SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $\mathbb{R}^n$

Def: Un <u>sottospazio (vettoriale)</u> di $\mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme $V \subset \mathbb{R}^n$ tale che:

a) $V \neq \emptyset$

b) V è chiuso rispetto alla somma: se $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ allora $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V$

c) V è chiuso rispetto al prodotto esterno: se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{v} \in V$ allora $\lambda \underline{v} \in V$.

OSS: se V è un sottospazio vettoriale, allora $\underline{0} \in V$.

Infatti V non è vuoto, quindi esiste $\underline{v} \in V$. Ma allora, per la c), $\lambda \underline{v} \in V$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Scegliendo $\lambda = 0$ allora $\underline{0} = 0 \cdot \underline{v} \in V$.

Quindi:

$\boxed{\text{condizione necessaria perché un sottoinsieme } V \subset \mathbb{R}^n \text{ sia un sottospazio vettoriale è che } \underline{0} \in V}$

cioè

$$\boxed{\underline{0} \notin V \implies V \text{ non è sottospazio}}$$

Esempi:

i) Sia $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$. Allora $V = \{\underline{0}\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Infatti

a) $V \neq \emptyset$ b) $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \in V$, c) $\lambda \underline{0} = \underline{0} \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $V = \mathbb{R}^n$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. [verifica per esercizio]

I sottospazi $V = \{\underline{0}\}$ e $V = \mathbb{R}^n$ sono detti <u>sottospazi banali di $\mathbb{R}^n$</u>

iii) $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$. Infatti:

a) $(0,0)\in V$, infatti $2\cdot 0+3\cdot 0=0 \implies V\neq\emptyset$

b) Siano $(x_1,y_1)\in V$ e $(x_2,y_2)\in V$, cioè

$2x_1+3y_1=0$ e $2x_2+3y_2=0$. Mostriamo che $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\in V$:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\in V \iff (x_1+x_2,y_1+y_2)\in V \iff 2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)=0$$

$$\iff \underbrace{2x_1+3y_1}_{\substack{\shortparallel\\ 0\\ \text{perché } (x_1,y_1)\in V}} + \underbrace{2x_2+3y_2}_{\substack{\shortparallel\\ 0\\ \text{perché } (x_2,y_2)\in V}} = 0$$

c) Siano $(x,y)\in V$ e $\lambda\in\mathbb{R}$. Allora $\lambda(x,y)\in V$. Infatti

$$\lambda(x,y)\in V \iff (\lambda x,\lambda y)\in V \iff 2(\lambda x)+3(\lambda y)=0 \iff \lambda\underbrace{(2x+3y)}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}=0 \quad \text{perché } (x,y)\in V$$

iv) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+3y+1=0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$?

Sappiamo che se V è sottospazio allora necessariamente $(0,0) \in V$.

Ma $(0,0) \notin V$, perché $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow V$ non è sottospazio.

OSS: Una retta in $\mathbb{R}^2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$?

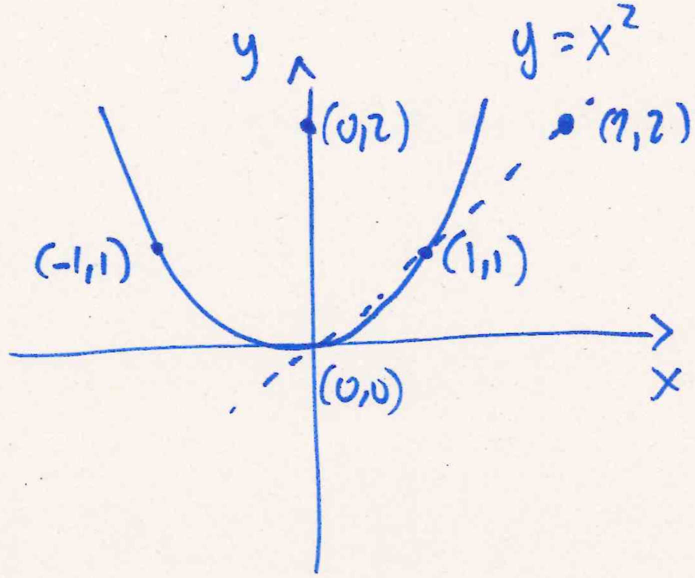
Se la retta non passa per l'origine non può essere un sottospazio, perché non contiene il vettore nullo.

v) I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono i seguenti:

- $V = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ sottospazio banale
- se $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $V = \{\lambda \underline{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ è sottospazio (retta passante per l'origine)
- se $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ e non sono paralleli, allora $V = \{\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ (sottospazio banale)

Esercizio: fare la verifica.

vi) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 = 0\}$ è sottospazio?



a) $(0,0) \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$

b) $(1,1) \in V$ $[1-(1)^2=0]$,

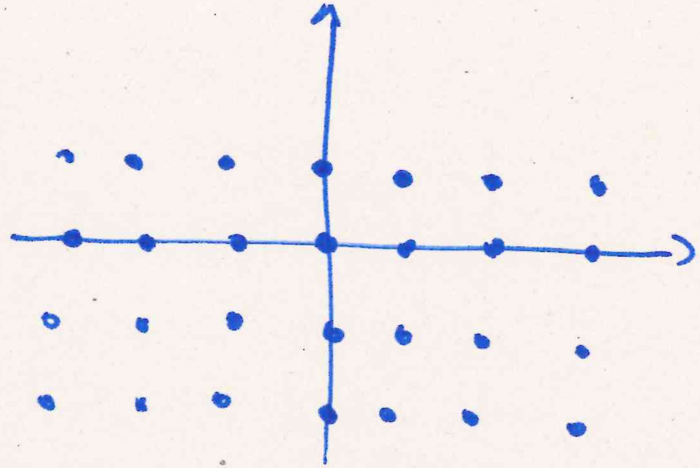
$(-1,1) \in V$ $[1-(-1)^2=0]$

ma $(1,1)+(-1,1)=(0,2) \notin V$ $[2-(0)^2=2 \neq 0]$

V non è chiuso rispetto alla somma $\Rightarrow$ V non è sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Inoltre, anche la c) non è soddisfatta: $(1,1) \in V$ ma $2(1,1)=(2,2) \notin V$

vii) $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^2$?



a) $(0,0)\in V \Rightarrow V\neq\emptyset$

b) $(x_1,y_1)\in V$ [cioè $x_1,y_1\in\mathbb{Z}$]

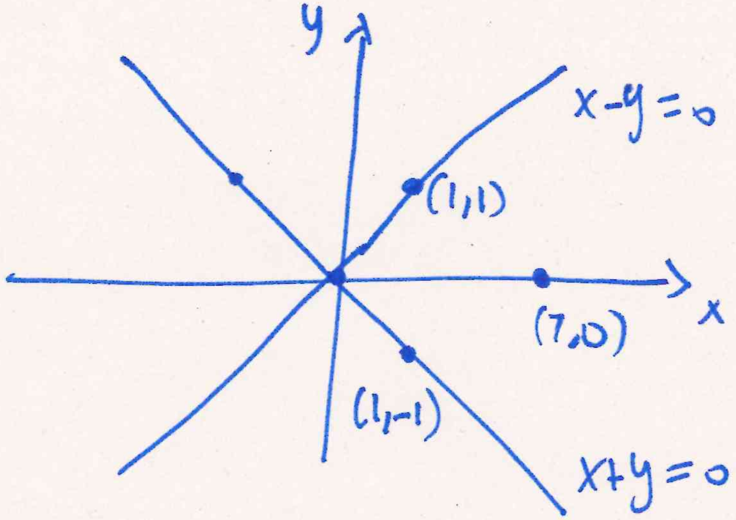
$(x_2,y_2)\in V$ [cioè $x_2,y_2\in\mathbb{Z}$]

$\Rightarrow (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in V$ [cioè $x_1+x_2\in\mathbb{Z}$, $y_1,y_2\in\mathbb{Z}$]

c) $(1,0)\in V$ ma $\frac{1}{2}(1,0)=(\frac{1}{2},0)\notin V$

Quindi V non è un sottospazio.

viii) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ è sottospazio! $[x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)]$ 11.7



a) $(0,0) \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$

c) $(x,y) \in V$ [cioè $x^2 - y^2 = 0$]

$\Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in V$: $(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2 (x^2 - y^2) = 0$

Però: b) $(1,1) \in V$ $[1^2 - 1^2 = 0]$

$(1,-1) \in V$ $[1^2 - (-1)^2 = 0]$

ma $(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin V$ $[2^2 - 0^2 = 4 \neq 0]$

Quindi V non è sottospazio

Esempio molto importante (sottospazio generato da k vettori)

Dati i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$, consideriamo l'insieme

$$V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{v}_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

formato da tutte le combinazioni lineari di k vettori.

È facile vedere [esercizio] che V è sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

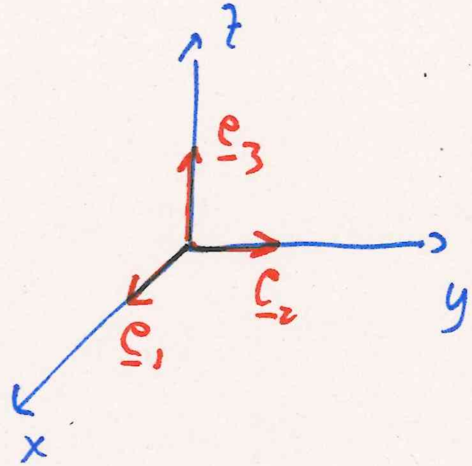
Chiameremo $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$ il sottospazio generato dai vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$.

Diremo inoltre che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono generatori di $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$.

Esempi:

i) Se $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \underline{v} \rangle = \{ \lambda \underline{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ è la retta di $\mathbb{R}^n$ passante per O e con vettore direzionale $\underline{v}$.

ii) $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Allora:



$\langle \underline{e}_1 \rangle = \{ \lambda \underline{e}_1 \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ è l'asse x.

$\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle = \{ \lambda_1 \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$ è il piano xy

$\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle = \{ \lambda_1 \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 + \lambda_3 \underline{e}_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^3$

iii) Sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $\underline{v}_1 = (1,1,1)$ e $\underline{v}_2 = (0,1,3)$.

~~$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \{ s\underline{v}_1 + t\underline{v}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$~~

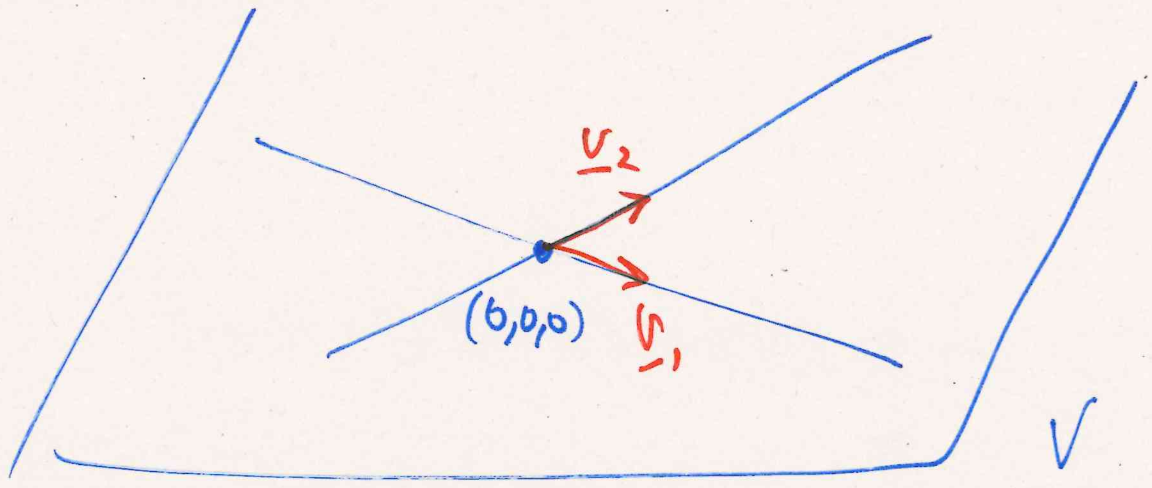
$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \{ s\underline{v}_1 + t\underline{v}_2 \mid s,t \in \mathbb{R} \} = \{ s(1,1,1) + t(0,1,3) \mid s,t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (s,s,s) + (0,t,3t) \mid s,t \in \mathbb{R} \} = \{ (s, s+t, s+3t) \mid s,t \in \mathbb{R} \}$$

Quindi V è l'insieme dei punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ della forma

$$\begin{cases} x = s \\ y = t+s \\ z = s+3t \end{cases} \quad s,t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t \\ y = 0 + 1 \cdot s + 1 \cdot t \\ z = 0 + 1 \cdot s + 3 \cdot t \end{cases} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Eq. parametriche del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per $P_0(0,0,0)$ [condizione necessaria] e contenente le rette con vettori direzionali $\underline{v}_1 = (1,1,1)$ e $\underline{v}_2 = (0,1,3)$



~~Risolve~~ Risolvendo il sistema rispetto a s, t si ha:

$$\begin{cases} s = x \\ t = y - x \\ z = x + 3(y - x) \end{cases}$$

Quindi V è il piano di $\mathbb{R}^3$ di eq. cartesiana

$$2x - 3y + z = 0$$

iv) Sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato da $\underline{v}_1=(1,2)$ e $\underline{v}_2=(2,4)$ 11.15

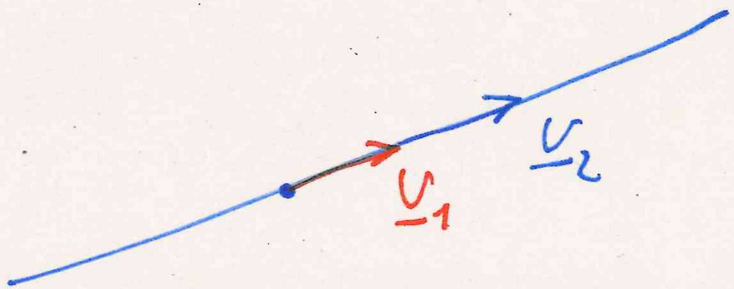
$$V=\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2\rangle = \{ s\underline{v}_1 + t\underline{v}_2 \mid s,t\in\mathbb{R}\} = \{ s(1,2)+t(2,4) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$$

$$= \{ (s,2s)+(2t,4t) \mid s,t\in\mathbb{R}\} = \{ (s+2t, 2s+4t) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$$

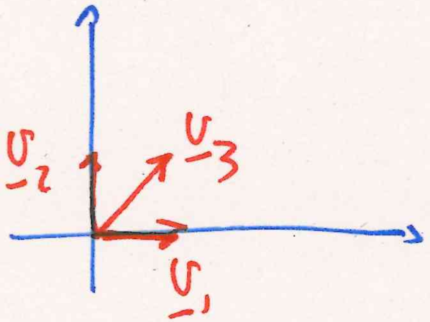
$$= \{ (\underbrace{s+2t}_{= w}, 2(s+2t)) \mid s,t\in\mathbb{R}\} = \{ (w,2w) \mid w\in\mathbb{R}\}$$

$$= \{ w(1,2) \mid w\in\mathbb{R}\} = \{ w\cdot\underline{v}_1 \mid w\in\mathbb{R}\} = \langle \underline{v}_1\rangle$$

Quindi $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2\rangle = \langle \underline{v}_1\rangle$ (e anche $=\langle \underline{v}_2\rangle$)



Esercizio: Siano $\underline{v}_1=(1,0)$, $\underline{v}_2=(0,1)$, $\underline{v}_3=(1,1)$ $\in \mathbb{R}^2$ 11.16



Mostrare che

$$\langle \underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\rangle = \langle \underline{v}_1,\underline{v}_2\rangle = \langle \underline{v}_1,\underline{v}_3\rangle = \langle \underline{v}_2,\underline{v}_3\rangle = \mathbb{R}^2$$

v) Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 3x-y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y\in\mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$. Sottospazio?

Metodo I: usando la definizione [esercizio]

Metodo II: Scrivo V come sottospazio generato:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 3x-y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ -y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y\in\mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Quindi V è sottospazio, perché è il sottospazio generato da

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vi) Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x+y+1 \\ 3x-y+3 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sottospazio?

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x+y+1 \\ 3x-y+3 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \underbrace{(x+1)}_{= x'} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x', y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow V \text{ è sottospazio.}$$