DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Da1. Una particella di massa m si muove lungo l'asse x sottoposta all'azione di una forza $F(t)$ variabile nel tempo. Le condizioni iniziali sono: $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$. Determinare l'accelerazione, la velocità e la posizione della particella in funzione del tempo se:

a) $F(t) = bt^2$ con b costante

b) $F(t) = F_0 e^{2t}$ con F_0 costante

[Risposte: a) $a = \frac{b}{m}t^2$; $v(t) = \frac{b}{3m}t^3 + v_0$; $x(t) = \frac{b}{12m}t^4 + v_0 t + x_0$;

b) $a = \frac{F_0}{m}e^{2t}$; $v(t) = \frac{F_0}{2m}e^{2t} - \frac{F_0}{2m} + v_0$; $x(t) = \frac{F_0}{4m}e^{2t} + (v_0 - \frac{F_0}{2m})t - \frac{F_0}{4m} + x_0$]

Da2. Una particella di massa m = 5 kg si muove lungo l'asse x sottoposta all'azione di una forza variabile nel tempo secondo la legge: $F(t) = [(60\text{s}^{-1})t + 20)\,\text{N}$. Determinare l'accelerazione, la velocità e la posizione della particella in funzione del tempo sapendo che, all'istante iniziale $x(0)$ = 3 m e $v(0)$ = 5 m/s.

[Risposte: $a(t) = [(12\text{s}^{-1})t + 4]\,\text{m/s}^2$ **;** $v(t) = [(6\text{s}^{-2})t^2 + (4\text{s}^{-1})t + 5]\,\text{m/s}$**;**

$s(t) = [(2\text{s}^{-3})t^3 + (2\text{s}^{-2})t^2 + (5\text{s}^{-1})t + 3]\,\text{m}$

Da3. In una scena di un film d'avventura, l'eroe di turno (massa 82 kg) penzola attaccato ad una corda agganciata al pattino di un elicottero e tenta il recupero di una fanciulla in pericolo (massa 54 kg). Quando quest'ultima riesce ad afferrare l'estremità della corda, l'elicottero inizia a salire con accelerazione a. Sapendo che la massima tensione sopportabile dal tipo di corda impiegata è pari a 1500 N, il regista raccomanda al pilota dell'elicottero di non superare mai in salita l'accelerazione di

(A) 1.2 m/s² (B) 3.1 m/s² (C) 5 m/s² (D) 8.5 m/s² (E) 9.8 m/s²

Soluzione. La corda critica è quella tra l'elicottero e l'attore, dato che deve sopportare il peso di questo ($m_1 g$) e dell'attrice ($m_2 g$). La risultante fra la tensione T applicata a questa corda e il peso dei due attori è proporzionale alla accelerazione in salita

$$T - (m_1 + m_2)\cdot g = (m_1 + m_2)\cdot a \Rightarrow a = \frac{T}{m_1 + m_2} - g = 1.2\,\text{m/s}^2$$

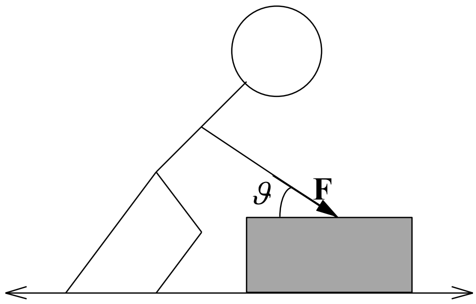
Da4. Una forza orizzontale T è applicata ad una slitta di massa m =300 kg , inizialmente ferma, appoggiata su di un piano scabro con cui la slitta ha un coefficiente di attrito μ = 0.70.
La slitta si sposta di 20 cm nei primi due secondi dopo l'applicazione della forza che vale

(A) 0.71 kN (B) 0.89 kN (C) 1.19 kN **(D) 2.09 kN** (E) 2.36 kN

Soluzione. La slitta si muove sul piano con moto uniformemente accelerato e la sua accelerazione è data da $a = 2\Delta s / t^2$, quindi $a = \frac{2\cdot 0.2\,\text{m}}{(2\,s)^2} = 0.1\,\text{m/s}^2$.La slitta è sottoposta alla risultante della forza applicata e della forza di attrito, cioè: $T - \mu mg = ma$; quindi la forza T agente sulla slitta vale:

$$T = 0.7\cdot 300\,\text{kg}\cdot 9.8\text{m/s}^2 + 300\,\text{kg}\cdot 0.1\text{m/s}^2 = 2.06\,\text{kN} + 3\cdot(10^{-2})\text{kN} = 2.09\,\text{kN}$$

Da5. Un bimbo spinge una scatola con massa di 5 kg appoggiata su di un piano scabro esercitando la forza **F** nella direzione indicata dalla figura con ϑ=30°. Se il coefficiente di attrito tra piano e scatola vale 0.3, qual è il modulo del valore minimo della forza che consente di spostare la scatola?

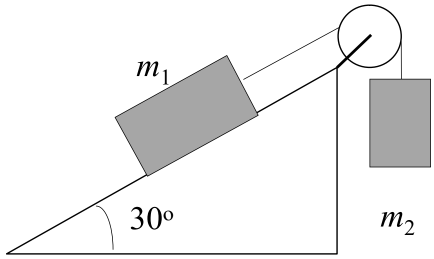


(A) 16.9 N **(B) 20.5 N** (C) 34.3 N
(D) 51.9 N (E) 96 N

Soluzione. La componente orizzontale di **F,** pari a |**F**| cosϑ, deve essere almeno uguale alla forza di attrito a cui contribuisce sia la forza peso sia la componente verticale di **F**.

$$F\cos\vartheta = \mu(mg + F\sin\vartheta) \Rightarrow F = \frac{\mu mg}{\cos\vartheta - \mu\sin\vartheta} \approx 20.5\ \text{N}$$

Da6. Una massa m_1 da 1 kg è posta su di un piano liscio che forma un angolo di 30° con l'orizzontale. La massa m_1 è attaccata mediante la fune e la carrucola ad una massa m_2 = 0.7 kg. Un secondo dopo l'istante del rilascio, la velocità della massa m_2 è di



(A) 0.575 m/s **(B) 1.15 m/s** (C) 3.46 m/s
(D) 6.92 m/s (E) 9.8 m/s

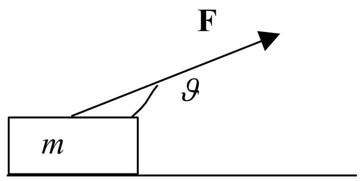
Soluzione. Indichiamo con T la tensione della corda e con a il valore assoluto della accelerazione. Il bilancio delle forze su m_1, che agiscono lungo il piano inclinato, dà luogo alla risultante m_1a; il bilancio delle forze su m_2 (lungo la verticale), dà luogo alla risultante m_2a. Dal sistema delle due equazioni si ottiene il valore di a:

$$\begin{matrix} T - m_1 g\sin 30° = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{matrix} \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1\sin 30°}{m_1 + m_2} g \approx 1.15\ m/s^2$$

Da cui ricavare la velocità della massa m_2 dopo un secondo:

$$\text{v}(1\,\text{s}) = 1.15\ \text{m/s}$$

Da7. Una Forza **F** con modulo pari a 200 N inclinata di ϑ = 20° rispetto all'orizzontale è applicata all'istante iniziale ad un blocco di legno di 15 kg, inizialmente fermo ed appoggiato sopra un piano orizzontale. Se il coefficiente di attrito fra piano e blocco è μ = 0.3, dopo 5 s il blocco si è spostato di

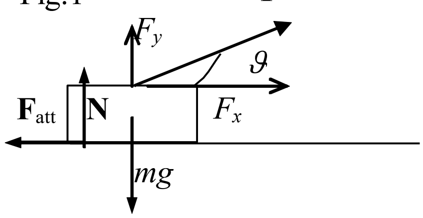


(A) 62 m **(B) 137 m** (C) 171 m
(D) 206 m (E) 314 m

Soluzione

Nella figura 1 è rappresentato lo schema delle forze agenti sul blocco; la forza **F** è scomposta nelle sue componenti $F_x = F\cos\vartheta$ e $F_y = F\sin\vartheta$.

Fig.1



L'equazione della dinamica $\mathbf{F}_{Tot}$ = m**a**, si traduce nelle due equazioni lungo gli assi x e y:

$$F\cos\vartheta - F_{att} = ma \qquad (1)$$

$$N + F_y - mg = 0 \quad \Rightarrow N = mg - F\sin\vartheta$$

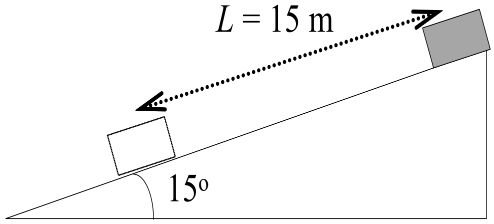
Dato che la forza d'attrito è $F_{att} = \mu N$, sostituendo in valore della reazione N del piano nell'equazione (1), si ottiene l'accelerazione a:

$$a = \frac{F\cos\vartheta - \mu N}{m} = \frac{F\cos\vartheta + \mu(F\sin\vartheta - mg)}{m} \Rightarrow$$

$$a = \frac{200\,\mathrm{N}\cos 20° + 0.3 \cdot 200\,\mathrm{N}\sin 20° - 15\,\mathrm{kg}\cdot 9.8\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0.3}{15\,\mathrm{kg}} = 10.96\,\mathrm{m/s^2}$$

Noto il valore dell'accelerazione, è possibile ricavare lo spazio percorso:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}10.96\,\mathrm{m/s^2}\cdot 25\,\mathrm{s^2} = 137\,\mathrm{m}$$



Da8. Una slitta con massa di 5 kg scivola lungo il piano inclinato della figura: dopo aver percorso un tratto lungo L=15 m dal punto di partenza la sua velocità è di 10 km/h. Il coefficiente di attrito tra slitta e piano vale circa (arrotondare al centesimo)

(A) 0.23 **(B) 0.24** (C) 0.27
(D) 0.50 (E) 0.61

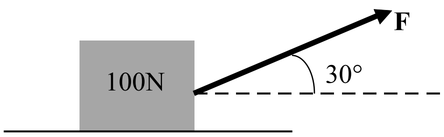
Soluzione. Questo problema si risolve facilmente col teorema lavoro – energia cinetica, ma si può affrontare anche con considerazioni cinematiche, considerando che l'accelerazione è pari a:

$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2s} = \frac{(2.77)^2}{30} = 0.257\ \mathrm{m/s^2}$. L'equazione di moto lungo il piano è

$$mg\sin 15° - \mu mg\cos 15° = ma \Rightarrow \mu = \frac{g\sin 15° - a}{g\cos 15°} \approx 0.24$$

Da9. Una slitta di 120 kg scende di moto uniformemente accelerato lungo un pendio. A un primo traguardo la sua velocità è di 3 m/s mentre a un secondo traguardo, posto dopo 50 m di pista, la sua velocità è di 21 m/s. Se l'attrito è trascurabile, la pendenza media (= dislivello/ lunghezza pista) della pista è del

(A) 4.9% (B) 8.9% (C) 19.6 % (D) 22% **(E) 44%**



Da10. Un contenitore pesante 100N appoggia sul pavimento con un coefficiente di attrito statico di 0.4. Il modulo della forza minima **F** applicata come in figura necessaria per mettere il contenitore in moto vale approssimativamente

(A) 25 N (B) 46.2 N **(C) 37.5 N**
(D) 50 N (E) 100 N

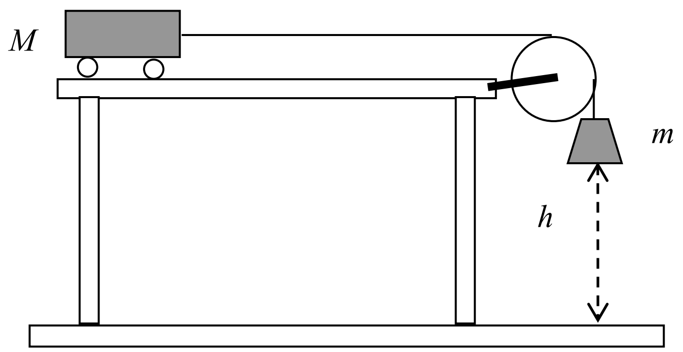
Da11. La forza di attrito tra fondo stradale secco e pneumatici bloccati è pari al 90% del peso del veicolo. Dalle striature lunghe 20 m di una frenata d'emergenza la polizia stradale determina che il guidatore prima di pigiare sui freni andava a circa

(A) 50 km/h **(B) 68 km/h** (C) 20 m/s (D) 80 km/h (E)98 km/h

Da12. Un dirigibile con massa di 1 tonnellata inizia a scendere con una accelerazione di 1 $\mathrm{m/s^2}$. Supponendo costante la spinta idrostatica dell'aria e trascurabili gli attriti, la quantità di zavorra che deve buttare per risalire con una accelerazione di $1\mathrm{m/s^2}$ è di circa

(A) 185 kg (B) 200 kg (C) 198 kg (D) 9800 kg (E) 66.6 kg

Da13. Un carrello di massa ignota M è inizialmente fermo su un tavolo orizzontale liscio e attaccato mediante carrucola e corda lunga e leggera a una massa $m = 0.2$ kg sospesa a un a altezza $h = 0.5$ m dal suolo. Dal momento in cui la massa m viene rilasciata, questa impiega un tempo $t = 0.782$ s a raggiungere il suolo. La massa M del carrello vale

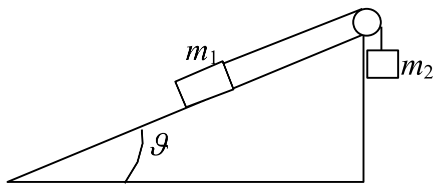


(A) 0.2 kg (B) 0.6 kg **(C) 1.0 kg** (D) 1.3 kg (E) 1.6 kg

Da14. Con riferimento al problema precedente, la tensione della corda durante la caduta di m al suolo vale
(A) 0.98 N (B) 1.47 N **(C) 1.63 N** (D) 1.70 N (E) 1.74 N

Da15. Un piano inclinato formante un angolo di 37° con l'orizzontale ha coefficienti di attrito statico e dinamico pari a 0.30. La forza parallela al piano necessaria per far risalire a velocità costante un peso di 100 N lungo il piano è
(A) 4 N (B) 36 N (C) 31 N (D) 30 N **(E) 84 N**

Da16. Una massa $m_1 = 3$ kg, su di un piano inclinato di un angolo $\vartheta = 25°$ rispetto all'orizzontale, è collegata alla massa m_2 della figura, mediante una fune inestensibile e di massa trascurabile che scorre nella gola di una carrucola senza attrito. Se il coefficiente d'attrito tra il piano e m_1 vale $\mu = 0.4$ e m_1 scende lungo il piano con velocità costante, la massa m_2 vale

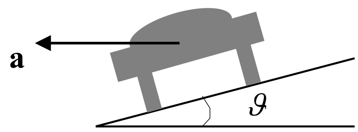


(A) 0.18 kg (B) 0.24 kg (C) 0.60 kg (D) 2.36 kg (E) 2.78 kg

DINAMICA DEL MOTO CIRCOLARE

Db1. Sul cruscotto piatto della mia auto è appoggiato un libro con massa di 1.5 kg il cui coefficiente di attrito statico con il piano d'appoggio è $\mu = 0.3$. La massima velocità con la quale posso affrontare una curva con raggio di curvatura $R = 50$ m senza che il libro si sposti è di circa
(A) 9.8 m/s **(B) 12 m/s** (C) 15 m/s (D) 21 m/s (E) 26 m/s
Soluzione. La forza d'attrito massima μmg deve essere uguagliata a quella centripeta $m\text{v}^2/R$,
$\mu g = \frac{\text{v}^2}{R} \Rightarrow \text{v} = \sqrt{\mu g R} \cong 12 \text{ m/s}$. Si noti che la massa del libro non serve.

Db2. Le curve di un velodromo per corse automobilistiche hanno una inclinazione media $\vartheta = 20°$ e un raggio di 250 m. Se il coefficiente di attrito tra ruote e pista è 0.75 la velocità limite oltre la quale si ha scivolamento laterale è di circa



(A) 24 m/s (B) 30 m/s **(C) 61 m/s** (D) 98 m/s (E) _____
Soluzione
Le forze che agiscono sull'auto sono quelle indicate in figura 1.
Le componenti lungo l'asse x delle forze danno come risultante la forza centripeta, mentre le componenti lungo l'asse y hanno risultante nulla ,cioè:

$$N\sin\vartheta + F_{att}\cos\vartheta = M\frac{v^2}{R}$$
$$N\cos\vartheta - F_{att}\sin\vartheta - Mg = 0$$

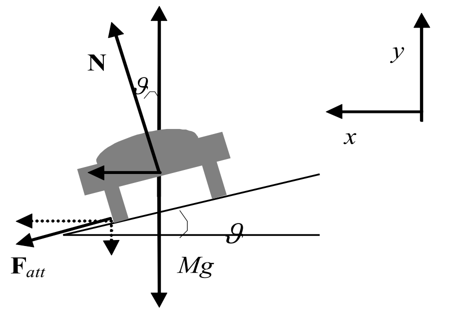
Dato che $F_{att} = \mu N$, sostituiamo e raccogliamo N :

$$N(\sin\vartheta + \mu\cos\vartheta) = M\frac{v^2}{R}$$
$$N(\cos\vartheta - \mu\sin\vartheta) = Mg$$

Dividendo membro a membro si ottiene la velocità v :

$$\frac{\sin\vartheta + \mu\cos\vartheta}{\cos\vartheta - \mu\sin\vartheta} = \frac{v^2}{Rg}$$
$$v = \sqrt{Rg\frac{\sin\vartheta + \mu\cos\vartheta}{\cos\vartheta - \mu\sin\vartheta}} \cong 61.3 \text{ m/s}$$

Fig.1



Db3. Una massa 0.3 kg attaccata ad una cordicella lunga 1.5 m posta in un piano orizzontale è fatta girare in un cerchio alla velocità di 0.6 m/s . La tensione della fune vale in modulo
(A) 7.2 N (B) 1.62 N (C) 0.98 N **(D) 0.072** N (E) 0.162 N

Db4. Un'auto con massa di 1250 kg affronta una curva a 180 km/h. Se il coefficiente di attrito strada pneumatici è di 0.8 e l'auto non scivola il raggio della curva è di almeno
(A) 980 m (B) 500 m (C) 425 m **(D) 319 m** (E) indeterm.

Db5. La massima forza di attrito sviluppata dalla ruote di un'auto è data dal "coefficiente d'attrito" moltiplicata per la forza che fa aderire l'auto alla superficie d'appoggio. Se tale coefficiente vale 0.80, la massima velocità con la quale un'auto può affrontare una curva con un raggio di 80 m senza slittare è approssimativamente di
(A) 18 m/s (B) 52 km/h **(C) 25 m/s** (D) 101 km/h (E) 35 m/s

Db6. Un progettista di montagne russe vuole che gli occupanti del trenino si sentano "senza peso" quando passano oltre una montagna dove i binari hanno un raggio di curvatura di 20 m. Quale velocità deve avere il treno in cima alla montagna?
(A) 9.8 m/s (B) 12. m/s **(C) 14 m/s** (D) 20 m/s (E) 0 m/s

Db7. Un pilota di massa 70 kg sta facendo compiere al suo aereo un cerchio verticale di 4000 m di diametro alla velocità di 700 km/h. La forza con cui è schiacciato contro il sedile quando è nel punto più basso del cerchio vale circa
(A) 17 120 N (B) 3792 N **(C) 2009 N** (D) 17834 N (E) 1950 N

Db8. Un punto materiale di massa m = 1 kg si muove su una circonferenza di raggio R = 2 m con velocità angolare variabile nel tempo secondo la legge: $\omega = (3\text{rad/s}^2)t$. Sapendo che all'istante iniziale la posizione angolare è $\vartheta(0) = 0$, determinare il modulo delle forze normale e tangenziale che determinano il moto.
[Risposta: F_T = 6 N; $F_c = 18\ t^2$ N]

Db9. Un punto materiale di massa m = 1 kg si muove su una circonferenza di raggio R con velocità angolare variabile nel tempo secondo la legge: $\omega = bt^2 + \omega_0$ rad/s dove b e ω_0 sono costanti. Determinare le forze normale e tangenziale che determinano il moto.
[Risposta: $F_T = 2Rbt$ N; $F_c = R(bt^2+\omega_0)^2$ N]