MATRICI

Una **matrice** (reale) A di tipo (m,n) è un insieme di $m \cdot n$ numeri reali disposti in una tabella di m righe e n colonne :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il numero a_{ij} si dice elemento di posto (i,j)

riga   colonna

Scriveremo anche $A = (a_{ij})$ con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$

Indicheremo con $Mat(m,n)$ l'insieme di tutte le matrici di tipo (m,n).

Osserviamo che:

$$Mat(1,n) = \{ (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \mid a_{1j} \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^n \qquad \text{(vettori riga)}$$

$$Mat(m,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \mid a_{j1} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^m \qquad \text{(vettori colonna)}$$

Se $A = (a_{ij})$ è di tipo (m,n) indicheremo con

$\underline{a}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ $\quad i = 1, \dots, m$ $\quad$ la riga i-esima di A

$\underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ $\quad j = 1, \dots, n$ $\quad$ la colonna j-esima.

In altre parole

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{pmatrix} = \left(\underline{a}_1 \,|\, \underline{a}_2 \,|\, \dots \,|\, \underline{a}_n \right)$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(\overset{m}{2}, \overset{n}{3})$$

$a_{12} = 2 \quad , \quad a_{23} = 7$

$\underline{a}^1 = (1,2,4) \;, \quad \underline{a}^2 = (3,0,7) \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \end{pmatrix}$

$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \left(\underline{a}_1 \,|\, \underline{a}_2 \,|\, \underline{a}_3 \right)$

Operazioni sulle matrici

- Somma di matrici: se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono entrambe di tipo (m, n), la loro somma è definita come

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

- La matrice nulla di tipo (m, n) è la matrice $O_{m,n}$ i cui elementi sono tutti nulli. Se $A \in Mat(m, n)$ allora

$$A + O_{m,n} = A$$

- Prodotto per uno scalare: se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij}) \in Mat(m, n)$ allora definiamo

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

. Prodotto matriciale

Il prodotto (righe per colonne) tra una matrice $A=(a_{ij}) \in Mat(m,n)$ e una matrice $B=(b_{ij}) \in Mat(n,p)$ è la matrice $C=AB \in Mat(m,p)$ il cui elemento c_{ij} è il prodotto scalare tra la riga i-esima di A e la colonna j-esima di B:

$$\boxed{c_{ij} = \underline{a}^i \cdot \underline{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

↳ prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,\underline{3})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(\underline{3},2)$ $\boxed{5.9}$

Allora è definito il prodotto $AB \in \mathrm{Mat}(2,2)$, e si ha:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,2,3)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} & (1,2,3)\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (4,5,6)\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} & (4,5,6)\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 22 \\ -31 & 58 \end{pmatrix}$$

In questo caso è inoltre definito anche il prodotto $BA \in \mathrm{Mat}(3,3)$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,3)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} & (1,3)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} & (1,3)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ (-7,8)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} & (-7,8)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} & (-7,8)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ (0,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} & (0,1)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} & (0,1)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ 25 & 26 & 27 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

[Fare verifica]

15.10

Esercizio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in Mat(3,2)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \in Mat(2,1)$

Verificare che $AB = \begin{pmatrix} -13 \\ -31 \\ 21 \end{pmatrix} \in Mat(3,1)$

Si noti che in questo caso non si può calcolare BA

$$\begin{array}{cc} B & A \\ Mat(2,1) & Mat(3,2) \end{array}$$

Proprietà del prodotto matriciale

i) Associatività: se $A \in Mat(m,n)$, $B \in Mat(n,p)$, $C \in Mat(p,r)$

allora
$$(AB)C = A(BC) \qquad (= ABC)$$

ii) Distributività: se $A \in Mat(m,n)$, $B, C \in Mat(n,p)$, $D \in Mat(p,r)$

allora
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)D = BD + CD$$

iii) Identità: la matrice
$$I_n = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(n,n)$$

è detta <u>matrice identità</u> di ordine n.

Si ha

$$A I_n = \cancel{I_m} A \quad \text{per ogni } A \in Mat(m,n)$$

$$I_n B = B \quad \text{per ogni } B \in Mat(n,p)$$

oss: il prodotto matriciale <u>non è commutativo</u>

Date due matrici A e B tali che i prodotti AB e BA siano definiti, allora in generale

$$AB \neq BA$$

Esercizio: Date $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mostrare che

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow AB \neq BA)$$

OSS: Esistono matrici $A \neq 0$ e $B \neq 0$ tali che $AB = 0$

Esistono matrici $A \neq 0$ tali che $A^2 = A \cdot A = 0$

Esempi:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ ma $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A = (1, 0)$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A \neq 0$ $B \neq 0$ ma $AB = 0$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A \neq 0$ ma $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio: Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Mostrare che $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$, $A^3 = 0$

Matrice Trasposta

Se $A \in Mat(m,n)$, la sua Trasposta A^t è la ~~tras.~~ matrice ~~che~~

di tipo (n,m) che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne:

oss: Altre notazioni: $A^t = A^T = A_T = {}^tA = \dots$

esempi:

i) Se $\underline{v} = (1,0,-3,5) \in Mat(1,4)$ ~~allora~~ allora $\underline{v}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \in Mat(4,1)$

ii) Se $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(2,3)$

allora $A^t = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(3,2)$

5.15

Proposizione: Se $A \in Mat(m,n)$ e $B \in Mat(n,p)$ allora

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Dimostrazione: esercizio.