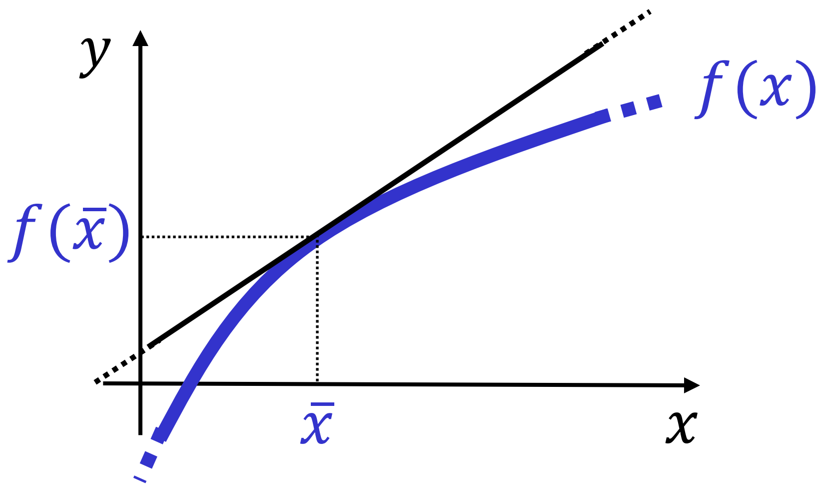
Lezione 4.
Linearizzazione di sistemi non lineari

Schema

1. Introduzione
2. Linearizzazione vicino all'equilibrio
3. Sistema lineare tangente
4. Simulazioni

1. Introduzione



$y = f(x)$
funzione non lineare di x

Vicino a $\bar{x}$, la funzione non lineare $f(x)$ può essere approssimata usando una funzione lineare costruita con la sua tangente.

$$y \cong f(\bar{x}) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

"Vicino a $\bar{x}$ " significa che $x - \bar{x}$ è piccolo

2. Linearizzazione vicino ad un equilibrio

Si consideri un sistema SISO **non lineare tempo invariante**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \end{cases}$$

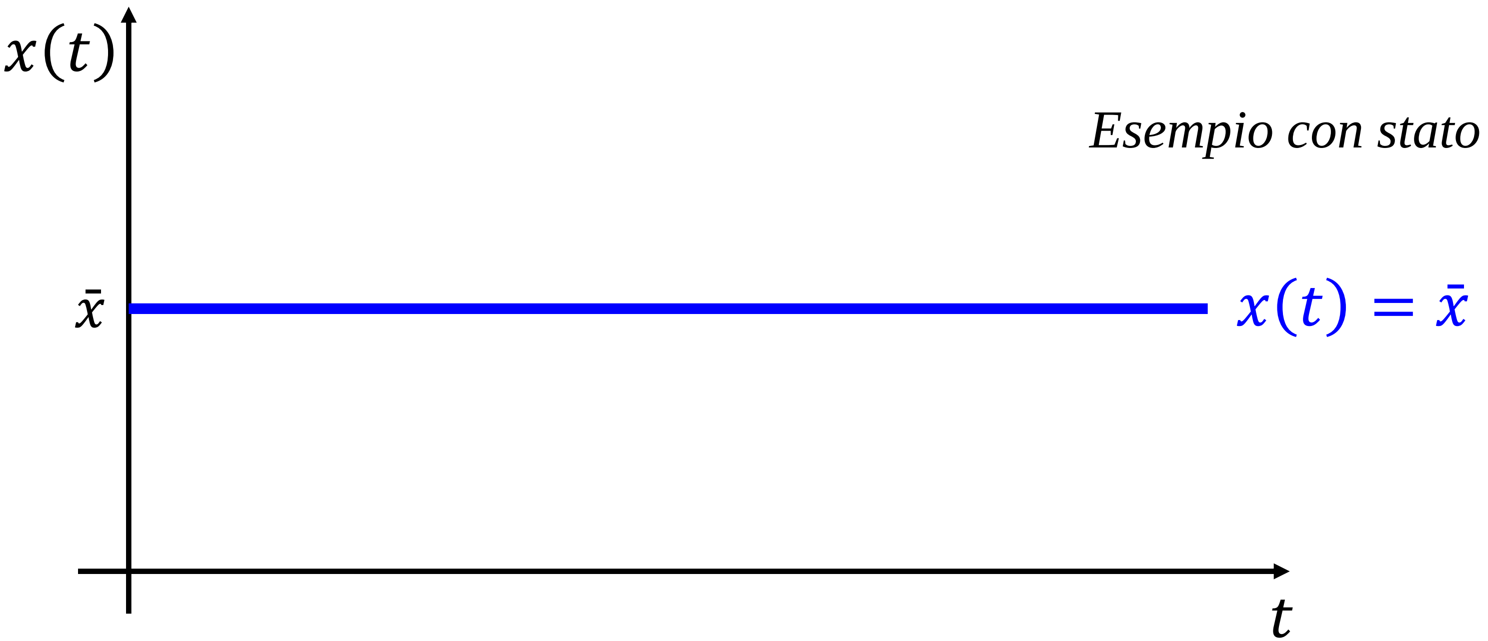
Si supponga che questo sistema abbia uno stato di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ in corrispondenza di un ingresso costante $\bar{u}$ cioè:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = 0$$

Si vuole trovare un **sistema lineare** che **approssimi** il comportamento dinamico del sistema non lineare vicino all'equilibrio.

Se $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$ è un equilibrio allora il movimento dello stato ottenuto con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$ e ingresso $u(t) = \bar{u}\ ,\ t \geq 0$ è $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}\ , t \geq 0$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}\ ,\ t \geq 0 \\ \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}\ ,\ t \geq 0$$

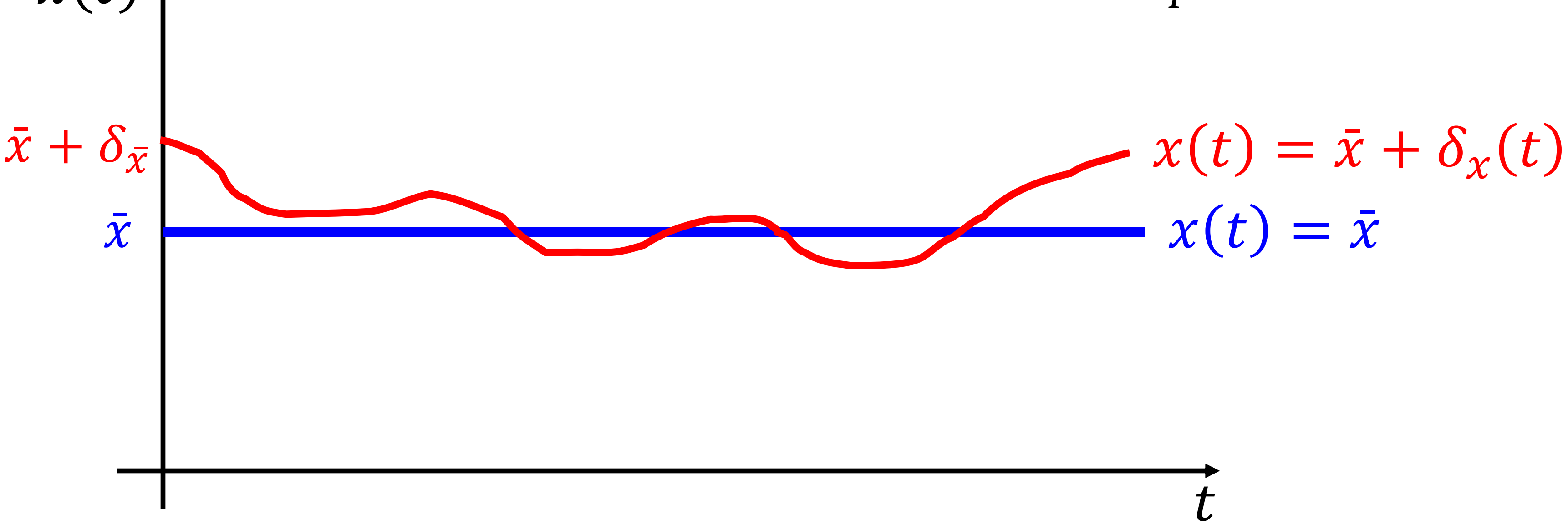


Esempio con stato scalare

Si perturbi sia la condizione iniziale sia l'ingresso. Se le perturbazioni sono **piccole** (e sotto opportune ipotesi di regolarità del sistema) si può descrivere il movimento dello stato come perturbazione del movimento di equilibrio

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u} + \delta_u(t)\,, t \geq 0 \\ \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta}_{\bar{\mathbf{x}}} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t)\,,\ t \geq 0$$

Esempio con stato scalare



$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t)$ è il movimento dello stato con ingresso $u(t) = \bar{u} + \delta_u(t)$ e quindi deve soddisfare l'equazione di stato $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big)$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \frac{d}{dt}\big(\bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t)\big) = \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{x}}(t)$$

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}\ ) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{u}} (\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{u}} (u(t) - \bar{u}) + \text{altro}$$

- *Sviluppo in serie di Taylor di* $\mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big)$ *intorno a* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$ -

Nel problema che stiamo affrontando si ha:

- $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = 0$ perché siamo all'equilibrio
- $\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t)$ e $u(t) - \bar{u} = \delta_u(t)$ è il movimento considerato

Quindi: $\mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \cong \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{u}} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{u}} \delta_u(t)$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{x}}(t) \cong \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta_u(t)}$$

Questo movimento deve soddisfare anche l'**equazione di uscita**

$$y(t) = g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big)$$

Anche il movimento dell'uscita si può esprimere come somma dell'uscita di equilibrio e di una perturbazione

$$y(t) = \bar{y} + \delta_y(t)$$

$$g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) = g(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}\ ) + \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{u}} (\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{u}} (u(t) - \bar{u}) + \text{altro}$$

- *Sviluppo in serie di Taylor di* $g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big)$ *intorno a* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$ -

Nel problema che stiamo affrontando si ha:

- $g(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \bar{y}$ perché siamo all'equilibrio
- $\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t)$ e $u(t) - \bar{u} = \delta_u(t)$ è il movimento considerato

Quindi $g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \cong \bar{y} + \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{u}} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{u}} \delta_u(t)$

$$\boxed{\delta_y(t) \cong g_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta_u(t)}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{x}}(t) \cong \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta_u(t) \\ \delta_y(t) \cong g_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta_u(t) \end{cases}$$

Sistema LTI SISO

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \dots & \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

matrice $\boldsymbol{A}$ $n \times n$

$$\mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial u \\ \vdots \\ \partial f_n/\partial u \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

vettore $\boldsymbol{B}$ $n \times 1$

$$g_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = [\partial g/\partial x_1 \quad \dots \quad \partial g/\partial x_n]_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

vettore $\boldsymbol{C}$ $1 \times n$

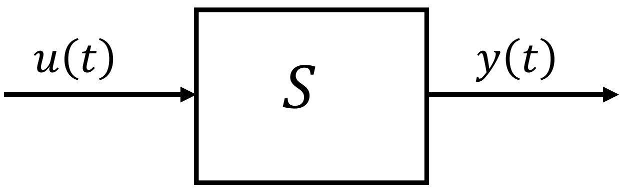
$$g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \partial g/\partial u \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

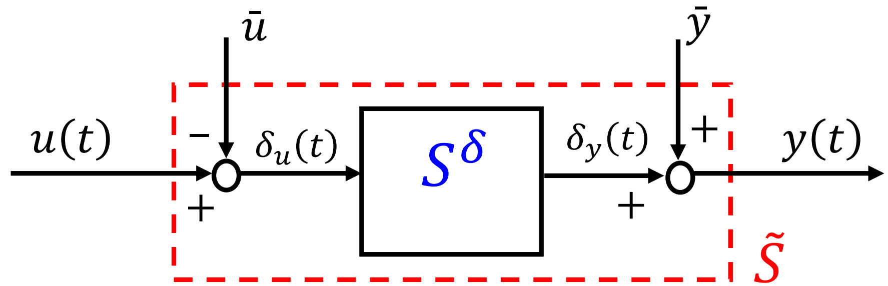
scalare $\boldsymbol{D}$

3. Sistema lineare tangente

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \end{cases}$$

$$S^{\delta}: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{x}}(t) \cong \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{f}_{u}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta_{u}(t) \\ \delta_{y}(t) \cong g_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + g_{u}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta_{u}(t) \end{cases}$$





$\tilde{S}$ è l'approssimazione di S nell'intorno del punto di equilibrio $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$.

S^{δ} viene spesso indicato (più correttamente) con il nome di **sistema lineare tangente.**

$\tilde{S}$ viene spesso indicato anche con il nome di **approssimazione (o modello) locale**.

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t)u(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) - x_2(t)u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante

$$u(t) = \bar{u} = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

$$\begin{cases} 0 = -\bar{x}_2 + 1 \\ 0 = -\bar{x}_2 + \bar{x}_1 \\ 0 = -\bar{x}_3 - \bar{x}_2 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_3 = -\bar{x}_2 = -1 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 = 1 \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{y} = 1$$

Linearizzare il sistema intorno all'equilibrio trovato

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{x}}(t) \cong \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}},\bar{u})\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}},\bar{u})\delta_u(t) \\ \delta_y(t) \cong g_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}},\bar{u})\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + g_u(\bar{\mathbf{x}},\bar{u})\delta_u(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \partial f_1/\partial x_3 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \partial f_2/\partial x_3 \\ \partial f_3/\partial x_1 & \partial f_3/\partial x_2 & \partial f_3/\partial x_3 \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{u} & 0 \\ \bar{u} & -1 & 0 \\ 0 & -\bar{u} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial u \\ \partial f_2/\partial u \\ \partial f_3/\partial u \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} -\bar{x}_2 + 1 \\ \bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$g_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}},\bar{u}) = [\partial g/\partial x_1 \quad \partial g/\partial x_2 \quad \partial g/\partial x_3]_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

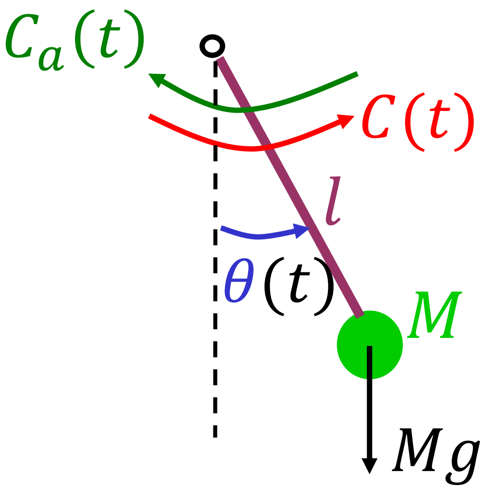
$$g_u(\bar{\mathbf{x}},\bar{u}) = 0$$

$$S^{\delta}: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{x}}(t) = A\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + B\delta_u(t) \\ \delta_y(t) = C\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + D\delta_u(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Esempio



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{g}{l}\sin\big(x_1(t)\big) - \dfrac{h}{Ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{Ml^2}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

In corrispondenza di un generico ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ si hanno gli equilibri

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \arcsin\left(\dfrac{\bar{u}}{Mgl}\right) \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \underbrace{x_2(t)}_{f_1(x_1,x_2,u)} \\ \dot{x}_2(t) = \underbrace{-\frac{g}{l}\sin\big(x_1(t)\big) - \frac{h}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)}_{f_2(x_1,x_2,u)} \\ y(t) = \underbrace{x_1(t)}_{g(x_1,x_2,u)} \end{cases}$$

$$\left.\frac{df_1(x,u)}{dx_1}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = 0 \qquad \left.\frac{df_1(x,u)}{dx_2}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = 1$$

$$\left.\frac{df_2(x,u)}{dx_1}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = -\frac{g}{l}\cos(\bar{x}_1) \qquad \left.\frac{df_2(x,u)}{dx_2}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = -\frac{h}{Ml^2}$$

$$A = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}},\bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\bar{x}_1) & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = \overbrace{x_2(t)}^{f_1(x_1, x_2, u)} \\
\dot{x}_2(t) = \overbrace{-\dfrac{g}{l}\sin\big(x_1(t)\big) - \dfrac{h}{Ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{Ml^2}u(t)}^{f_2(x_1, x_2, u)} \\
y(t) = \underbrace{x_1(t)}_{g(x_1, x_2, u)}
\end{cases}
$$

$$
\left.\frac{df_1(x,u)}{du}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = 0
$$

$$
\left.\frac{df_2(x,u)}{du}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = \frac{1}{Ml^2}
$$

$$
B = \mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{Ml^2} \end{bmatrix}
$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) - \frac{h}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$f_1(x_1, x_2, u)$

$f_2(x_1, x_2, u)$

$g(x_1, x_2, u)$

$$\left.\frac{dg(x,u)}{dx_1}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = 1 \qquad \left.\frac{dg(x,u)}{dx_2}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = 0$$

$$C = g_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = [1 \quad 0]$$

$$\left.\frac{dg(x,u)}{du}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} = 0 \qquad D = g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = 0$$

$$
S^{\delta}: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{x}}(t) = A\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + B\delta_u(t) \\ \delta_y(t) = C\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + D\delta_u(t) \end{cases}
$$

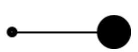
$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l}\cos(\bar{x}_1) & -\dfrac{h}{Ml^2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{Ml^2} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D = 0 \end{matrix}
$$

Si considerino i seguenti tre equilibri

$$
\bar{u} = 0 \quad \nearrow \quad \bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}
$$

$$
\bar{u} = 0 \quad \searrow \quad \bar{x}_B = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & -\dfrac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}
$$

$$
\bar{u} = Mgl \qquad \bar{x}_C = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}
$$



4. Simulazioni Matlab

M = 1 kg

l = 1 m

h = 0.5 kg m^2 s^{-1}

Equilibrio $\bar{u} = 0$

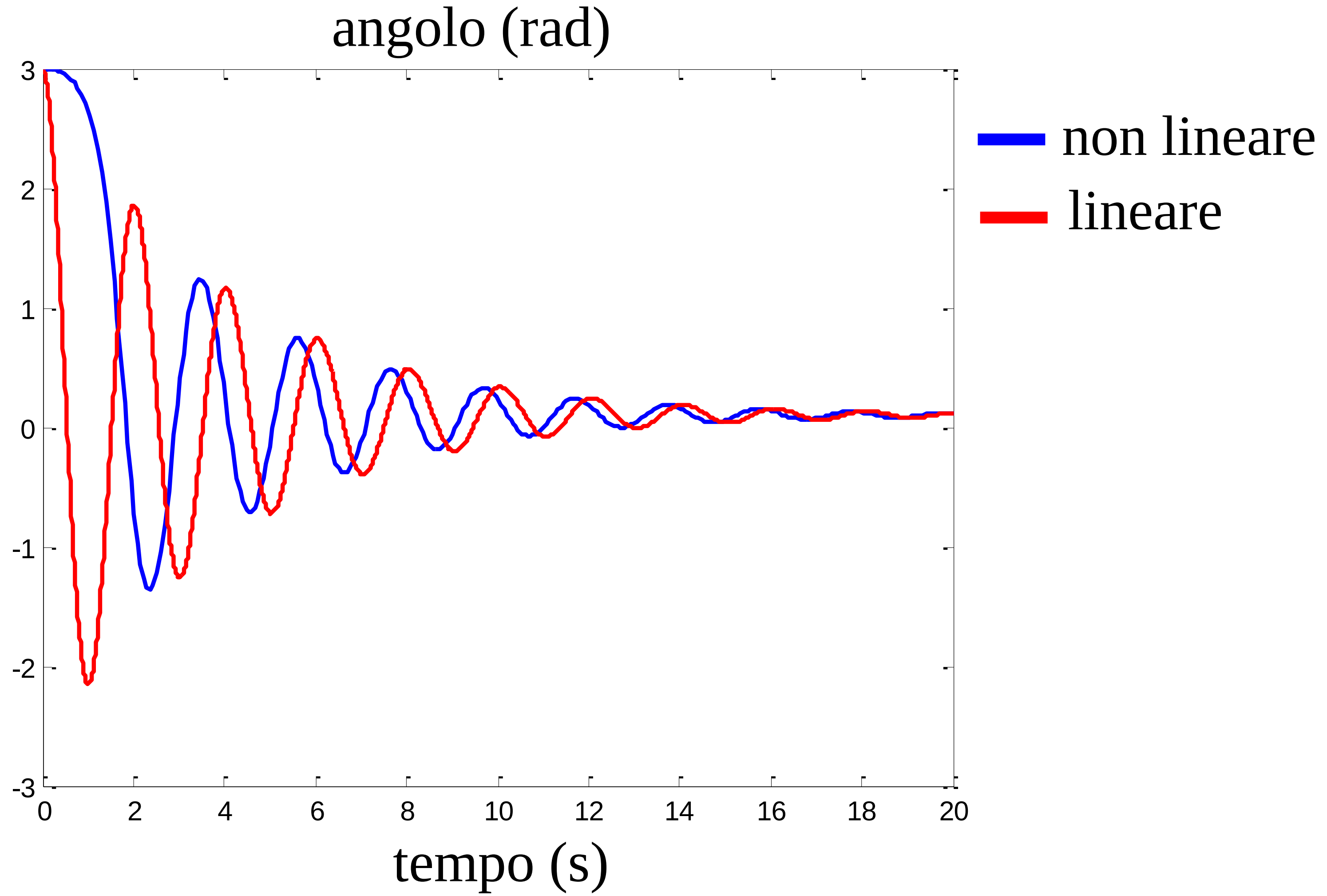
$$\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = 0 + \delta_u(t) = 1,\ t \geq 0$$

"piccola" perturbazione dell'ingresso

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

"grande" perturbazione della c.i.

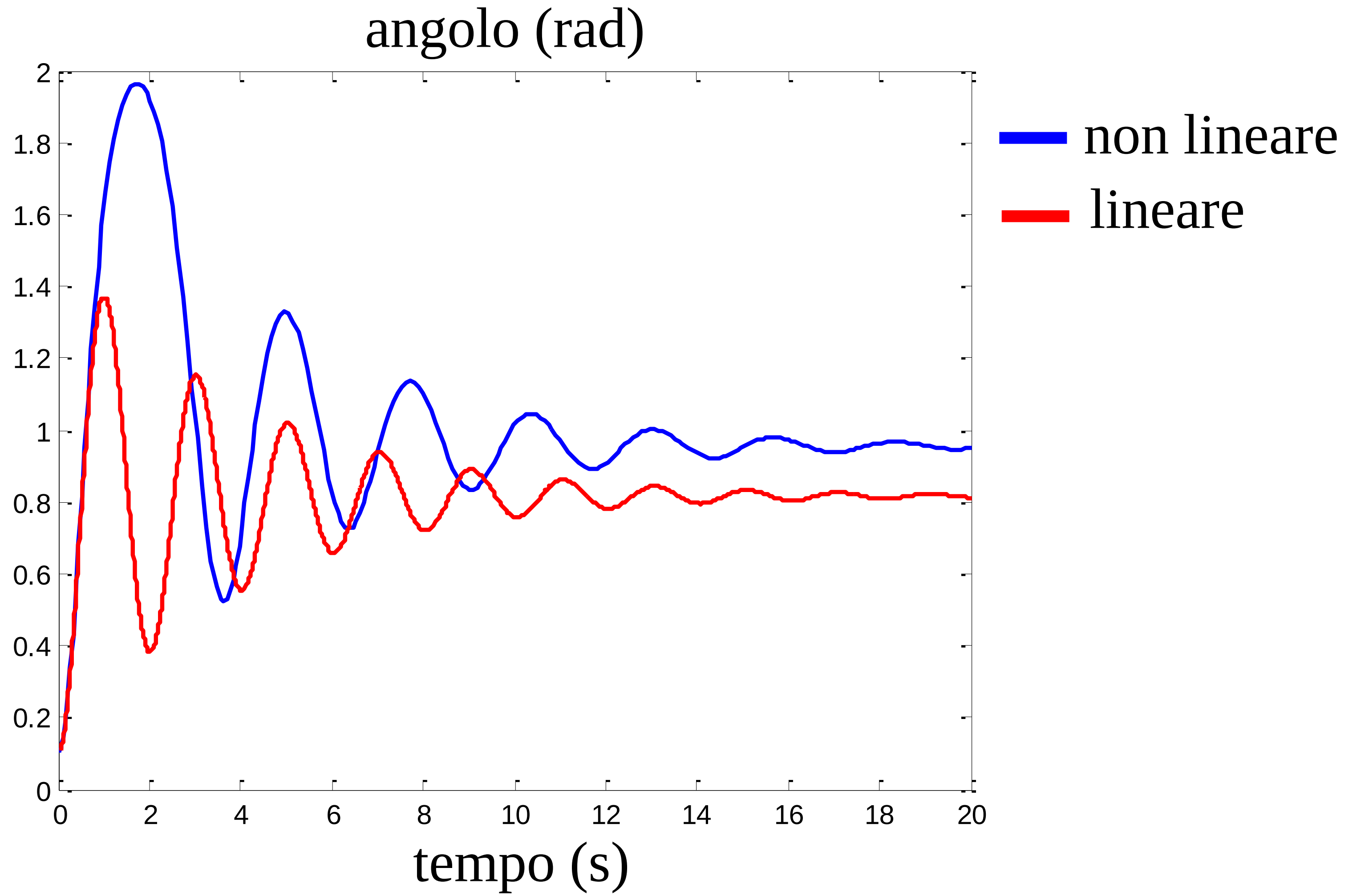


$$u(t) = 0 + \delta_u(t) = 8\,,\ t \geq 0$$

"grande" perturbazione dell'ingresso

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

"piccola" perturbazione della c.i.



$$u(t) = 0 + \delta_u(t) = 0.5,\ t \geq 0$$

"piccola" perturbazione dell'ingresso

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

"piccola" perturbazione della c.i.