Regolarità degli autovettori

Data $A \in Mat(n,n)$ abbiamo visto che:

- gli autovalori di A sono le radici reali del polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di A (con autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$) se $\begin{cases} \underline{u} \neq \underline{0} \\ A\underline{u} = \lambda \underline{u} \end{cases}$

- A è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

OSS: se A è diagonalizzabile, allora tutti i suoi autovalori devono essere reali. Ad es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (\lambda^2 + 1)(2 - \lambda) \qquad \text{[verifica]}$$

Le radici sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ $\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile.

Def: Se $\lambda_j \in \mathbb{R}$ è un autovalore di $A \in Mat(n,n)$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\begin{aligned} V_j &= \left\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^n \ : \ A\underline{v} = \lambda_j \underline{v} \right\} \\ &= \left\{ \text{autovettori di } A \text{ relativi a } \lambda_j \right\} \cup \left\{ \underline{0} \right\} \end{aligned}}$$

è detto autospazio associato all'autovalore λ_j.

OSS:

i) V_j è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, perché coincide con il nucleo dell'applicazione lineare

$$L_{A-\lambda_j I} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Infatti:

$$\underline{v} \in V_j \iff A\underline{v} = \lambda_j \underline{v} \iff (A - \lambda_j I)\underline{v} = \underline{0} \iff L_{A-\lambda_j I}(\underline{v}) = \underline{0} \iff \underline{v} \in Ker(L_{A-\lambda_j I})$$

Quindi:

$$\boxed{V_j = Ker(L_{A-\lambda_j I})}$$

ii) $\boxed{\dim(V_j)} = \dim(\mathrm{Ker}\, L_{A-\lambda_j I}) = n - \dim(\mathrm{Im}\, L_{A-\lambda_j I}) = \boxed{n - \mathrm{car}(A-\lambda_j I)}$

↳ formula delle dimensioni

iii) Il sottospazio $V = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{v} = \lambda \underline{v}\}$ può essere definito anche se $\lambda \in \mathbb{R}$ non è un autovalore di A. Però in tal caso:

$$\det(A-\lambda I) \neq 0 \implies \mathrm{car}(A-\lambda I) = n \implies \dim V = n - n = 0 \implies V = \{\underline{0}\}$$

Invece se λ_j è autovalore, allora $\dim V_j \geq 1$

iv) Se λ_j è autovalore di A, gli autovettori relativi sono gli elementi di $V_j \setminus \{\underline{0}\}$

Vediamo ora come la ricerca degli autospazi è legata alla diagonalizzabilità di una matrice. Facciamo prima qualche esempio:

Esempi:

1) Un esempio (ovvio) di matrice diagonalizzabile è

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

B è ovviamente diagonalizzabile, perché già diagonale.

Autovalori:

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

$\Rightarrow$ gli autovalori di B sono $\lambda_1 = 3$ (radice doppia) e $\lambda_2 = -1$ (radice semplice)

Autospazi/autovettori:

$\lambda_1 = 3$ $\quad V_1 = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid B\underline{v} = 3\underline{v} \} = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (B-3I)\underline{v} = \underline{0} \} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \underline{e}_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \underline{e}_2} ; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle \subset \mathbb{R}^3$$

gli autovettori relativi sono $V_1 \setminus \{\underline{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : (x, y) \neq (0,0) \right\}$

Si noti che:

$$\dim V_1 = 3 - \operatorname{car}(B - 3I) = 3 - \operatorname{car}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

$\underline{\lambda_2 = -1)}$ $V_2 = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid B\underline{v} = -\underline{v} \} = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (B + I)\underline{v} = \underline{0} \} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = 0, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \underline{e}_3}, z \in \mathbb{R} \right\} = \langle \underline{e}_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$$

Gli autovettori relativi sono $V_2 \setminus \{\underline{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\ t \neq 0 \right\}$

Si noti che

$$\dim V_2 = 3 - \operatorname{car}(B+I) = 3 - \operatorname{car}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di B : $\{ \underbrace{\underline{e}_1, \underline{e}_2}_{\substack{\Uparrow \\ V_1 \\ (\lambda_1 = 3)}}, \underbrace{\underline{e}_3}_{\substack{\Uparrow \\ V_2 \\ (\lambda_2 = -1)}} \}$

2) Un esempio di una matrice con tutti autovalori reali ma non diagonalizzabile è

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori:

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

$\Rightarrow$ Autovalori: $\lambda_1 = 3$ (radice doppia) $\quad \lambda_2 = -1$ (radice semplice)

Autospazi / autovettori:

$\lambda_1 = 3)$ $V_1 = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 : C\underline{v} = 3\underline{v} \} = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 : (C - 3I)\underline{v} = \underline{0} \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ -4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = 0, z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle \underline{e}_1 \rangle$$

$\lambda_2 = -1)$ $V_2 = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid C\underline{v} = \underline{v} \} = \ldots = \langle \underline{e}_3 \rangle$ [verifica]

Quindi non esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di C

$\Longrightarrow$ C non è diagonalizzabile.

Cerchiamo di inquadrare questi due esempi in una teoria più generale.

Siano $A \in Mat(n,n)$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$ un autovalore fissato di A. Definiamo ora la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ_j:

- la molteplicità algebrica m_j dell'autovalore λ_j è la molteplicità di λ_j come radice del polinomio caratteristico:

$$\boxed{\det(A-\lambda I) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j} Q(\lambda), \qquad Q(\lambda_j) \neq 0}$$

- la molteplicità geometrica d_j dell'autovalore λ_j è la dimensione dell'autospazio V_j:

$$\boxed{d_j = \dim V_j}$$

Esempi: Negli esempi precedenti abbiamo visto che:

1) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(B - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$

$\lambda_1 = 3$: $\quad m_1 = 2, \quad d_1 = \dim V_1 = \dim \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle = 2 \qquad (d_1 = m_1 = 2)$

$\lambda_1 = -1$: $\quad m_2 = 1, \quad d_2 = \dim V_2 = \dim \langle \underline{e}_3 \rangle = 1 \qquad (d_2 = m_2 = 1)$

2) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(C - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$

$\lambda_1 = 3$: $\quad m_1 = 2, \quad d_1 = \dim V_1 = \dim \langle \underline{e}_1 \rangle = 1 \qquad (1 = d_1 < m_1 = 2)$

$\lambda_2 = -1$: $\quad m_2 = 1, \quad d_2 = \dim V_2 = \dim \langle \underline{e}_3 \rangle = 1 \qquad (d_1 = m_1 = 1)$

OSS: <u>Fatto importante:</u> si hanno sempre le disuguaglianze

$$1 \le \underbrace{d_j}_{\text{molteplicità geometrica}} \le \underbrace{m_j}_{\text{molteplicità algebrica}} \le n \longrightarrow \text{ordine della matrice.}$$

Definizione: Un autovalore λ_j si dice <u>regolare</u> se $d_j = m_j$.

Teorema: Una matrice è diagonalizzabile se e solo se le radici del suo polinomio caratteristico sono tutte reali e i suoi autovalori sono tutti regolari.

Definizione: Un autovalore λ_j si dice <u>semplice</u> se $m_j = 1$, ossia se λ_j è una radice reale e semplice del polinomio caratteristico.

OSS: λ_j semplice $\Longrightarrow$ λ_j regolare. Infatti:

λ_j semplice $\Rightarrow m_j = 1 \Longrightarrow 1 \leq d_j \leq m_j = 1 \Rightarrow d_j = m_j = 1 \Rightarrow \lambda_j$ regolare.

Corollario: Se il polinomio caratteristico di $A \in Mat(n,n)$ ha n radici reali distinte, allora A è diagonalizzabile.

Infatti: in questo caso gli autovalori di A sono tutti (reali) e semplici, quindi regolari.

Esempi:

1) La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

perché l'autovalore $\lambda_1 = 3$ non è regolare $(1 = d_1 < m_1 = 2)$

2) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ è diagonalizzabile. Infatti:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_3-R_1}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

Autovalori reali e distinti $\Rightarrow$ A diagonalizzabile.

Esercizio: Nell'esempio precedente:

a) Determinare gli autospazi V_1, V_2, V_3 di A

b) Mostrare che una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A è

$$\left\{ \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Mostrare che la matrice $S = (\underline{u}_1 | \underline{u}_2 | \underline{u}_3)$ è invertibile e che

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$