Lezione 10.
Funzione di trasferimento

Schema della lezione

1. Definizione
2. Dimensioni della funzione di trasferimento
3. Interpretazione della funzione di trasferimento
4. Struttura della funzione di trasferimento
   - Poli e zeri di una funzione di trasferimento
   - Stabilità
   - Cancellazione polo/zero
   - Rappresentazione interna ed esterna
5. Rappresentazioni di una funzione di trasferimento
6. Relazione tra guadagno statico e guadagno della funzione di trasferimento
7. Matlab

1. Definizione

Si consideri un sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Si esegua la trasformazione di Laplace dell'equazione di stato

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(s) + BU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$(sI - A)\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + BU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Si trasformi infine la trasformazione d'uscita

$$Y(s) = C\mathbf{X}(s) + DU(s)$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C\mathbf{X}(s) + DU(s) \end{cases}$$

Sostituendo lo stato nella trasformazione d'uscita si ottiene

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]U(s)$$

quando $\mathbf{x(0) = 0}$

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C(sI - A)^{-1}B + D}}$$

Funzione di trasferimento

2. Dimensioni della funzione di trasferimento

Con riferimento ad un sistema SISO (con ingresso ed uscita scalari)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

A è una matrice $n \times n$
B è una vettore $n \times 1$
C è una vettore $1 \times n$
D è uno scalare

$$G(s) = \underset{1 \times n}{C}(sI - \underset{n \times n}{A})^{-1}\underset{n \times 1}{B} + \underset{1 \times 1}{D}$$

La **funzione di trasferimento è una funzione scalare** dello scalare complesso s che lega la trasformata dell'ingresso (scalare) alla trasformata dell'uscita (scalare)

$$\boldsymbol{Y(s) = G(s)U(s)}$$

La funzione di trasferimento è una **rappresentazione ingresso/uscita** di un sistema dinamico LTI-SISO

Dimensioni della funzione di trasferimento
(caso generale MIMO)

approfondimento

p : dim. vettore uscita

m : dim. vettore ingresso

n : dim. vettore stato

$$\Rightarrow \quad G(s) \equiv \underbrace{\underset{p\times n}{C} \; \underset{n\times n}{(sI - A)^{-1}} \; \underset{n\times m}{B} + \underset{p\times m}{D}}$$

E' una matrice $p\times m$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_i(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{i1}(s) & \cdots & G_{im}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}_{p\times m} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

La i-esima componente del vettore di uscita è quindi

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(s)U_j(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \ldots + G_{im}(s)U_m(s)$$

3. Interpretazione della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema LTI-SISO a tempo continuo con funzione di trasferimento $G(s)$

Siano:

ingresso : $u(t) = \text{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1$
stato iniziale : $\mathbf{x}(0) = 0$

Allora si ha che

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

cioè

La funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso del sistema

Esempio

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Calcolare la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+10 & 12 \\ -2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s(s+10)+24} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -12 \\ 2 & s+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2+10s+24} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-12 \\ s+12 \end{bmatrix} = \frac{2s}{s^2+10s+24}$$

Calcolare la risposta all'impulso del sistema a partire da condizioni iniziali nulle.

$$u(t) = \mathrm{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1$$
$$\mathbf{x}(0) = 0$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = \frac{2s}{s^2 + 10s + 24} = \frac{2s}{(s+6)(s+4)}$$
$$y(t) = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}[Y(s)]$$

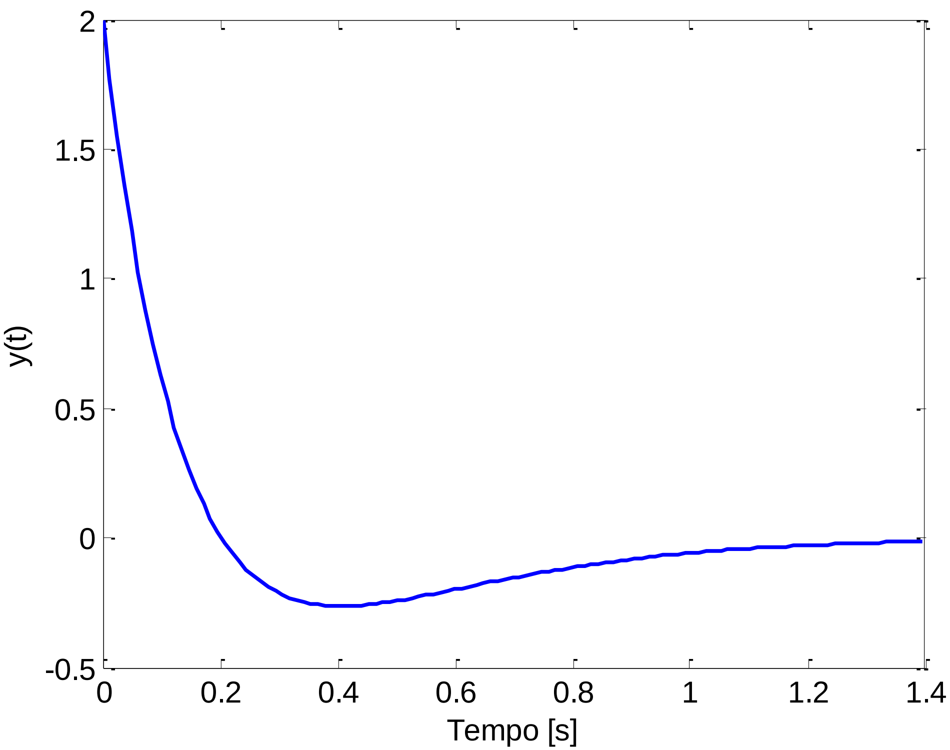
$$\frac{2s}{(s+6)(s+4)} = \frac{\alpha}{(s+4)} + \frac{\beta}{(s+6)} = \frac{\alpha s + 6\alpha + \beta s + 4\beta}{(s+6)(s+4)} = \frac{(\alpha+\beta)s + (6\alpha + 4\beta)}{(s+6)(s+4)}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 6\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 10s + 24} = \frac{2s}{(s+6)(s+4)} = \frac{-4}{(s+4)} + \frac{6}{(s+6)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4}{(s+4)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+6)}\right]$$

$$y(t) = -4e^{-4t} + 6e^{-6t} \text{ per } t \geq 0$$



4. Struttura della funzione di trasferimento

(per sistemi SISO)

Si consideri un sistema LTI-SISO a tempo continuo con funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Quali sono le caratteristiche dei singoli fattori che si incontrano durante il calcolo?

Il primo fattore che si calcola è

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & s - a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}^{-1}$$

La sua espressione è

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} K(s)$$

dove $K(s)$ è la matrice $n \times n$ dei complementi algebrici della trasposta di $sI - A$.

$\mathbf{det}(\boldsymbol{sI} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$ è il **polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$** e quindi è un **polinomio in $\boldsymbol{s}$ di grado $\boldsymbol{n}$**.

Il **generico elemento $\boldsymbol{k_{ij}}(\boldsymbol{s})$ di $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{s})$** è un **polinomio in $\boldsymbol{s}$ di grado inferiore ad $\boldsymbol{n}$** (in generale $n-1$).

Moltiplicando

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} K(s)$$

a sinistra per C e a destra per B

si ha

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\det(sI - A)} \underset{1\times n}{C} \; \underset{n\times n}{K(s)} \; \underset{n\times 1}{B} = \frac{M(s)}{\varphi(s)}$$

Si ottiene quindi un **rapporto di polinomi in $\boldsymbol{s}$**.

Il numeratore $\boldsymbol{M(s)}$, è un **polinomio in $\boldsymbol{s}$ di grado inferiore ad $\boldsymbol{n}$** (in generale $n-1$).

Il denominatore $\boldsymbol{\varphi(s)}$, è il **polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$** che è un **polinomio in $\boldsymbol{s}$ di grado $\boldsymbol{n}$**.

Infine, al termine ottenuto si somma lo scalare D

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{M(s)}{\varphi(s)} + D = \frac{M(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

Si ottiene quindi un rapporto di polinomi in s.

Se $D \neq 0$, cioè il **sistema è proprio** (non strettamente)

Il numeratore $\boldsymbol{N(s)}$, è un **polinomio in s di grado n**.

Il denominatore $\boldsymbol{\varphi(s)}$, è il **polinomio caratteristico di A** che è un **polinomio in s di grado n**.

Se $D = 0$, cioè il **sistema è strettamente proprio**

Il numeratore $\boldsymbol{N(s) = M(s)}$, è un **polinomio in s di grado inferiore ad n**

(in generale $n - 1$)

Il denominatore $\boldsymbol{\varphi(s)}$, è il **polinomio caratteristico di A** che è un **polinomio in s di grado n**.

Riassumendo

La funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

è una funzione razionale della variabile complessa s.

- ✓ Il denominatore $\boldsymbol{D(s)}$, è il **polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$** che è un **polinomio in $\boldsymbol{s}$ di grado $\boldsymbol{n}$**.

$$\boldsymbol{D(s) = \varphi(s)} = \det(sI - A)$$

- ✓ Il numeratore $\boldsymbol{N(s)}$, è un **polinomio in $\boldsymbol{s}$**
  - **di grado $\boldsymbol{n}$** se il **sistema è proprio**
  - **di grado inferiore ad $\boldsymbol{n}$** se il **sistema è strettamente proprio**

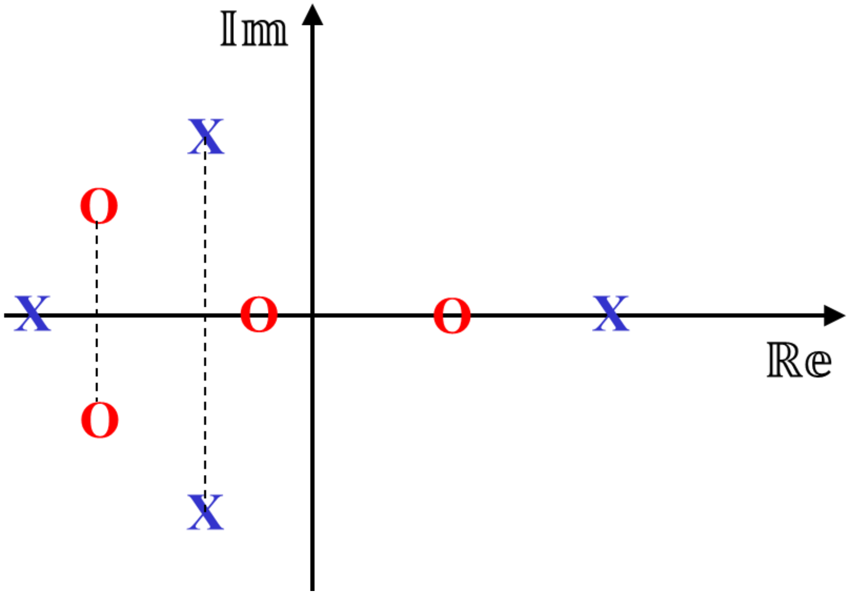
Poli e zeri

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

O **Zeri** : z_i radici di $N(s) = 0$

X **Poli** : p_i radici di $D(s) = 0$

Il numero degli zeri è sempre inferiore o al più uguale al numero dei poli



Stabilità

I poli sono tutti autovalori della matrice di stato A.

Infatti il denominatore della funzione di trasferimento è il polinomio caratteristico di A

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s}) = \det(sI - A)$$

Cosa accade se $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{s})$ e $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})$ hanno un fattore in comune?
Si ha una «cancellazione» polo/zero

In caso di cancellazione polo/zero un autovalore di A può non essere un polo della funzione di trasferimento.

Quindi, quando non ci sono cancellazioni, **è possibile valutare la stabilità di un sistema sulla base dei poli della funzione di trasferimento**

Asintotica stabilità $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}\mathrm{e}(p_i) < 0 \ , \ \forall i$

In caso di cancellazione polo/zero bisogna verificare il segno della parte reale del polo cancellato.

Cancellazioni polo/zero

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Si calcoli la sua funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{s-1}}{(\boldsymbol{s-1})(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

Qual è il significato di questa **cancellazione polo/zero**?

Si esplicitino le equazioni di stato

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_1(t)\\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + u(t)\\ y(t) = x_1(t) + x_2(t)\end{cases}$$

Si osservi che per $x_1(0) = 0$, dalla prima equazione di stato, si ha la soluzione $x_1(t) = 0$ per $t \geq 0$. Sostituendo questo risultato nella seconda equazione di stato e nell'equazione di uscita si ha

$$\begin{cases}\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)\\ y(t) = x_2(t)\end{cases}$$

Questo è un sistema del primo ordine con variabile di stato $x_2(t)$. La sua funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Quindi, quando si ha condizione iniziale nulla per lo stato $\mathbf{x}(0) = 0$, la prima variabile di stato $x_1(t)$ è sempre nulla. L'ipotesi $\mathbf{x}(0) = 0$ è alla base del calcolo della funzione di trasferimento ed è per questo che c'è una cancellazione polo/zero.

Esistono sistemi che, in corrispondenza di **condizioni iniziali nulle per lo stato**, hanno **variabili di stato con movimenti identicamente nulli per qualsiasi ingresso**.

Queste variabili di stato, quindi, in corrispondenza di condizioni iniziali nulle, non danno più alcun contributo alla dinamica del sistema. In questa particolare condizione «spariscono». Ovviamente, con condizioni iniziali dello stato non nulle ciò non accade: quelle variabili di stato «particolari» hanno movimenti non necessariamente nulli.

La funzione di trasferimento viene però calcolata nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle per lo stato e quindi considera il sistema sempre in questa condizione.

Il fatto che ci sia una cancellazione polo/zero nella funzione di trasferimento è proprio l'indicazione dell'esistenza di una variabile di stato «particolare» che, in corrispondenza di condizioni iniziali nulle ha movimenti sempre nulli. Questa «particolare» variabile di stato quindi, nella rappresentazione con funzione di trasferimento, non è mai visibile ed avviene, appunto, una cancellazione.

Quindi in caso di cancellazioni

- ✓ Il denominatore $\boldsymbol{D(s)}$, è un **fattore del polinomio caratteristico di** $\boldsymbol{A}$ e quidi è un **polinomio in** $\boldsymbol{s}$ **di grado** $\boldsymbol{r < n}$.

- ✓ Il numeratore $\boldsymbol{N(s)}$, è un **polinomio in** $\boldsymbol{s}$
  - **di grado** $\boldsymbol{r}$ se il **sistema è proprio**
  - **di grado inferiore ad** $\boldsymbol{r}$ se il **sistema è strettamente proprio**

Una cancellazione in $G(s)$ è un indicatore dell'esistenza di **parti "nascoste"** del sistema (che si dicono **"non raggiungibili"** o **"non osservabili"**).

Queste parti esistono nella rappresentazione di stato e "si nascondono" passando alla rappresentazione mediante funzione di trasferimento.

Rappresentazione interna e rappresentazione esterna

La funzione di trasferimento è detta **rappresentazione esterna** del sistema, mentre quella in variabili di stato è detta **rappresentazione interna**. In generale, però, non hanno il medesimo contenuto informativo (la rappresentazione di stato ci fornisce sempre un'informazione «completa», la funzione di trasferimento solo se non ci sono cancellazioni)

Rappresentazione interna **Rappresentazione esterna**

$$(A, B, C, D) \Longrightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \quad \overset{?}{\Longleftarrow} \quad Y(s) = G(s)U(s)$$

"realizzazione"

con $\mathbf{x}(0) = 0$

5. Funzione di trasferimento : rappresentazioni

1. $$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \qquad \text{con } m \leq n$$

2. $$G(s) = \frac{\rho}{s^g} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)} \qquad \text{con } m \leq n$$

ρ è la **costante di trasferimento**

z_i , $i = 1, \cdots, m$ sono gli **zeri**

p_i , $i = 1, \cdots, n$ sono i **poli**

g è il **tipo della funzione di trasferimento**

Il tipo è il numero di poli ($g > 0$) o di zeri ($g < 0$) in $s = 0$.

In presenza di **coppie di poli o zeri complessi coniugati**, queste vengono espresse mediante **polinomi di secondo grado** (con coefficienti reali) del tipo

$$s^2 + bs + c$$

3. $$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^{m}(1 + sT_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1 + s\tau_i)}$$

μ è il **guadagno della funzione di trasferimento**

T_i , $i = 1, \cdots, m$ sono le **costanti di tempo degli zeri**

$\tau_i, i = 1, \cdots, n$ sono le **costanti di tempo dei poli**

g è il **tipo della funzione di trasferimento**

Il tipo è il numero di poli ($g > 0$) o di zeri ($g < 0$) in $s = 0$.

Si osservi che le costanti di tempo sono legate a poli/zeri dalla seguente relazione

$$T_i = -\frac{1}{z_i}$$

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i}$$

Esempio

$$G(s) = \frac{5s^2 + 35s + 50}{s^2 + 10s + 21}$$ è nella forma **1.**

Calcolando poli e zeri è possibile metterla nella forma **2.**

$$G(s) = \frac{5s^2 + 35s + 50}{s^2 + 10s + 21} = \frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \rho = 5 \quad g = 0 \\ z_1 = -2, z_2 = -5 \\ p_1 = -3, p_2 = -7 \end{cases}$$

Raccogliendo z_i e p_i si può passare alla forma **3.**

$$G(s) = \frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2 \left(\frac{1}{2}s + 1\right)\left(\frac{1}{5}s + 1\right)}{3 \cdot 7 \left(\frac{1}{3}s + 1\right)\left(\frac{1}{7}s + 1\right)} = \frac{\frac{50}{21}\left(1 + \frac{1}{2}s\right)\left(1 + \frac{1}{5}s\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}s\right)\left(1 + \frac{1}{7}s\right)}$$

con $\mu = \frac{50}{21}, T_1 = \frac{1}{2}, T_2 = \frac{1}{5}, \tau_1 = \frac{1}{3}, \tau_2 = \frac{1}{7}, g = 0$

6. Guadagno statico e guadagno di una FdT

$\boxed{g = 0}$

Guadagno statico

Se il sistema non ha poli nell'origine ($g = 0$) allora la matrice A non ha autovalori nell'origine ed è invertibile e si ha

$$\mu = -CA^{-1}B + D$$

Inoltre si osservi che, essendo $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ allora

$$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$$

Guadagno della funzione di trasferimento

Se il sistema non ha poli nell'origine ($g = 0$) allora $G(s) = \mu \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}$ e quindi anche

$$\mu = G(0)$$

Quindi il **guadagno statico** è uguale al **guadagno della funzione di trasferimento**.

$\boxed{g \neq 0}$

Guadagno della funzione di trasferimento

Dal momento che $G(s) = \mu \frac{1}{s^g} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}$ allora sarà

$$\mu = \lim_{s \to 0} s^g \, G(s)$$

Il **guadagno statico** non ha nessuna relazione con il **guadagno della funzione di trasferimento** che in questo caso prende il nome di **guadagno generalizzato**.

tipo	**guadagno statico**		**guadagno della FdT**
$g = 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$	$=$	$\mu = G(0)$
$g < 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$	$\neq$	$\mu = \lim_{s \to 0} s^g\, G(s)$
$g > 0$	non def.		$\mu = \lim_{s \to 0} s^g\, G(s)$

Esempio

Sistema 1

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Si calcoli il **guadagno statico** del sistema

$$\boldsymbol{\mu} = -CA^{-1}B + D = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}$$

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$$\boldsymbol{g = 0}$$

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+9s+20} \xrightarrow{\text{forma 2}} G(s) = \frac{s+3}{(s+4)(s+5)} \xrightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \underbrace{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}}_{\boldsymbol{\mu}} \frac{\left(1+\frac{1}{3}s\right)}{\left(1+\frac{1}{4}s\right)\left(1+\frac{1}{5}s\right)}$$

guadagno della funzione di trasferimento

Si osservi che, nel caso $g = 0$, è possibile calcolare il guadagno statico dalla funzione di trasferimento

$$\mu = G(0) = \frac{3}{20}$$

guadagno statico = **guadagno della funzione di trasferimento**

Sistema 2

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -14 & -10 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & -5 \end{bmatrix} \quad D = 4$$

Si calcoli il **guadagno statico** del sistema

$$\mu = -CA^{-1}B + D = \mathbf{0}$$

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$$\boldsymbol{g < 0}$$

$$G(s) = \frac{4s^2 + 32s}{s^2 + 14s + 40} \xRightarrow{\text{forma 2}} G(s) = \frac{4s(s+8)}{(s+4)(s+10)} \xRightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \underbrace{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}}_{\boldsymbol{\mu}} \frac{\left(1 + \frac{1}{8}s\right)}{s^{-1}\left(1 + \frac{1}{4}s\right)\left(1 + \frac{1}{10}s\right)}$$

Si osservi che, nel caso $g < 0$, è possibile calcolare il guadagno statico dalla funzione di trasferimento

$$\mu = G(0) = 0$$

guadagno della funzione di trasferimento

Infatti: $\mu = \lim_{s \to 0} s^g \, G(s) = \frac{4}{5}$

Sistema 3

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t)\\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t)\end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix} \qquad C = [1 \;\; 4] \qquad D = 0$$

Non si può calcolare il **guadagno statico** del sistema perchè A non è invertibile.

$$\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists\, A^{-1}$$

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$g > 0$

$$G(s) = \frac{4s+32}{s^2+4s} \xrightarrow{\text{forma 2}} G(s) = \frac{4(s+8)}{s(s+4)} \xrightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \underbrace{8}_{\mu}\frac{\left(1+\frac{1}{8}s\right)}{s\left(1+\frac{1}{4}s\right)}$$

guadagno della funzione di trasferimento

Infatti: $\mu = \lim_{s\to 0} s^g\, G(s) = 8$

7. Matlab

Con questo comando possiamo definire una funzione di trasferimento nella «forma 1» (specificando i coefficienti dei polinomi a numeratore e a denominatore).

```
tf  Construct transfer function or convert to transfer function.

   Construction:
     SYS = tf(NUM,DEN) creates a continuous-time transfer function SYS with
     numerator NUM and denominator DEN. SYS is an object of type tf when
     NUM,DEN are numeric arrays.

     Conversion:
     SYS = tf(SYS) converts any dynamic system SYS to the transfer function
     representation. The resulting SYS is always of class tf.
```

Con questo comando possiamo definire una funzione di trasferimento nella «forma 2» (specificando i poli, gli zeri e la costante di trasferimento).

```
zpk  Constructs zero-pole-gain model or converts to zero-pole-gain format.

   Construction:
     SYS = zpk(Z,P,K) creates a continuous-time zero-pole-gain (zpk) model
     SYS with zeros Z, poles P, and gains K. SYS is an object of class @zpk.

     Conversion:
     SYS = zpk(SYS) converts any dynamic system SYS to the zpk
     representation. The resulting SYS is of class @zpk.
```

```
>> Sistema1=tf([1 1],[1 5 6])

Sistema1 =

        s + 1
   -------------
   s^2 + 5 s + 6

Continuous-time transfer function.



>> Sistema2=zpk([-1],[-2 -3],1)

Sistema2 =

       (s+1)
   -----------
   (s+2) (s+3)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
>> dcgain(Sistema2)

ans =

    0.1667
```

Attenzione!

```
>> A=[-4 1; 3 -5]; B=[1 1]'; C=[1 1]; D=0;
>> Sistema=ss(A,B,C,D);

>> tf(Sistema)

ans =

      2 s + 13
  --------------
  s^2 + 9 s + 17

Continuous-time transfer function.

>> zpk(Sistema)

ans =

        2 (s+6.5)
  -------------------
  (s+2.697) (s+6.303)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Applicando il comando **ss** ad una funzione di trasferimento otteniamo la realizzazione in variabili di stato del sistema.

```
>> Sistema=tf([1 1],[1 5 6])

Sistema =
       s + 1
  -------------
  s^2 + 5 s + 6

Continuous-time transfer function.
```

```
>> ss(Sistema)
ans =

  A =
         x1   x2
   x1   -5   -3
   x2    2    0

  B =
         u1
   x1    1
   x2    0

  C =
          x1    x2
   y1      1   0.5

  D =
         u1
   y1    0

Continuous-time state-space model.
```

Una verifica

```
>> eig([-5 -3; 2 0])

ans =

   -3.0000
   -2.0000
```

Per curiosità…

```
>> Sistema=tf([1 1],[1 4 0])

Sistema =

    s + 1
  ---------
  s^2 + 4 s

Continuous-time transfer function.

>> dcgain(Sistema)

ans =

   Inf
```

```
>> Sistema=tf([1 4 0],[1 5 6])

Sistema =

    s^2 + 4 s
  -------------
  s^2 + 5 s + 6

Continuous-time transfer function.

>> dcgain(Sistema)

ans =

     0
```