

CINEMATICA DEL MOTO RETTILINEO

Ba1. Il sistema di blocco automatico si è guastato e il macchinista del treno Milano–Roma lanciato alla velocità $v_p = 170$ km/h si accorge di un treno merci davanti a lui che sta procedendo sullo stesso binario e nella stessa direzione con velocità $v_m = 100$ km/h.

Il macchinista aziona immediatamente la frenata di emergenza su tutte le ruote, capace di imprimere una decelerazione pari al 20% dell'accelerazione di gravità: $a = 0.2 g = 1.96$ m/s² (0.2 = coefficiente di attrito ruota–binario) e prega che tra il suo treno e il merci vi sia una distanza sufficiente a evitare l'impatto. Si stima che tale distanza minima sia pari a circa

(A) 468 m (B) 372 m (C) 276 m (D) 193 m **(E) 96 m**

SOLUZIONE. La distanza minima si trova imponendo che le velocità dei due treni siano uguali al momento dell'impatto: in tal caso, i treni si toccherebbero senza danni. Il tempo richiesto per decelerare da v_p a v_m è

$$t = \frac{v_m - v_p}{a} = \frac{-19.44 \text{ m/s}}{-1.96 \text{ m/s}^2} = 9.92 \text{ s}$$

In tale tempo, il treno percorre con moto uniformemente decelerato 372 m mentre il merci percorre con moto uniforme 276 m. Perciò la loro distanza iniziale deve essere maggiore di $(372 - 276) \text{ m} = 96 \text{ m}$ per evitare danni.

Ba2. Un sacco di zavorra viene staccato da una mongolfiera mentre questa sta salendo con una velocità di 2 m/s. Se il sacco tocca il suolo esattamente 10 s dopo il tempo del distacco essendo accelerato uniformemente verso il basso a 9.8 m/s², l'altezza dal suolo della mongolfiera è di circa

(A) 490 m **(B) 470 m** (C) 510 m (D) 980 m (E) _____

Ba3. Un treno merci parte dallo scalo accelerando in modo uniforme. Se dopo un chilometro sta ancora accelerando e la sua velocità è di 36 km/h, la sua accelerazione vale circa

(A) 0.05 m/s² (B) 0.1 m/s² (C) 0.65 m/s² (D) 1.0 m/s² (E) 9.8 m/s²

Ba4. Con riferimento al problema precedente, si calcoli in quanto tempo il treno merci coprirà il secondo chilometro se continua ad accelerare?

(A) 300 s (B) 200 s (C) 140 s **(D) 83 s** (E) 68 s

Ba5. Due treni si muovono uno verso l'altro sullo stesso binario, ciascuno con una velocità di 20 m/s. Quando sono a due chilometri di distanza un macchinista viene avvertito della imminente collisione e comincia a rallentare con una decelerazione di 0.2 m/s². Quanto spazio percorre all'incirca il treno che decelera dall'avvio delle frenate alla collisione?

(A) 0.333 km (B) 1.25 km (C) 280 m (D) infinito **(E) 828 m**

Ba6. Una macchina per record di velocità è spinta da un motore a reazione che imprime un'accelerazione di 10 m/s² per i primi 20 s dalla partenza prima di spegnersi, lasciando che il veicolo proceda poi a velocità costante. La distanza dalla partenza a cui la macchina si trova dopo mezzo minuto è:

(A) 1 km (B) 2 km (C) 3 km **(D) 4 km** (E) 6 km

Ba7. L'accelerazione gravitazionale alla superficie di Marte è di circa 4 m/s². Se un astronauta lanciasse in alto una palla avente una velocità di 10 m/s, per quanti secondi salirebbe?

(A) 0.66 s **B) 2.5 s** (C) 4 s (D) 1.6 s (E) 5 s

Ba8. La posizione di un corpo in moto lungo l'asse x è descritto dall'equazione in funzione del tempo t (in secondi): $x = 3\text{m} + (10\text{ m/s})t - (4\text{ m/s}^2)t^2$.

Verificare la correttezza delle affermazioni seguenti.

(A) La velocità al tempo $t=0$ è di 10 m/s.

(B) L'accelerazione è sempre pari a -2 m/s^2 . (C) La velocità media nell'intervallo di tempo tra $t = 1\text{ s}$ e $t = 2\text{ s}$ vale, in modulo, 3 m/s.

(D) Il corpo è fermo quando ha raggiunto il punto di ascissa $x = 9.25\text{ m}$.

(E) La velocità è pari a quella iniziale e con segno opposto dopo un tempo di 10 s.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ALLA CINEMATICA

Ad1. La posizione di un oggetto di massa m aumenta col tempo secondo le relazioni indicate, dove t è in secondi e x in metri e le costanti hanno unità di misura opportune. Calcolare la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea relativamente ad ogni equazione oraria.

a) $x(t) = 32t^5$ b) $x(t) = 2t + 3t^2$ c) $x(t) = 3t + \sin t$ d) $x(t) = 2t \exp(-t/3)$

[Risposte: a) $v_{\text{ist}} = 160 t^4\text{ m/s}$; $a_{\text{ist}} = 640 t^3\text{ m/s}^2$; b) $v_{\text{ist}} = 2 + 6t\text{ m/s}$; $a_{\text{ist}} = 6\text{ m/s}^2$; c) $v_{\text{ist}} = 3 + \cos t\text{ m/s}$; $a_{\text{ist}} = -\sin t\text{ m/s}^2$; d) $v_{\text{ist}} = \left(2 - \frac{2}{3}t\right)e^{-\frac{t}{3}}$; $a_{\text{ist}} = \left(\frac{2t}{9} - \frac{4}{3}\right)e^{-\frac{t}{3}}$

Ad2. Calcolare la derivata rispetto a t della funzione $E(t) = \frac{1}{2} m[v(t)]^2$ dove $v(t) = bt^4$ e b è una costante.

[Risposta: $\frac{dE}{dt} = 4mb^2t^7$]

Ad3. Calcolare le componenti del vettore velocità e del vettore accelerazione dato il vettore spostamento, dove s è misurato in metri, t in secondi e le costanti hanno opportune unità di misura:

a) $\mathbf{s}(t) = 8t\mathbf{i} + 16t^2\mathbf{j}$ b) $\mathbf{s}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$ c) $\mathbf{s}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$

[Risposte: a) $\mathbf{v}(t) = 8\mathbf{i} + 32t\mathbf{j}$; $\mathbf{a}(t) = 32\mathbf{j}$; b) $\mathbf{v}(t) = 4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{a}(t) = 4\mathbf{i}$; c) $\mathbf{v}(t) = 4t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{a}(t) = 4\mathbf{i}$]

Ad4. Calcolare il modulo del vettore spostamento, del vettore velocità e del vettore accelerazione in corrispondenza di $t = 2\text{ s}$, relativi all'esercizio precedente.

[Risposte: a) $|\mathbf{s}| = 66\text{m}$; $|\mathbf{v}| = 64.5\text{ m/s}$; $|\mathbf{a}| = 32\text{ m/s}^2$; b) $|\mathbf{s}| = 10\text{m}$; $|\mathbf{v}| = 8.5\text{ m/s}$; $|\mathbf{a}| = 4\text{ m/s}^2$; c) $|\mathbf{s}| = 8.94\text{ m}$; $|\mathbf{v}| = 8.24\text{ m/s}$; $|\mathbf{a}| = 4\text{ m/s}^2$]

Ad5. Un pendolo di lunghezza $L = 39.2\text{ cm}$ oscilla all'interno di un mezzo viscoso con moto armonico smorzato, secondo la legge: $s(t) = L \exp(-\lambda t) \cos 3t$. Determinare:

a) la costante di tempo λ , sapendo che la velocità iniziale è $v(0) = -19.6\text{ cm/s}$

b) l'accelerazione $a(t)$ in funzione del tempo

[Risposta: $\lambda = 0.5\text{ s}^{-1}$]

APPLICAZIONE DEL CALCOLO INTEGRALE ALLA CINEMATICA

Ae1. Un punto materiale è sottoposto all'accelerazione variabile col tempo secondo la relazione $a(t) = bt$, dove $b = 2 \text{ m/s}^3$. Sapendo che all'istante iniziale $x(0) = 0$ e $v(0) = 2 \text{ m/s}$, calcolare la velocità e la posizione del punto in funzione del tempo e dopo 2 s dalla partenza.

[Risposta: $v(t) = 1 \text{ m/s}^3 t^2 + 2 \text{ m/s}$; $r(t) = \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^3 + v_0 t$; $v(2) = 6 \text{ m/s}$; $r(2) = 6.67 \text{ m}$]

Ae2. Un punto materiale è sottoposto all'accelerazione variabile secondo la relazione $a(t) = kt^2 + ct$, dove $k = 3 \text{ m/s}^4$ e $c = 1 \text{ m/s}^3$. Sapendo che all'istante iniziale $x(0) = 0$ e $v(0) = 0$, calcolare la velocità e la posizione del punto in funzione del tempo e dopo 1 s dalla partenza.

[Risposta: $v(t) = \frac{k}{3} t^3 + \frac{c}{2} t^2$; $r(t) = \frac{k}{12} t^4 + \frac{c}{6} t^3$; $v(1) = 1.5 \text{ m/s}$; $r(1) = 0.42 \text{ m}$]

Ae3. Il vettore accelerazione di un punto materiale è dato da $\mathbf{a}(t) = (4 \text{ m/s}^2) \mathbf{i}$. Calcolare i vettori posizione $\mathbf{r}(t)$ e velocità $\mathbf{v}(t)$, sapendo che all'istante $t = 0$ velocità e posizione valgono rispettivamente: $\mathbf{v}(0) = (-2 \text{ m/s}) \mathbf{i} + (4 \text{ m/s}) \mathbf{j}$ e $\mathbf{r}(0) = (1 \text{ m}) \mathbf{i} - (6 \text{ m}) \mathbf{j}$.

[Risposta: $\mathbf{v}(t) = [(4 \text{ s}^{-1} t - 2) \text{ m/s}] \mathbf{i} + (4 \text{ m/s}) \mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = [(2 \text{ s}^{-2} t^2 - 2 \text{ s}^{-1} t + 1) \text{ m}] \mathbf{i} + [(4 \text{ s}^{-1} t - 6) \text{ m}] \mathbf{j}$]

Ae4: In riferimento all'esercizio precedente, calcolare le componenti dei vettori velocità e posizione relativi all'istante $t = 1 \text{ s}$.

[Risposta: $\mathbf{v}(1) = (2 \text{ m/s}) \mathbf{i} + (4 \text{ m/s}) \mathbf{j}$, $\mathbf{r}(1) = (1 \text{ m}) \mathbf{i} - (2 \text{ m}) \mathbf{j}$]

Ae5. Un punto materiale, partendo dall'origine del sistema di riferimento, si muove con velocità $v(t) = k\sqrt{t}$ dove $k = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3/2}$. Calcolare lo spazio percorso dopo 2 s dalla partenza.

[Risposta: $s(2) = 3.77 \text{ m}$]

Ae6. Un punto materiale si muove con velocità $v(t) = e^{kt}$, dove $k = 2 \text{ s}^{-1}$, t è misurato in secondi e v in m/s. Calcolare lo spazio percorso nell'intervallo tra 1 s e 2 s.

[Risposta: $s = 23.6 \text{ m}$]

Ae7. Calcolare il modulo del vettore posizione in funzione del tempo, sapendo che il vettore velocità è dato da: $\mathbf{v}(t) = 2t^2 \mathbf{i} + \exp(t) \mathbf{j}$ e che, in corrispondenza di $t = 1 \text{ s}$, la posizione del punto è rappresentata dal vettore: $\mathbf{r}(1) = \frac{2}{3} \mathbf{i} + \exp(1) \mathbf{j}$.

[Risposta: $|\mathbf{r}| = \sqrt{\frac{4}{9} t^6 + \exp(2t)}$]