Piani

Per determinare un piano nello spazio basta assegnare

Pa) un punto nel piano e un vettore ortogonale al piano

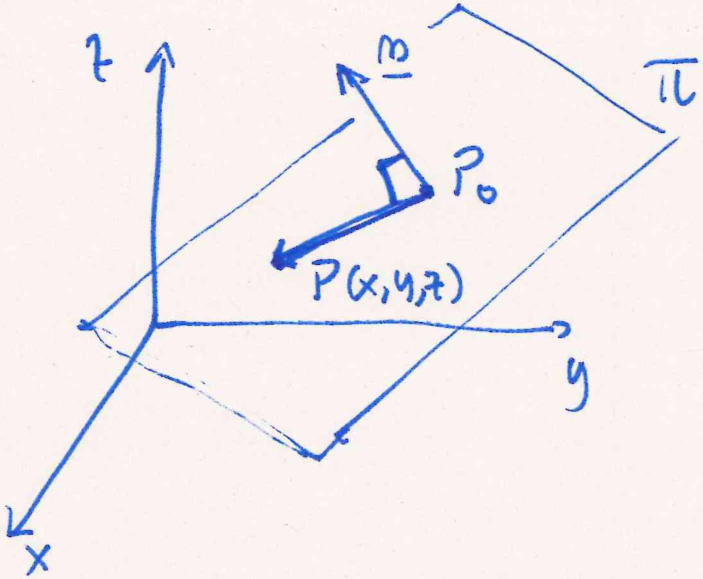
oppure

Pb) tre punti (non allineati) del piano

oppure

Pc) due rette contenute nel piano

Pa) Piano passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e ortogonale al vettore $\underline{n} = (a, b, c) \neq (0,0,0)$



$\underline{n}$ è detto vettore normale di π

Abbiamo che $P \in \pi \iff \overrightarrow{P_0P}$ è ortogonale a $\underline{n}$.

Quindi l'equazione di π è

$$\boxed{\underline{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0}$$

Poiché $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ otteniamo l'equazione cartesiana di π

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

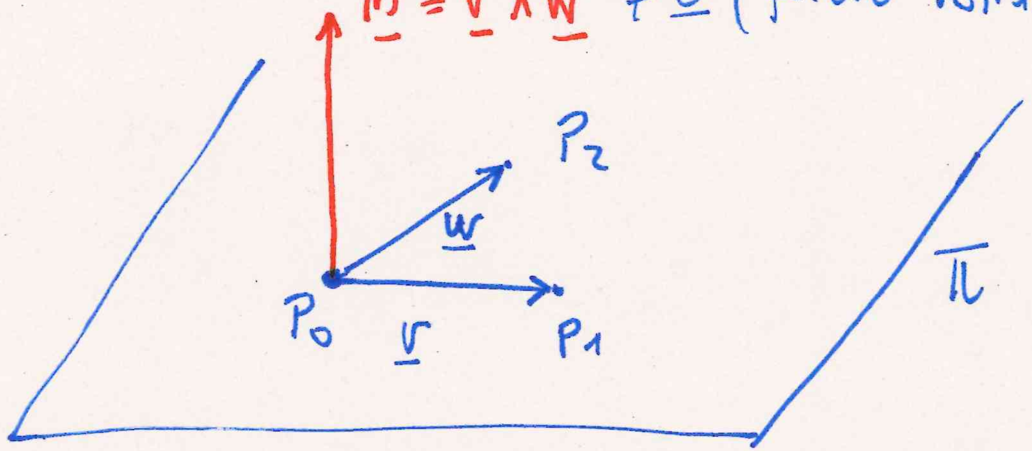
ossia

$$ax + by + cz + d = 0,$$

dove $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Pb) Piano passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (non allineati)

$\underline{n} = \underline{v} \wedge \underline{w} \neq \underline{0}$ (perché P_0, P_1, P_2 non sono allineati)



$\underline{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$

$\underline{w} = \overrightarrow{P_0P_2}$

il piano cercato è quello passante per P_0 e avente $\underline{n} = \underline{v} \wedge \underline{w} = \overrightarrow{P_0P_1} \wedge \overrightarrow{P_0P_2}$

come vettore normale.

Se $P(x, y, z)$ è un punto del piano, allora come nel caso Pa) l'equazione del piano è dato da $\underline{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$, cioè $\underline{v}\wedge\underline{w}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$, ossia

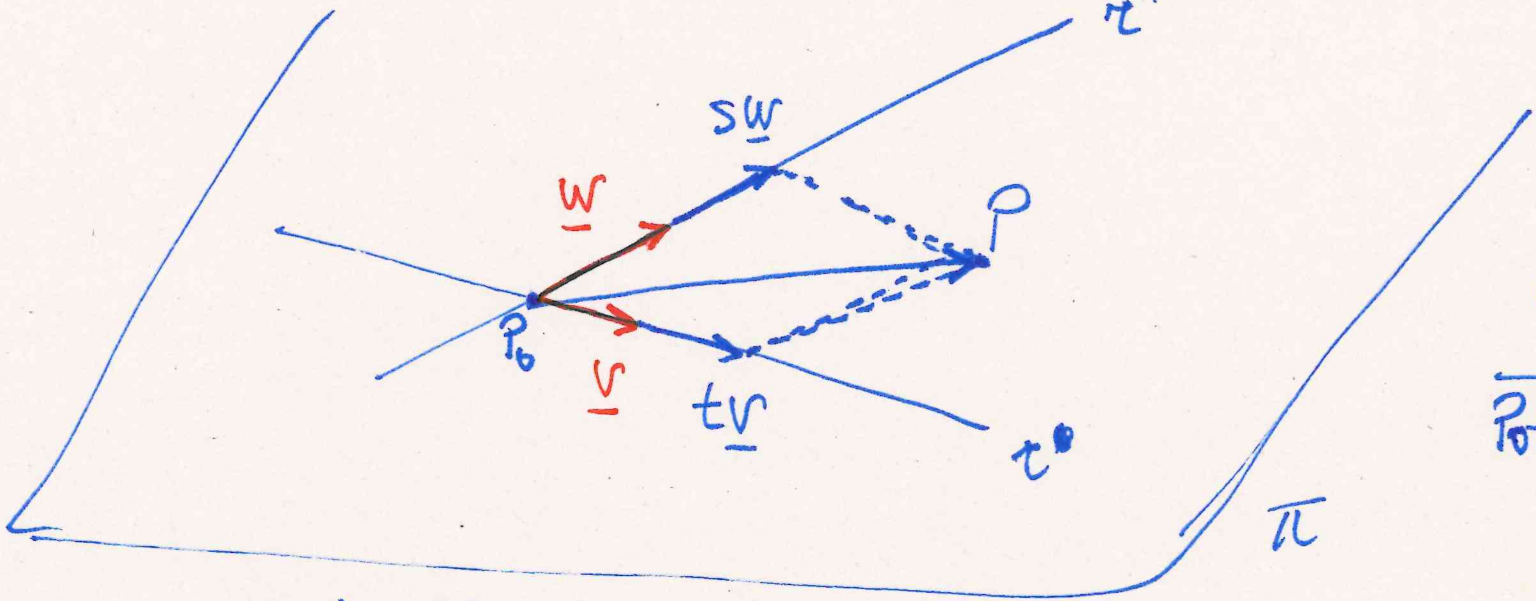
$$\overrightarrow{P_0P_1}\wedge\overrightarrow{P_0P_2}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

Poiché $\overrightarrow{P_0P_1}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$, $\overrightarrow{P_0P_2}=(x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0)$ e $\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, l'equazione cartesiana del piano è

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0}$$

PC1) Piano contenente due rette incidenti in un punto P_0 e non parallele. $\boxed{9.5}$

Siano r, r' le rette e $\underline{v}, \underline{w}$ i loro vettori direzionali.



$s, t \in \mathbb{R}$

Quindi

$$\overrightarrow{P_0P} = t\underline{v} + s\underline{w}$$

Siccome $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP}$

abbiamo quindi che le equazioni parametriche (vettoriali) di π sono

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\underline{v} + s\underline{w} \quad . \; t, s \in \mathbb{R}$$

Se $\vec{OP}=(x,y,z)$, $\vec{OP_0}=(x_0,y_0,z_0)$, $\underline{v}=(a,b,c)$, $\underline{w}=(a',b',c')$

otteniamo le equazioni parametriche (scalari):

$$\begin{cases} x = x_0 + at + a's \\ y = y_0 + bt + b's \\ z = z_0 + ct + c's \end{cases} \qquad t,s\in\mathbb{R}. \qquad (\#)$$

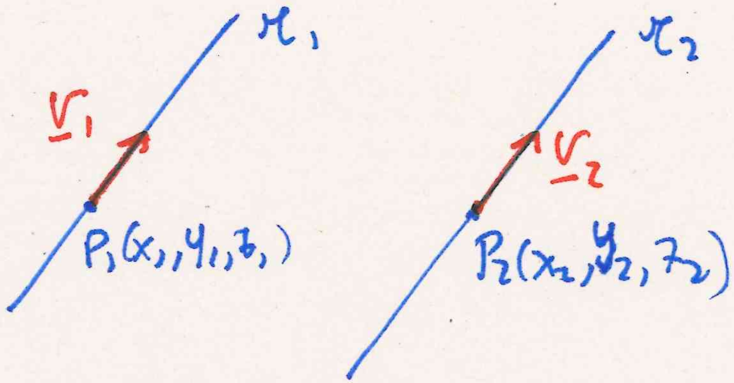
oss: Dalla relazione $\vec{P_0P}=t\underline{v}+s\underline{w}$ ~~si possono~~ e utilizzando il fatto che

$\vec{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ si possono ottenere direttamente le eq. (#).

oss: In alternativa, equazioni cartesiane $\underline{v}\wedge\underline{w}\cdot\vec{P_0P}=0$ (come nel caso Pb))

[verifica per esercizio]

PC$_2$) Piano contenente due rette parallele distinte



$\underline{v}_1 \parallel \underline{v}_2$

Esercizio: scrivere l'equazione del piano.

ATTENZIONE! Date due rette nello spazio non è detto che esista un piano che le contiene entrambe. Ciò accade solo nei seguenti due casi:

- rette incidenti (ossia, si intersecano)
- rette parallele

} rette complanari

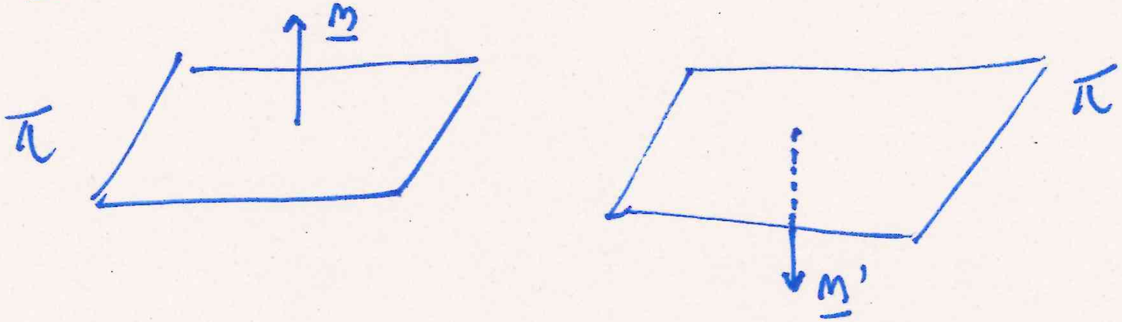
In caso contrario, si dice che le rette sono sghembe

Piani paralleli e ortogonali

I piani $\pi: \quad ax+by+cz+d=0$

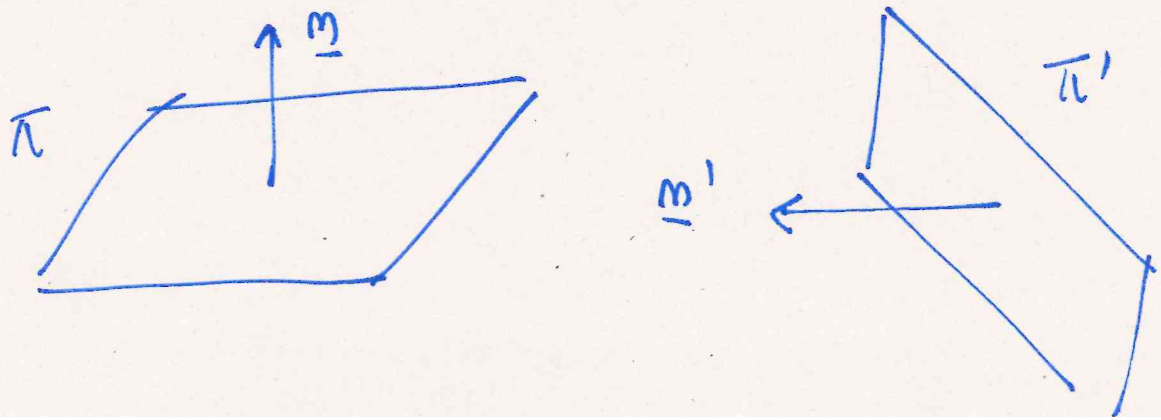
$\pi': \quad a'x+b'y+c'z+d'=0$

sono paralleli se lo sono i loro vettori normali: $\underline{n}=(a,b,c)$, $\underline{n}'=(a',b',c')$



$\underline{n}\wedge\underline{n}'=\underline{0}$

Allo stesso modo, π e π' sono ortogonali se lo sono $\underline{n}$ e $\underline{n}'$:

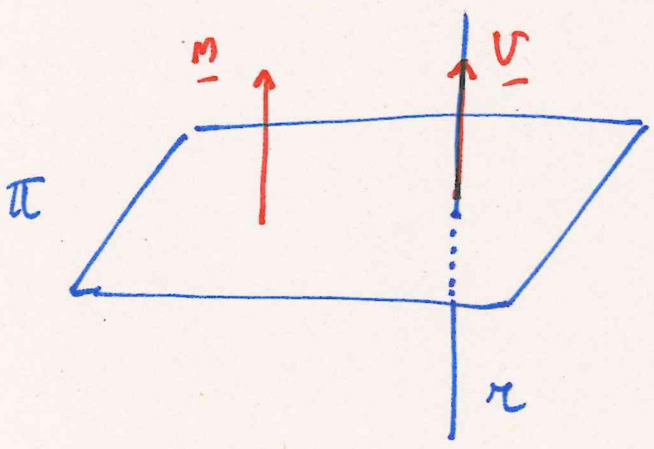


$\underline{n}\cdot\underline{n}'=0$

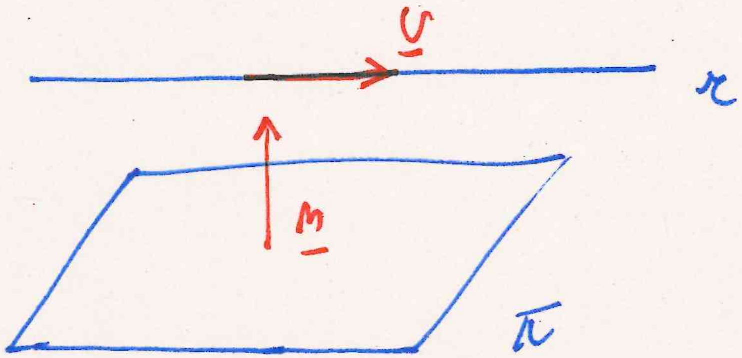
Parallelismo e ortogonalità tra un piano e una retta

Siano r una retta con vettore direzionale $\underline{v}$
e π un piano con vettore normale $\underline{n}$

Allora r è ortogonale al piano π se $\underline{v}$ è parallelo a $\underline{n}$
r è parallela al piano π se $\underline{v}$ è ortogonale a $\underline{n}$



r è ortogonale a π



r è parallela a π.

Possiamo ora descrivere il terzo metodo per determinare l'equazione di una retta:

Rc) Retta intersezione di due piani (non paralleli)

Due piani non paralleli

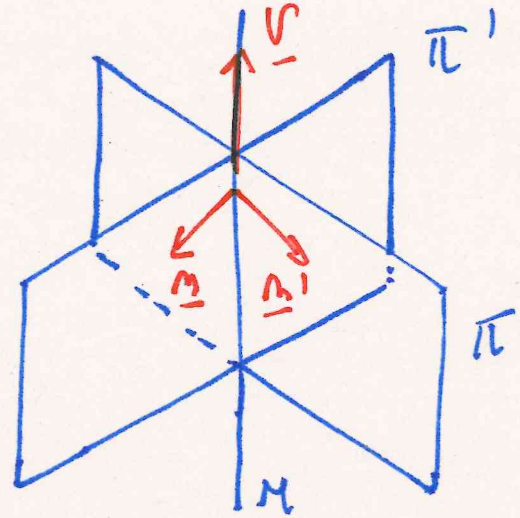
$$\pi: \; ax+by+cz+d=0 \quad , \quad \pi': \; a'x+b'y+c'z+d'=0$$

si intersecano lungo una retta $r=\pi\cap\pi'$.

Essa ha equazioni cartesiane:

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Il vettore direzionale di r deve essere ortogonale sia a $\underline{n} = (a, b, c)$ che a $\underline{n}' = (a', b', c')$.



Può essere pertanto scelto come

$$\underline{v} = \underline{n} \wedge \underline{n}'$$

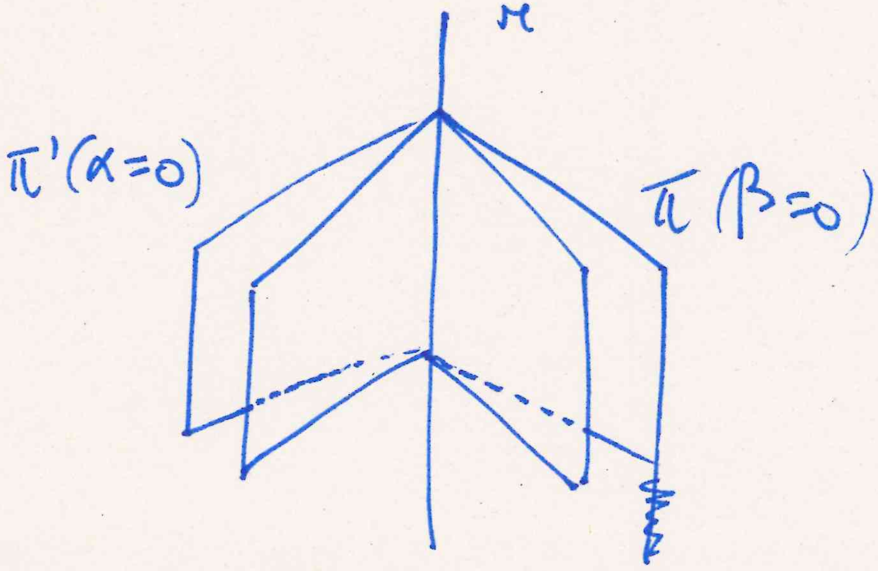
Fascio di piani

Se la retta r ha equazioni: $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

allora per ogni scelta di $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ con $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ il piano

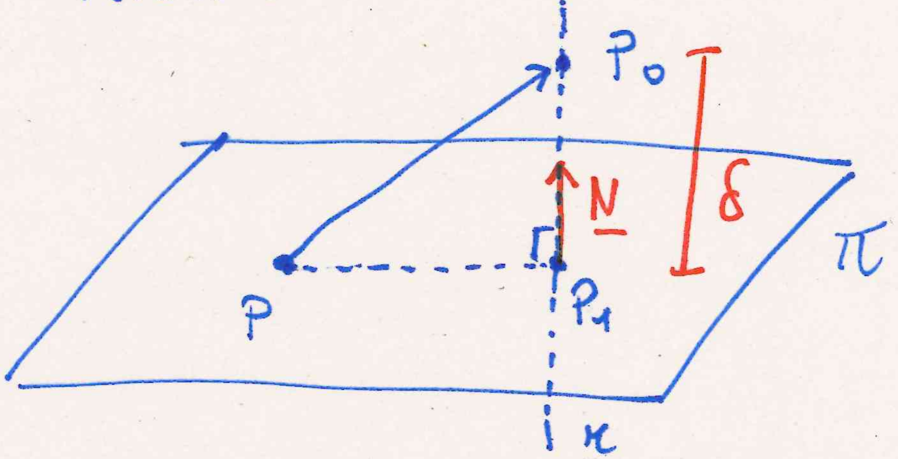
$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0 \qquad (*)$$

contiene la retta r. Si dice che $(*)$ è il fascio di piani contenente r!



Distanza tra punto e piano

Dati $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e π di equazione $ax+by+cz+d=0$ vogliamo calcolare la distanza δ tra P_0 e π.



Sia P_1 la proiezione di P_0 sul piano π

$\Rightarrow \delta = \overline{P_0P_1}$

Inoltre, se $P(x,y,z)$ è un punto del piano, allora

$\overrightarrow{P_0P_1} = (\overrightarrow{PP_0} \cdot \underline{N})\,\underline{N}$ Proiezione di $\overrightarrow{PP_0}$ lungo la retta r ortogonale a π dove $\underline{N}$ è il versore diretto come r

Quindi $\delta = \overline{P_0P_1} = \|(\overrightarrow{PP_0} \cdot \underline{N})\,\underline{N}\| = |\overrightarrow{PP_0} \cdot \underline{N}|$

Troviamo $\underline{N}$:

$\underline{n} = (a,b,c)$ vettore normale a π $\Rightarrow$ $\underline{N} = \dfrac{\underline{n}}{\|\underline{n}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$ versore normale

Quindi:

$$\boxed{\delta} = |\overrightarrow{PP_0} \cdot \underline{N}| = \left| (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 - (ax + by + cz)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|$$

$$= \boxed{\frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

$ax + by + cz = -d$
perché $P(x,y,z) \in \pi$

Distanza tra il punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e il piano $\pi: ax+by+cz+d=0$.