SISTEMI LINEARI

Def: Un sistema lineare $m \times n$ è un sistema di m equazioni di primo grado in n incognite:

$$
\begin{array}{l}
(E_1) \\
(E_2) \\
\\
\\
(E_m)
\end{array}
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\qquad (*)
$$

dove $x_1, \dots, x_n$ sono le incognite, i termini a_{ij} sono i coefficienti del sistema e $b_1, \dots, b_m$ sono i termini noti.

Una soluzione del sistema è una n-upla $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ che, sostituita nel sistema soddisfa tutte le equazioni.

oss: Se $m = n = 1$ allora $(*)$ diventa $ax = b$ e si hanno tre casi:

i) Se $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ (soluzione unica)

ii) Se $a = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow 0 \cdot x = b \Rightarrow 0 = b$ (impossibile)

iii) Se $a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$ (infinite soluzioni)

Def: Il sistema lineare $(*)$ si dice

i) determinato se ammette un'unica soluzione

ii) impossibile se non ne ha

iii) indeterminato se ha infinite soluzioni

Forma matriciale di un sistema lineare

Il sistema lineare (*) può essere scritto nella forma matriciale

$$\boxed{A\underline{x} = \underline{b}}$$

dove $A = (a_{ij}) \in Mat(m,n)$ è la matrice dei coefficienti

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ è il vettore (colonna) delle incognite

$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ " " " (") dei termini noti.

Esempio:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = \sqrt{2} \\ -x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}} \underset{\underline{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{\underline{b}}{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Consideriamo di seguito tre casi:

- $A \in Mat(n,n)$
- $A \in Mat(m,n)$ e $\underline{b} = \underline{0}$
- caso generale

Sistemi di n equazioni in n incognite

Consideriamo il sistema

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

con $A \in Mat(n,n)$ e quindi $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

Se $\det A \neq 0$ allora esiste la matrice inversa A^{-1}. Quindi se

$$A\underline{x} = \underline{b} \Longrightarrow A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \Longrightarrow I_n \underline{x} = A^{-1}\underline{b} \Longrightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

Pertanto

$$\det A \neq 0 \Longrightarrow \boxed{\underline{x} = A^{-1}\underline{b}} \qquad (**)$$

Abbiamo quindi il

Teorema di Cramer: Se $\det A \neq 0$, allora il sistema di n incognite in n equazioni $A\underline{x} = \underline{b}$ è determinato. La sua soluzione è data da (**)

OSS: Vedremo che vale anche l'implicazione inversa: se il sistema $n \times n$ è determinato, allora $\det A \neq 0$.

Quindi: $\det A = 0 \quad \begin{cases} \text{sistema impossibile} \\ \text{" \quad indeterminato.} \end{cases}$

Esempio:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ 4y - z = -7 \\ 5x + 8z = 34 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 34 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$\det A = -1 \neq 0$ [verificare], per il Teorema di Cramer il sistema è determinato.

Dalla (**), la soluzione è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 34 \end{pmatrix}$$ [completare]

Attenzione: il metodo (**) richiede parecchi conti

Vedremo in seguito un metodo più efficiente [metodo di Gauss]

Sistemi omogenei di m equazioni in n incognite

- Un sistema di m equazioni in n incognite si dice omogeneo se tutti i suoi termini noti sono nulli, ossia se il sistema è

$$(\circ) \qquad A\underline{x} = \underline{0} \qquad \text{con } A \in \mathrm{Mat}(m,n) \text{ e } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

- Tale sistema non può essere impossibile, perché ha sempre la soluzione banale $\underline{x} = \underline{0}$

- le soluzioni sono gli elementi di $\mathrm{Ker} L_A$ dove

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad L_A(\underline{x}) = A\underline{x}$$

è l'applicazione lineare associata ad A.

In fatti:

$\underline{x}$ è soluz. di (o) $\iff A\underline{x} = \underline{0} \iff L_A(\underline{x}) = \underline{0} \iff \underline{x} \in \ker L_A$

. Per la formula delle dimensioni:

$\dim(\ker L_A) = n - \dim(\operatorname{Im} L_A) = n - r$, dove $r = \operatorname{car} A$

Teorema: le soluzioni del sistema (o) dipendono da $n-r$ parametri, dove $r = \operatorname{car} A$ (Si dice in tal caso che il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni).

In particolare, il sistema è determinato se e solo se $r = n$

(cioè se rango = # colonne di A
= # incognite)

Esempio: $m=2$, $n=3$

$$(*)\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sist. omogeneo, $r = \operatorname{car} A = 2 \implies$ sistema indeterminato con

$\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni

Esercizio: Risolvere il sistema.

OSS: Si noti che la $(*)$ è l'equazione di una retta di $\mathbb{R}^3$

(intersezione di due piani).

Sistemi generali. Teorema di Rouché-Capelli

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

con $A = (a_{ij}) \in Mat(m,n)$, $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Introduciamo la matrice completa

$$(A|\underline{b}) \in Mat(m, n+1)$$

Teorema di Rouché-Capelli: il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha almeno una soluzione se e solo se le matrici A e $(A|\underline{b})$ hanno la stessa caratteristica:

$$\boxed{\operatorname{car} A = \operatorname{car}(A|\underline{b})} \qquad (0)$$

Dimostrazione:

$A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzioni $\iff \exists\, \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ t.c. $A\underline{x} = \underline{b} \iff$

$\iff \exists\, x_1, \dots, x_m$ t.c. $(\underline{a}_1 | \dots | \underline{a}_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \underline{b} \iff$

$\iff \exists\, x_1, \dots, x_m$ t.c. $x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \dots + x_m\underline{a}_m = \underline{b} \iff$

$\iff \underline{b}$ è una combinazione lineare di $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$

$\iff$ il massimo numero di vettori lin. indip. tra $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ ~~coici~~ coincide

con " " " " " " " " $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m, \underline{b}$

$\iff \operatorname{car} A = \operatorname{car}(A|\underline{b})$

$\square$

Nel caso omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$, abbiamo visto che il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni, dove $r = \text{car}A$. Le soluzioni sono date da $\text{Ker}L_A$.

Teorema: Supponiamo che il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ abbia una soluzione $\underline{x}_1$.

Allora ogni soluzione del sistema è della forma

$$\underline{x}_1 + \underline{x}_0$$

dove $\underline{x}_0 \in \text{Ker}L_A$ (cioè $\underline{x}_0$ è soluzione del sistema omogeneo associato $A\underline{x} = \underline{0}$).

Quindi il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni, dove $r = \text{car}A$.

In particolare, il sistema è determinato se e solo se $n = r$.

Dim [Esercizio]

$\square$

Dimostrazione:

$A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzioni $\iff \exists\, \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ t.c. $A\underline{x} = \underline{b} \iff$

$\iff \exists\, x_1, \dots, x_n$ t.c. $(\underline{a}_1 | \dots | \underline{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{b} \iff$

$\iff \exists\, x_1, \dots, x_n$ t.c. $x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b} \iff$

$\iff \underline{b}$ è una combinazione lineare di $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$

$\iff$ il massimo numero di vettori lin. indip. tra $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ ~~cioè~~ coincide

con " " " " " " " " $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$

$\iff \text{car}\, A = \text{car}(A|\underline{b})$

$\square$

Nel caso omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$, abbiamo visto che il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni, dove $r = \operatorname{car} A$. Le soluzioni sono date da $\operatorname{Ker} L_A$.

Teorema: Supponiamo che il sistema $A\underline{x}=\underline{b}$ abbia una soluzione $\underline{x}_1$.

Allora ogni soluzione del sistema è della forma

$$\underline{x}_1 + \underline{x}_0$$

dove $\underline{x}_0 \in \operatorname{Ker} L_A$ (cioè $\underline{x}_0$ è soluzione del sistema omogeneo associato $A\underline{x}=\underline{0}$).

Quindi il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni, dove $r = \operatorname{car} A$.

In particolare, il sistema è determinato se e solo se $n = r$.

Dim [Esercizio]

$\square$