Lezione 2.
Sistemi dinamici a tempo continuo

Schema della lezione

1. Cos'è un sistema dinamico ?

2. Modelli di sistemi dinamici

3. Il concetto di dinamica

4. Variabili di stato

5. Esempi di modelli matematici a tempo continuo di sistemi dinamici

6. Rappresentazione in variabili di stato di un sistema dinamico

7. Classificazione dei sistemi dinamici

8. Scelta delle variabili di stato

1. Cos'è un sistema dinamico?

Un sistema dinamico è un oggetto (o insieme di oggetti tra loro interconnessi) che interagisce col mondo circostante mediante:

- **ingressi (azioni compiute sul sistema da agenti esterni)**
- **uscite (descrivono la risposta del sistema agli stimoli)**

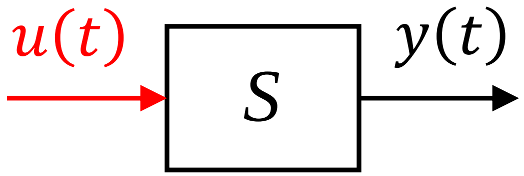
E' indispensabile disporre di **modelli matematici** dei sistemi dinamici per descrivere il loro comportamento (e per poi progettare la legge di controllo!).

Possiamo costruire **modelli a tempo continuo** (che descrivono relazioni tra segnali a tempo continuo) e **modelli a tempo discreto** (che descrivono relazioni tra segnali a tempo discreto).

2. Modelli di sistemi dinamici

ingresso
$u(t) \in \mathbb{R}$

uscita
$y(t) \in \mathbb{R}$



tempo continuo
$t \in \mathbb{R}$

tempo discreto
$t \in \mathbb{Z}$

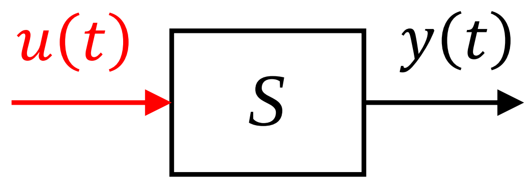
$u(t)$, $y(t)$ funzioni reali
del tempo continuo **reale**

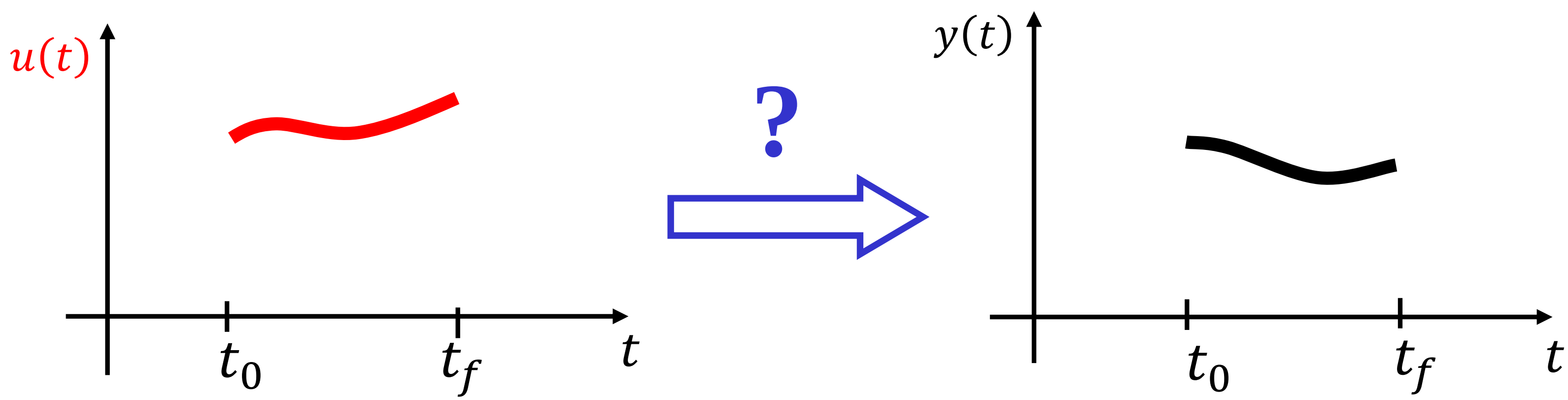
$u(t)$, $y(t)$ funzioni reali
del tempo discreto **intero**

Che tipo di relazioni matematiche
servono nei due casi?

3. Il concetto di dinamica

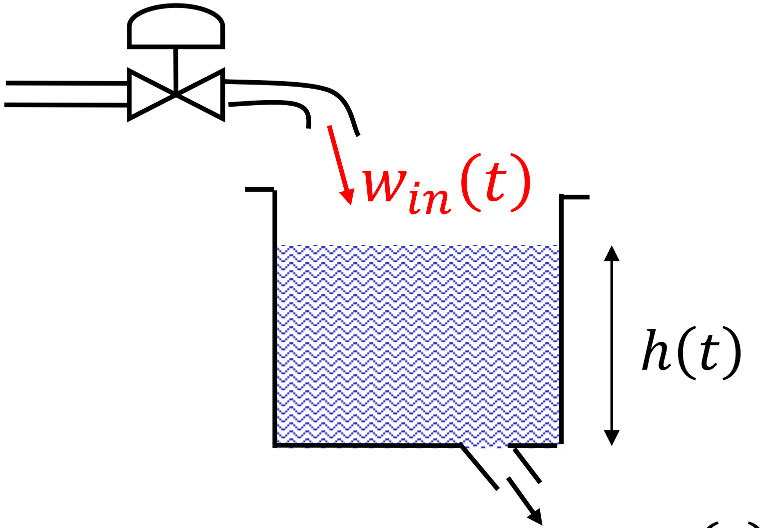
Cosa significa l'aggettivo "**dinamico**" ?

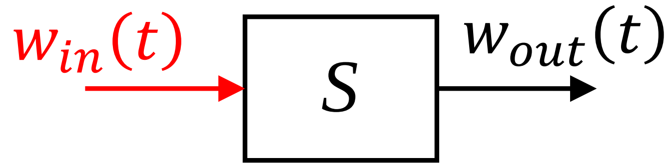




La conoscenza del valore delle <u>variabili di ingresso</u> al tempo *t* non è sufficiente a determinare univocamente il valore delle <u>variabili di uscita</u> al medesimo tempo *t*

Esempio





$w_{in}(t)$ portata in ingresso

$w_{out}(t)$ portata in uscita

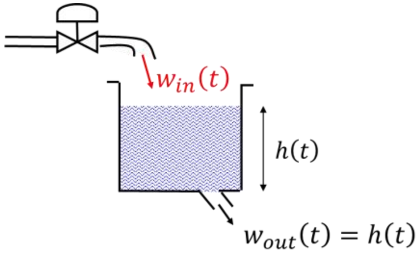
$$w_{out}(t) = kh(t)$$

Per determinare w_{out} bisogna conoscere (oltre a w_{in}) il **livello iniziale del serbatoio**

$$\left.\begin{array}{l} w_{in}(t),\ t \in [t_0, t_f] \\ h(t_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow w_{out}(t),\ t \in [t_0, t_f]$$

E' un sistema dinamico

Facciamo un esempio per capire l'importanza della **condizione iniziale**.

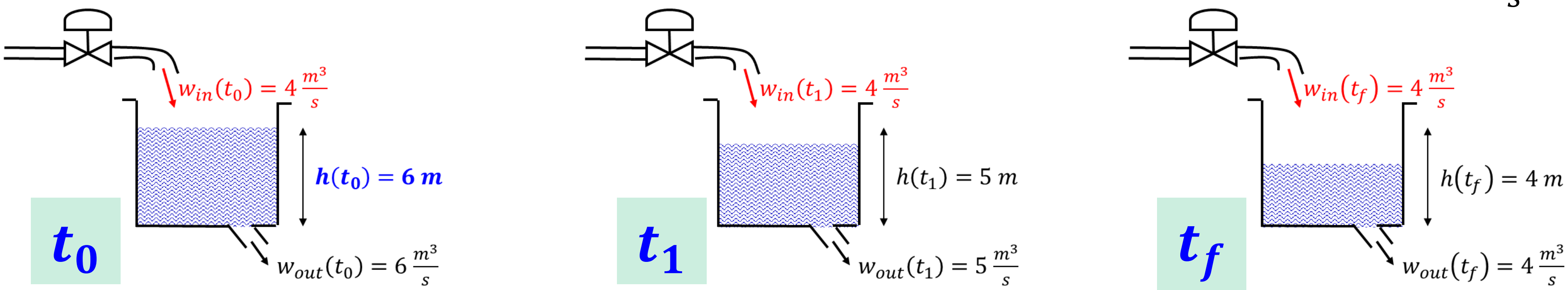


Portate $w_{in}(t)$, $w_{out}(t)$ in $\frac{m^3}{s}$

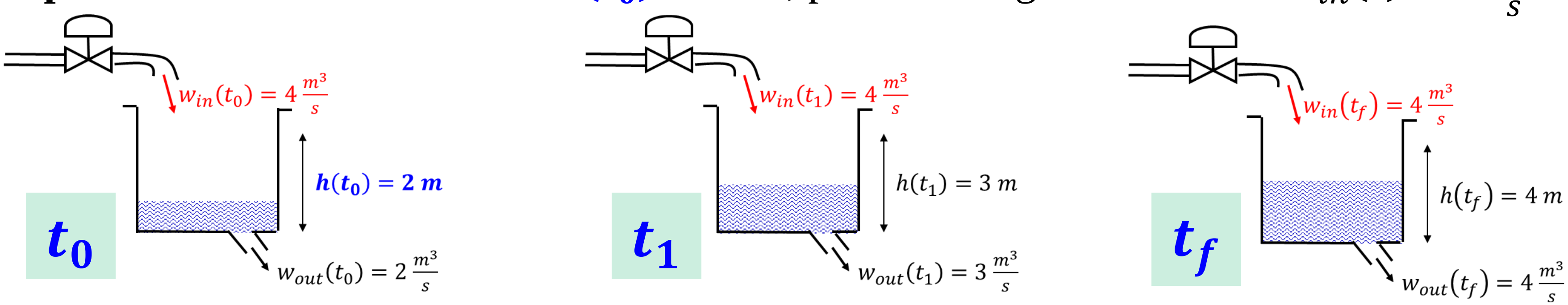
Livello $h(t)$ in m

Fissiamo $k = 1\frac{m^2}{s}$ così si ha che $w_{out}(t) = h(t)$

Esperimento 1 : livello iniziale $\boldsymbol{h(t_0) = 6\ m}$, portata in ingresso costante $w_{in}(t) = 4\frac{m^3}{s}$



Esperimento 2 : livello iniziale $\boldsymbol{h(t_0) = 2\ m}$, portata in ingresso costante $w_{in}(t) = 4\frac{m^3}{s}$



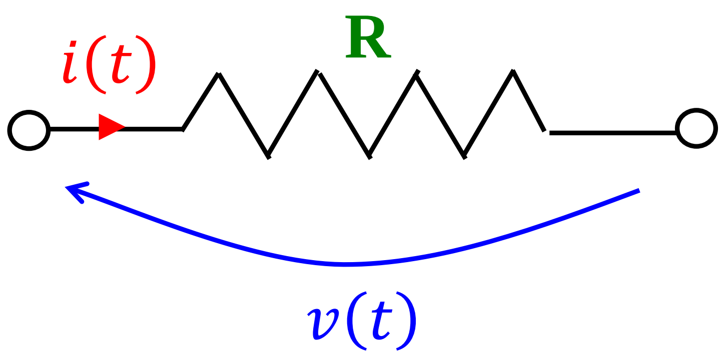
In entrambi gli esperimenti, l'**ingresso è lo stesso** $w_{in}(t) = 4\,\frac{m^3}{s}$, costante per tutta la durata degli esperimenti.

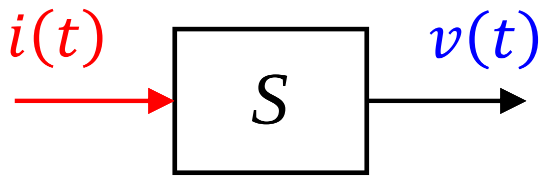
Nel primo caso, il livello iniziale è «alto» e quindi il serbatoio si svuota, cioè **l'andamento dell'uscita è decrescente**.

Nel secondo caso, il livello iniziale è «basso» e quindi il serbatoio si riempie, cioè **l'andamento dell'uscita è crescente**.

Si osservi anche che in entrambi gli esperimenti si raggiunge il medesimo stato finale, in cui l'uscita è costante, come l'ingresso.

Esempio





$i(t)$ corrente nella resistenza

$v(t)$ tensione ai capi della resistenza

Legge di Ohm

$$v(t) = Ri(t)$$

Basta conoscere $i(t)$ per determinare univocamente $v(t)$

E' un sistema NON dinamico

- Bisogna conoscere **qualcosa di più** oltre al semplice andamento delle variabili di ingresso (condizioni iniziali a t.c.)

- Serve “**memoria**” per sapere in che condizioni, **in che stato si trova il sistema** nell’istante in cui si comincia ad applicare l’ingresso

- La ragione non è puramente matematica (Se uso eq.differenziali devo conoscere le condizioni iniziali)

4. Variabili di stato

Variabili **interne** del sistema la cui conoscenza al tempo iniziale t_0 costituisce la minima informazione necessaria per determinare l'uscita $y(t)$, per $t \geq t_0$, in conseguenza dell'applicazione di un ingresso $u(t)$, per $t \geq t_0$

$$x_i(t) \quad i = 1,2,\dots,n \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

n è l'**ordine del sistema**

vettore di stato

$$\begin{matrix} u(t),\ t \geq t_0 \\ \mathbf{x}(t_0) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad y(t),\ t \geq t_0$$

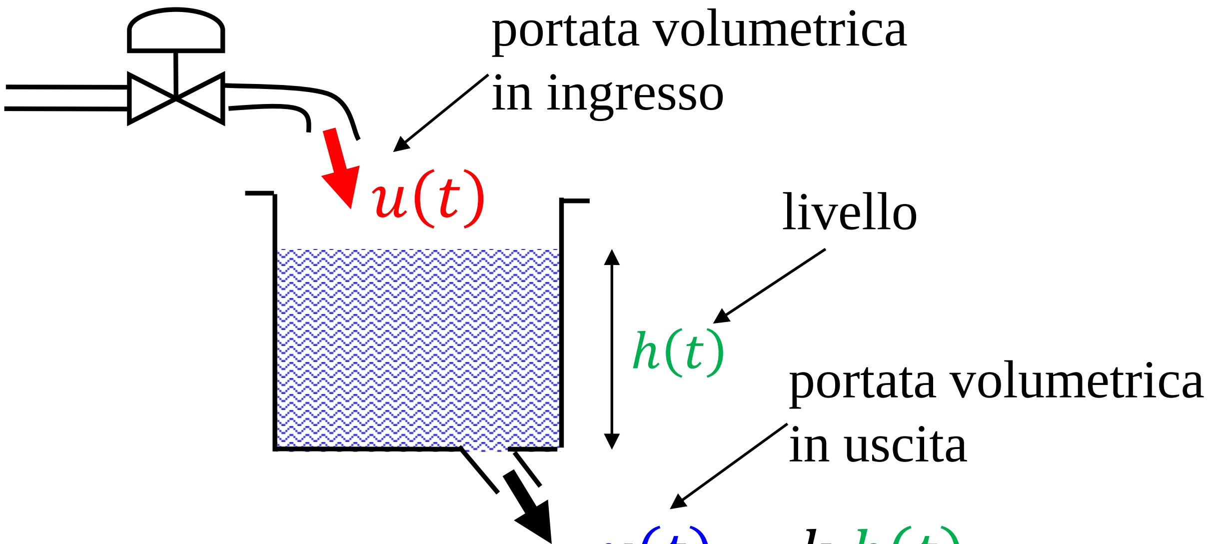
5. Esempi di modelli matematici a tempo continuo di sistemi dinamici

Nel seguito presenteremo alcuni esempi di modelli matematici a tempo continuo di sistemi dinamici. Vedremo che la relazione ingresso-uscita in sistemi dinamici a tempo continuo è descritta da equazioni differenziali.

Il procedimento sarà sempre il medesimo:

- Si parte dalla descrizione della **fisica del sistema** utilizzando **equazioni di conservazione/bilancio** (di volume, di forze, di tensioni, di correnti,…).
- Se il sistema è dinamico, si ottiene un'**equazione differenziale** in cui è possibile identificare una variabile **causa** (l'ingresso) ed una variabile **effetto** (l'uscita, incognita dell'equazione differenziale), entrambe **dipendenti dal tempo**.
- Assegnato un **valore iniziale per l'uscita** (l'incognita / lo stato) e le sue derivate e assegnata una funzione di ingresso, si può integrare l'equazione differenziale ed ottenere l'andamento nel tempo dell'uscita (il movimento dell'uscita).

Esempio 1 – modello di un serbatoio



$$y(t) = k\,h(t)$$

L'area di base è A,
quindi il volume è

$$V(t) = A\,h(t) = A\frac{y(t)}{k}$$

Conservazione del volume

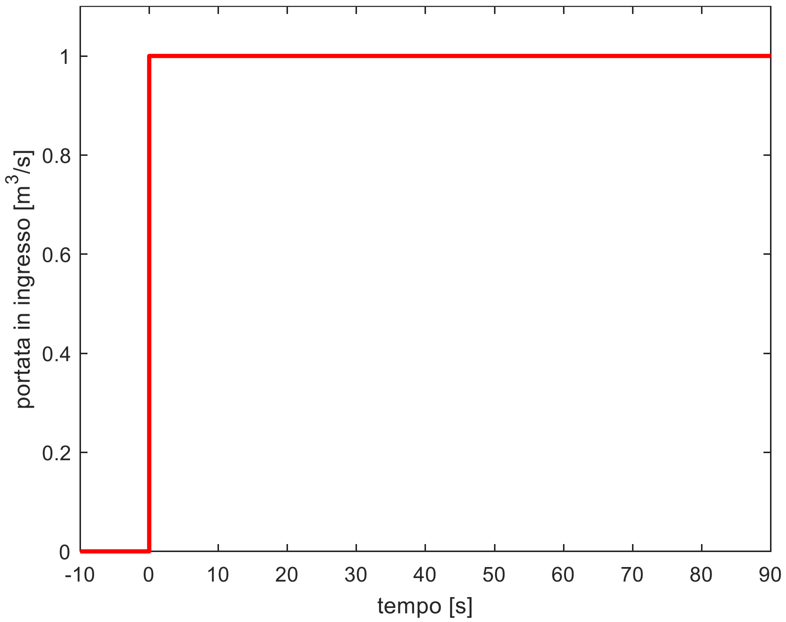
$$\frac{dV(t)}{dt} = u(t) - y(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{k}\dot{y}(t) = u(t) - y(t) \quad \Rightarrow$$

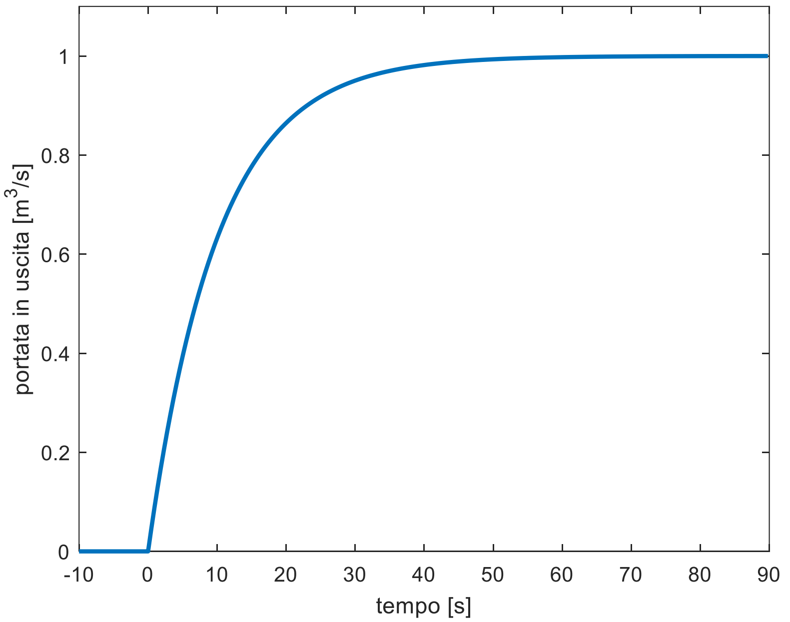
$$\boxed{\dot{y}(t) + \frac{k}{A}y(t) = \frac{k}{A}u(t)}$$

Equazione differenziale del 1° ordine,
lineare, non omogenea,
a coefficienti costanti

Consideriamo un **serbatoio inizialmente vuoto** ($h(0) = 0\ m$) con area di base $A = 1\ m^2$ e con coefficiente di deflusso $k = 0.1\ {}^{m^2}/_{s}$.

Vogliamo riempirlo con una **portata in ingresso costante** $u(t) = \bar{u} = 1\ {}^{m^3}/_{s}$.



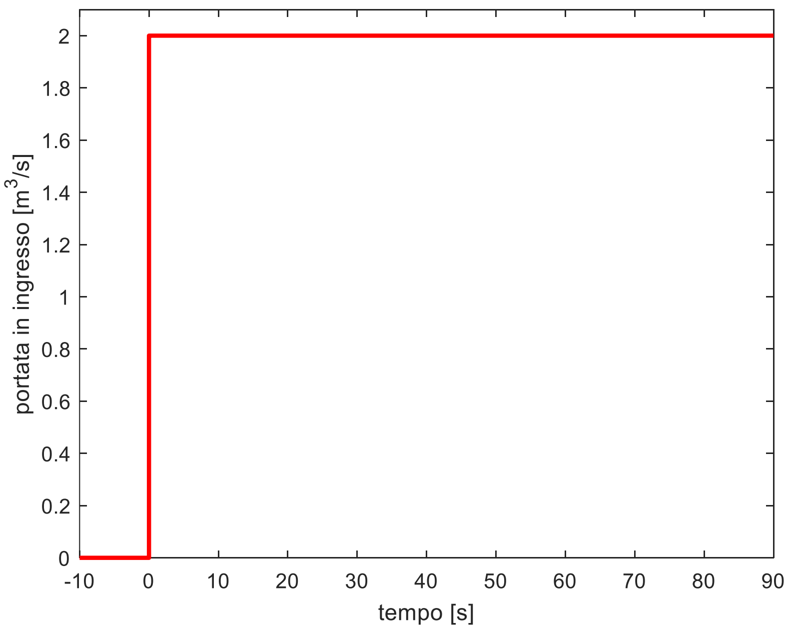


Questo segnale si chiama scalino di ampiezza unitaria e si indica con

$$u(t) = sca(t)$$

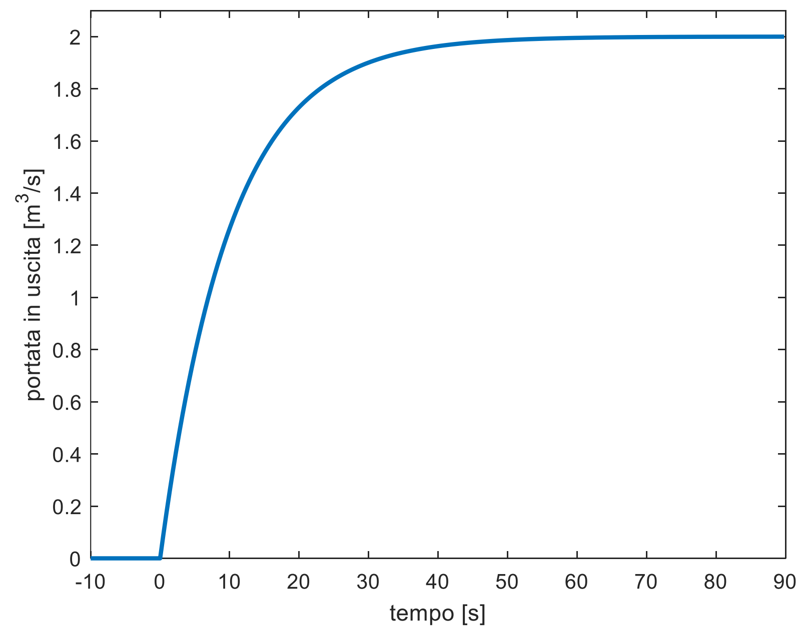
La portata in uscita raggiunge il valore $y(t) = 1\ {}^{m^3}/_{s}$ in circa $40 - 50\ s$

Cosa cambia se uso **portata in ingresso costante doppia** $u(t) = \bar{u} = 2\ {}^{m^3}/_{s}$.



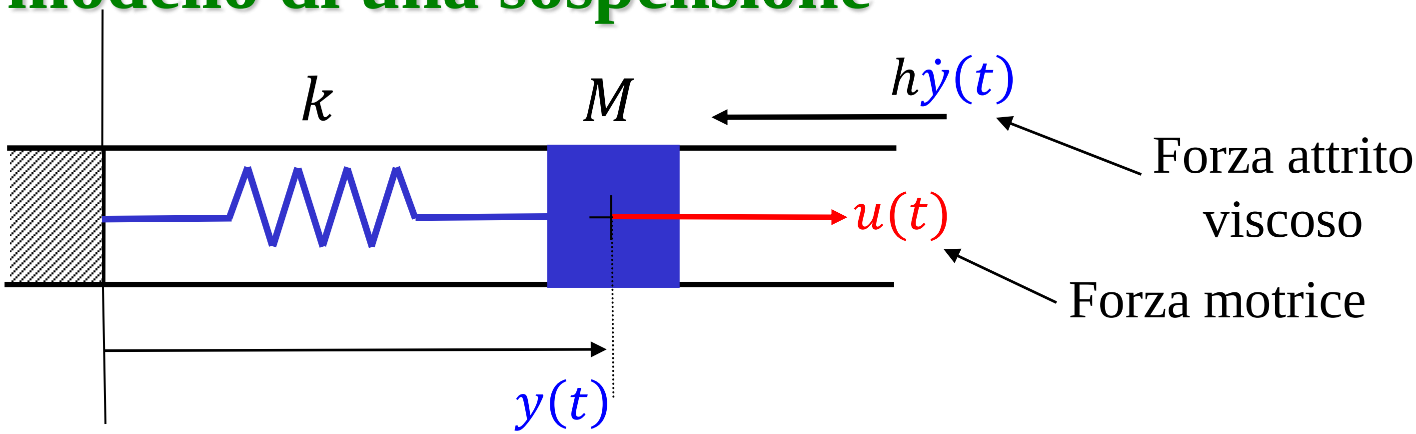
Questo segnale si chiama scalino di ampiezzia 2 e si indica con

$$u(t) = 2sca(t)$$



La portata in uscita raggiunge il valore $y(t) = 2\ {}^{m^3}/_{s}$ in circa $40 - 50\ s$ (lo stesso tempo di prima)

Esempio 2 – modello di una sospensione



Forza apparente

Bilancio forze

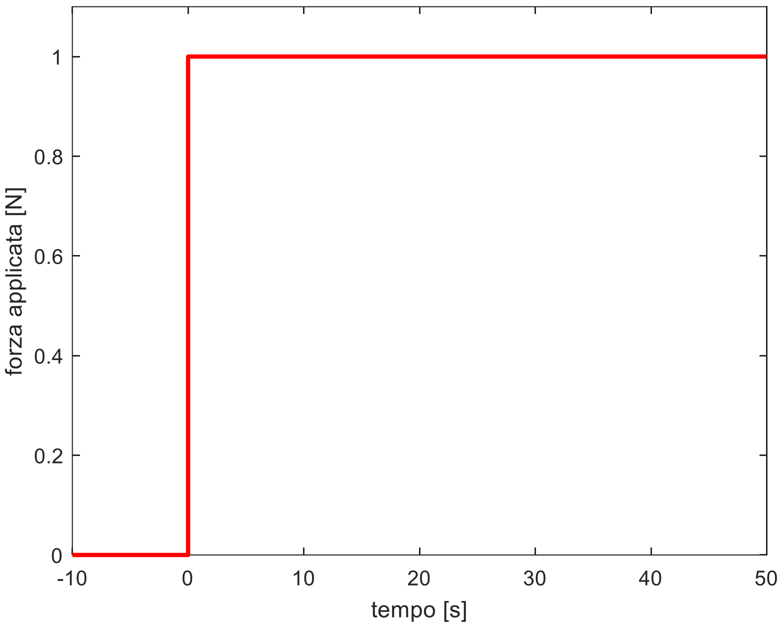
Forza di richiamo della molla

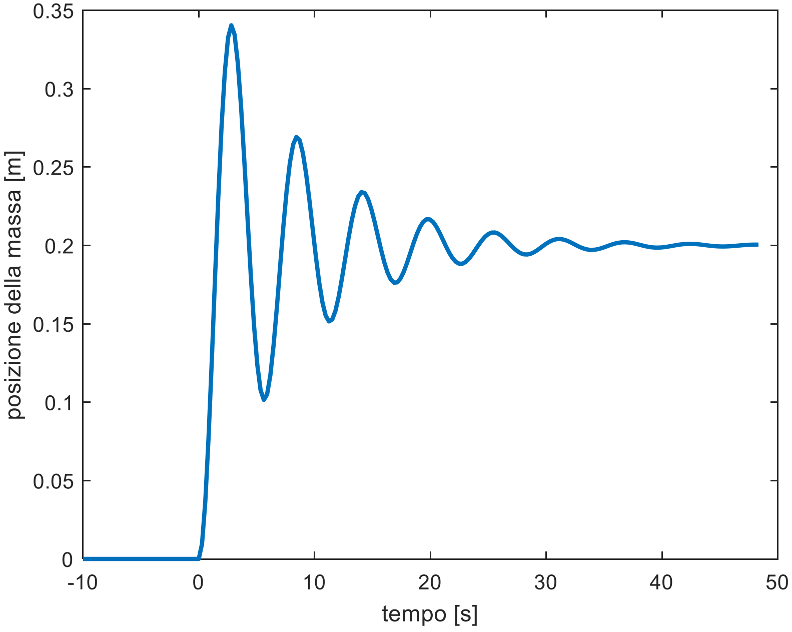
$$M\ddot{y}(t) = u(t) - ky(t) - h\dot{y}(t)$$

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \frac{h}{M}\dot{y}(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{1}{M}u(t)}$$

Equazione differenziale del 2° ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti

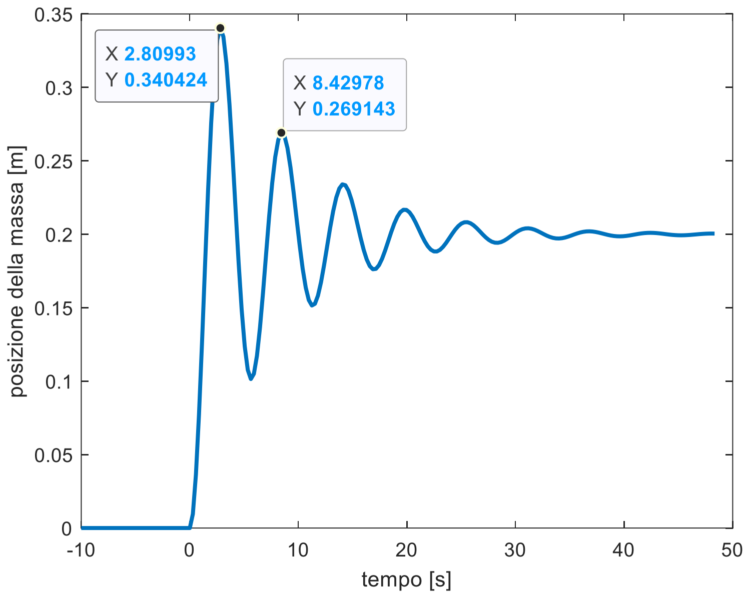
Si consideri una sospensione **inizialmente ferma in posizione nulla**, cioè $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, con massa $M = 4\,kg$, costante elastica della molla $k = 5\ {}^{N}/_{m}$ e coefficiente di attrito viscoso $h = 1\ {}^{Ns}/_{m}$.
Si applichi una **forza costante** $u(t) = \bar{u} = 1\ N$.





La massa raggiunge la posizione di equilibrio $y(t_{fin}) = 0.2\ m$ coerentemente con il fatto che quando la sospensione è ferma deve valere la legge di Hooke per la molla. Infatti la forza applicata è $u(t) = 1\ N$ e la costante elastica è $k = 5\ {}^{N}/_{m}$ e quindi si ha $y(t_{fin}) = \frac{\bar{u}}{k}$.

Si noti inoltre che la risposta presenta oscillazioni (è poco «smorzata»).



Il periodo delle oscillazioni è $T = 5.62\ s$ e quindi la pulsazione è $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.12\ rad/s$. Si osservi che questo è esattamente il valore della pulsazione naturale del sistema $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = 1.12\ rad/s$

Osservazione

Se chiamamo

- ✓ la posizione $y(t) = x_1(t)$
- ✓ la velocità $\dot{y}(t) = x_2(t)$

possiamo scrivere l'**<u>equazione di secondo ordine</u>** che descrive il sistema come un sistema di **<u>due equazioni di primo ordine</u>**.

$$M\ddot{y}(t) = u(t) - ky(t) - h\dot{y}(t)$$

$$M\dot{x}_2(t) = u(t) - kx_1(t) - hx_2(t)$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{k}{M}x_1(t) - \dfrac{h}{M}x_2(t) + \dfrac{1}{M}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Due equazioni differenziali di primo ordine nelle due incognite $\boldsymbol{x_1(t)}$ e $\boldsymbol{x_2(t)}$.

Possiamo scrivere il sistema in **forma matriciale** definendo il vettore

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{k}{M}x_1(t) - \dfrac{h}{M}x_2(t) + \dfrac{1}{M}u(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{M} & -\dfrac{h}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{M} & -\dfrac{h}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

Anche l’equazione

$$y(t) = x_1(t)$$

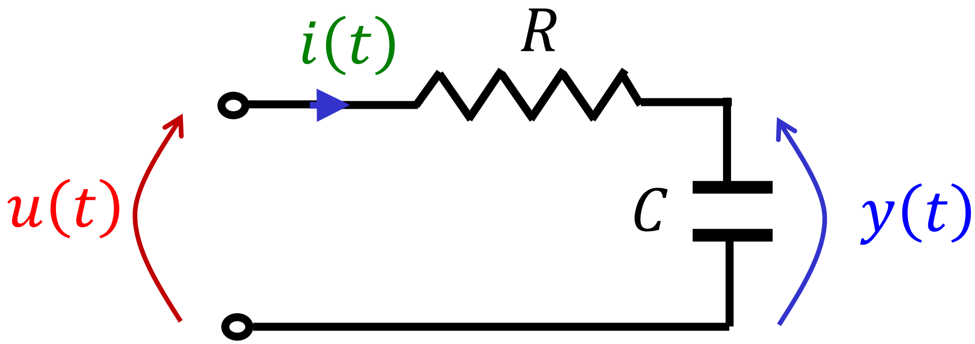
può essere scritta in forma matriciale

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{M} & -\dfrac{h}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Esempio 3 – modello di un circuito RC serie



Bilancio di tensione (nella maglia)

$$u(t) = R\, i(t) + y(t)$$

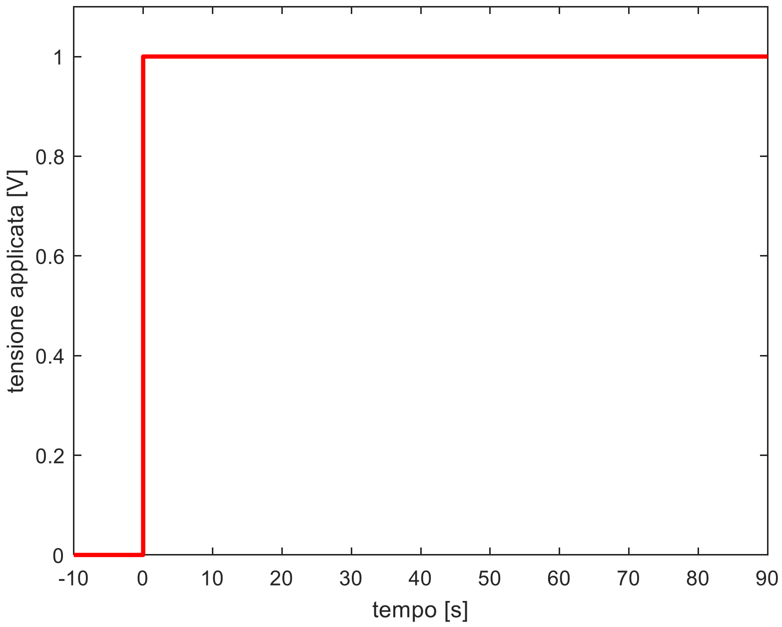
$$i(t) = C\dot{y}(t) \quad \Longrightarrow \quad u(t) = RC\dot{y}(t) + y(t)$$

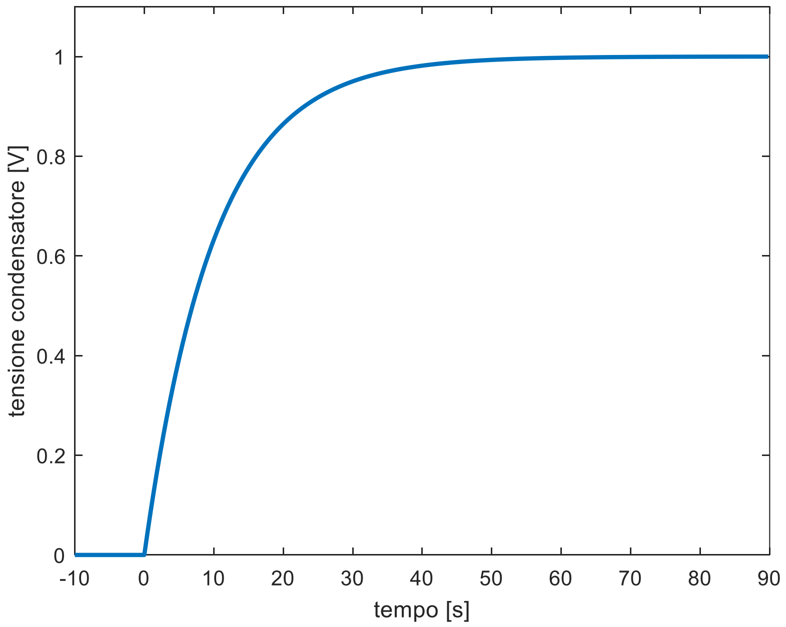
$$\boxed{\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)}$$

Equazione differenziale del 1° ordine,
lineare, non omogenea,
a coefficienti costanti

Consideriamo il **condensatore inizialmente scarico** ($y(0) = 0\ V$) e siano $R = 100\ \Omega$ e $C = 0.1\ F$.

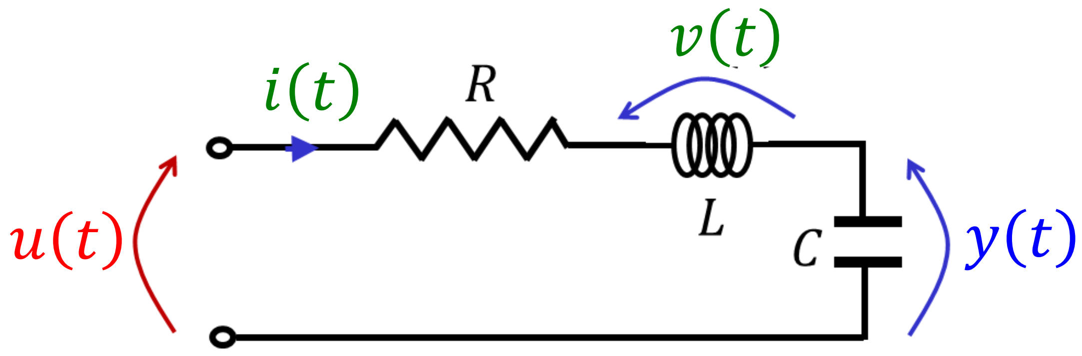
Vogliamo caricare il condensatore con una **tensione in ingresso costante** $u(t) = \bar{u} = 1\ V$.





La tensione ai capi del condensatore raggiunge il valore $y(t) = 1\ V$ in circa $40 - 50\ s$. E' molto simile (identico!) alla dinamica di riempimento del serbatoio.

Esempio 4 – modello di un circuito RLC serie



Bilancio di tensione (nella maglia)

$$u(t) = R\,i(t) + v(t) + y(t)$$

$$i(t) = C\dot{y}(t)$$

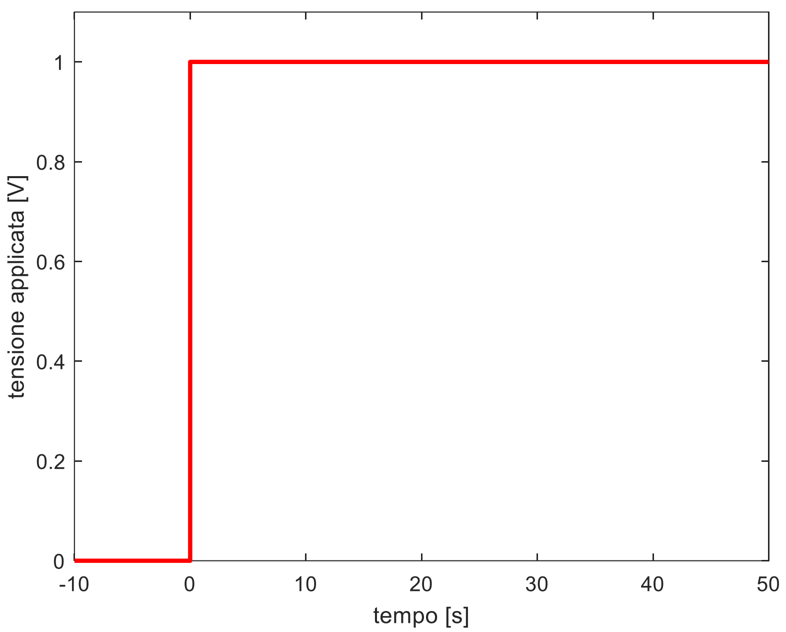
$$v(t) = L\,\dot{i}(t) = LC\ddot{y}(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = RC\dot{y}(t) + LC\ddot{y}(t) + y(t)$$

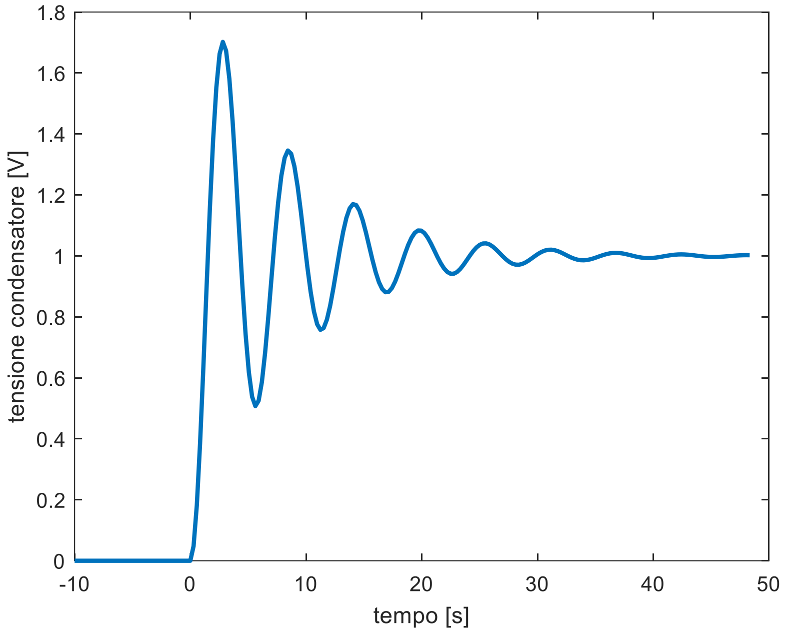
$$\boxed{\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)}$$

Equazione differenziale del 2° ordine,
lineare, non omogenea,
a coefficienti costanti

Consideriamo il **condensatore inizialmente scarico** ($y(0) = 0\ V$) e siano $R = 0.1\ \Omega$, $C = 2\ F$, $L = 0.4\ H$.

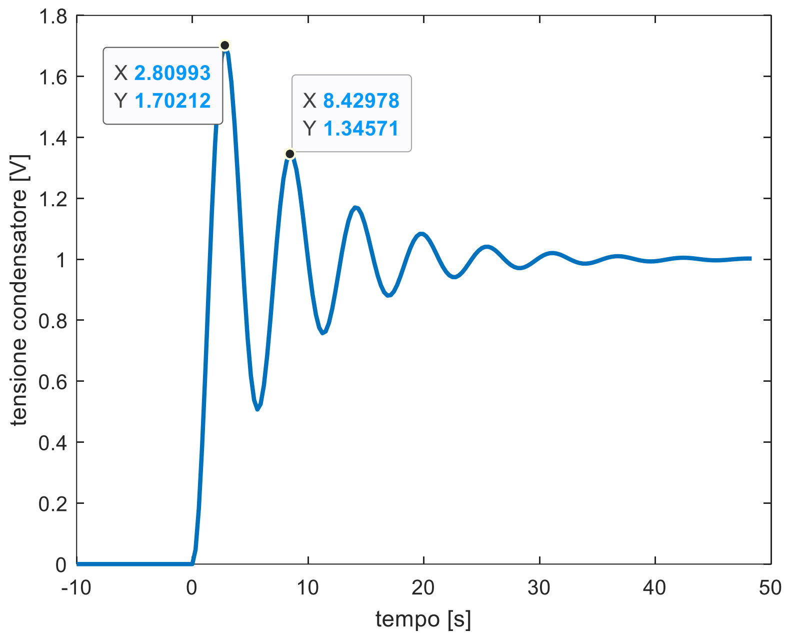
Vogliamo caricare il condensatore con una **tensione in ingresso costante** $u(t) = \bar{u} = 1\ V$.





La tensione ai capi del condensatore raggiunge il valore $y(t) = 1\ V$ in circa $40 - 50\ s$. E' molto simile (identico!) alla dinamica della sospensione.

Si noti inoltre che la risposta presenta oscillazioni (è poco «smorzata»).



Il periodo delle oscillazioni è $T = 5.62\ s$ e quindi la pulsazione è $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.12\ rad/s$. Si osservi che questo è esattamente il valore della pulsazione naturale del sistema $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 1.12\ rad/s$.

E' identica al caso della sospensione!

Osservazione

Anche in questo caso possiamo scrivere il sistema in forma matriciale chiamando

- ✓ la tensione ai capi del condensatore $y(t) = x_1(t)$
- ✓ la corrente nell'induttore $i(t) = x_2(t)$

Ricordando che $i(t) = C\dot{y}(t)$, cioè $\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}x_2(t)$, si ha

$$\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

$$\frac{1}{C}\dot{x}_2(t) + \frac{R}{LC}x_2(t) + \frac{1}{LC}x_1(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{C}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{1}{L}x_1(t) - \dfrac{R}{L}x_2(t) + \dfrac{1}{L}u(t) \end{cases}$$

Due equazioni differenziali di primo ordine nelle due incognite $\boldsymbol{x_1(t)}$ e $\boldsymbol{x_2(t)}$.

Possiamo scrivere il sistema in forma matriciale definendo il vettore

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{C} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{1}{L} x_1(t) - \dfrac{R}{L} x_2(t) + \dfrac{1}{L} u(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u(t)$$

Per l'equazione

$$y(t) = x_1(t)$$

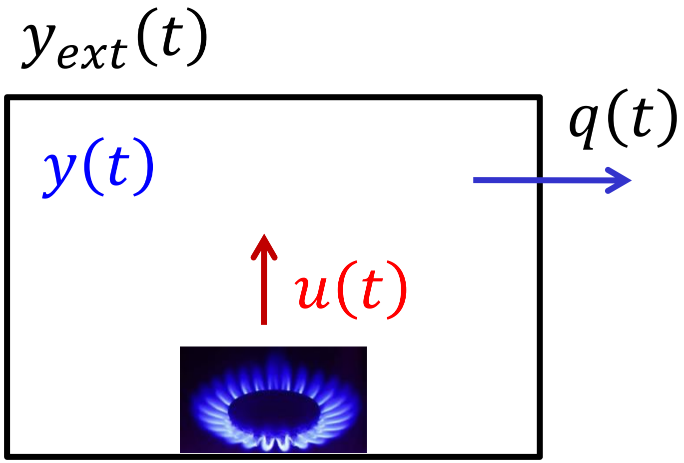
valgono le stesse identiche considerazioni fatte per il sistema massa-molla

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Quindi possiamo scrivere infine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Esempio 5 – modello di un forno



$u(t)$ Energia termica immessa nel forno

$y(t)$ Temperatura nel forno

$q(t)$ Energia termica dispersa nell'ambiente

$$q(t) = k\big(y(t) - y_{ext}(t)\big) \cong k\, y(t)$$

Bilancio Energia Interna

$$\frac{dQ(t)}{dt} = u(t) - k\, y(t)$$

$Q(t) = C\, y(t)$ Energia interna $\Rightarrow$ $C\dot{y}(t) = u(t) - k\, y(t)$

$$\boxed{\dot{y}(t) + \frac{k}{C} y(t) = \frac{1}{C} u(t)}$$

Equazione differenziale del 1° ordine,
lineare, non omogenea,
a coefficienti costanti

Conclusione degli esempi 1-5

$$\dot{y}(t) + \frac{k}{A}y(t) = \frac{k}{A}u(t)$$ Serbatoio

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$ Carica condensatore

$$\dot{y}(t) + \frac{k}{C}y(t) = \frac{1}{C}u(t)$$ Forno

$$\boxed{\dot{y}(t) + \alpha y(t) = \beta u(t)}$$

Sono le stesse equazioni.

Descrivono le medesime relazioni causa-effetto.

Dal punto di vista dell'automatica sono sistemi dinamici con le medesime caratteristiche.

$$\ddot{y}(t) + \frac{h}{M}\dot{y}(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{1}{M}u(t)$$ Massa-molla con attrito (smorzatore)

$$\ddot{y}\,(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$ Carica condensatore - induttore

$$\boxed{\ddot{y}\,(t) + \alpha_1\dot{y}(t) + \alpha_2 y(t) = \beta u(t)}$$

Infine osserviamo che anche le equazioni di secondo ordine, quando espresse in forma matriciale, sono molto simili.

massa-molla-smorzatore

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0]\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

circuito RLC

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0]\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

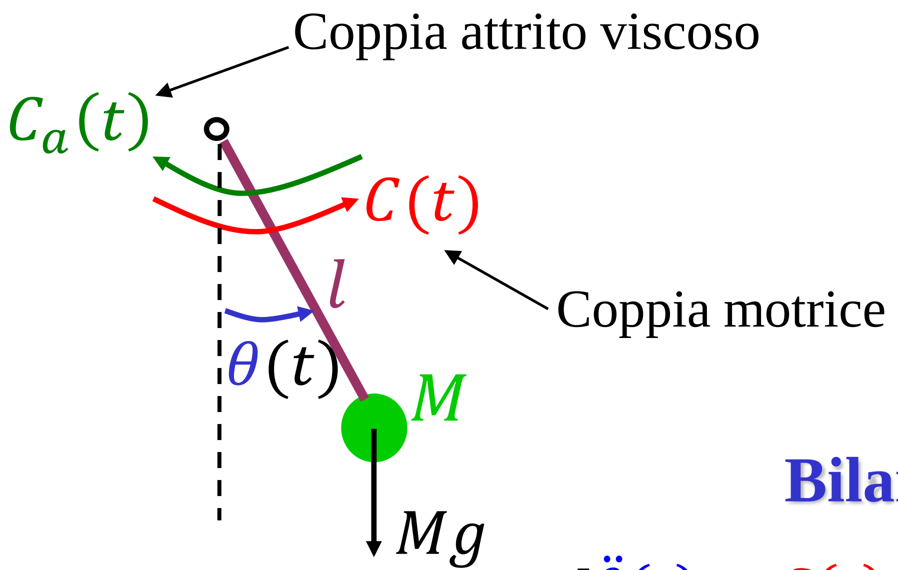
$\boldsymbol{A}$ è una matrice 2×2

$\boldsymbol{B}$ è un vettore 2×1

$\boldsymbol{C}$ è un vettore 1×2

Facilmente generalizzabile al caso di ordine n generico

Esempio 6 – modello di un pendolo



$J = Ml^2$ momento di inerzia

$C_a(t) = h\dot{\theta}(t)$ Coppia attrito viscoso

Bilancio coppie

$$J\ddot{\theta}(t) = C(t) - Mgl\sin\big(\theta(t)\big) - C_a(t)$$

Coppia apparente

Coppia di gravità

$$Ml^2\ddot{\theta}(t) = -Mgl\sin\big(\theta(t)\big) - h\dot{\theta}(t) + C(t)$$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\big(\theta(t)\big) + \frac{h}{Ml^2}\dot{\theta}(t) = \frac{1}{Ml^2}C(t)}$$

Equazione differenziale del 2° ordine, **<u>NON lineare</u>**, non omogenea, a coefficienti costanti

Scegliamo le variabili di stato, ingresso, uscita

$C(t) \to u(t)$ ingresso (causa)

$\theta(t) \to x_1(t)$

stato (due variabili)

$\dot{\theta}(t) \to x_2(t)$

$\theta(t) \to y(t)$ uscita (effetto)

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) + \frac{h}{Ml^2}\dot{\theta}(t) = \frac{1}{Ml^2}C(t)$$

Si può quindi scrivere

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{h}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{g}{l}\,\mathbf{\sin(x_1(t))} - \dfrac{h}{Ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{Ml^2}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Funzione non lineare della variabile di stato

Abbiamo riscritto l'equazione differenziale del secondo ordine come sistema di 2 equazioni differenziali del 1° ordine, **NON lineari**, a coefficienti costanti. Come fatto per gli altri esempi.

Non si può però mettere nella forma matriciale introdotta precedentemente. Essa è utilizzabile solo per sistemi lineari.

5. Rappresentazione di stato (sistemi SISO stazionari)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

equazione di stato

trasformazione di uscita

stato iniziale

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$	$u(t) \in \mathbb{R}$	$y(t) \in \mathbb{R}$
vettore	scalare	scalare

$\mathbf{f}(\cdot)$ è una funzione vettoriale a valori in $\mathbb{R}^n$

$g(\cdot)$ è una funzione scalare a valori in $\mathbb{R}$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) - u(t) \end{cases}$$

$$x(0) = 0$$

$f(x(t), u(t))$

$g(x(t), u(t))$

$t_0 = 0$

$x(t) \in \mathbb{R}$ ⇨ L'ordine del sistema è $n = 1$

$u(t) \in \mathbb{R}$ sono scalari

$y(t) \in \mathbb{R}$

$f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sono funzioni scalari lineari di u ed x

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) \\ y(t) = 3x_1(t) \end{cases}$$

$f_1(x_1(t), x_2(t), u(t))$

$f_2(x_1(t), x_2(t), u(t))$

$g(x_1(t), x_2(t), u(t))$

$x_1(0) = 1;\ \ x_2(0) = 2$

$t_0 = 0$

Si osservi che la trasformazione d'uscita non dipende esplicitamente da $u(t)$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ L'ordine del sistema è $n = 2$

$u(t) \in \mathbb{R}$

$y(t) \in \mathbb{R}$

sono scalari

$\mathbf{f}(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \end{bmatrix}$ è funzione **<u>vettoriale</u>** lineare di u ed $\mathbf{x}$

$g(\cdot)$ è funzione scalare lineare di u ed $\mathbf{x}$

6. Classificazione dei sistemi dinamici

Sistema strettamente proprio

Non c'è dipendenza diretta dell'uscita $y(t)$ dall'ingresso $u(t)$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(\mathbf{x}(t)\big) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Non compare $u(t)$

Altrimenti, si dice **proprio** (non strettamente).

Sistema SISO (Single Input Single Output)

Ingresso ed uscita sono **scalari**, cioè $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$

In questo corso non saranno trattati i sistemi
***MIMO** (**Multiple Input Multiple Output**)*

Sistema lineare

$\mathbf{f}(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sono funzioni lineari di u e di $\mathbf{x}$.

Altrimenti, si dice **non lineare**

Esistono anche **sistemi tempo-varianti** . C'è presenza esplicita della variabile tempo nelle equazioni del sistema.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t), t) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Compare esplicitamente t

In questo corso si studieranno solo sistemi **tempo-invarianti** (o stazionari)

Esempi di sistemi tempo-varianti

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + \sin(t)\, u(t) \\ y(t) = 2x(t) \end{cases}$$

$f(x(t), u(t), t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.5x(t) + 2u(t) \\ y(t) = 2tx(t) \end{cases}$$

$g(x(t), u(t), t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t^2 x(t) + 2u(t) \\ y(t) = \log(t) x(t) + 0.25u(t) \end{cases}$$

$f(x(t), u(t), t)$

$g(x(t), u(t), t)$

Sistema tempo-variante

$\mathbf{f}(\cdot)$ e/o $g(\cdot)$ **dipendono esplicitamente** dalla variabile temporale t.

Esempi di sistemi MIMO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.1x(t) + u_1(t) \\ y(t) = x(t) - 0.25u_2(t) \end{cases} \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

«MISO»

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - 0.2u(t) \\ y_1(t) = 2x(t) \\ y_2(t) = 0.5x(t) \end{cases} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

«SIMO»

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.15x(t) - 0.3u_2(t) \\ y_1(t) = x(t) + u_1(t) \\ y_2(t) = -x(t) \end{cases} \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Sistema MIMO (Multiple Input – Multiple Output)

L'ingresso $\mathbf{u}(t)$ e/o uscita $\mathbf{y}(t)$ sono **vettoriali**.

Esempi di sistemi lineari e non lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + 0.15u(t) \\ y(t) = 0.1x(t) \end{cases}$$

lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.7x(t) - u(t) \\ y(t) = -x(t) - u(t) \end{cases}$$

lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.2x^2(t) - u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.1x(t) + \sin(u(t)) \\ y(t) = -0.1x(t) \end{cases}$$

non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.25x(t) + 0.1\sqrt{u(t)} \\ y(t) = -\dfrac{1}{x(t)} \end{cases}$$

non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + \log(t)u(t) \\ y(t) = 0.05x(t) \end{cases}$$

lineare

E' tempo-variante, ma lineare!

Sistema non lineare

$\mathbf{f}(\cdot)$ e/o $g(\cdot)$ sono **non lineari** in $\mathbf{x}(t)$ e/o $u(t)$.

Esempi di sistemi strettamente propri e propri

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + 0.15u(t) \\ y(t) = 0.1x(t) \end{cases}$$

strettamente proprio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.7x(t) - u(t) \\ y(t) = -x(t) - u(t) \end{cases}$$

proprio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.2x^2(t) - u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

strettamente proprio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.1x(t) + \sin\big(u(t)\big) \\ y(t) = -0.1x(t) + 0.15u(t) \end{cases}$$

proprio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t^2x(t) + 2u(t) \\ y(t) = \log(t)x(t) + 0.25u(t) \end{cases}$$

proprio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.15x(t) - 0.3u_2(t) \\ y_1(t) = x(t) + u_1(t) \\ y_2(t) = -x(t) \end{cases}$$

proprio

Sistema proprio

$g(\cdot)$ **dipende esplicitamente dall'ingresso** $u(t)$.

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) \end{cases}$$

Ingresso ed uscita sono scalari,
cioè $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ **SISO**

Non c'è dipendenza esplicita
dell'uscita $y(t)$ dall'ingresso $u(t)$ $\Rightarrow$ **strettamente proprio**

Non c'è presenza esplicita
della variabile tempo $\Rightarrow$ **tempo-invariante**

$f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sono lineari in $x(t)$ e $u(t)$ $\Rightarrow$ **lineare**

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u_1(t) - 3u_2(t) \\ y(t) = 2x(t) - u_1(t) \end{cases}$$

L'ingresso **non** è uno scalare,
infatti $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ **MIMO**

C'è dipendenza esplicita
dell'uscita $y(t)$ dall'ingresso $\mathbf{u}(t)$ $\Rightarrow$ **Proprio**

Non c'è presenza esplicita
della variabile tempo $\Rightarrow$ **tempo-invariante**

$f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sono lineari in $x(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ $\Rightarrow$ **lineare**

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x^2(t) + \sin(t)\, u(t) \\ y(t) = 2x(t) \end{cases}$$

Ingresso ed uscita sono scalari,
cioè $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$ ⇒ **SISO**

Non c'è dipendenza esplicita
dell'uscita $y(t)$ dall'ingresso $u(t)$ ⇒ **strettamente proprio**

C'è presenza esplicita
della variabile tempo ⇒ **tempo-variante**

$f(\cdot)$ è funzione non lineare di $x(t)$ ⇒ **non lineare**

7. Scelta delle variabili di stato

Come si scelgono $x_1(t), \ldots, x_n(t)$?

- Esistono criteri generali per la scelta delle variabili di stato? **SI**
- La scelta è univoca? **NO**
- L'ordine del sistema è fissato? **SI**

Criterio matematico

Sistema descritto da un'equazione differenziale di ordine n nell'incognita $y(t)$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \phi\left(\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t), u(t)\right)$$

Scegliere come variabili di stato l'incognita e le sue prime $n-1$ derivate

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \phi\big(x_n(t), \dots, x_2(t), x_1(t), u(t)\big) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Esempio

$$\dddot{y}(t) = \sqrt{2y(t)\dot{y}(t)} + \frac{5u(t)}{1 + \ddot{y}(t)^2}$$

Scegliere

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$
$$x_3(t) = \ddot{y}(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \sqrt{2x_1(t)x_2(t)} + \dfrac{5u(t)}{1 + x_3(t)^2} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Criterio fisico

Variabili di stato → Grandezze associate ad accumuli di energia, massa,...

Sistemi elettrici	tensione (condensatori)	Energia elettrica
	corrente (induttori)	Energia magnetica
Sistemi meccanici	posizione	Energia potenziale
	velocità	Energia cinetica
Sistemi termici	temperatura	Energia interna
Sistemi idraulici	livello (serbatoi)	Accumulo massa

La scelta delle variabili di stato non è univoca

- Non è obbligatorio scegliere le variabili di stato affidandosi ai criteri visti

- Fare scelte “originali” può essere svantaggioso (o **vantaggioso!**) in termini di complessità della rappresentazione matematica (anche se il sistema è lo stesso!)

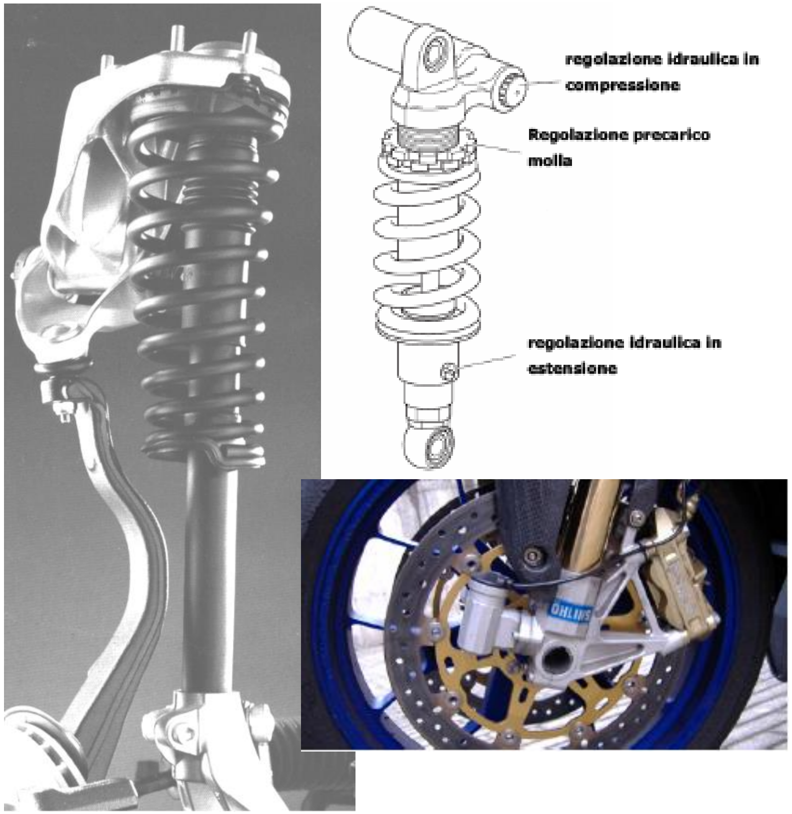
- Mediante trasformazione lineare è comunque possibile passare da una rappresentazione all’altra.

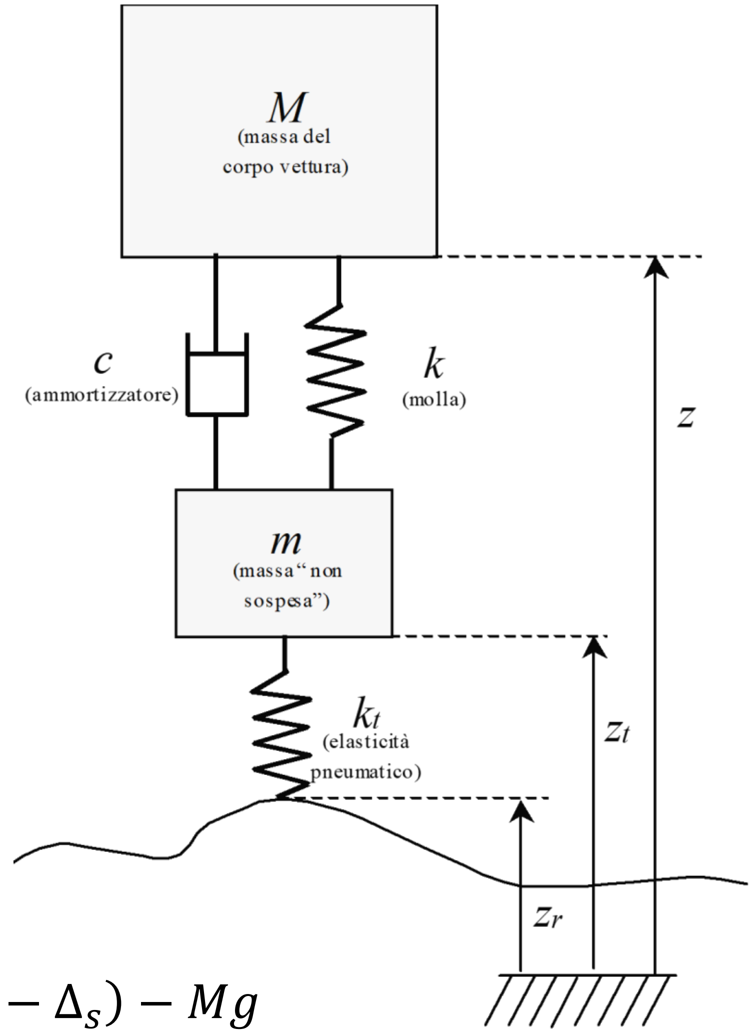
L’ordine del sistema è univocamente fissato

- L’ordine del sistema è fissato a parità di complessità e accuratezza usate nel descrivere i fenomeni modellizzati

- Maggiore è l’accuratezza con cui desidero descrivere i fenomeni, maggiore sarà il numero di variabili di stato da usare

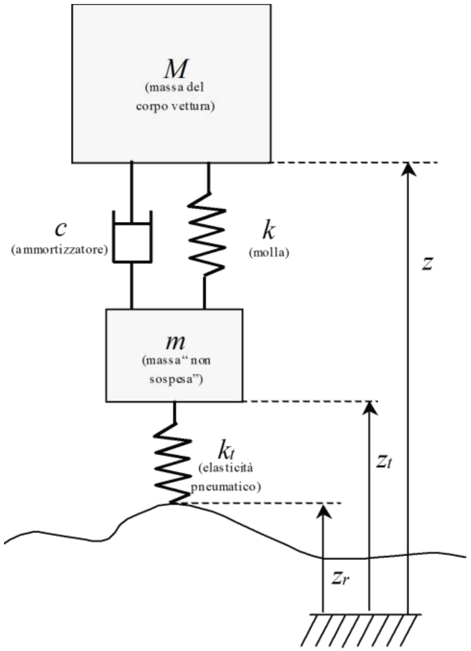
Esempio – Modellistica di una sospensione a smorzamento controllato





$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -\boldsymbol{c(t)}(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +\boldsymbol{c(t)}(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -\boldsymbol{c(t)}(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +\boldsymbol{c(t)}(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t)) - \Delta_s - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \end{cases}$$

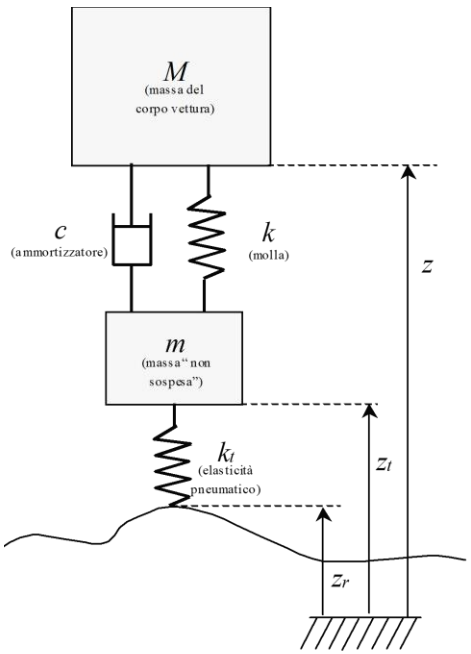


$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ z_t(t) \\ \dot{z}_t(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} z_r(t) \\ \boldsymbol{c(t)} \end{bmatrix} \quad y(t) = z(t)$$

Sistema MIMO, del 4° ordine ($n = 4$), non-lineare, tempo-invariante, strettamente proprio.

$\boldsymbol{c(t)}$ è un ingresso, è la variabile di controllo. La variabile $z_r(t)$ è un disturbo.

$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -\boldsymbol{c(t)}(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +\boldsymbol{c(t)}(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t)) - \Delta_s - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \end{cases}$$



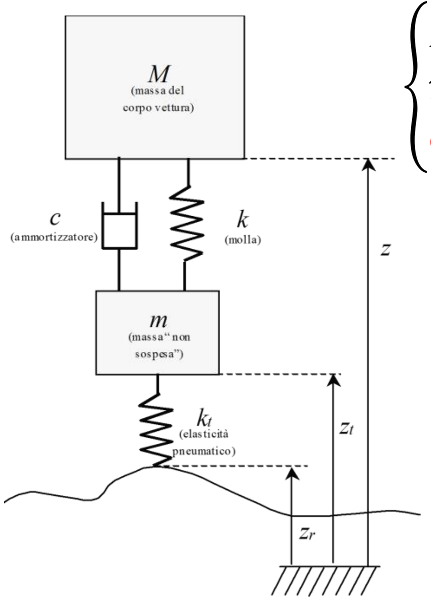
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ z_t(t) \\ \dot{z}_t(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = z_r(t) \qquad y(t) = z(t)$$

Sistema SISO, del 4° ordine ($n = 4$), lineare, tempo-variante, strettamente proprio.

$\boldsymbol{c(t)}$ è un parametro tempo-variante (non è nè una variabile di stato, nè un ingresso, nè un’uscita)

E’ lo stesso sistema di prima! Le stesse equazioni!

Posso descrivere anche la dinamica dello smorzamento (dinamica dell'attuatore) …



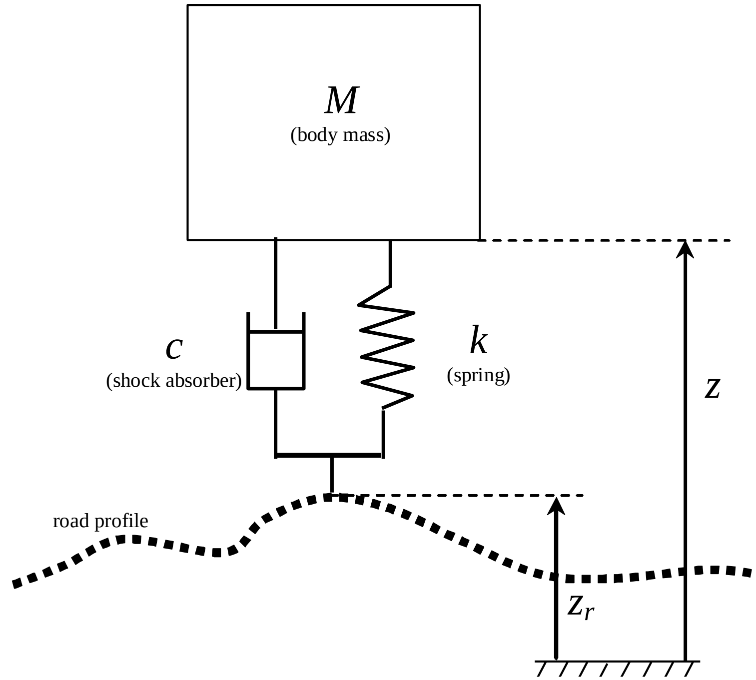
$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \\ \dot{c}(t) = -\beta c(t) + \beta c_{in}(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ z_t(t) \\ \dot{z}_t(t) \\ c(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} z_r(t) \\ c_{in}(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = z(t)$$

Sistema MIMO, del 5° ordine (n=5), non-lineare, tempo-invariante, strettamente proprio.

$\boldsymbol{c(t)}$ è una variabile di stato. $c_{in}(t)$ è un ingresso, è la variabile di controllo.

… ma anche alternativamente NON descrivere la dinamica dello pneumatico!



$$M\ddot{z}(t) = -\mathbf{c(t)}(\dot{z}(t) - \dot{z}_r(t)) - k(z(t) - z_r(t) - \Delta_s) - Mg$$

Rappresentazione di stato (completa)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

equazione di stato

trasformazione di uscita

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

stato iniziale

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$$

$\mathbf{f}(\cdot)$ è una funzione vettoriale a valori in $\mathbb{R}^n$

$\mathbf{g}(\cdot)$ è una funzione vettoriale a valori in $\mathbb{R}^p$

$\mathbf{f}(\cdot)$ e $\mathbf{g}(\cdot)$ possono dipendere esplicitamente dal tempo