロを振る頻度(の逆数)」と解釈できる！

拡散現象のモデル化

拡散現象のおさらい

- ガーゼの上に1滴のインクを零したとしよう
- インクはガーゼの中を拡散していく
- 時間が経つと、インクはガーゼの中に均等に広がる



拡散方程式

- 拡散現象は拡散方程式で記述される
  - Dは拡散係数
  - ρは濃度

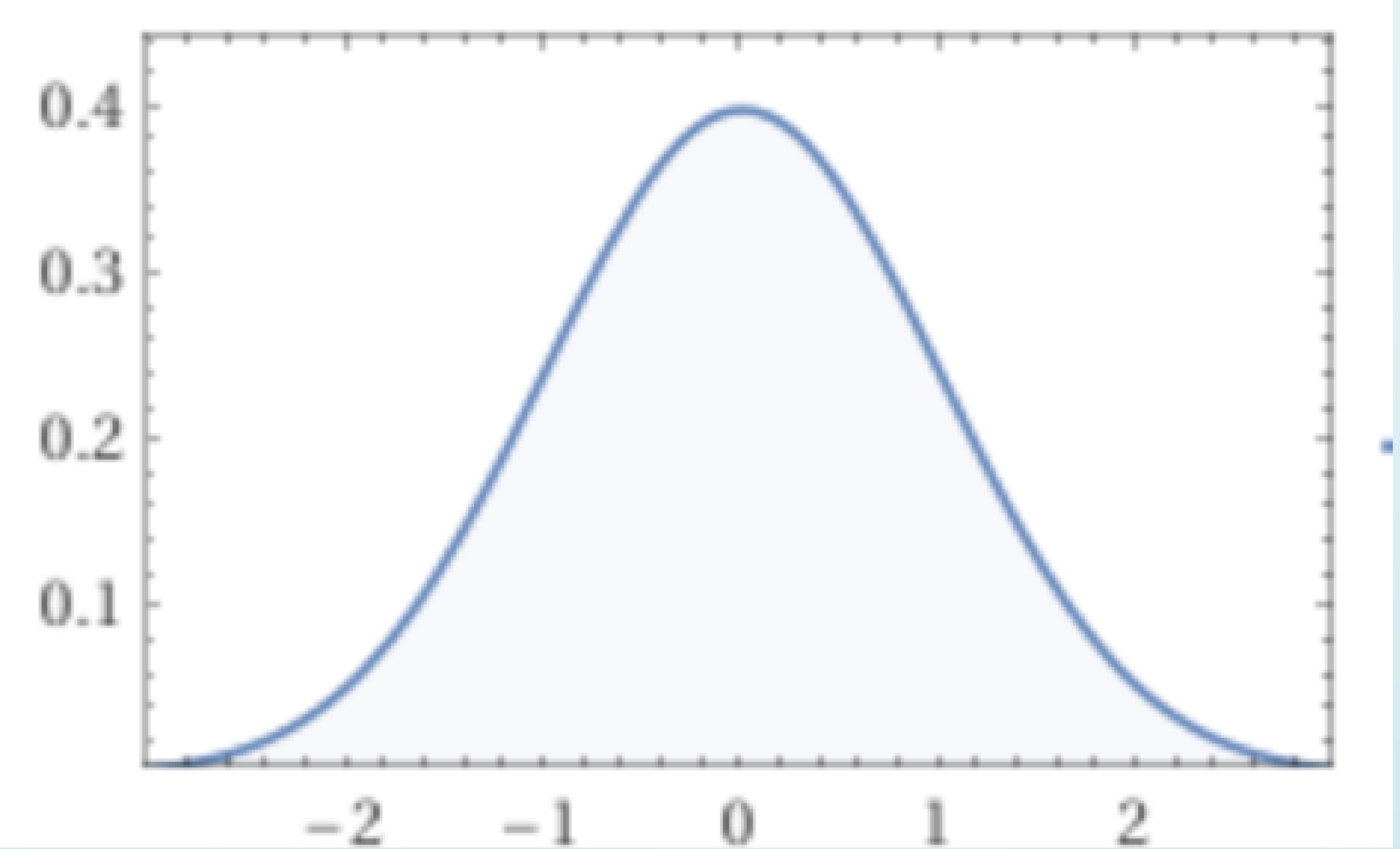
$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho(t,x)}{\partial x^2}$$

- 初期条件は$\rho(0,x) = \delta(x)$として解くと…

拡散方程式の解

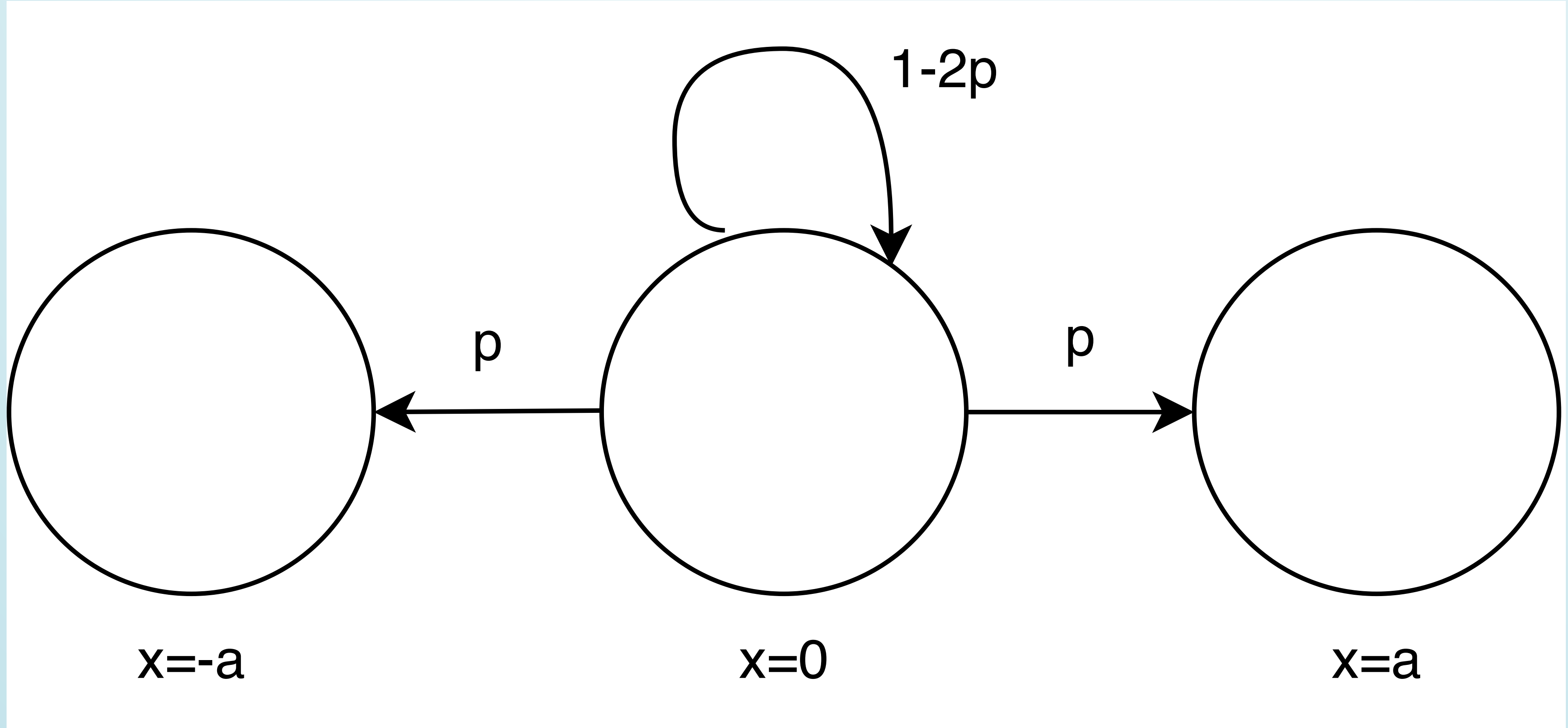
- 拡散方程式の解はガウス分布になる

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$



拡散をサイコロで再現

- 時刻$t = 0$でボールは原点$x = 0$にいる
- サイコロの目によってボールを移動させる
  - 1,2が出たら$+a$だけ移動 (確率p)
  - 3,4が出たら$-a$だけ移動 (確率p)
  - 5,6が出たら移動しない (確率$1 - 2p$)



1回の操作でのボールの移動

- $t=0$ですべてのボールは原点$x=0$にいる
- Δtの間にすべてのボールに対して1回この操作をする
- ボールの密度を$\rho(t,x)$とする
- Δt後のボールの密度は:

$$\rho(t+\Delta t, x) = a\rho(t,x) - 2pa\rho(t,x)$$

$$+pa\rho(t,x+a) + pa\rho(t,x-a)$$

ボールの密度のテイラー展開

- テイラー展開を使うと:
  - 時間微分に対して

$$\rho(t+\Delta t, x) = a\rho(t,x) + \Delta t \frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + O(\Delta t^2)$$

  - 空間微分に対して

$$\rho(t, x \pm a) = \rho(t,x) \pm a \frac{\partial \rho(t,x)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \rho(t,x)}{\partial x^2} + O($$

拡散方程式の導出

- テイラー展開の式をボールの密度の式に代入:
  - ここで$D = \frac{pa^2}{2\Delta t}$とした

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

- これは拡散方程式の解と一致する！
- サイコロゲームで拡散現象を再現できた！

拡散係数の物理的意味

- 拡散係数Dは拡散の速さを表す
- 拡散係数が大きいほど拡散が速い
- 確率pが大きいほど拡散係数は大きくなる
- 時間間隔$\Delta t \to 0$の時、拡散係数はDに収束するようにaは動くとした

補足事項

- なんで時間微分は1次の項までしか考えないの？
- 空間微分は2次の項まで考えるのに？
- 数学的な厳密性は**伊藤の公式**によって保証されている (今日は省略)

まとめ

- サイコロの目によってボールを移動させるゲームで物理現象を再現！
  - 原子核崩壊
  - 拡散現象
- シンプルなモデルで本質を理解できる！
- より複雑な物理現象もシンプルなモデルで理解される例がある
  - イジングモデル、パーコレーション理論...
- **あなたも面白いモデルを考えてみませんか？**

LT登壇者の募集

- 物理学集会ではLT登壇者を募集しています！
  - どんなジャンルでもOK！
  - 応募がないと主催がまたLTという名目のジャイアンリサイタルを開くことになります…
- 興味のある方は物理学集会のDiscordサーバーまで！

告知

- 次回開催は5月31日を予定しています
- LTだけでなく、YouTubeの物理の動画を「この動画をみんなで見たい！」という提案も大歓迎です！