1] Numeri complessi

Insiemi numerici

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

risolvere $x+2=0$ — $-2 \notin \mathbb{N}$, $-2 \in \mathbb{Z}$

risolvere $2x=1$ — $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

risolvere $x^2=2$ — $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

risolvere $x^2=-1$ — $i \notin \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{C}$

Definiamo i numeri complessi come espressioni della forma

$$\boxed{z = a + ib}$$

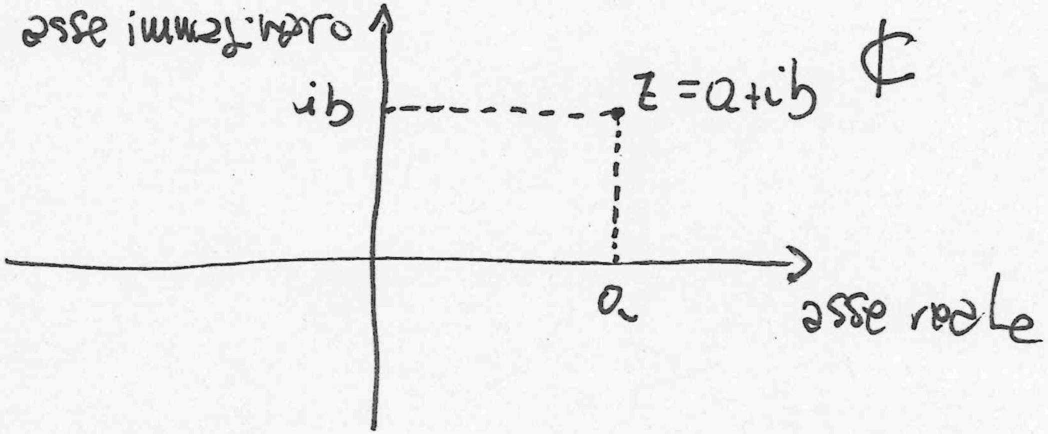
dove $a, b \in \mathbb{R}$ mentre i è la cosiddetta unità immaginaria, tale che

$$\boxed{i^2 = -1}$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Dal punto di vista insiemistico un numero complesso non è altro che una coppia di numeri reali (a,b), che possiamo rappresentare come un punto sul piano cartesiano (che in questo caso si chiama piano di Gauss)



Definizione: dato un numero complesso $z = a+ib$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ chiameremo

- $Re(z) = a$ parte reale di z
- $Im(z) = b$ parte immaginaria di z
- $\bar{z} = a - ib$ complesso coniugato di z

Si noti che $z = Re(z) + i\,Im(z)$

Esempio:

$z = 2-3i$ $\quad Re(z) = 2 \quad Im(z) = -3 \quad \bar{z} = 2+3i$

$z = i = 0+1\cdot i$ $\quad Re(z) = 0 \quad Im(z) = 1 \quad \bar{z} = -i$

$z = 2 = 2+0\cdot i$ $\quad Re(z) = 2 \quad Im(z) = 0 \quad \bar{z} = 2$

Esercizio: Mostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ valgono le seguenti proprietà:

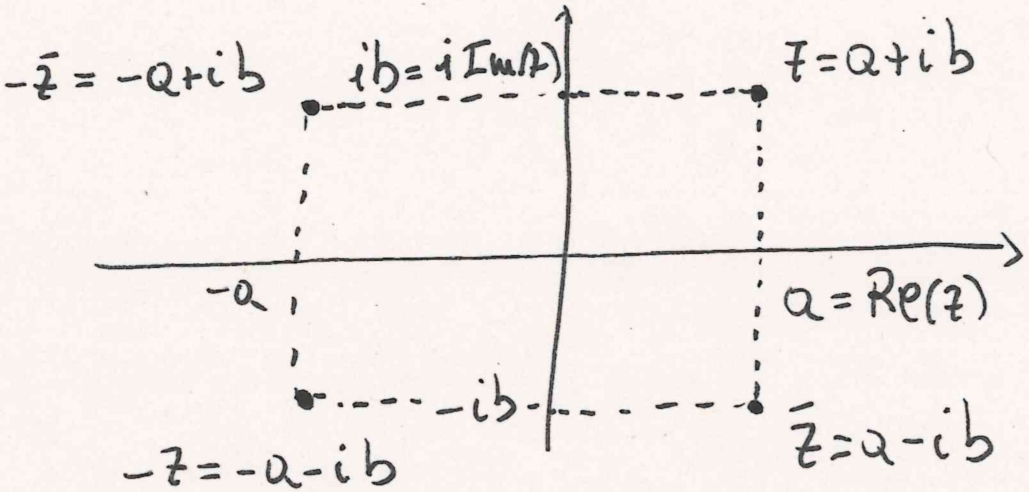
$$Re(\bar{z}) = Re(z), \qquad Im(\bar{z}) = -Im(z)$$

Oss: È possibile considerare i numeri reali come particolari numeri complessi

$(\mathbb{R} \subset \mathbb{C}) \qquad a \in \mathbb{R} \rightsquigarrow a+0\cdot i \in \mathbb{C}$

Oss: I numeri complessi della forma ib, $b \in \mathbb{R}$, sono detti immaginari puri.

$\mathbb{C}$ - Piano di Gauss



Operazioni sui numeri complessi

La somma ed il prodotto in $\mathbb{C}$ si effettuano imponendo che le usuali regole valide in $\mathbb{R}$ continuino a valere anche in $\mathbb{C}$

- Commutatività:
  - somma $\quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad$ (CS)
  - prodotto $\quad z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad$ (CP)
- Associatività:
  - somma $\quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad$ (AS)
  - prodotto $\quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad$ (AP)
- Distributività: $\quad z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad$ (D)

Siano $z=a+ib$ e $w=c+id$, con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 1.5

<u>Somma</u>:

$$z+w=(a+ib)+(c+id)\overset{AS}{=}a+(ib+c+id)\overset{CS}{=}a+(c+ib+id)\overset{AS}{=}$$

$$=(a+c)+(ib+id)\overset{D}{=}(a+c)+i(b+d)$$

ossia $\mathrm{Re}(z+w)=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)$

$\mathrm{Im}(z+w)=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w)$

<u>Prodotto</u>:

$$zw=(a+ib)(c+id)\overset{D}{=}a(c+id)+ib(c+id)\overset{D}{=}ac+aid+ibc+ibid$$

$$\overset{CP}{=}ac+iad+ibc+\underbrace{i\cdot i}_{i^2=-1}bd\overset{i^2=-1}{=}ac+iad+ibc-bd\overset{CS}{=}ac-bd+iad+ibc$$

$$\overset{D}{=}ac-bd+i(ad+bc)$$

ossia $\mathrm{Re}(zw)\neq\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(w)$

$\mathrm{Im}(zw)\neq\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w)$

Es: $z = 2+3i$, $w = 4+5i$

$$z+w = (2+3i)+(4+5i) = 2+4+i(3+5) = 6+8i$$

$$zw = (2+3i)(4+5i) = 8+10i+12i+15\underset{\substack{\| \\ -1}}{i^2} = 8+22i-15 = -7+22i$$

Es: $z = 1+\sqrt{3}\,i$. Calcolare z^3

$$z^3 = (1+\sqrt{3}\,i)^3 = 1^3+3\cdot 1^2\cdot \sqrt{3}\,i+3\cdot 1\cdot(\sqrt{3}\,i)^2+(\sqrt{3}\,i)^3$$

$$= 1+3\sqrt{3}\,i+3\cdot 3\cdot \underset{\substack{\| \\ -1}}{i^2}+3\sqrt{3}\,i^3 = 1+\cancel{3\sqrt{3}\,i}-9-\cancel{3\sqrt{3}\,i} = -8$$

$$(i^3 = i^2\cdot i = -1\cdot i = -i)$$

Abbiamo quindi mostrato che $z = 1+i\sqrt{3}$ è una radice cubica di -8:

$$z^3 = -8.$$

Sappiamo inoltre che anche $z_1 = -2$ è una radice cubica di -8.

Esercizio:

a) Mostrare che $z_2 = \bar{z} = 1 - \sqrt{3}i$ è una radice cubica di -8

b) Disegnare z, z_1, z_2 nel piano di Gauss, osservando che formano i vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza centrata in 0

Esercizio: Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Mostrare che

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

b) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

Def: Il <u>modulo</u> di $z \in \mathbb{C}$ è il numero (reale e ≥ 0) dato da

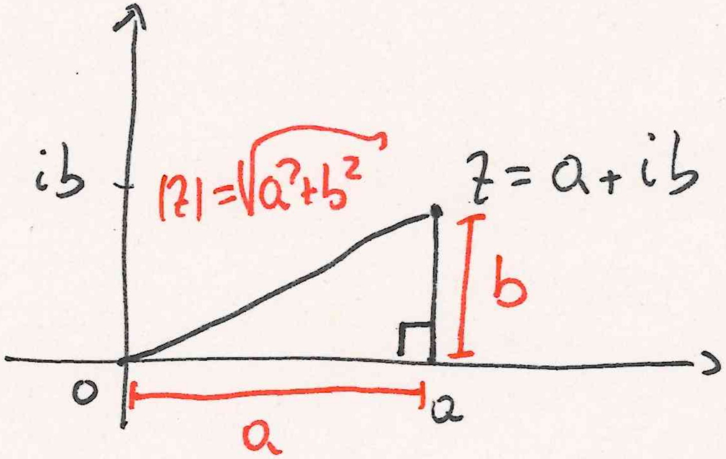
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

oss: Se $z = a + ib$ allora

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - \cancel{iab} + \cancel{iab} - \underset{\underset{-1}{\parallel}}{i^2} b^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Quindi $|z|$ rappresenta la distanza di z dall'origine 0 $(0+i0)$



In particolare:

i) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

ii) Se $z = a + i \cdot 0$ è reale, allora

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$