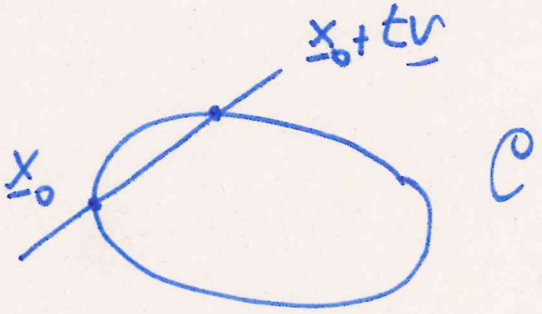
Retta Tangente ad una conica - Punti doppi.

Supponiamo che $\underline{x}_0$ appartenga alla conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$(8) \qquad \underline{x}^t B \underline{x} + 2\underline{x}^t \underline{c} + d = 0$$

Fra tutte le rette $\underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{v}$ passanti per $\underline{x}_0$ selezioniamo quelle tangenti a $\mathcal{C}$.



Sostituisco l'eq. della retta in (8):

$$(\underline{x}_0+t\underline{v})^t B(\underline{x}_0+t\underline{v}) + 2(\underline{x}_0+t\underline{v})^t\underline{c}+d=0$$

$$\underbrace{\underline{x}_0^t B\underline{x}_0 + 2\underline{x}_0^t\underline{c}+d}_{=0} + t\Big(\underbrace{\underline{x}_0^t B\underline{v}}_{=\underline{v}^tB\underline{x}_0} + \underline{v}^t B\underline{x}_0 + 2\underline{v}^t\underline{c}\Big) + t^2\underline{v}^t B\underline{v} = 0$$

0 perché $\underline{x}_0 \in \mathcal{C}$, $\underline{v}^t B\underline{x}_0$ perché B simmetrica.

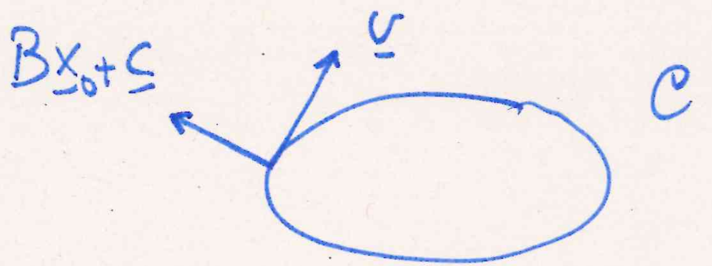
$$(9) \qquad 2t\,\underline{v}^t(B\underline{x}_0+\underline{c}) + t^2\underline{v}^t B\underline{v} = 0$$

La retta $\underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{v}$ è tangente a $\mathcal{C}$ in $\underline{x}_0 \iff t=0$ è soluzione doppia di (9) $\iff \cancel{B}\ \underline{v}^t(B\underline{x}_0+\underline{c})=0 \iff \underline{v}\cdot(B\underline{x}_0+\underline{c})=0$

$\iff$ il vettore $B\underline{x}_0+\underline{c}$ è ortogonale al vettore $\underline{v}$ tangente alla conica.

Due casi:

- Se $B\underline{x}_0+\underline{c} \neq \underline{0}$, allora $B\underline{x}_0+\underline{c}$ è un vettore normale a $\mathcal{C}$ in $\underline{x}_0$

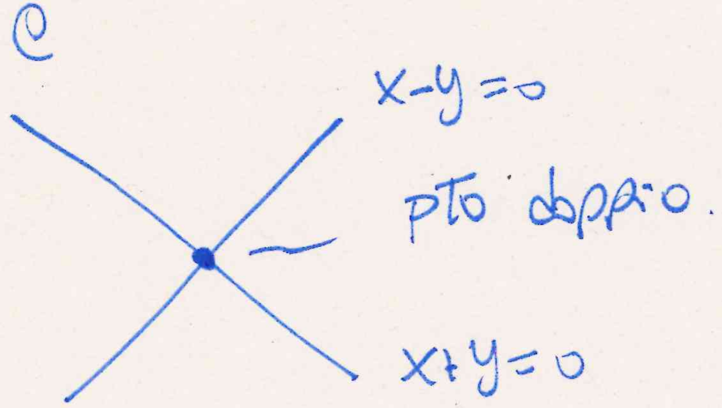


Eq. della retta tangente a $\mathcal{C}$ in $\underline{x}_0$ è

$$(\underline{x}-\underline{x}_0)^t(B\underline{x}_0+\underline{c})=0$$

- Se $B\underline{x}_0+\underline{c}=\underline{0}$ ogni retta passante per $\underline{x}_0$ ha intersezione (almeno) doppia con $\mathcal{C}$ (in $\underline{x}_0$). In tal caso si dice che $\underline{x}_0$ è un punto doppio (o singolare) della conica

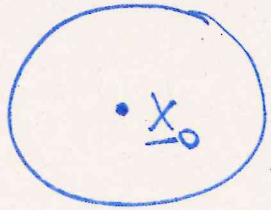
Oss:
Esempio: $\mathcal{C}: x^2 - y^2 = 0$



Esercizio: determinare i punti doppi per ogni tipo di conica.

Oss: Abbiamo visto che $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ è un centro di simmetria della conica $\mathcal{C}$ se $B\underline{x}_0 + \underline{c} = \underline{0}$.

Non è detto che tale centro $\underline{x}_0$ esista e (se esiste) non è detto che $\underline{x}_0 \in \mathcal{C}$.



D'altra parte $\underline{x}_0 \in \mathcal{C}$ è punto doppio se $B\underline{x}_0 + \underline{c} = \underline{0}$.

Quindi $\underline{x}_0$ è un punto doppio se $\begin{cases} \text{è un centro di simmetria } (B\underline{x}_0 + \underline{c} = \underline{0}) \\ \cancel{\text{se}}\ \underline{x}_0 \in \mathcal{C} \end{cases}$

QUADRICHE

Una quadrica è il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo:

$$\boxed{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz}+\boxed{2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z}+\boxed{a_{44}}=0$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ non tutti nulli.

In forma matriciale:

$$\underline{x}^t B \underline{x} + 2\underline{x}^t \underline{c} + d = 0$$

dove

$$\underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \underline{c}=\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}, \quad d=a_{44}$$

↳ simmetrica

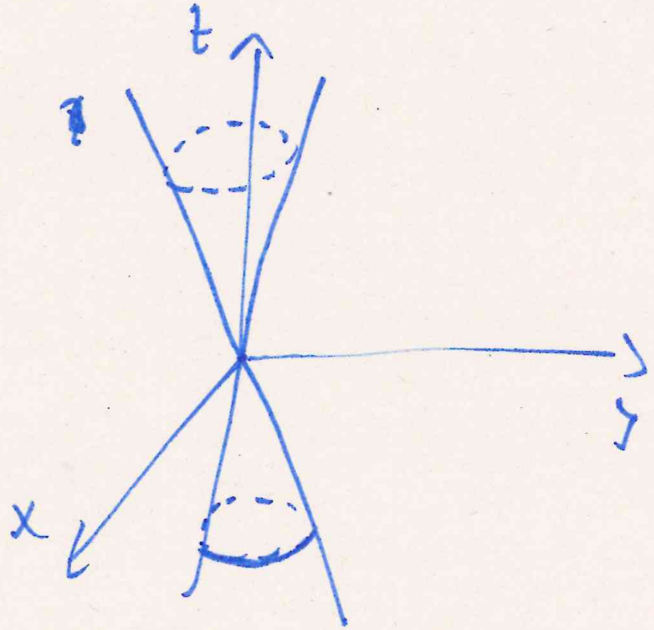
Esempi:

1) $x^2+y^2+z^2-1=0$ (Sfera)

2) $x^2+y^2-1=0$ (cilindro circolare retto)

3) $z^2-1=0$ $(z-1)(z+1)=0$ $z=1$ oppure $z=-1$ (Coppia di piani paralleli)

4) $x^2+y^2-z^2=0$ (Cono)



Classificazione delle quadriche. Forma canonica.

Procediamo come con le coniche.

i) Trasformazione ortogonale (che diagonalizza B)

ii) Traslazione per centrare opportunamente gli assi.

—

i) B simmetrica $\Rightarrow$ esiste $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di B:

$$B\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i \quad i=1,2,3.$$

La matrice $M = (\underline{u}_1 | \underline{u}_2 | \underline{u}_3)$ è ortogonale $(M^{-1} = M^t)$ e se x', y', z' sono ~~gli assi~~ le coordinate relative a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ allora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

L'eq. della quadrica diventa

(1) $$\underbrace{\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2}_{} + 2c_1' x' + 2c_2' y' + 2c_3' z' + d' = 0$$

↳ diagonalizzazione della forma quadratica associata a B.

dove $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ e $d' = d$.

ii) Traslazione. Distinguiamo i seguenti casi:

CASO I : $\det B \neq 0$

Poiché $\det B = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ allora $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$.

Dopo la traslazione:

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{c_1'}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \dfrac{c_2'}{\lambda_2} \\ z'' = z' + \dfrac{c_3'}{\lambda_3} \end{cases}$$

l'eq. (1) diventa

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \lambda_3 (z'')^2 + d'' = 0$$

Scriviamo per comodità $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$

e consideriamo due sottocasi:

CASO I.1: $d \neq 0$ - Possiamo dividere per d e otteniamo

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 = 1 \qquad \left(a_1 = -\frac{\lambda_1}{d},\ a_2 = -\frac{\lambda_2}{d},\ a_3 = -\frac{\lambda_3}{d} \right)$$

I casi possibili sono quelli descritti nella Tabella 1.

CASO I.2: $d = 0$ - Abbiamo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0 \qquad [\Rightarrow \text{Tabella 2}]$$

CASO II : $\det B = 0$

In tal caso almeno un autovalore di B è nullo (possiamo sempre supporre che sia λ_3). Partendo dall'equazione

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2c_1' x' + 2c_2' y' + 2c_3' z' + d' = 0$$

abbiamo i seguenti sottocasi:

CASO II. 1 $\quad c_3' \neq 0$ (e inoltre $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$). Si verifica che dopo la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{c_1'}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \dfrac{c_2'}{\lambda_2} \\ z'' = z' + \dfrac{1}{2c_3'}\left(d' - \dfrac{(c_1')^2}{\lambda_1} - \dfrac{(c_2')^2}{\lambda_2} \right) \end{cases}$$

l'equazione diventa

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + 2c_3' z'' = 0$$

[Tabella 3]

CASO IV. 2 $\quad c_3' = 0$ _ In tal caso z' non compare nell'equazione, e quindi otteniamo un cilindro la cui forma dipende dalla conica

$$\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2c_1' x' + 2c_2' y' + d' = 0\}$$

Abbiamo quindi:

- cilindro
  - ellittico
  - iperbolico
  - parabolico
- due piani incidenti
- asse z
- piano doppio.

Tabella 1 : $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2=1$

a_1	a_2	a_3	quadrica	forma canonica
+	+	+	ellissoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
+	+	-	iperboloide iperbolico (o a una falda)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
+	-	-	iperboloide ellittico (o a due falde)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
-	-	-	$\emptyset$	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

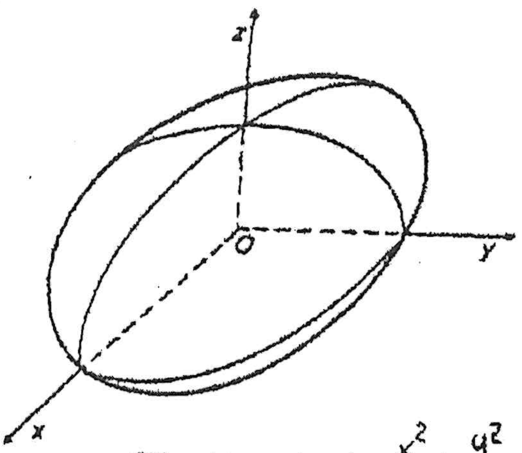
Tabella 2: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	quadrica	forma canonica
segni uguali	punto $\{(0,0,0)\}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
segni diversi	cono	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

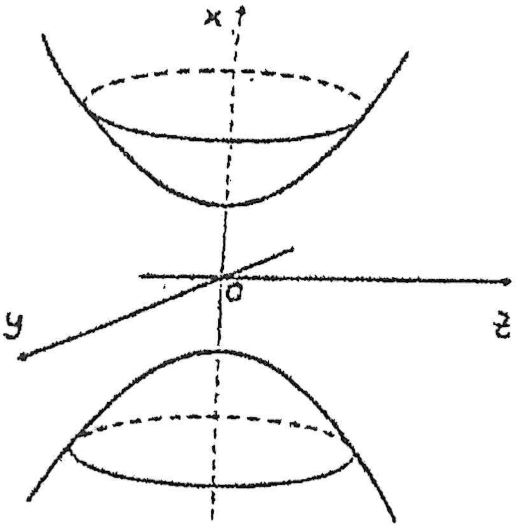
Tabella 3: $\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + 2 c_3'' z'' = 0$

λ_1, λ_2	quadrica	forma canonica
segni uguali	paraboloide ellittico	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
segni diversi	paraboloide iperbolico	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

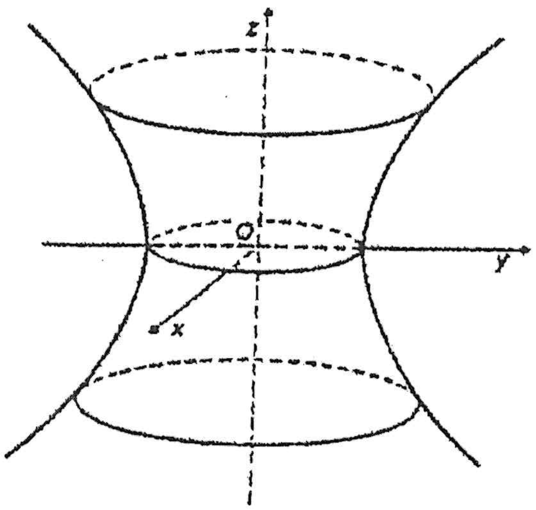
Quadriche a centro:



Ellissoide reale : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

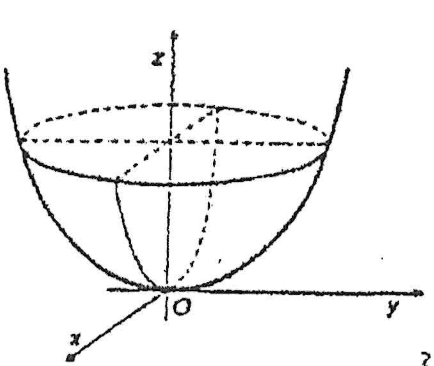


Iperboloide ellittico : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

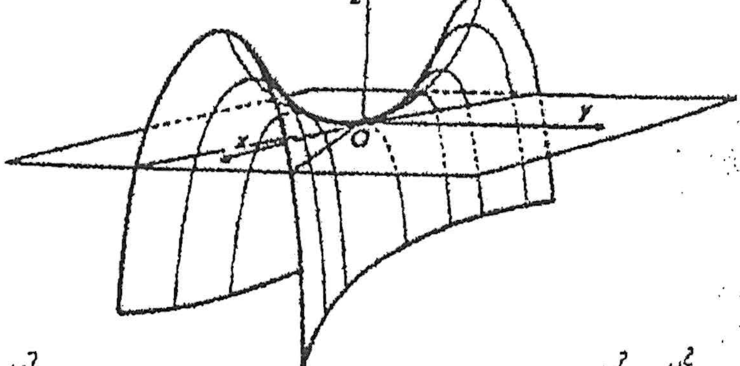


Iperboloide iperbolico : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Paraboloidi:



Paraboloide ellittico : $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



Paraboloide iperbolico : $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

OSS: ~~Oss~~: Come per le coniche, le soluzioni $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ di:

$$B\underline{x}_0 + \underline{c} = \underline{0}$$

Sono centri di simmetria delle quadriche.

OSS: Come per le coniche, se $\underline{x}_0$ appartiene alla quadrica allora un vettore $\underline{v}$ tangente alla quadrica in $\underline{x}_0$ soddisfa l'eq. $\underline{v} \cdot (B\underline{x}_0 + \underline{c}) = 0$.

- Se $\underline{x}_0$ è t.c. $B\underline{x}_0 + \underline{c} \neq \underline{0}$ allora $B\underline{x}_0 + \underline{c}$ è un vettore normale al piano tangente alla quadrica in $\underline{x}_0$.
- Se $\underline{x}_0$ è t.c. $B\underline{x}_0 + \underline{c} = \underline{0}$ allora è detto punto doppio (o singolare) della quadrica

Esercizio: determinare eventuali centri di simmetria e punti doppi per ogni tipo di quadrica.