Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{60}{s^2 + 0.3s + 9}$$

Punto 1: Determinare la posizione nel piano complesso dei poli del sistema.

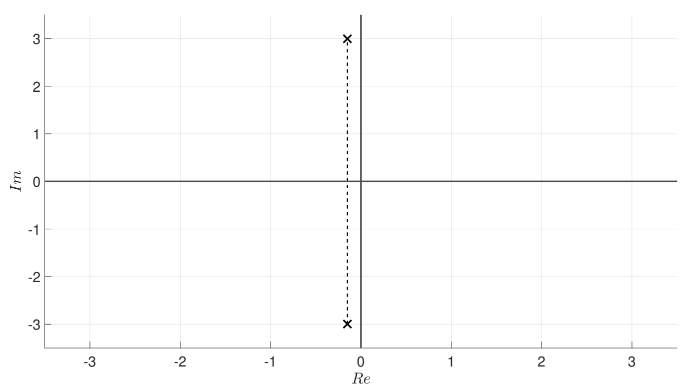
Per calcolare i poli dobbiamo risolvere:

$$s^2 + 0.3s + 9 = 0$$

Ottenendo:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-0.3 \pm \sqrt{0.3^2 - 4 \cdot 9}}{2} \\ &= \frac{-0.3 \pm \sqrt{0.09 - 36}}{2} \\ &= \frac{-0.3 \pm \sqrt{-35.91}}{2} \\ &= \frac{-0.3 \pm j\sqrt{35.91}}{2} \\ &= -0.15 \pm j2.99 \end{aligned}$$

I poli risultanti sono complessi coniugati, possiamo disegnarli sul piano complesso:



Punto 2: Valutare le principali caratteristiche della risposta del sistema ad uno scalino unitario (tempo di assestamento, massima sovraelongazione, periodo delle oscillazioni, valore di regime).

Abbiamo due poli complessi coniugati, di conseguenza la riposta allo scalino potrebbe presentare delle oscillazioni smorzate. Calcoliamo la pulsazione naturale ω_n e lo smorzamento ξ dei poli:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{(-0.15)^2 + 2.99^2} \\
&= 2.99 \frac{rad}{sec}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi &= -\frac{\sigma}{\omega_n} \\
&= -\frac{-0.15}{2.99} \\
&= 0.05
\end{aligned}
$$

Lo smorzamento e la pulsazione naturale possono essere ricavati direttamente dal polinomio di secondo grado che costituisce il denominatore della funzione di trasferimento. Nel caso generale, due poli complessi coniugati sono le radici del polinomio:

$$s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2$$

Confrontandolo il denominatore di $G(s)$:

$$
\begin{gathered}
s^2 + 0.3s + 9 \\
\text{Abbiamo} \\
\omega_n^2 = 9 \frac{rad}{sec} \rightarrow \omega_n = 3 \frac{rad}{sec} \\
2\xi\omega_n = 0.3 \rightarrow \xi = \frac{0.3}{2\omega_n} = 0.05
\end{gathered}
$$

Visto il basso smorzamento, ci aspettiamo una risposta allo scalino con oscillazioni pronunciate. Andiamo ora a calcolare i parametri caratteristici...
Prima di tutto, calcoliamo il guadagno statico (caso $g = 0$):

$$
\begin{aligned}
\mu &= G(0) \\
&= \frac{60}{9} \\
&= \frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

Siccome il tipo della funzione di trasferimento è 0 (e $G(s)$ asintoticamente stabile), il valore della risposta allo scalino unitario a transitorio esaurito è:

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \mu \\
&= \frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

Il periodo delle oscillazioni è:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \\
&= \frac{2\pi}{2.99\sqrt{1 - 0.05^2}} \\
&= 2.1 sec
\end{aligned}
$$

Da cui, il tempo di picco si ricava come:

$$t_p = \frac{T}{2}$$

$$= 1.05sec$$

Mentre il tempo di assestamento risulta:

$$
\begin{aligned}
t_a &\approx \frac{5}{\xi\omega_n} \\
&= \frac{5}{0.05 \cdot 2.99} \\
&= 33.4sec
\end{aligned}
$$

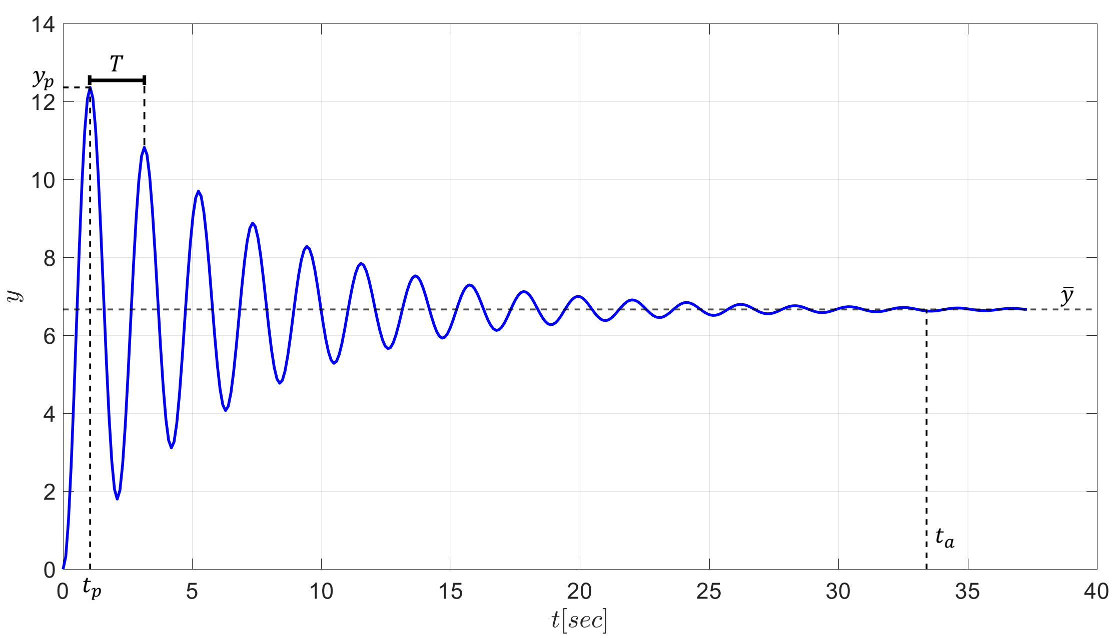
Infine, la massima sovraelongazione percentuale è:

$$
\begin{aligned}
S\% &= 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
&= 100e^{-\frac{0.05\cdot\pi}{\sqrt{1-0.05^2}}} \\
&\approx 85.46\%
\end{aligned}
$$

Ci potevamo aspettare una sovraelongazione così elevata poichè abbiamo uno smorzamento basso.
A partire dalla massima sovraelongazione percentuale, possiamo ricavare anche il valore assunto dall'uscita in corrispondenza del primo picco:

$$
\begin{aligned}
y_p &= \bar{y}\left[1 + \frac{S\%}{100}\right] \\
&= \frac{20}{3}\left[1 + 0.8546\right] \\
&= 12.36
\end{aligned}
$$

Con tutte le informazioni che abbiamo ricavato, possiamo disegnare la risposta allo scalino:



Punto 3: Calcolare l'espressione del modulo e della fase della risposta in frequenza associata al sistema.

La risposta in frequenza può essere calcolata dalla funzione di trasferimento effettuando la sostituzione $s = j\omega$:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{60}{-\omega^2 + 0.3j\omega + 9} \\ &= \frac{60}{(9-\omega^2) + 0.3j\omega} \end{aligned}$$

Dobbiamo, in sostanza, calcolare modulo e fase di una funzione complessa che dipende dalla pulsazione ω. Il modulo è:

$$|G(j\omega)| = \frac{60}{\sqrt{(9-\omega^2)^2 + 0.09\omega^2}}$$

Mentre la fase di una funzione di trasferimento razionale $G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ è:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega) \\ &= 0^\circ - \arctan\left(\frac{0.3\omega}{9-\omega^2}\right) \end{aligned}$$

N.B.: Per convenzione consideriamo la fase $-180^\circ \leq \angle G(j\omega) \leq 180^\circ$.
Se consideriamo un numero reale γ, sappiamo che:

- $\angle\gamma = 0^\circ$ se $\gamma \geq 0$,
- $\angle\gamma = -180^\circ$ se $\gamma < 0$

Viceversa, se consideriamo un numero complesso $\gamma = a + jb$, nel calcolo della fase bisogna stare attenti al quadrante del piano complesso in cui ci si trova:

- $\angle\gamma = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ per $a \geq 0$ (primo e quarto quadrante), $-90^\circ \leq \angle\gamma \leq +90^\circ$
- $\angle\gamma = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180^\circ$ per $a < 0$ e $b > 0$ (secondo quadrante), $90^\circ \leq \angle\gamma \leq 180^\circ$
- $\angle\gamma = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - 180^\circ$ per $a < 0$ e $b \leq 0$ (terzo quadrante), $-180^\circ \leq \angle\gamma \leq -90^\circ$

(L'arcotangente è una funzione con codominio $\left[-90^\circ \quad 90^\circ\right]$).

Punto 4: Supponendo che l'ingresso sia $u(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, valutare l'andamento asintotico dell'uscita nei tre casi $\bar{\omega} = 0.3\frac{rad}{sec}, \bar{\omega} = 3\frac{rad}{sec}$ e $\bar{\omega} = 30\frac{rad}{sec}$.

Sappiamo dal teorema fondamentale della risposta in frequenza che, data una sinusoide in ingresso $u(t) = U\sin(\bar{\omega}t)$ applicata ad un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $G(s)$, l'uscita a transitorio esaurito assume l'andamento:

$$y(t) = U\,|G(j\bar{\omega})|\sin(\bar{\omega}t + \angle G(j\bar{\omega}))$$

Nel nostro caso, il sistema è asintoticamente stabile poichè ha tutti i poli con parte reale negativa. Possiamo quindi applicare il teorema fondamentale della risposta in frequenza.
Calcoliamo modulo e fase nei tre casi:

$$\begin{aligned} |G(j0.3)| &= \frac{60}{\sqrt{(9-0.3^2)^2 + 0.09\cdot 0.3^2}} \\ &= 6.73 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\angle G(j0.3) &= -\arctan\left(\frac{0.3\cdot 0.3}{9-0.3^2}\right)\\
&= -\arctan\left(\frac{0.09}{8.91}\right)\\
&\text{Primo quadrante}\\
&\approx -0^\circ\\
&= 0 rad
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|G(j3)| &= \frac{60}{\sqrt{\left(9-3^2\right)^2+0.09\cdot 3^2}}\\
&= 66.7\\
\angle G(j3) &= -\arctan\left(\frac{3\cdot 0.3}{9-3^2}\right)\\
&= -\arctan\left(\frac{0.9}{0}\right)\\
&\text{Primo quadrante}\\
&= -90^\circ\\
&= -\frac{\pi}{2} rad
\end{aligned}
$$

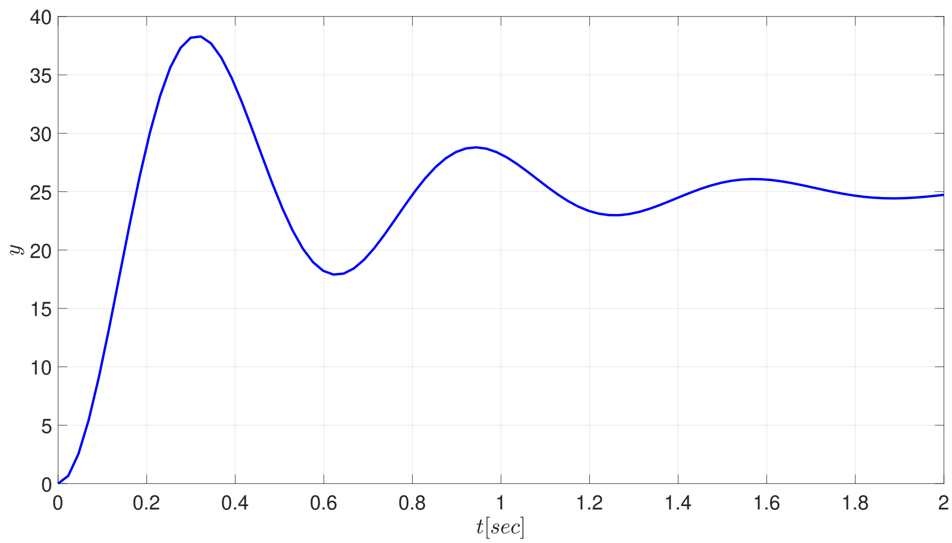
$$
\begin{aligned}
|G(j30)| &= \frac{60}{\sqrt{\left(9-30^2\right)^2+0.09\cdot 30^2}}\\
&= 0.067\\
\angle G(j30) &= -\left[\arctan\left(\frac{30\cdot 0.3}{9-30^2}\right)+180^\circ\right]\\
&= -\left[\arctan\left(\frac{9}{-891}\right)+180^\circ\right]\\
&\text{Secondo quadrante}\\
&\approx -180^\circ\\
&= -\pi\ rad
\end{aligned}
$$

Da cui, l'andamento asintotico dell'uscita $y(t)$ nei tre casi risulta:

$$
\begin{aligned}
u(t) = \sin(0.3t) &\rightarrow y(t) = 6.73\sin(0.3t)\\
u(t) = \sin(3t) &\rightarrow y(t) = 66.7\sin\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)\\
u(t) = \sin(30t) &\rightarrow y(t) = 0.067\sin(30t-\pi)
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Si consideri la seguente risposta allo scalino unitario di un sistema dinamico a tempo a tempo continuo LTI SISO la cui funzione di trasferimento $G(s)$ ha due poli e nessuno zero:



Punto 1: Stimare il guadagno μ della funzione di trasferimento $G(s)$.

Dal grafico possiamo vedere che la risposta allo scalino converge al valore $\bar{y} = 25$. Siccome si tratta di uno scalino unitario, $\mu = \bar{y} = 25$.

Punto 2: Individuare tra le 6 funzioni di trasferimento di seguito riportate la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla risposta allo scalino di cui sopra:

1. $G(s) = \frac{104\mu}{s^2-4s+104}$
2. $G(s) = \frac{104\mu}{s^2+4s+104}$
3. $G(s) = \frac{\mu}{104s^2+4s+1}$
4. $G(s) = \frac{4\mu}{s^2+104s+4}$
5. $G(s) = \frac{\mu}{(0.4s+1)^2}$
6. $G(s) = \frac{0.4\mu}{s^2+0.4}$

Siccome la risposta allo scalino presenta delle oscillazioni smorzate, i poli della rispettiva funzione di trasferimento devono essere per forza complessi coniugati. Inoltre, non possiamo avere poli puramente immaginari poichè non abbiamo oscillazioni permanenti.
Analizziamo i poli delle funzioni di trasferimento riportate e ricaviamo le possibili candidate:

1. $s^2 - 4s + 104 = 0$, abbiamo un polinomio di secondo grado con coefficienti non nulli e discordi in segno. Di conseguenza, questa funzione di trasferimento è instabile e sicuramente non ha generato la risposta allo scalino in figura;

2. $s^2 + 4s + 104 = 0 \rightarrow p_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-416}}{2} = -2 \pm j10$, questa funzione di trasferimento potrebbe aver generato la risposta allo scalino in figura;

3. $104s^2 + 4s + 1 = 0 \rightarrow p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-416}}{208} = -\frac{1}{52} \pm j\frac{5}{52}$, questa funzione di trasferimento potrebbe aver generato la risposta allo scalino in figura;
4. $s^2 + 104s + 4 = 0 \rightarrow p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{104^2-16}}{2}$, abbiamo due poli reali distinti in $p_1 = -0.038$ e $p_2 = -103.96$ e quindi questa funzione di trasferimento certamente non ha generato la risposta allo scalino in figura;
5. $(0.4s+1)^2 = 0$, abbiamo due poli reali coincidenti in $p_{1,2} = -\frac{1}{0.4} = -\frac{5}{2}$ e quindi questa funzione di trasferimento certamente non ha generato la risposta allo scalino in figura;
6. $s^2 + 0.4 = 0$, abbiamo due poli complessi coniugati puramente immaginari in $p_{1,2} = \pm j\sqrt{0.4}$ e quindi questa funzione di trasferimento certamente non ha generato la risposta allo scalino in figura,

A fronte delle considerazioni fatte in precedenza, le uniche funzioni di trasferimento candidate sono la 2 e la 3. Andiamo ora a calcolare i parametri caratteristici della risposta allo scalino nei due casi. Calcoliamo prima la pulsazione naturale e lo smorzamento dei rispettivi poli:

$$\begin{aligned} \omega_{n_2} &= \sqrt{2^2 + 10^2} \\ &= 10.2\frac{rad}{sec} \\ \xi_2 &= \frac{2}{10.2} \\ &= 0.196 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{n_3} &= \sqrt{\left(\frac{1}{52}\right)^2 + \left(\frac{5}{52}\right)^2} \\ &= 0.098\frac{rad}{sec} \\ \xi_3 &= \frac{1}{52 \cdot 0.098} \\ &= 0.196 \end{aligned}$$

Siccome la sovraelongazione dipende esclusivamente dallo smorzamento ed abbiamo riscontrato che $\xi_2 = \xi_3$, calcolare $S\%$ o y_p non ci aiuta a discernere a quale delle due funzioni di trasferimento corrisponde la risposta allo scalino riportata sopra. Tuttavia, possiamo notare che $\omega_{n_3} \ll \omega_{n_2}$, ovvero la funzione di trasferimento 3 ha una dinamica molto più lenta (e quindi tempi di assestamento più lunghi) rispetto alla 2. Per questo motivo, calcoliamo i rispettivi tempi di assestamento:

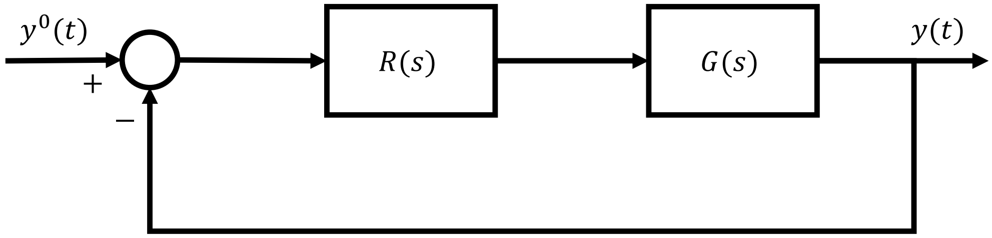
$$\begin{aligned} t_{a_2} &\approx \frac{5}{\xi_2 \omega_{n_2}} \\ &= \frac{5}{10.2 \cdot 0.196} \\ &= 2.5sec \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{a_3} &\approx \frac{5}{\xi_3 \omega_{n_3}} \\ &= \frac{5}{0.098 \cdot 0.196} \\ &= 260.3sec \end{aligned}$$

Dalla risposta allo scalino in figura possiamo vedere che le oscillazioni sono pressochè terminate dopo $2sec$, di conseguenza la funzione di trasferimento corretta è la numero 2, $G(s) = \frac{104\mu}{s^2+4s+104}$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO rappresentato dal seguente schema a blocchi:



dove $R(s) = \frac{10(1+s)}{s}$ **e** $G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.1s)}$.

Punto 1: **Calcolare la funzione di trasferimento $F(s)$ dal riferimento $y^0(t)$ all'uscita $y(t)$ e giudicarne la stabilità.**

Calcoliamo la funzione di trasferimento (retroazione negativa):

$$
\begin{aligned}
L(s) &= R(s)G(s) \\
&= \frac{10\,(1+s)}{s}\frac{1}{(1+s)\,(1+0.1s)} \\
&= \frac{10}{s\,(1+0.1s)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{L(s)}{1+L(s)} \\
&= \frac{10}{s\,(1+0.1s)}\frac{1}{1+\frac{10}{s(1+0.1s)}} \\
&= \frac{10}{s\,(1+0.1s)}\frac{s\,(1+0.1s)}{s\,(1+0.1s)+10} \\
&= \frac{10}{0.1s^2+s+10} \\
&= \frac{100}{s^2+10s+100}
\end{aligned}
$$

$F(s)$ è un funzione di trasferimento del secondo ordine con denominatore con coefficienti non nulli e concordi in segno. Di conseguenza è asintoticamente stabile.

Punto 2: Disegnare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino unitario del sistema con ingresso $y^0(t)$ e uscita $y(t)$.

Calcoliamo i poli di $F(s)$:

$$s^2 + 10s + 100 = 0$$

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 400}}{2} \\ &= -5 \pm j5\sqrt{3} \end{aligned}$$

e la relativa pulsazione naturale e smorzamento:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{(-5)^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{25 + 75} \\ &= 10\frac{rad}{sec} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{\mathrm{Re}\left(p_{1,2}\right)}{\omega_n} \\ &= \frac{5}{10} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Potevamo ricavare ω_n e ξ direttamente dal polinomio di secondo grado che costituisce il denominatore di $F(s)$:

$$s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2 = s^2 + 10s + 100$$

Da cui:

$$\omega_n^2 = 100\frac{rad}{sec} \rightarrow \omega_n = 10\frac{rad}{sec}$$

$$2\xi\omega_n = 10 \rightarrow \xi = \frac{10}{2\omega_n} = 0.5$$

Il guadagno della funzione di trasferimento è $\mu = F(0) = 1$. Siccome $F(s)$ ha tipo $g = 0$, a transitorio esaurito per uno scalino unitario avremo:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \mu \\ &= 1 \end{aligned}$$

Calcoliamo i parametri caratteristici della risposta allo scalino. Partiamo dal periodo delle oscillazioni:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \\ &= \frac{2\pi}{10\sqrt{1 - 0.5^2}} \end{aligned}$$

$$= 0.73sec$$

Il tempo di picco si ricava come:

$$t_p = \frac{T}{2}$$
$$= 0.365sec$$

Mentre il tempo di assestamento è:

$$t_a \approx \frac{5}{\xi\omega_n}$$
$$= \frac{5}{0.5 \cdot 10}$$
$$= 1sec$$

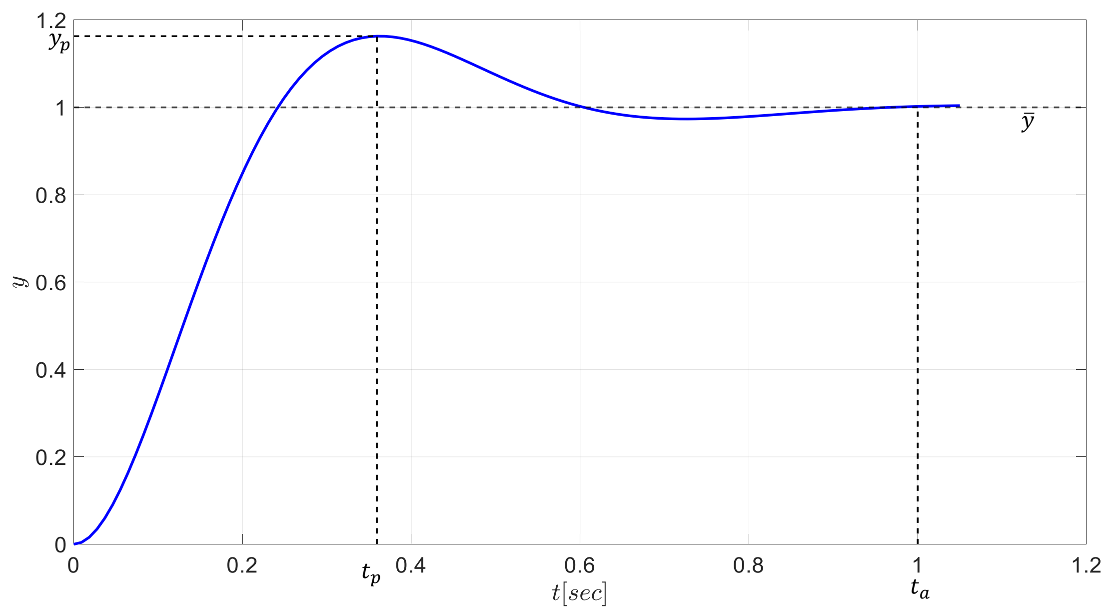
La massima sovraelongazione percentuale è:

$$S\% = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$
$$= 100e^{-\frac{0.5\cdot\pi}{\sqrt{1-0.5^2}}}$$
$$\approx 16.3\%$$

Da cui, il valore di picco di y è:

$$y_p = \bar{y}\left[1 + \frac{S\%}{100}\right]$$
$$= 1 + 0.163$$
$$= 1.163$$

Possiamo quindi tracciare la risposta allo scalino:



N.B.: in questo caso, il periodo delle oscillazioni non è particolarmente rilevante in quanto il secondo picco ha una sovraelongazione inferiore all'1% (consideriamo la risposta allo scalino già assestata).

Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \gamma \\ \sigma \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}$.

Punto 1: Con $\alpha = -4$**, determinare** β **tale per cui la risposta allo scalino unitario del sistema presenta oscillazioni permanenti. Che periodo hanno tali oscillazioni?**

Sappiamo che un sistema del secondo ordine presenta oscillazioni permanenti se e solo se presenta due poli puramente immaginari.
Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice A per ricavare i poli:

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 4 \\ -1 & s-\beta \end{bmatrix}\right) \\ &= s(s-\beta) + 4 \\ &= s^2 - \beta s + 4 \end{aligned}$$

I poli sono quindi le soluzioni di:

$$s^2 - \beta s + 4 = 0$$

Notiamo che l'unico modo per avere soluzioni puramente immaginarie è imporre $\beta = 0$, ottenendo quindi:

$$\begin{aligned} s^2 + 4 &= 0 \\ p_{1,2} &= \pm j2 \end{aligned}$$

Sappiamo che il periodo delle oscillazioni (nel caso generale) è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

Tuttavia, per poli complessi coniugati puramente immaginari il calcolo si semplifica poichè $\xi = 0$ e la pulsazione naturale è uguale alla parte immaginaria, $\omega_n = 2\frac{rad}{sec}$. Da cui:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega_n} \\ &= \pi \ sec \end{aligned}$$

Punto 2: Per $\alpha = -4$ **e** $\sigma = 0$**, determinare** β **e** γ **per avere una risposta allo scalino unitario che tenda a** $\bar{y} = 100$ **e con sovraelongazione massima percentuale** $S\% = 25\%$.

Calcoliamo la funzione di trasferimento nel caso generale:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \gamma \\ \sigma \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -\alpha \\ -1 & s-\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma \\ \sigma \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2 - \beta s - \alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-\beta & \alpha \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \sigma \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2 - \beta s - \alpha} \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \sigma \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sigma s + \gamma}{s^2 - \beta s - \alpha}
\end{aligned}
$$

Ponendo $\alpha = -4$ e $\sigma = 0$ otteniamo:

$$G(s) = \frac{\gamma}{s^2 - \beta s + 4}$$

che ha tipo $g = 0$. Possiamo notare che β deve essere minore di 0 per avere asintotica stabilità e quindi convergenza al valore di regime $\bar{y}$.
Sappiamo che il valore dell'uscita a transitorio esaurito è (scalino unitario):

$$\bar{y} = \mu$$

Il guadagno della funzione di trasferimento è:

$$
\begin{aligned}
\mu &= G(0) \\
&= \frac{\gamma}{4}
\end{aligned}
$$

Da cui:

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{\gamma}{4} \\
100 &= \frac{\gamma}{4} \\
\gamma &= 400
\end{aligned}
$$

Possiamo ricavare lo smorzamento necessario per avere la sovraelongazione massima percentuale desiderata $S\% = 25\%$:

$$
\begin{aligned}
S\% &= 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
25 &= 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
\frac{1}{4} &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
&\text{Applichiamo ln a entrambi i membri} \\
\ln\frac{1}{4} &= -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\
\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} &= -\frac{\ln\frac{1}{4}}{\pi} \\
\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} &\approx 0.441 \\
\xi &\approx 0.441\sqrt{1-\xi^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\text{Eleviamo entrambi i membri al quadrato}\\
\xi^2 &\approx 0.194\left(1-\xi^2\right)\\
1.194\xi^2 &\approx 0.194\\
\xi &\approx \pm\sqrt{\frac{0.194}{1.194}}\\
\xi &\approx \pm 0.403
\end{aligned}$$

Sappiamo che avere smorzamenti negativi, $\xi < 0$, comporta avere poli a parte reale positiva e quindi instabilità. Possiamo quindi escludere una delle due soluzioni. Ricaviamo lo smorzamento dalla funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{400}{s^2-\beta s+4}\\
&= \frac{400}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}
\end{aligned}$$

Da cui:

$$\omega_n = 2\frac{rad}{sec}$$

$$\begin{aligned}
2\xi\omega_n &= -\beta\\
2\cdot 0.403\cdot 2 &= -\beta\\
\beta &= -1.612
\end{aligned}$$

Punto 3: In corrispondenza di α, β, γ e σ calcolati al punto precedente, valutare il tempo di assestamento della risposta allo scalino.

Applichiamo la formula:

$$\begin{aligned}
t_a &\approx \frac{5}{\xi\omega_n}\\
&\approx \frac{5}{0.403\cdot 2}\\
&\approx 6.2sec
\end{aligned}$$

Punto 4: Discutere (in termini qualitativi) come cambia la risposta allo scalino del sistema per $\sigma > 0$.

La funzione di trasferimento per $\alpha = -4$ è:

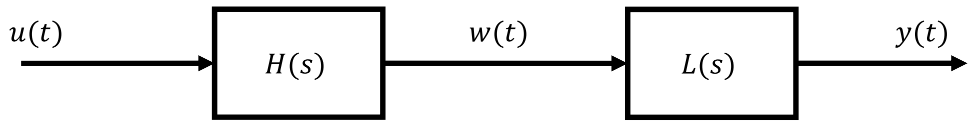
$$G(s) = \frac{\sigma s+\gamma}{s^2-\beta s+4}$$

Per $\sigma > 0$ abbiamo uno zero in $z = -\frac{\gamma}{\sigma}$. Dalla teoria, sappiamo che la presenza di uno zero in un sistema del secondo ordine comporta:

1. Cambiamento della pendenza iniziale:
    - per un sistema del II ordine senza zero abbiamo $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ (pendenza iniziale nulla)
    - con uno zero, invece, abbiamo $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) \neq 0$ (possiamo avere pendenza positiva o negativa a seconda del segno dello zero)
2. Maggiore sovraelongazione quanto più lo zero è in bassa frequenza

Esercizio 5

Si consideri il seguente schema a blocchi dove $H(s)$ e $L(s)$ sono le funzioni di trasferimento di due sistemi dinamici a tempo continuo LTI:



Punto 1: **Si supponga $H(s) = 1$ e $L(s) = \frac{\mu(s-1)}{3s^2+2s+1}$ dove $\mu > 0$. Calcolare l'andamento di $y(t)$ a transitorio esaurito quando $u(t) = 6\sin(3t)$. Dire inoltre come cambierebbe tale andamento se il numeratore di $L(s)$ fosse $\mu(s+1)$ anzichè $\mu(s-1)$.**

La funzione di trasferimento complessiva è semplicemente:

$$\begin{aligned} G(s) &= H(s)L(s) \\ &= L(s) \end{aligned}$$

Dobbiamo verificare che sia asintoticamente stabile altrimenti il teorema fondamentale della risposta in frequenza non è valido. Siccome il denominatore di $L(s)$ è di secondo grado ed ha tutti i termini non nulli e concordi in segno, allora è asintoticamente stabile.
La risposta in frequenza è:

$$G(j\omega) = \frac{\mu\,(j\omega - 1)}{-3\omega^2 + 2j\omega + 1}$$

Esplicitando per la frequenza della sinusoide $\bar{\omega} = 3\frac{rad}{sec}$:

$$\begin{aligned} G(j3) &= \frac{\mu\,(j3-1)}{-3\cdot 9 + 6j + 1} \\ &= \frac{\mu\,(j3-1)}{6j - 26} \end{aligned}$$

Il modulo è pari a:

$$|G(j3)| = \frac{\mu\sqrt{(-1)^2 + 3^2}}{\sqrt{(-26)^2 + 6^2}}$$

$$= 0.119\mu$$

Mentre la fase:

$$\begin{aligned}
\angle G(j3) &= \underbrace{\left(\arctan\left(\frac{3}{-1}\right) + 180^\circ\right)}_{\text{Secondo quadrante}} - \underbrace{\left(\arctan\left(\frac{6}{-26}\right) + 180^\circ\right)}_{\text{Secondo quadrante}} \\
&= \arctan(-3) - \arctan\left(-\frac{6}{26}\right) \\
&= -71.56^\circ + 13.00^\circ \\
&= -58.56^\circ \\
&= -1.022 rad
\end{aligned}$$

Da cui, per il teorema fondamentale della risposta in frequenza, l'uscita sarà:

$$\begin{aligned}
y(t) &= 6 \cdot |G(j3)| \sin(3t + \angle G(j3)) \\
&= 0.714\mu \sin(3t - 1.022)
\end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso in cui:

$$\begin{aligned}
L'(s) &= \frac{\mu(s+1)}{3s^2 + 2s + 1} \\
G'(s) &= L'(s)
\end{aligned}$$

Il modulo resta invariato, $|G(j3)| = |G'(j3)|$, la fase invece cambia:

$$\begin{aligned}
\angle G'(j3) &= \underbrace{\left(\arctan\left(\frac{3}{1}\right)\right)}_{\text{Primo quadrante}} - \underbrace{\left(\arctan\left(\frac{6}{-26}\right) + 180^\circ\right)}_{\text{Secondo quadrante}} \\
&= \arctan(3) - \arctan\left(-\frac{6}{26}\right) - 180^\circ \\
&= 71.56^\circ + 13.00^\circ - 180^\circ \\
&= -95.44^\circ \\
&= -1.66 rad
\end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
y(t) &= 6 \cdot |G'(j3)| \sin(3t + \angle G'(j3)) \\
&= 0.714\mu \sin(3t - 1.66)
\end{aligned}$$

Punto 2: Si supponga $H(s) = 1$ e $L(s) = \frac{s+1}{2s+1}$. Calcolare l'andamento di $y(t)$ a transitorio esaurito quando $u(t) = 38\cos(t)\sin(t)$.

Si ricorda la formula di duplicazione:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Di conseguenza, l'ingresso fornito diventa:

$$u(t) = 38\cos(t)\sin(t)$$

$$= 19 \sin(2t)$$

Similmente a quanto fatto prima, calcoliamo modulo e fase per $\bar{\omega} = 2 \frac{rad}{sec}$. La riposta in frequenza è:

$$G(j2) = \frac{j2+1}{j4+1}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}|G(j2)| &= \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+4^2}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{17}} \\ &= 0.542\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle G'(j3) &= \underbrace{\left(\arctan\left(\frac{2}{1}\right)\right)}_{\text{Primo quadrante}} - \underbrace{\left(\arctan\left(\frac{4}{1}\right)\right)}_{\text{Primo quadrante}} \\ &= \arctan(2) - \arctan(4) \\ &= 63.43° - 75.96° \\ &= -12.56° \\ &= -0.22 rad\end{aligned}$$

Quindi, l'uscita risulta:

$$\begin{aligned}y(t) &= 19 \cdot |G(j2)| \sin(2t + \angle G(j2)) \\ &= 10.298 \sin(2t - 0.22)\end{aligned}$$

Punto 3: Indicare quali condizioni deve soddisfare $H(s)$ affinchè con $u(t) = \sin(2t)$ l'andamento di $y(t)$ a transitorio esaurito tenda a $\tilde{y}(t) = 2\sin(2t)$ nei seguenti due casi:

1. $L(s) = \frac{s+1}{2s+1}$
2. $L(s) = \frac{s+1}{2s-1}$

Partiamo dalla funzione di trasferimento 2.: $L(s) = \frac{s+1}{2s-1}$. Possiamo notare che questa ha un polo in $s = \frac{1}{2}$ e risulta quindi instabile. Di conseguenza, non esiste alcuna scelta di $H(s)$ tale per cui $y(t) = \tilde{y}(t)$ (l'uscita diverge).
Viceversa, per la funzione di trasferimento 1.: $L(s) = \frac{s+1}{2s+1}$, siccome questa è asintoticamente stabile, possiamo definire una $H(s)$ in grado di ottenere l'uscita desiderata.
La funzione di trasferimento complessiva è:

$$G(s) = L(s)H(s)$$

Per ottenere in uscita $\tilde{y}(t) = 2\sin(2t)$ a partire da un ingresso $u(t) = \sin(2t)$, dobbiamo avere:

$$\begin{aligned}|G(j2)| &= 2 \\ \angle G(j2) &= 0°\end{aligned}$$

Anche senza sapere la forma di $H(s)$, possiamo ricavare $|H(j2)|$:

$$\begin{aligned}|G(j2)| &= |L(j2)|\,|H(j2)| \\ 2 &= \sqrt{\frac{5}{17}}\,|H(j2)| \\ |H(j2)| &= 2\sqrt{\frac{17}{5}}\end{aligned}$$

e la fase:

$$\begin{aligned}\angle G(j2) &= \angle L(j2) + \angle H(j2) \\ 0^\circ &= -12.56^\circ + \angle H(j2) \\ \angle H(j2) &= 12.56^\circ\end{aligned}$$

Approfondimento: dai risultati che abbiamo ottenuto possiamo fare le seguenti considerazioni su $H(s)$:

- per avere una fase positiva, $\angle H(j2) > 0^\circ$, ed essere asintoticamente stabile deve possedere uno zero,
- per essere realizzabile deve essere propria (almeno un polo).

La funzione di trasferimento più semplice che soddisfa queste caratteristiche è:

$$H(s) = \mu\frac{1+\alpha s}{1+\beta s}$$

dove $\mu, \alpha, \beta > 0$. Abbiamo due equazioni (modulo e fase) e tre variabili (μ, α e β), di conseguenza dobbiamo fissarne una (in modo arbitrario) per ottenere una soluziona univoca. L'effetto di fissare arbitrariamente uno dei tre parametri sarà visibile solo nel transitorio iniziale ma siamo interessati solo all'andamento a transitorio esaurito. Scegliamo:

$$\beta = 1$$

Da cui:

$$H(j2) = \mu\frac{1+2\alpha j}{1+2j}$$

Ponendo a sistema le equazioni del modulo e della fase:

$$\begin{cases}\angle H(j2) = \arctan(2\alpha) - \arctan(2) \\ H(j2) = \mu\sqrt{\frac{1+4\alpha^2}{5}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}12.56^\circ = \arctan(2\alpha) - \arctan(2) \\ 2\sqrt{\frac{17}{5}} = \mu\sqrt{\frac{1+4\alpha^2}{5}}\end{cases}$$

Ricaviamo α dall'equazione della fase:

$$\begin{aligned}12.56^\circ &= \arctan(2\alpha) - 63.43^\circ \\ \arctan(2\alpha) &= 75.96^\circ \\ 2\alpha &= \tan(75.96^\circ) \\ 2\alpha &= 4 \\ \alpha &= 2\end{aligned}$$

E μ dall'equazione del modulo:

$$\begin{aligned}2\sqrt{\frac{17}{5}} &= \mu\sqrt{\frac{1+4\alpha^2}{5}} \\ 2\sqrt{17} &= \mu\sqrt{17} \\ \mu &= 2\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto la funzione di trasferimento:

$$H(s) = 2\frac{1+2s}{1+s}$$

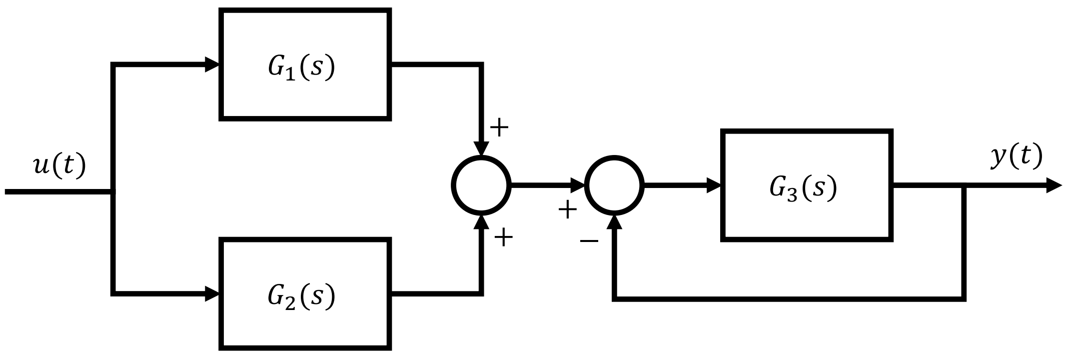
N.B.: possiamo osservare che

$$\begin{aligned}G(s) &= H(s)L(s) \\ &= 2\frac{1+2s}{1+s}\frac{s+1}{2s+1} \\ &= 2\end{aligned}$$

Che sono entrambe cancellazioni lecite.

Esercizio 6

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI rappresentato dallo schema a blocchi:



Punto 1: Dire, motivando la risposta, quali condizioni devono soddisfare le funzioni di trasferimento $G_1(s), G_2(s)$ e $G_3(s)$ affinchè il sistema complessivo con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ sia asintoticamente stabile.

Il sistema complessivo è composto dalla serie tra il parallelo di $G_1(s)$ e $G_2(s)$ e il sistema retroazionato con funzione d'anello $G_3(s)$.
Sappiamo che il sistema risultante dalla serie di due sottosistemi è asintoticamente stabile se e solo se i corrispondenti sottosistemi sono asintoticamente stabili.
Di conseguenza:

- il sistema risultante dal parallelo di $G_1(s)$ e $G_2(s)$ deve essere asintoticamente stabile. Questo è vero se e solo se $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono asintoticamente stabili;
- il sistema retroazionato con funzione d'anello $G_3(s)$ deve essere asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento risultante dalla retroazione negativa è:

$$F(s) = \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)}$$

Quindi $F(s)$ deve essere asintoticamente stabile. In particolare, se consideriamo $G_3(s)$ razionale, ovvero $G_3(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, abbiamo:

$$F(s) = \frac{N(s)}{N(s) + D(s)}$$

ed il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile se e solo se le radici di $N(s) + D(s)$ hanno parte reale negativa.

Punto 2: Siano $G_1(s) = G_2(s) = 1$, dire quali condizioni deve soddisfare $G_3(s)$ affinchè l'uscita $y(t)$ a transitorio esaurito sia $y(t) = 0.5\sin(10t)$ in corrispondenza di $u(t) = \sin(10t)$.

La funzione di trasferimento complessiva è:

$$\begin{aligned} H(s) &= (G_1(s) + G_2(s))\,\frac{G_3(s)}{1+G_3(s)} \\ &= 2\frac{G_3(s)}{1+G_3(s)} \\ &= 2F(s) \end{aligned}$$

Nel caso in cui $H(s)$ sia asintoticamente stabile, vale il teorema della risposta in frequenza:

$$y(t) = |H(j10)|\sin\left(10t + \underline{/H}(j10)\right)$$

Di conseguenza, vogliamo che:

$$\begin{aligned} |H(j10)| &= 0.5 \\ \underline{/H}(j10) &= 0^\circ \end{aligned}$$

dove $H(j10) = 2F(j10)$. Il coefficiente moltiplicativo 2 può essere portato fuori dal modulo ed, essendo positivo, non ha alcuna influenza sulla fase. Quindi, le condizioni che $G_3(s)$ deve rispettare per avere l'andamento desiderato sono:

$$\begin{aligned} |F(j10)| &= 0.25 \\ \underline{/F}(j10) &= 0^\circ \end{aligned}$$

Punto 3: Siano $G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{2s+1}$. Calcolare la funzione di trasferimento $G_3(s)$ affinchè risulti $y(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}t} + \frac{3}{10}e^{-\frac{1}{2}t}$ per $t \geq 0$ in corrispondenza di $u(t) = \mathrm{sca}(t)$.

Dallo schema a blocchi abbiamo:

$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s))\,F(s)U(s)$$

La trasformata di Laplace dello scalino è $U(s) = \frac{1}{s}$, quindi:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left(\frac{1}{2s+1} + \frac{1}{2s+1}\right)\frac{G_3(s)}{1+G_3(s)}\frac{1}{s} \\ &= \frac{2}{s\,(2s+1)}\frac{G_3(s)}{1+G_3(s)} \end{aligned}$$

Possiamo ricavare l'espressione dell'uscita $y(t)$ nel dominio della variabile complessa s effettuando la trasformata di Laplace della risposta allo scalino desiderata:

$$\begin{array}{ccccc} y(t) & = & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}t} & +\frac{3}{10}e^{-\frac{1}{2}t} \\ & & \downarrow\mathcal{L} & \downarrow\mathcal{L} & \downarrow\mathcal{L} \\ Y(s) & = & \frac{1}{5s} & -\frac{1}{2}\frac{1}{s+\frac{1}{3}} & +\frac{3}{10}\frac{1}{s+\frac{1}{2}} \end{array}$$

Svolgiamo i calcoli:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{5s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+\frac{1}{3}} + \frac{3}{10}\frac{1}{s+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{5}\left(s+\frac{1}{3}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}s\left(s+\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{10}s\left(s+\frac{1}{3}\right)}{s\left(s+\frac{1}{3}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{5}s^2 + \frac{1}{6}s + \frac{1}{30} - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}s + \frac{3}{10}s^2 + \frac{1}{10}s}{s\left(s+\frac{1}{3}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{60}s + \frac{1}{30}}{s\left(s+\frac{1}{3}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{60}\frac{s+2}{\frac{1}{3}\frac{1}{2}s\left(3s+1\right)\left(2s+1\right)} \\
&= \frac{1}{10}\frac{s+2}{s\left(3s+1\right)\left(2s+1\right)}
\end{aligned}
$$

Ponendola uguale al risultato ottenuto a partire dallo schema a blocchi:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{s\left(2s+1\right)}\frac{G_3(s)}{1+G_3(s)} &= \frac{1}{10}\frac{s+2}{s\left(3s+1\right)\left(2s+1\right)} \\
\frac{G_3(s)}{1+G_3(s)} &= \frac{1}{20}\frac{s+2}{\left(3s+1\right)} \\
G_3(s)\left(3s+1\right) &= \frac{1}{20}\left(s+2\right)\left(1+G_3(s)\right) \\
G_3(s)\left(3s+1\right) &= \frac{1}{20}\left(s+2\right) + G_3(s)\frac{1}{20}\left(s+2\right) \\
G_3(s)\left(3s+1\right) - G_3(s)\frac{1}{20}\left(s+2\right) &= \frac{1}{20}\left(s+2\right) \\
G_3(s)\left(3s+1-\frac{1}{20}s-\frac{1}{10}\right) &= \frac{1}{20}\left(s+2\right) \\
G_3(s)\left(\frac{59}{20}s+\frac{9}{10}\right) &= \frac{1}{20}\left(s+2\right) \\
G_3(s) &= \frac{1}{20}\frac{s+2}{\frac{59}{20}s+\frac{9}{10}}
\end{aligned}
$$