Geometria e Algebra Lineare

Numeri complessi — seconda esercitazione

Esercizio 2.1. Determinare modulo e argomento di $z = -3 - i\sqrt{3}$. Osservare che

$$\arg z \neq \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \arg z \neq \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \qquad \arg z \neq \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$

SOLUZIONI: $|z| = 2\sqrt{3}$, $\arg z = -5\pi/6$.

Esercizio 2.2. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi che hanno come modulo e argomento le coppie

$$\rho_1 = 3\sqrt{2},\ \theta_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \rho_2 = 2,\ \theta_2 = \frac{2\pi}{3}; \quad \rho_3 = 4,\ \theta_3 = -\frac{2\pi}{3}.$$

SOLUZIONI: $z_1 = 3 + 3i$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = -2 - 2i\sqrt{3}$.

Esercizio 2.3. Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi e posizionarli sul piano di Gauss.

$$a)\ z_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}; \qquad b)\ z_2 = 3\,e^{i\frac{4\pi}{3}}; \qquad c)\ z_3 = 4\,e^{i\frac{3\pi}{4}}; \qquad d)\ z_4 = \frac{2 - i\sqrt{3}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}.$$

SOLUZIONI: a) $z_1 = \sqrt{3} + i$; *b)* $z_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$; *c)* $z_3 = -2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}$; *d)* $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{5}{4}i$.

Esercizio 2.4. Scrivere in forma esponenziale i seguenti numeri complessi e posizionarli sul piano di Gauss.

a) $w_1 = i$;

b) $w_2 = -1$;

c) $w_3 = 1 + i$;

d) $w_4 = 1 + i\sqrt{3}$;

e) $w_5 = -3e^{i\frac{\pi}{6}}$;

f) $w_6 = -3i$;

g) $w_7 = i(1 + i)$;

h) $w_8 = 4\sqrt{3} + 4i$;

i) $w_9 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

j) $w_{10} = \dfrac{1}{1 + i\sqrt{3}}$;

k) $w_{11} = \dfrac{1}{(1 + i\sqrt{3})^3}$;

l) $w_{12} = \dfrac{1}{3 + 3i}$;

m) $w_{13} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{5} + \dfrac{2}{5}i$;

n) $w_{14} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$;

o) $w_{15} = \dfrac{1+i}{1-i}$;

p) $w_{16} = \left(\dfrac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2i} \right)^{-5}$;

q) $w_{17} = \dfrac{2(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})}{3+3i}$.

SOLUZIONI:

a) $w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$;

b) $w_2 = e^{i\pi}$;

c) $w_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

d) $w_4 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$;

e) $w_5 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$;

f) $w_6 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

g) $w_7 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

h) $w_8 = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$;

i) $w_9 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$;

j) $w_{10} = \dfrac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

k) $w_{11} = \dfrac{1}{8}e^{i\pi}$;

l) $w_{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

m) $w_{13} = \dfrac{4}{5}e^{i\frac{5\pi}{6}}$;

n) $w_{14} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$;

o) $w_{15} = e^{i\frac{\pi}{2}}$;

p) $w_{16} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}e^{i\frac{\pi}{12}}$;

q) $w_{17} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\frac{3\pi}{28}}$.

Esercizio 2.5. Determinare modulo e argomento dei numeri complessi

$$z = \left(\sqrt{3} - i\right)(-1+i), \quad w = \frac{2-2i}{3+3i}.$$

SOLUZIONI: $|z| = 2\sqrt{2}$, $\arg z = 7\pi/12$; $|w| = 2/3$, $\arg w = -\pi/2$.

Esercizio 2.6. Si considerino i numeri complessi

$$z_1 = -2(1+i), \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z = z_1 z_2.$$

Scrivere in forma esponenziale e posizionare sul piano complesso z, $\bar{z}$ e $\frac{1}{z}$.
SOLUZIONI: $z = 4\sqrt{2}\, e^{-i\frac{5\pi}{12}}$, $\bar{z} = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

Esercizio 2.7.

a) Dato $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 3i\right)$, calcolare z^4 e le radici quadrate di z.

b) Scrivere $z = \dfrac{16}{(1-i)^2}$ in forma algebrica e in forma trigonometrica; calcolarne poi le radici cubiche.

c) Scrivere $z_1 = -4\sqrt{3} + 4i$ e $z_2 = 2i$ in forma trigonometrica; calcolare poi $\frac{z_1}{z_2^2}$ e le radici quarte di $z_1 z_2$.

SOLUZIONI:

a) $z^4 = 16\,\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = -8 - i\,8\sqrt{3}$*; le radici quadrate di* z *sono* $w_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $w_1 = -w_0$.

b) $z = 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$*; le radici cubiche di* z *sono*
$w_0 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i, \qquad w_1 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i, \qquad w_2 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i.$

c) $z_1 = 8(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$, *cosicché*

$$\frac{z_1}{{z_2}^2} = -2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{6}}, \qquad z_1 z_2 = 16\,\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Le radici quarte di $z_1 z_2$ *sono* $w_k = 2\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2})}$*, con* $k = 0, 1, 2, 3$*. È facile (anche se non richiesto) scriverle in forma algebrica.*

Esercizio 2.8. Calcolare e disegnare sul piano complesso le radici n-sime complesse di z, per i valori di n e di z indicati.

a) $n = 4$, $z = 1$;

b) $n = 3$, $z = 1$;

c) $n = 5$, $z = 1 + i$;

d) $n = 6$, $z = 1 - i\sqrt{3}$;

e) $n = 2$, $z = 1 + i\sqrt{3}$;

f) $n = 3$, $z = i$;

g) $n = 2$, $z = -i$;

h) $n = 2$, $z = \dfrac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2i}$.

SOLUZIONI:

a) $w_k = \mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{2}}$*, con* $k = 0, 1, 2, 3$*;*

b) $w_k = \mathrm{e}^{2ik\frac{\pi}{3}}$*, con* $k = 0, 1, 2$*;*

c) $w_k = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5})}$*, con* $k = 0, 1, 2, 3, 4$*;*

d) $w_k = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3})}$*,* $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$*;*

e) $w_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$*,* $w_1 = -w_0$*;*

f) $w_k = \mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3})}$*, con* $k = 0, 1, 2$*;*

g) $w_0 = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$*,* $w_1 = -w_0$*;*

h) $w_0 = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{24}}$*,* $w_1 = -w_0$*.*

Esercizio 2.9. Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni.

a) $z^2 + 2z + 5 = 0$;

b) $z^2 + z + 1 = 0$;

c) $2z + z^2 = 1 + 2i$;

d) $z^2 - 2(1-3i)z - 16 - 12i = 0$;

e) $z^2 - (1+2i)z - 3 + 11i = 0$;

f) $z^8 + 1 = 0$;

g) $(z^3 + 1 - i)\left(z^2 + \dfrac{1}{i}\right) = 0$;

h) $(z^4 - 4)(z^2 - 2i) = 0$;

i) $z^3 - |z| = 0$;

j) $2z\overline{z} = 1$;

k) $2z\overline{z} = i$;

l) $z^2\overline{z}^5 = 1 + i\sqrt{3}$;

m) $z^3\overline{z} - 2 - 2i = 0$;

n) $(z-2)(z'+3) - 3(z-5) = 0$ dove z' è un numero complesso tale che $|z'| = 3$;

o) $|z^2+1| = z - z^2$.

SOLUZIONI:

a) $z = -1 \pm 2i$;

b) $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

c) $z = -1 \pm \left(\sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$;

d) $z_1 = -2 - 4i$, $z_2 = 4 - 2i$;

e) $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 3 - i$;

f) $z_k = \mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4})}$, *con* $k = 0, \ldots, 7$;

g) $z_k = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3})}$ *(con* $k = 0,1,2$*)*, $z_3 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_4 = -z_3$;

h) $z_k = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{2}}$ *(con* $k = 0,1,2,3$*)*, $z_4 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_5 = -z_4$;

i) $z_k = \mathrm{e}^{2ik\frac{\pi}{3}}$ *(con* $k = 0,1,2$*)*, $z_3 = 0$;

j) Tutti i numeri complessi di modulo $\sqrt{2}/2$;

k) Nessuna soluzione;

l) $z_k = \sqrt[7]{2}\,\mathrm{e}^{i(-\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3})}$ *(con* $k = 0,1,2$*)*;

m) $z_1 = 2^{\frac{3}{8}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$, $z_2 = -z_1$;

n) $z = 2 - 3\,\mathrm{e}^{-i\theta}$, *dove* $\theta = \arg(z')$;

o) $z_1 = (1+i\sqrt{3})/2$, $z_2 = (1-i\sqrt{3})/2$.

Esercizio 2.10. Rappresentare sul piano di Gauss i seguenti insiemi.

a) $A = \left\{z \in \mathbb{C}\colon \frac{1}{2} < |z-1| < 2\right\}$;

b) $B = \left\{z \in \mathbb{C}\colon z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}w, w \in A\right\}$;

c) $C = \left\{z \in \mathbb{C}\colon z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}w, w \in A\right\}$;

d) $D = \left\{z \in \mathbb{C}\colon \frac{1}{2} < |z| \leqslant 2, \arg z \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right\}$;

e) $E = \left\{z \in \mathbb{C}\colon 2 \leqslant |z| \leqslant 4, \arg z \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]\right\}$.

SOLUZIONI:

a) A è la corona circolare di centro $z_0 = 1$*, raggio interno* $1/2$ *e raggio esterno 2 (bordi esclusi).*

b) B è la corona circolare di centro $z_0 = (1+i\sqrt{3})/2$*, raggio interno* $1/2$ *e raggio esterno 2 (bordi esclusi).*

c) C è la corona circolare di centro $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$*, raggio interno* 1 *e raggio esterno 4 (bordi esclusi).*

d) D è l'intersezione tra la corona circolare di centro $z_0 = 0$*, raggio interno* $1/2$ *e raggio esterno 2 (bordo interno escluso) e il primo quadrante.*

e) E è l'intersezione tra la corona circolare di centro $z_0 = 0$*, raggio interno* 2 *e raggio esterno 4 (bordi inclusi) e il settore delimitato dalle semirette* $\{(x, x/2) \mid x \geq 0\}$ *e* $\{(x, -x) \mid x \leq 0\}$.