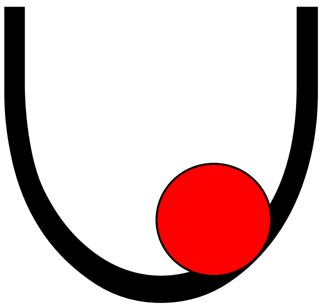
Lezione 5.
Stabilità dei sistemi dinamici

Schema della lezione

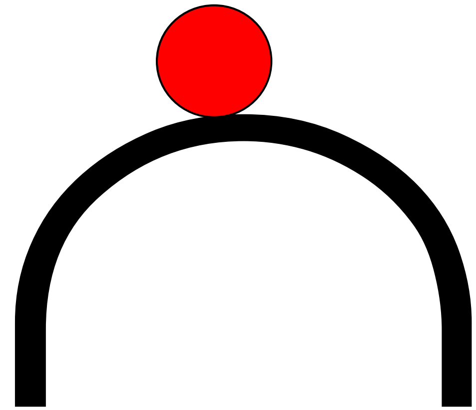
1. Introduzione
2. Stabilità dell'equilibrio
3. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI
4. Classificazione dei sistemi LTI
5. Proprietà dei sistemi LTI as. stabili

1. Introduzione

Due equilibri



Stabile



Instabile

- La stabilità è quella proprietà per cui un sistema, dopo una perturbazione, tende a tornare nella situazione preesistente la perturbazione.

- La stabilità è una proprietà locale (in generale), cioè si riferisce al comportamento del sistema in seguito a perturbazioni "piccole".

- Non tutte le grandezze di un sistema sono note con precisione: la **condizione iniziale** è spesso non nota.

Teoria di Lyapunov

Nella teoria dei sistemi dinamici si parla di:

- ~~Stabilità di un movimento~~
- Stabilità di un equilibrio
- Stabilità del sistema (per sistemi lineari)

2. Stabilità dell'equilibrio

Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ un equilibrio per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(x(t), u(t)\big) \end{cases}$$

Per definizione di equilibrio, applicando l'ingresso costante $\bar{u}$ a partire dalla condizione iniziale $\bar{x}$ otterrò un movimento costante $x(t) = \bar{x}$.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}\ , t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \Longrightarrow \quad x_{nom}(t) = \bar{x}$$

movimento nominale

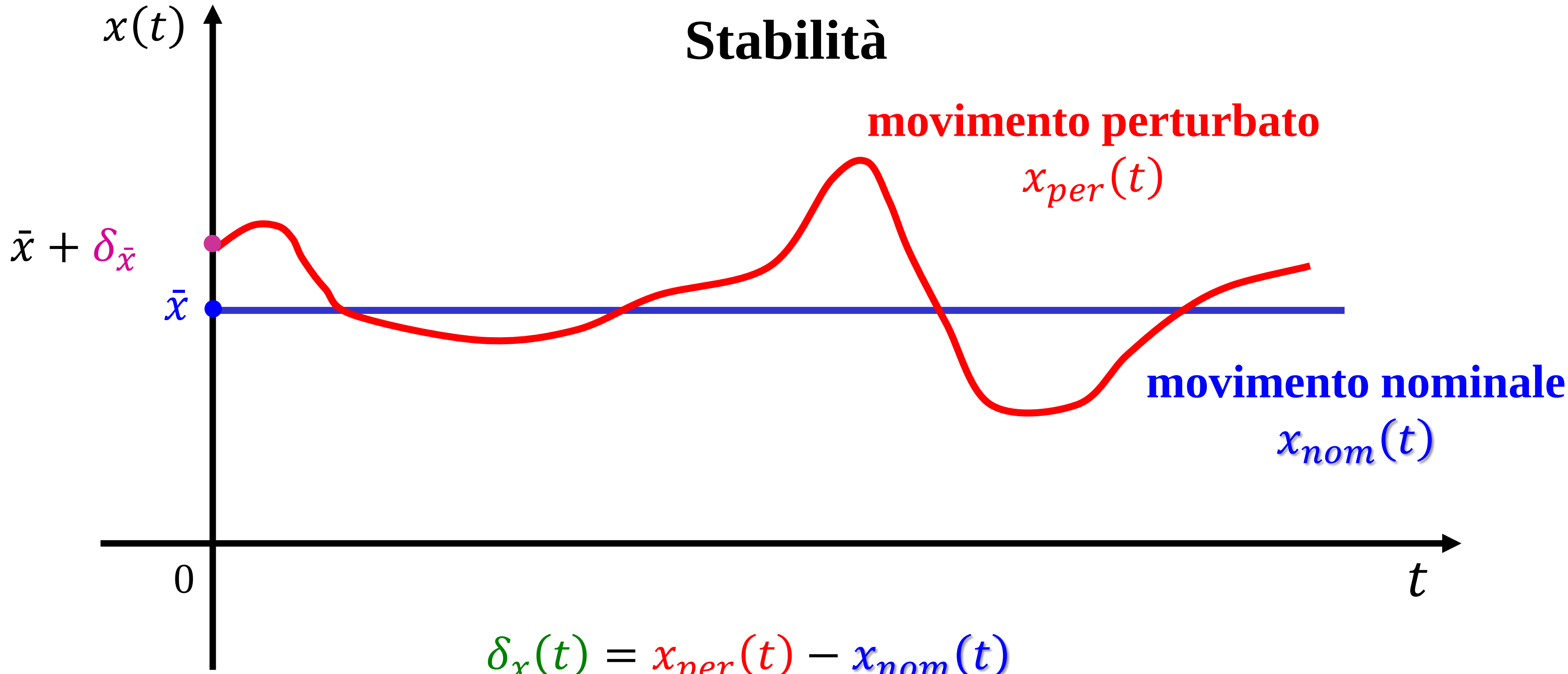
Si consideri ora un nuovo movimento ottenuto applicando lo **stesso ingresso** costante $\bar{u}$ del caso precedente, ma a partire da una **condizione iniziale diversa**.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}\ , t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta_{\bar{x}} \end{cases} \Longrightarrow \quad x_{per}(t) = \bar{x} + \delta_x(t)$$

movimento perturbato

perturbazione della condizione iniziale

perturbazione del movimento

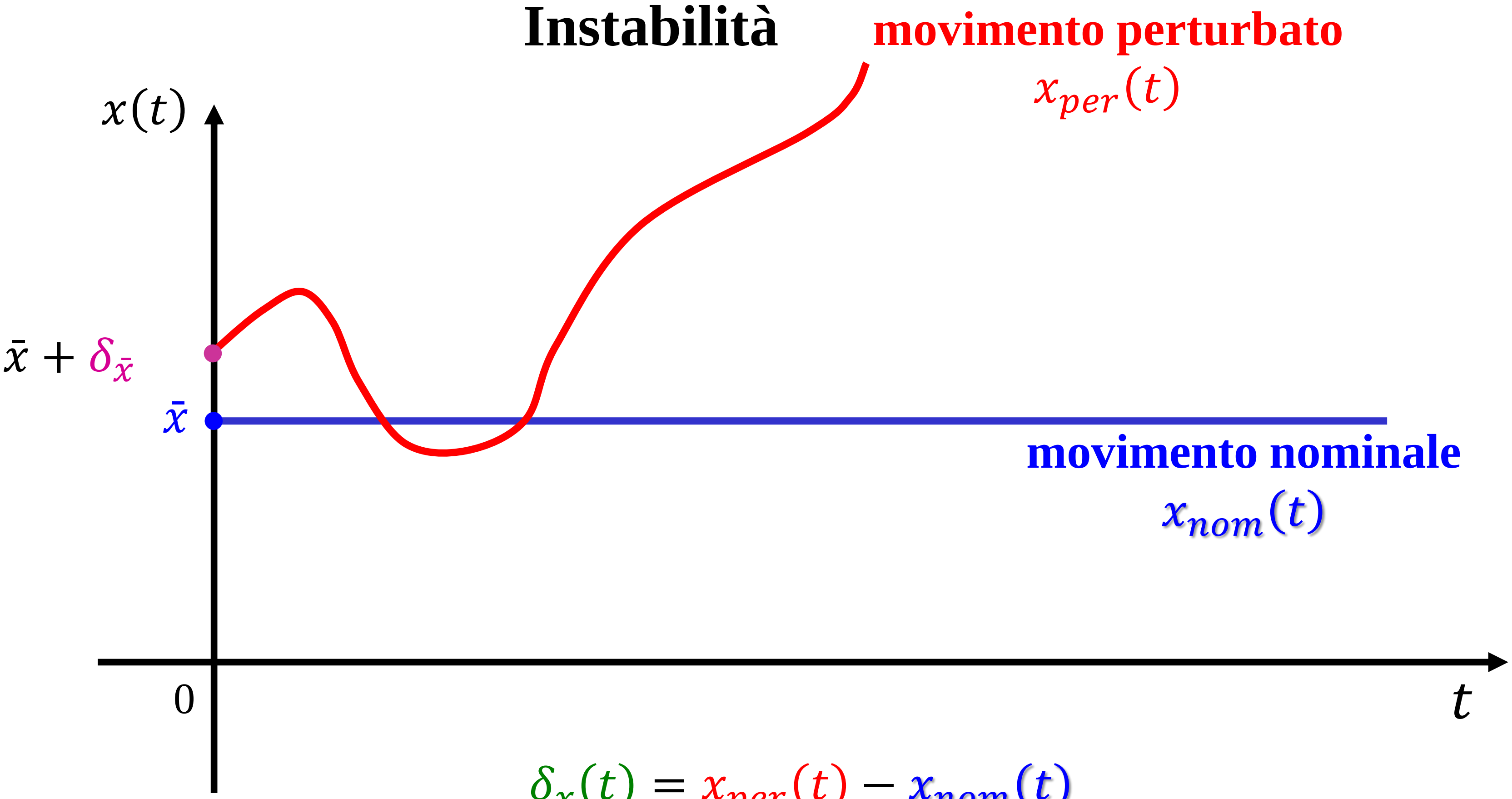


$$\delta_x(t) = x_{per}(t) - x_{nom}(t)$$

perturbazione del movimento

La perturbazione del movimento è limitata

Instabilità

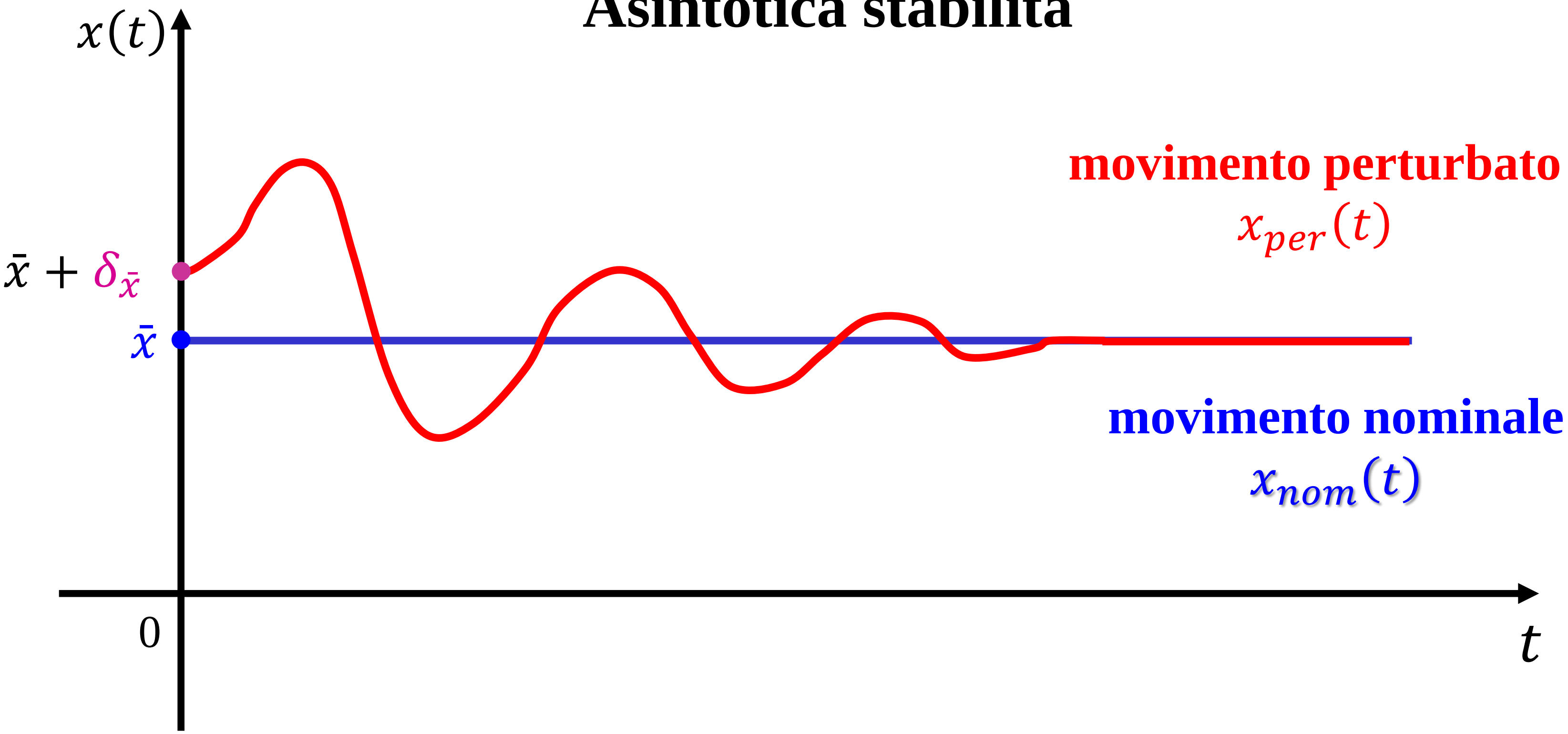


$$\delta_x(t) = x_{per}(t) - x_{nom}(t)$$

perturbazione del movimento

La perturbazione del movimento diverge

Asintotica stabilità



$\delta_x(t) = x_{per}(t) - x_{nom}(t)$

perturbazione del movimento

***La perturbazione del movimento è limitata e tende asintoticamente a* 0**

approfondimento

E’ possibile esprimere i precedenti concetti in modo rigoroso ricorrendo alla topologia.

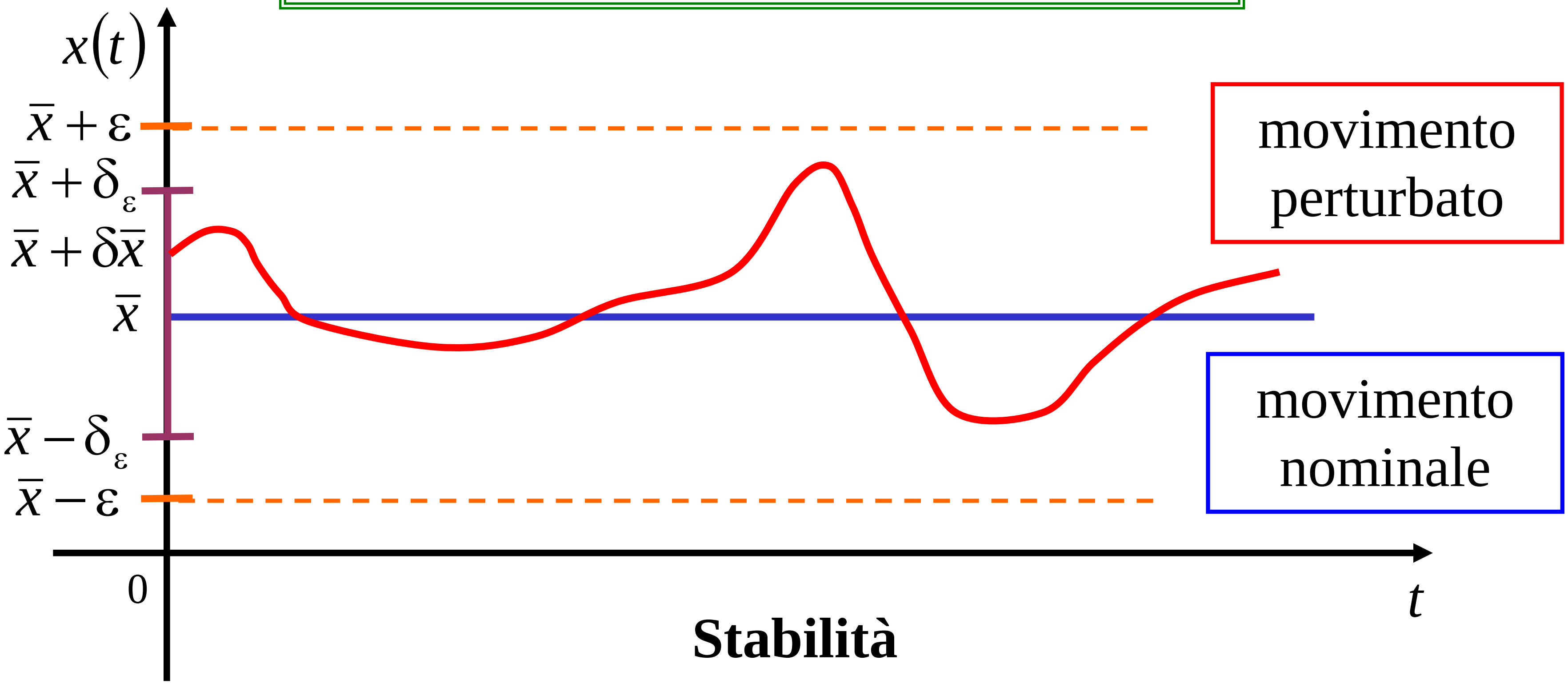
approfondimento

Un equilibrio $\bar{x}$ si dice stabile se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che}$$

$$\forall \delta\bar{x} \text{ che soddisfa } \|\delta\bar{x}\| < \delta_\varepsilon$$

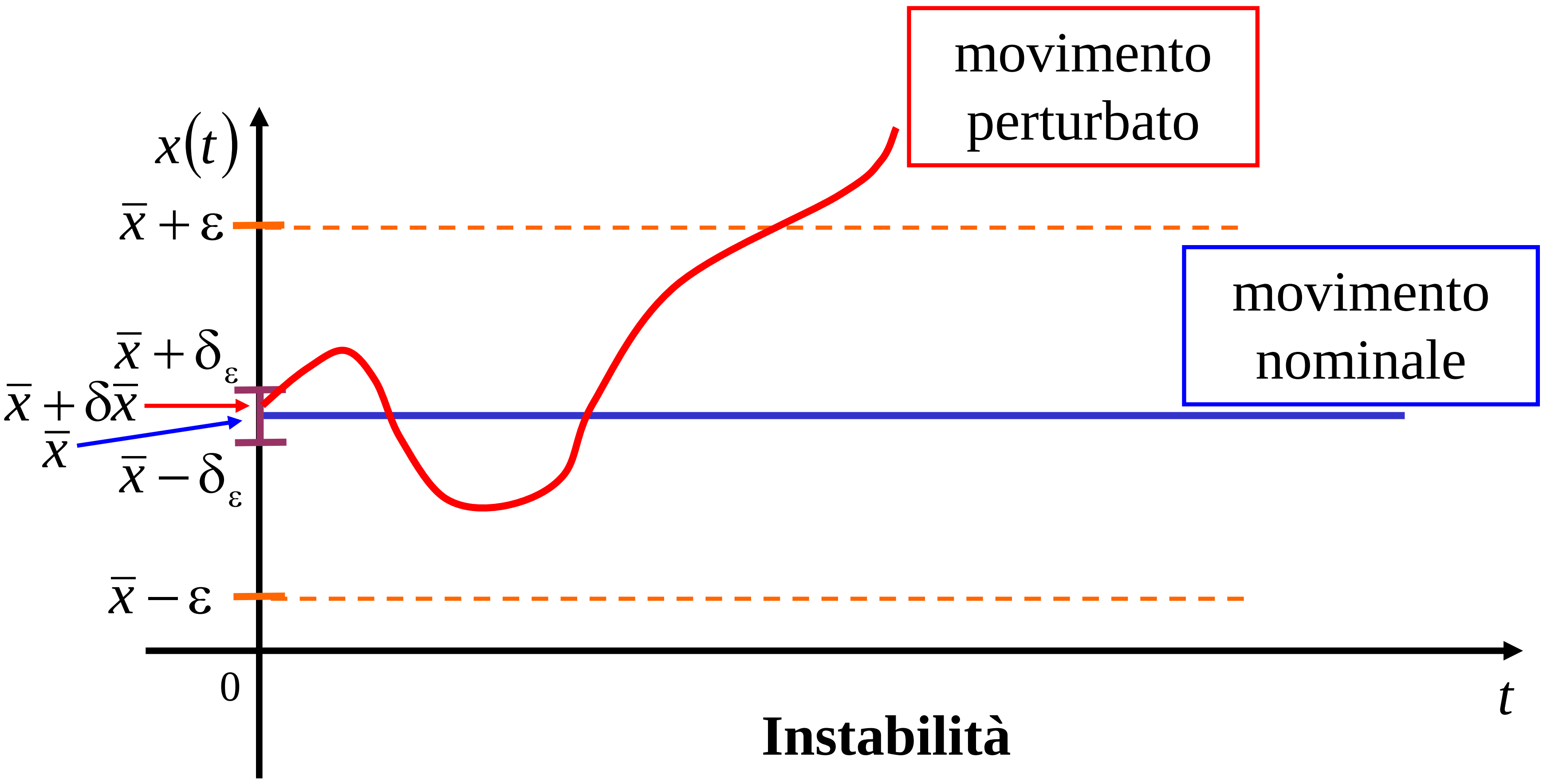
$$\text{risulti } \|\delta x(t)\| < \varepsilon,\ \forall t \geq 0$$



Stabilità

approfondimento

Un equilibrio $\bar{x}$ si dice instabile se non è stabile.

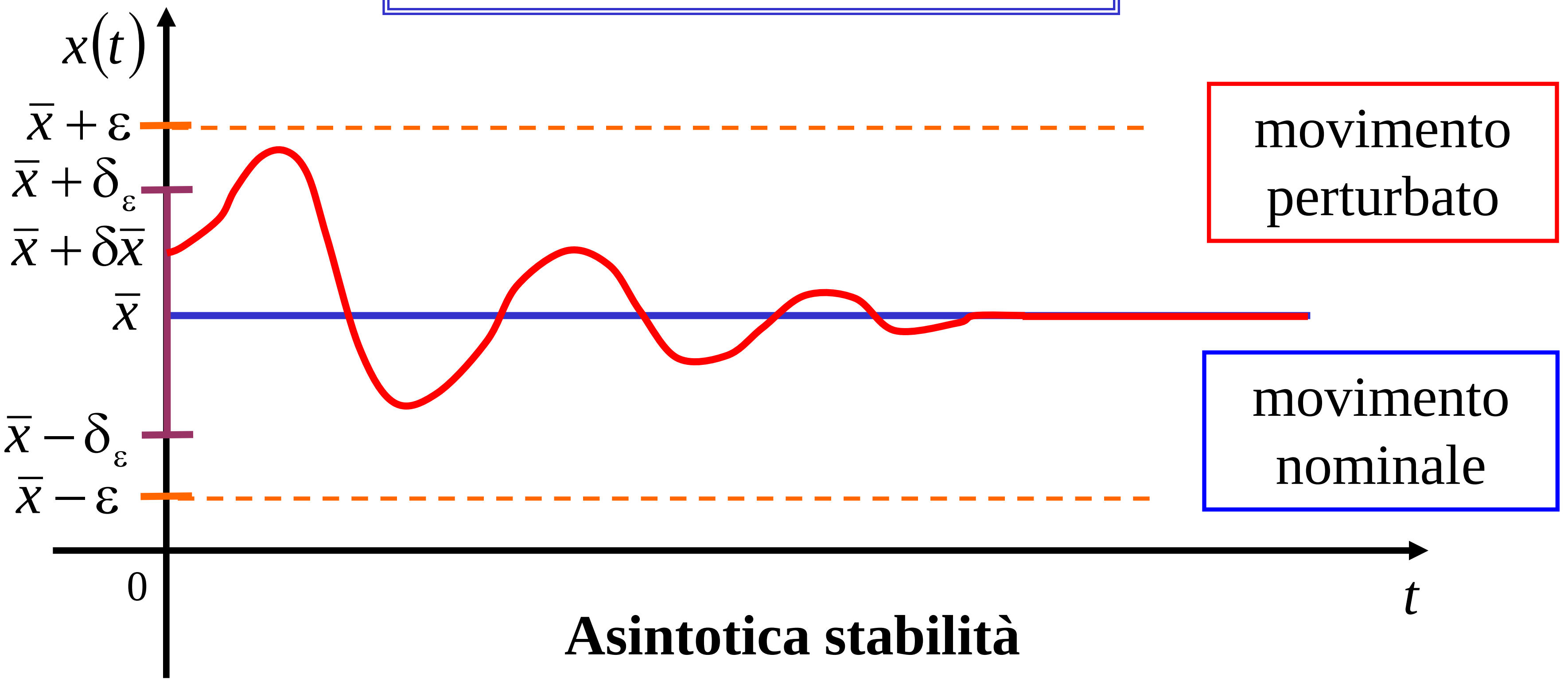


Instabilità

approfondimento

Un equilibrio $\bar{x}$ si dice asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre

$$\lim_{t \to \infty} \left\| \delta x(t) \right\| = 0$$



Asintotica stabilità

3. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI

Consideriamo un sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ un equilibrio per il sistema. Quindi, applicando l'ingresso costante $\bar{u}$ a partire dalla condizione iniziale $\bar{x}$ otterrò un movimento costante $x(t) = \bar{x}$.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u} \ , \ \ t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x_{nom}(t) = \bar{x} \ , t \geq 0$$

movimento nominale

Usando la formula di Lagrange, il movimento nominale è

$$x_{nom}(t) = e^{At}\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u} d\tau = \bar{x}$$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u} \ , \ \ t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta_{\bar{x}} \end{cases}$$

perturbazione della condizione iniziale

Usando la formula di Lagrange, il movimento perturbato è

$$x_{per}(t) = e^{At}(\bar{x} + \delta_{\bar{x}}) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u}d\tau =$$

$$= e^{At}\bar{x} + e^{At}\delta_{\bar{x}} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u}d\tau =$$

$$= \underbrace{e^{At}\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u}d\tau}_{\textbf{movimento nominale}} + e^{At}\delta_{\bar{x}} = x_{nom}(t) + e^{At}\delta_{\bar{x}} = \overbrace{\bar{x} + e^{At}\delta_{\bar{x}}}^{\textbf{movimento perturbato}}$$

$$e^{At}\delta_{\bar{x}}$$

perturbazione del movimento

$$\delta_x(t) = x_{per}(t) - x_{nom}(t) = x_{per}(t) - \bar{x} =$$

perturbazione del movimento

$$= e^{At}\delta_{\bar{x}}$$

perturbazione della condizione iniziale

C'è una relazione tra perturbazione della condizione iniziale e perturbazione del movimento:

$$\delta_x(t) = e^{At}\,\delta_{\bar{x}}$$

La perturbazione del movimento **dipende solo dalla matrice $\boldsymbol{A}$**: studiandola accuratamente sapremo se l'equilibrio è stabile.

La perturbazione del movimento **non dipende dal particolare stato di equilibrio $\bar{\boldsymbol{x}}$**. Quindi, se un equilibrio sarà stabile, tutti gli equilibri saranno stabili e quindi, **per i sistemi LTI si può parlare di stabilità del sistema**.

Nei sistemi LTI la stabilità è una proprietà "globale".

Infatti, l'andamento della perturbazione del movimento non dipende né dal particolare equilibrio né dall'entità della perturbazione della condizione iniziale.

Utilizzando la definizione di stabilità dell'equilibrio vista (intuitivamente) si può dedurre che, ricordando

$$\delta_x(t) = e^{At}\delta_{\bar{x}}$$

Asintotica stabilità $\Leftrightarrow$ $\lim_{t\to\infty} \delta_x(t) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$

Instabilità $\Leftrightarrow$ $\lim_{t\to\infty} \delta_x(t) = \infty$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{t\to\infty} e^{At} = \infty$

Stabilità $\Leftrightarrow$ $\delta_x(t)$ limitata $\Leftrightarrow$ e^{At} limitata $\forall t$

Si osservi che $\delta_x(t) = e^{At}\delta_{\bar{x}}$ è il movimento libero dello stato con condizione iniziale $\delta_{\bar{x}}$. Quindi

in un sistema LTI asintoticamente stabile il movimento libero converge sempre asintoticamente a 0.

Esempio esplicativo (caso scalare)

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$a < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} e^{at} = 0 \quad \Longleftrightarrow$ **Asintotica stabilità**

$a > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{at}$ diverge per $t \to \infty \quad \Longleftrightarrow$ **Instabilità**

$a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{at}$ limitata per ogni $t \quad \Longleftrightarrow$ **Stabilità**

Per esempio

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$e^{-2t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow$$

Asintotica stabilità

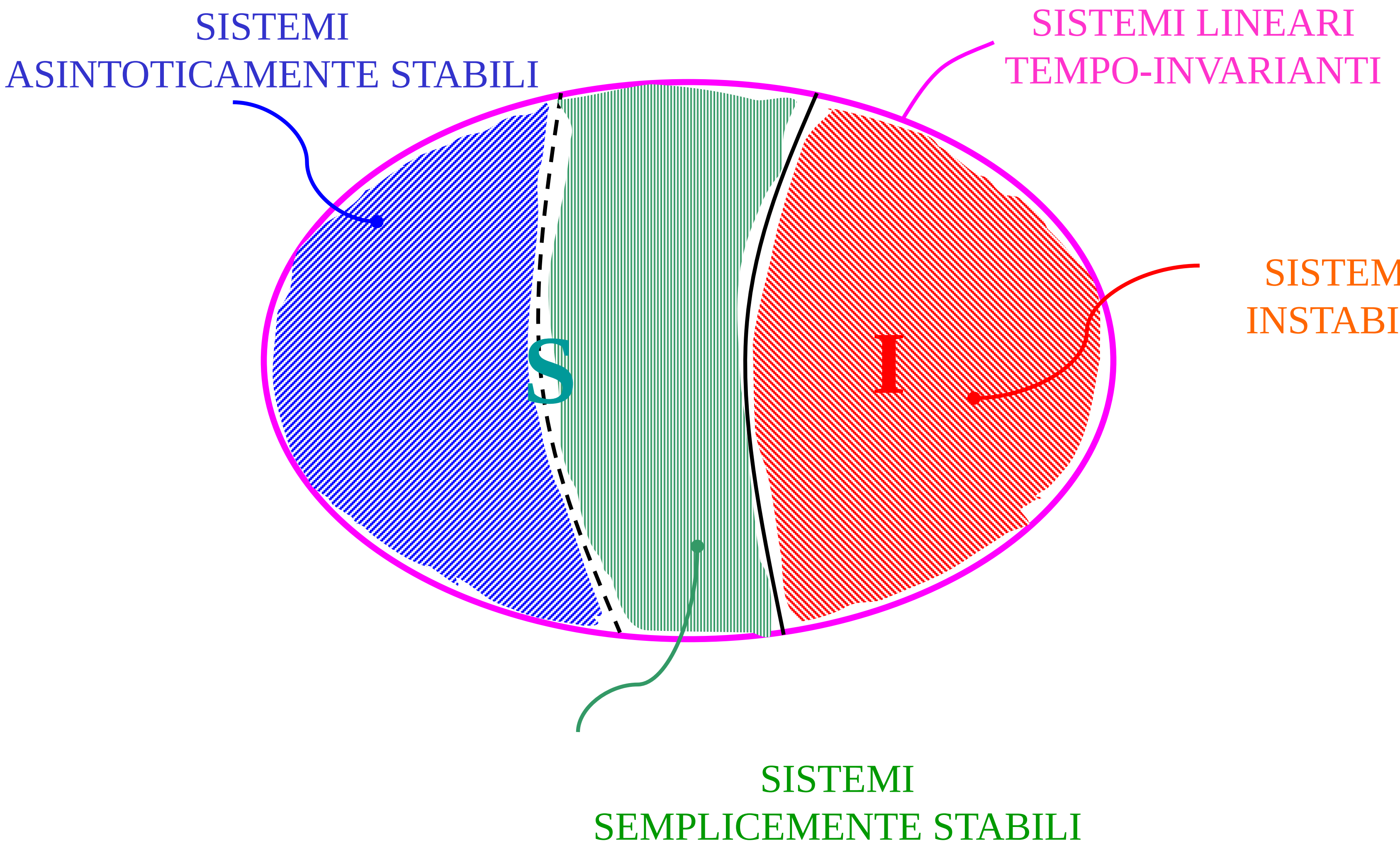
Per esempio

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + u(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$e^{2t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{Instabilità}$$

4. Classificazione dei sistemi LTI (per la stabilità)



5. Proprietà dei sistemi LTI as. stabili

Proprietà 1

Un sistema LTI asintoticamente stabile "spostato" dall'equilibrio, tende spontaneamente a tornare all'equilibrio.

Detto più "rigorosamente", sia $(\bar{u}, \bar{x})$ un equilibrio per il sistema asintoticamente stabile. **Qualsiasi sia la condizione iniziale dello stato, applicando l'ingresso $\bar{u}$, il movimento dello stato del sistema tende allo stato di equilibrio**

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, \quad t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta_{\bar{x}} \end{cases} \Longrightarrow \quad x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{x}$$

Infatti, modificando la condizione iniziale, modifico solo il movimento libero che nei sistemi asintoticamente stabili si annulla asintoticamente.

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Lo stato di equilibrio in corrispondenza di $\bar{u} = 1$ è $\bar{x} = 1$.

Per definizione di equilibrio dello stato, applicando l'ingresso costante $\bar{u} = 1$ con condizione iniziale dello stato $x(0) = \bar{x} = 1$ si ottiene il movimento dello stato $x(t) = 1, \ t \geq 0$.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u} = 1 \ , \ t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = 1, \qquad t \geq 0$$

movimento nominale

Si cambi ora lo stato iniziale, mantenendo lo stesso ingresso:

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u} = 1 \ , \ t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta_{\bar{x}} = 1 + \delta_{\bar{x}} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = 1 + \delta_x(t) \ , \ t \geq 0$$

movimento perturbato

Qual'è l'espressione del movimento perturbato?

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\bar{u}d\tau = e^{-t}(1+\delta_{\bar{x}}) + \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau =$$

$$= e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau + e^{-t}\delta_{\bar{x}} = e^{-t} + e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau + e^{-t}\delta_{\bar{x}} =$$

$$= e^{-t} + e^{-t}\left(e^{t}-1\right) + e^{-t}\delta_{\bar{x}} =$$

$$= 1 + e^{-t}\delta_{\bar{x}}$$ movimento perturbato

$\delta_x(t) = e^{-t}\delta_{\bar{x}}$ è la perturbazione del movimento nominale, cioè la perturbazione dell'equilibrio.

$$\delta_x(t) = e^{-t}\delta_{\bar{x}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$ qualsiasi sia $\delta_{\bar{x}}$

Nei sistemi asintoticamente stabili la perturbazione del movimento si annulla asintoticamente, qualsiasi sia l'entità della perturbazione della condizione iniziale.

Proprietà 2

Fissato l'ingresso $\boldsymbol{u(t)=\bar{u}}$, lo stato di equilibrio $\boldsymbol{\bar{x}}$ di un sistema LTI asintoticamente stabile è unico.

Si supponga per assurdo che $\bar{\bar{x}} \neq \bar{x}$ sia un altro stato di equilibrio per il sistema in corrispondenza dello stesso ingresso $u(t)=\bar{u}$.

Allora, con condizione iniziale $x(0)=\bar{\bar{x}}$ il movimento dello stato sarebbe $x(0)=\bar{\bar{x}}, t \geq 0$ e non tenderebbe asintoticamente a $\bar{x}$ contro la Proprietà 1.

Proprietà 3

Il movimento dello stato di un sistema LTI asintoticamente stabile dipende asintoticamente solo dall'ingresso $u(t)$.

Il movimento dello stato è la somma del movimento libero e del movimento forzato

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

Nei sistemi asintoticamente stabili il movimento libero dello stato tende ad annullarsi asintoticamente

$$x_l(t) = e^{At}x(0) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Quindi il movimento dello stato tende asintoticamente al solo movimento forzato

$$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} x_f(t)$$

In un sistema as. stabile il movimento non risente (asintoticamente) delle condizioni iniziali.

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} u(t) = \sin(t) \ , \ t \geq 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

Il movimento dello stato è:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 3e^{-2t} + e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\sin(\tau)\,d\tau =$$

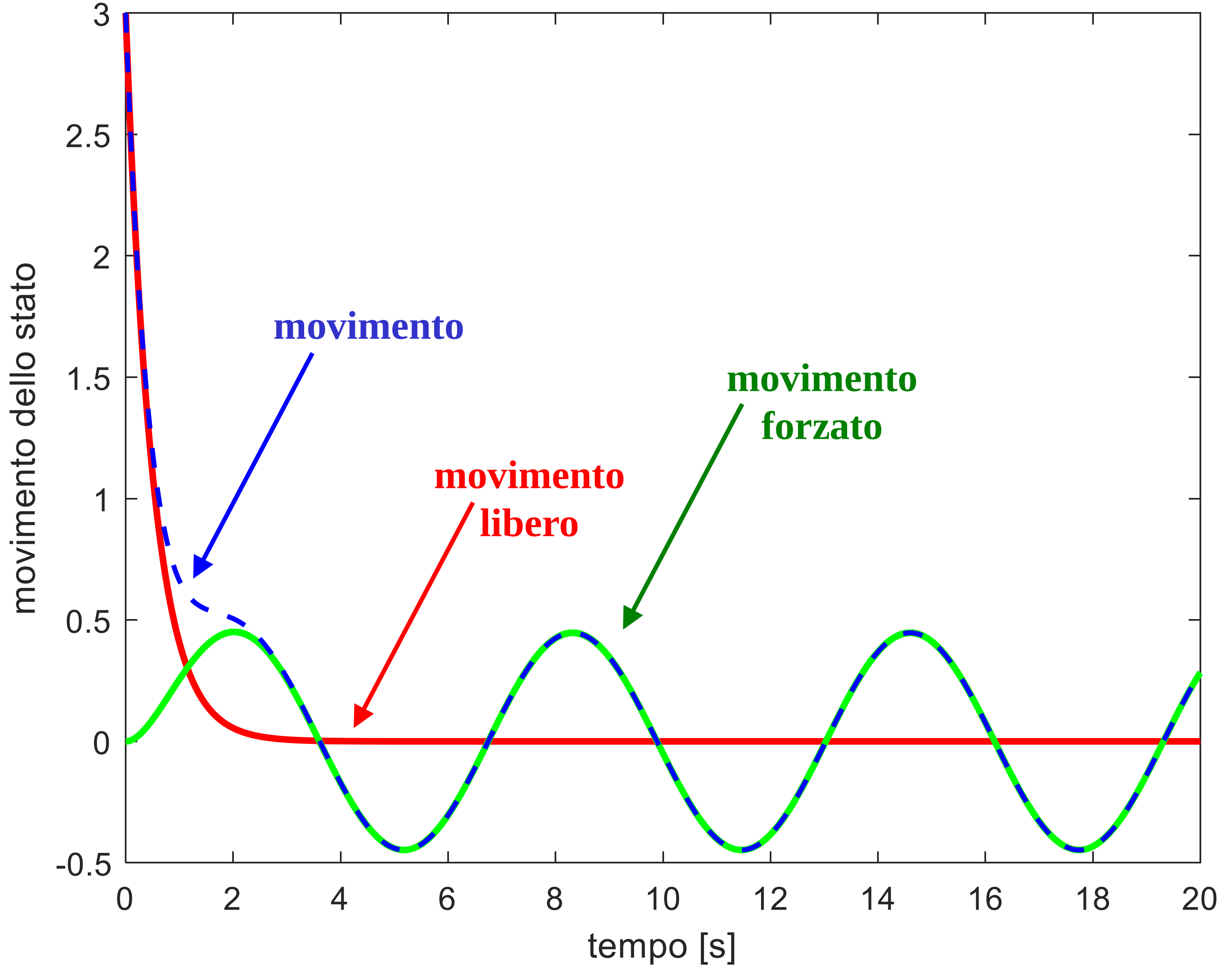
$$= 3e^{-2t} + \frac{1}{5}\left(e^{-2t} - \cos(t)\right) + \frac{2}{5}\sin(t)$$

movimento libero

movimento forzato

$$3e^{-2t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{5}\left(e^{-2t} - \cos(t)\right) + \frac{2}{5}\sin(t)$$


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
tempo [s]
movimento dello stato
movimento
movimento
forzato
movimento
libero

Proprietà 4

Se $u(t) = 0$ allora il movimento dello stato di un sistema LTI asintoticamente stabile tende asintoticamente a zero.

Il movimento dello stato è la somma del movimento libero e del movimento forzato

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

Se l'ingresso è nullo, il movimento forzato è nullo, $x_f(t) = 0$.

Quindi se $u(t) = 0$

$$x(t) = x_l(t)$$

Nei sistemi asintoticamente stabili il movimento libero dello stato tende ad annullarsi asintoticamente, quindi

$$x(t) = x_l(t) = e^{At}x(0) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

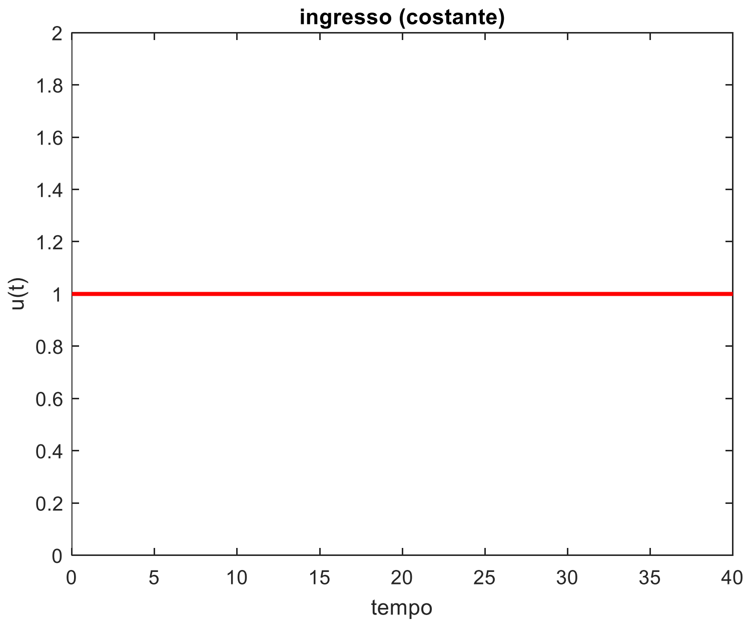
Proprietà 5

Se si applica un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ ad un sistema LTI asintoticamente stabile, l'uscita del sistema tende ad un valore di regime dato dall'uscita di equilibrio $\bar{y}$ corrispondente

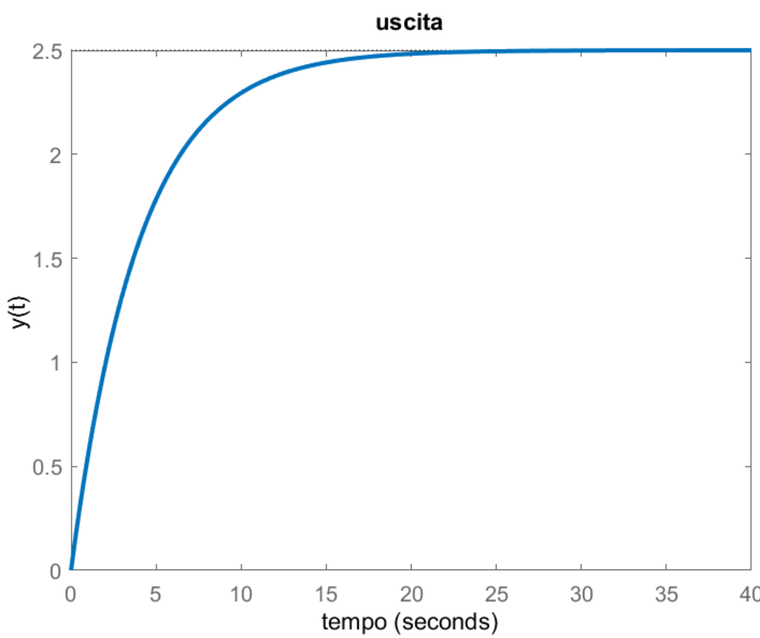
$$\bar{y} = \mu\bar{u} = \left(-CA^{-1}B + D\right)\bar{u}$$

dove μ è il guadagno statico del sistema.

ingresso costante $\bar{u} = 1$



uscita di equilibrio $\bar{y} = 2.5$



Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + 2u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} u(t) = 2\ ,\ \ t \geq 0 \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

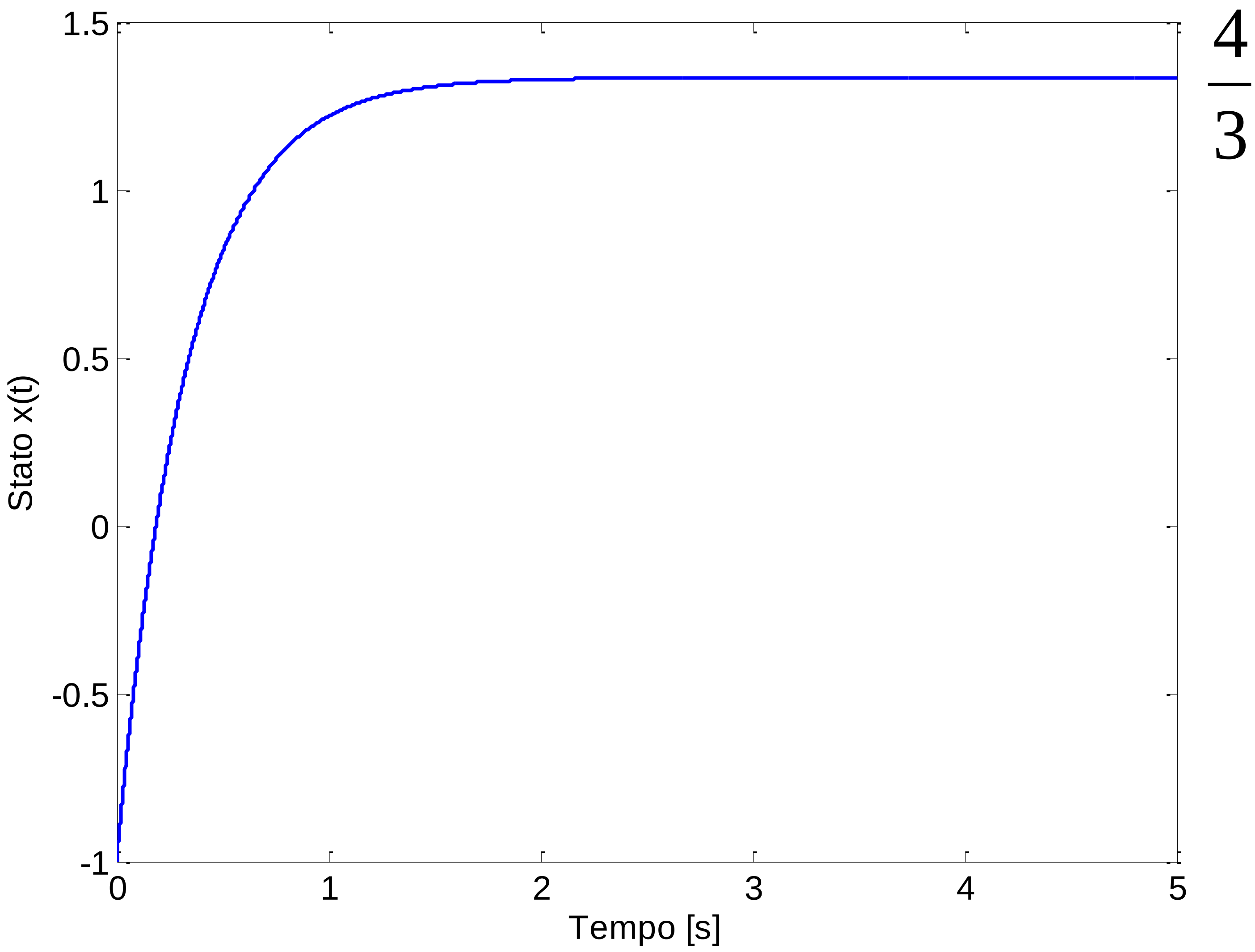
Il movimento dello stato è:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,Bu(\tau)d\tau = -e^{-3t} + e^{-3t}\int_0^t 4e^{3\tau}d\tau = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}e^{-3t}$$

$$y(t) = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}e^{-3t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{4}{3}$$

Infatti

$$\bar{y} = \left(-CA^{-1}B + D\right)\bar{u} = \left(-1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2 + 0\right) \cdot 2 = \frac{4}{3}$$


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5
Tempo [s]
Stato x(t)
$\frac{4}{3}$

Proprietà 6

Se si applica ad un sistema LTI as. stabile un ingresso limitato, allora l'uscita è limitata.

In un sistema asintoticamente stabile, se $u(t),\ t \geq 0$ è tale che $|u(t)| \leq k,\ t \geq 0$ allora $\exists\ h : |y(t)| \leq h,\ t \geq 0$.