Equazioni di II° grado

La formula risolutiva per l'equazione

$$az^2+bz+c=0\ , \qquad a,b,c\in\mathbb{C}\ , \quad a\neq 0$$

è sempre

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\delta}{2a}$$

dove δ è una radice quadrata di $\Delta=b^2-4ac$ (cioè $\delta^2=\Delta$)

OSS: In particolare, ogni polinomio di II° grado con coefficienti in $\mathbb{C}$ si fattorizza (in $\mathbb{C}$):

$$ax^2+bx+c=a(x-z_1)(x-z_2)$$

ES: $z^2-2z+4=0$

$\Delta=4-16=-12<0$. Cerco δ t.c. $\delta^2=-12 \Rightarrow \delta=i\sqrt{12}=2i\sqrt{3}$ (oppure $\delta=-2i\sqrt{3}$)

Quindi: $$z_{1,2}=\frac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$$

Si noti che questo polinomio, a coefficienti reali, è irriducibile in $\mathbb{R}$,

ma è riducibile in $\mathbb{C}$: $z^2-2z+4=(z-z_1)(z-z_2)$ [verifica]

Es: $z^2+(2-i)z-2i=0$

$\Delta=(2-i)^2-4(-2i)=4-4i-1+8i=3+4i$

Cerco δ t.c. $\delta^2=3+4i$. Abbiamo visto che $\delta=\pm(2+i)$.

Quindi

$$z_{1,2}=\frac{-2+i\pm(2+i)}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{-2+i+2+i}{2}=i \\ \dfrac{-2+i-2-i}{2}=-2 \end{cases}$$

[~~verifica calcolare~~ $(z-i)(z+2)$]

[verificare che $(z-i)(z+2)=z^2+(2-i)z-2i$]

Polinomi a coefficienti complessi: il Teorema fondamentale dell'algebra

Consideriamo un polinomio di grado n, a coefficienti complessi:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \qquad (0)$$

dove $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Si dice che $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di P se $P(z_0) = 0$.

In tal caso esiste un polinomio Q di grado $n-1$ tale che

$$P(z) = (z - z_0)\, Q(z)$$

[Teorema di Ruffini]

Definizione: la molteplicità di $z_0 \in \mathbb{C}$ come radice di un polinomio P

è il massimo $m \geq 0$ per il quale esiste un polinomio Q t.c.

$$P(z) = (z - z_0)^m Q(z) \qquad \text{con } Q(z_0) \neq 0 .$$

Teorema (fondamentale dell'algebra): Se P è un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi, allora esso ammette radici in $\mathbb{C}$, e la somma delle loro molteplicità è n. In altre parole, l'equazione $P(z) = 0$ ammette esattamente n soluzioni (ma alcune di queste potrebbero ~~essere~~ ripetersi, come nel caso $z^n = 0$).

Corollario (Teorema di fattorizzazione in $\mathbb{C}$):

Il polinomio (o) si può scrivere come

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

dove $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono le sue radici.

Come ulteriore conseguenza del teorema fondamentale dell'algebra otteniamo il teorema di fattorizzazione di polinomi a coefficienti reali.

Esempio: Sia $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ ci sono le seguenti ~~possibilità~~ possibilità:

$$P(x) = \begin{cases} a(x-z_1)(x-z_2) & z_1, z_2 \in \mathbb{R} \quad z_1 \neq z_2 & (\Delta > 0) \\ a(x-z_1)^2 & z_1 \in \mathbb{R} & (\Delta = 0) \\ \text{irriducibile} & & (\Delta < 0) \end{cases}$$

Corollario (Teorema di fattorizzazione dei polinomi a coefficienti reali)

Un polinomio di grado n a coefficienti reali

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, si può sempre fattorizzare:

- nel prodotto di polinomi a coefficienti reali di primo grado (cioè del tipo $x-\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$)
- o di secondo grado irriducibili (cioè del tipo ax^2+bx+c con $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $\Delta=b^2-4ac<0$)

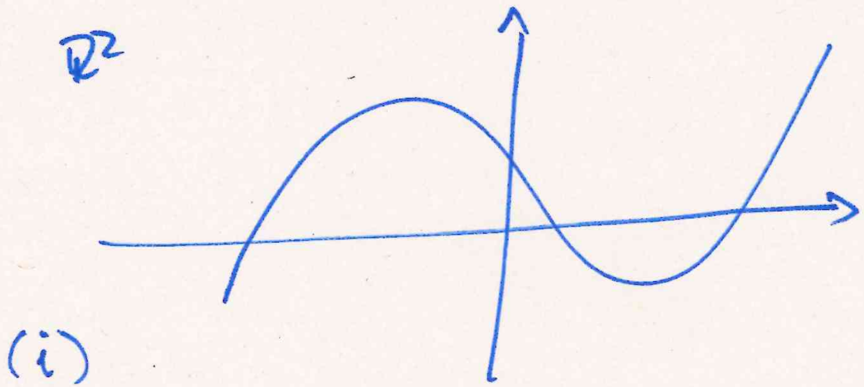
Esempio: $n=3$ $\quad P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

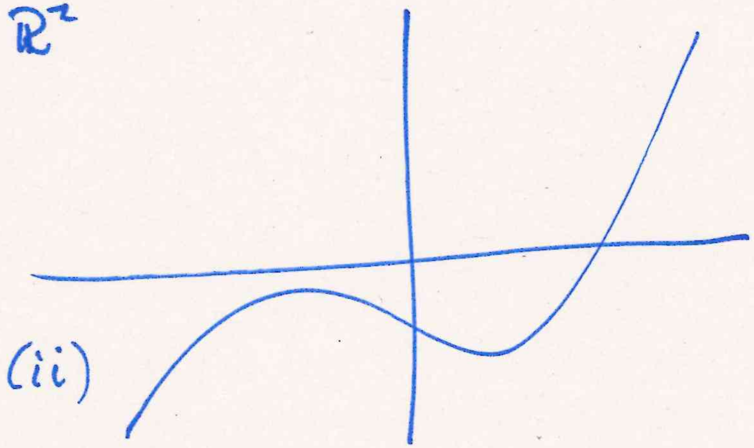
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{C}$

Due casi:

i) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ $\qquad$ es. $P(x)=x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

ii) $\alpha_1\in\mathbb{R}$, $\overline{\alpha_2}=\alpha_3\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ $\qquad$ es: $P(x)=x^3-2x^2+x-2=(x-2)(x^2+1)$





. Un polinomio reale di grado > 2 è sempre fattorizzabile (anche se non ha radici reali)

Es: $P(x) = x^4 + 4$. Certamente $P(x)$ non ha radici reali.

Sappiamo però che $P(x)$ può essere fattorizzato.

Possiamo scrivere $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$

dove $\alpha_k = \sqrt{2}\, e^{i\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)}$ $k = 1,2,3,4$ sono le radici quarte di -4.

Si noti che $\alpha_3 = \bar{\alpha}_1$, $\alpha_4 = \bar{\alpha}_2$ e che

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_3) = x^2 + 2x + 2$ $\Longrightarrow x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

$(x-\alpha_2)(x-\alpha_4) = x^2 - 2x + 2$

VETTORI

Lo spazio $\mathbb{R}^n$

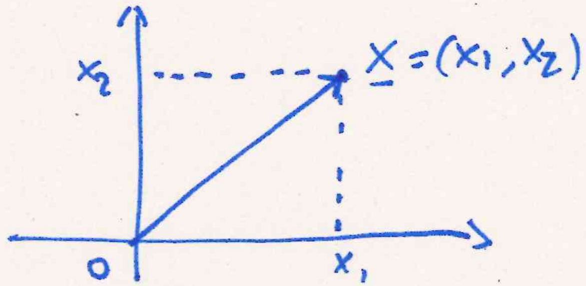
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

gli elementi: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ si chiamano vettori n-dimensionali;

il numero reale x_i è detto componente i-esima del vettore $\underline{x}$.

Esempio: $n=2$

$\mathbb{R}^2$



(Piano)

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

• <u>Somma in $\mathbb{R}^n$</u>: se $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

allora si pone

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

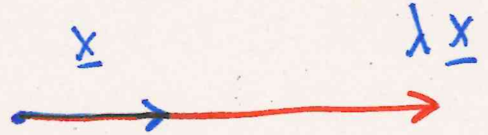
Geometricamente, questa definizione equivale (per $n=2$, $n=3$) alla regola del parallelogramma.

• <u>Vettore nullo</u>: $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} + \underline{0} = \underline{x} \quad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

• <u>Prodotto esterno</u> (o prodotto per uno scalare): $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

allora si pone

$$\lambda \underline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$$



(caso $\lambda > 1$)

- **Prodotto scalare**: se $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ (4.10

allora si pone
$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

ossia
$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Il modulo (o norma, o lunghezza) di $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ è

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 0$$

Esercizio: mostrare che se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ allora

$$\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|$$

Diremo che:

- $\underline{x}$ è un versore se $\|\underline{x}\| = 1$
- $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ sono ortogonali se $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$

- $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ sono *paralleli* se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{x} = \lambda \underline{y}$ (oppure $\underline{y} = \lambda \underline{x}$)

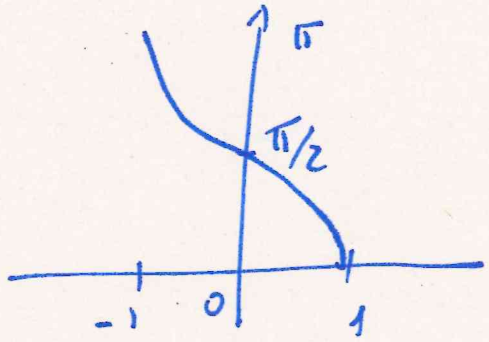
Esercizio: mostrare che il vettore nullo $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ è parallelo e ortogonale ad ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Proposizione: Per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

Grazie ad essa possiamo definire *l'angolo* α tra due vettori $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ non nulli come:

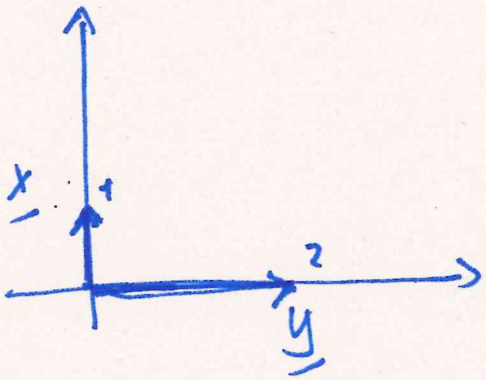
$$\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|}\right) \in [0, \pi]}$$



ossia

$$\boxed{\underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cos\alpha}$$

Esempio: $\underline{x} = (0,1)$, $\underline{y} = (2,0)$



$$\underline{x} \cdot \underline{y} = (0,1) \cdot (2,0) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0$$

($\Rightarrow$ $\underline{x}, \underline{y}$ sono ortogonali)

Calcoliamo l'angolo α tra $\underline{x}$ e $\underline{y}$:

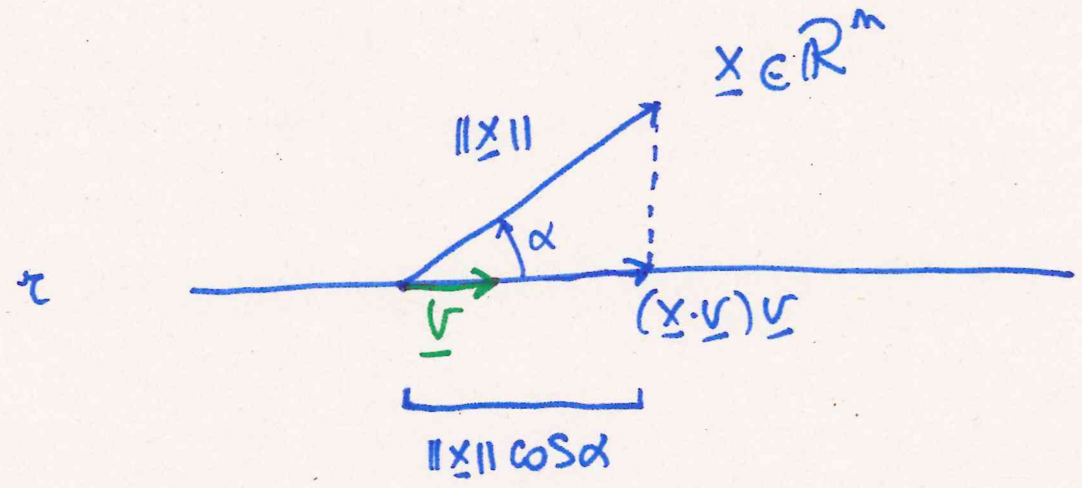
$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{(0,1) \cdot (0,1)} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1^2} = 1 \qquad (\underline{x} \text{ versore})$$

$$\|\underline{y}\| = \sqrt{\underline{y} \cdot \underline{y}} = \sqrt{(2,0) \cdot (2,0)} = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

Angolo $\quad \underbrace{\underline{x} \cdot \underline{y}}_{=0} = \underbrace{\|\underline{x}\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|\underline{y}\|}_{=2} \cos\alpha \Rightarrow 0 = 2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

Proiezione di un vettore su una retta

Dati una retta r in $\mathbb{R}^n$ ed un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ siano $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ il versore (cioè $\|\underline{v}\| = 1$) diretto come r e tale per cui l'angolo α tra $\underline{x}$ e $\underline{v}$ sia in $[0, \frac{\pi}{2}]$ (cioè $\underline{x} \cdot \underline{v} \geq 0$)



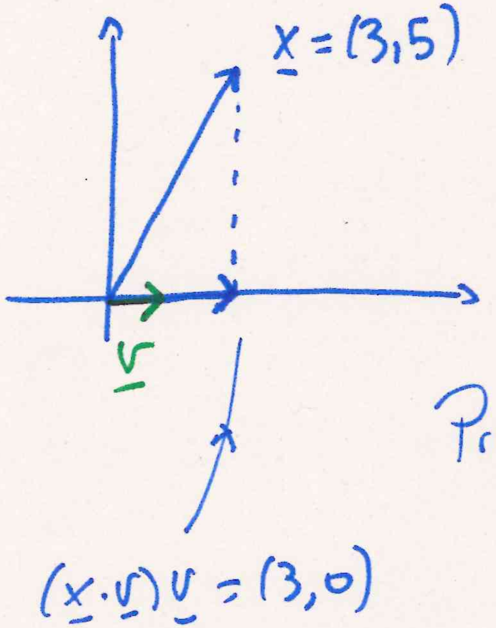
La proiezione del vettore $\underline{x}$ sulla retta r è data da

$$(\underline{x} \cdot \underline{v})\,\underline{v}$$

Infatti:

$$\|(\underline{x}\cdot\underline{v})\underline{v}\| = \underbrace{|\underline{x}\cdot\underline{v}|}_{\geq 0}\cdot\underbrace{\|\underline{v}\|}_{=1} = \underline{x}\cdot\underline{v} = \|\underline{x}\|\cdot\underbrace{\|\underline{v}\|}_{=1}\cos\alpha = \|\underline{x}\|\cos\alpha$$

Esempio: $\mathbb{R}^2$, $\underline{x}=(3,5)$, $r:\ y=0$ (asse x)

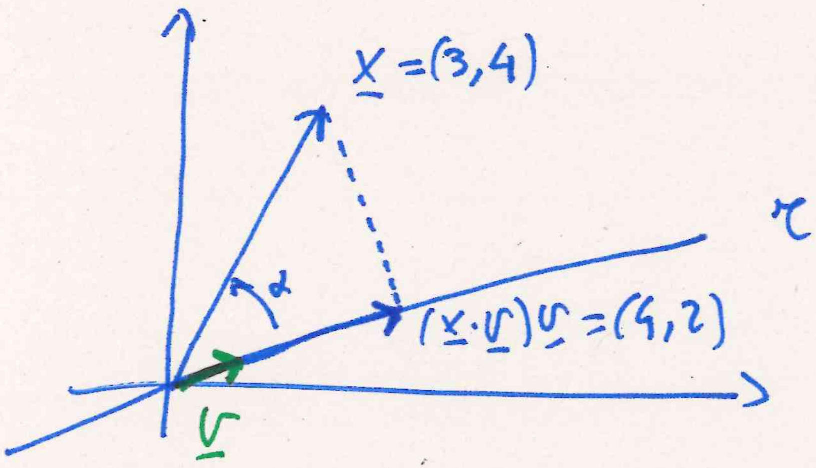


$\underline{v}=(1,0)$ $\quad(\|\underline{v}\|=1)$

$\underline{x}\cdot\underline{v}=(3,5)\cdot(1,0)=3\cdot 1+5\cdot 0=3$

Proiezione: $(\underline{x}\cdot\underline{v})\underline{v}=3(1,0)=(3,0)$

Esempio: $\mathbb{R}^2$, $\underline{x} = (3,4)$ $\quad r: y = \frac{1}{2}x$



$(2,1) \parallel r \quad \|(2,1)\| = \sqrt{5} \implies \underline{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$(\|\underline{v}\| = 1)$

$$\underline{x} \cdot \underline{v} = (3,4) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Proiezione: $(\underline{x} \cdot \underline{v})\,\underline{v} = 2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (4,2).$