2

Rappresentazione analisi delle reti in regime stazionario

Nel precedente capitolo è stato esaminato il fenomeno della conduzione elettrica, definendo la resistenza e le leggi che legano il valore della corrente alle tensioni generate in un circuito.
In quanto segue viene descritto un processo ingegneristicamente molto importante attraverso il quale dal fenomeno fisico viene estrapolato il componente circuitale nel caso particolare della resistenza, ma secondo uno schema di validità più generale.
La differenza tra fenomeno fisico, componente circuitale e dispositivo deve essere ben chiara.
Anche se la resistenza è di per sé una grandezza distribuita lungo tutto il tratto di circuito considerato può risultare molto comodo da un punto di vista modellistico concentrarla in un unico componente, che prende il nome di resistore. Così per rappresentare un tratto di circuito basterà porre in serie, cioè uno dopo l'altro (vd. più oltre), ciascun elementino con il secondo estremo elettricamente collegato con il primo estremo del successivo.
Una volta che sono state utilizzate le dimensioni del tratto di circuito (area della sezione, lunghezza) per calcolare il valore della resistenza, ci si può dimenticare di queste caratteristiche geometriche e ragionare unicamente sul componente.
Casi più complessi possono essere modellati con due componenti circuitali: uno che rappresenta il fenomeno della generazione della f.e.m., e si chiama appunto generatore di tensione; uno che rappresenta la c.d.t. resistiva, e si chiama appunto resistore. L'ordine con cui vengono posti in serie non ha importanza.

I componenti descritti in quanto segue (resistore, generatore), prendono il nome di bipoli, perché presentano due estremi, detti morsetti o poli. Il nome non è superfluo, perché esistono anche componenti con più morsetti, come i quadrupoli.

I bipoli si dicono attivi quando in essi è presente una sorgente di f.e.m., passivi in tutti gli altri casi. Si parla anche, rispettivamente, di generatori e utilizzatori.

Nei bipoli esiste la possibilità di passaggio di corrente da un estremo all'altro, e si può presentare una d.d.p. tra i due estremi. E' possibile mettere in grafico le due grandezze, tensione e corrente, e tale grafico (o comunque la funzione che esprime l'una grandezza al variare dell'altra) prende il nome di caratteristica V-I del bipolo; se tale caratteristica è una linea retta, si parla di bipolo lineare.

2.1 - I bipoli ideali - Il resistore

Per un singolo tratto di circuito si è visto che la corrente che in esso fluisce è pari a:

$$I_{1\to 2} = \frac{V_1 - V_2 + e_{12}}{R_{12}}$$

che esprime in maniera rigorosa il concetto per cui la corrente fluisce in presenza di differenza di potenziale (di origine elettrostatica) e/o di una sorgente di f.e.m., ed è limitata da una resistenza, la cui formula è data da:

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{A(l)}$$

Naturalmente perché la corrente fluisca occorre che il circuito sia chiuso; se anche solo uno dei due estremi del segmento è isolato, non può esserci corrente; quindi si manifesterà semplicemente un fenomeno elettrostatico di separazione interna di cariche fino al raggiungimento della condizione di equilibrio con i campi forzanti (creando una d.d.p. uguale ed opposta).
In particolare: se per un resistore la corrente entrante è pari a quella uscente e segue la legge:

$$I_{1\to 2} = \frac{V_1 - V_2}{R_{12}}$$

con resistenza costante, il bipolo è lineare; in questo caso si usa anche il termine di bipolo ideale. Si noti che nella formula non appare più la forzante di f.e.m., perché il fenomeno è stato separato da questo, ed è descritto da un componente a sé.
Si può anche scrivere più in sintesi:

$$V = RI \qquad (2.1)$$

dove con V si intende la d.d.p. tra il morsetto in cui la I è entrante e quello da cui la I è uscente. Questa convenzione per tensione e corrente prende il nome di convenzione degli utilizzatori.
In gran parte dei materiali conduttori si ha che:
- la corrente può fluire indifferentemente dal morsetto A a B o da B ad A (se cambia il verso della corrente, dovrà cambiare anche il segno della tensione): si dice allora che il componente è bidirezionale ed in particolare che è simmetrico se la resistenza è la stessa in entrambi i casi;
- la resistenza non dipende dalla tensione o dalla corrente: componente lineare.

La resistenza dipende invece dalla temperatura θ, secondo la legge:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(\theta - \theta_0)]$$

da cui:

$$R = R_0[1 + \alpha(\theta - \theta_0)]$$

valida per un ampio range di temperature; ove i simboli con pedice o rappresentano le stesse grandezze alla temperatura di riferimento θo ed a il coefficiente di temperaura (diverso da materiale a materiale).

A temperatura costante, la caratteristica di un resistore ideale è quindi una retta passante per l'origine; al variare della temperatura cambia il coefficiente angolare (si ha così un fascio di rette avente il centro del fascio nell'origine).

A conclusione del discorso sulla resistività, si noti che le dimensioni di tale grandezza sono tali che:

$$[\rho]\frac{[l]}{[A]} = [R] \Rightarrow [\rho] = \Omega\frac{m^2}{m} = \Omega m$$

ma più frequentemente ai fini pratici si usa:

$$[\rho] = \Omega\frac{mm^2}{m}$$

2.2 - I bipoli ideali - Il generatore

Per quanto riguarda il generatore di tensione, si dice che questo è un generatore ideale se la f.e.m. da esso creata non dipende dalla corrente che in esso circola. La sua caratteristica è pertanto una retta parallela all'asse della corrente.

Oltre al generatore ideale di tensione si utilizza un altro componente attivo, il generatore ideale di corrente. Questo dispositivo eroga corrente costante, indipendentemente da quale sia il valore di tensione applicato. La sua caratteristica è quindi una retta parallela all'asse delle tensioni. Questo dispositivo non esiste nella realtà, o meglio è possibile realizzarlo, ma come generatore di tensione con un meccanismo di controllo che, sensibile alla corrente, genera la tensione necessaria per avere il valore di corrente stabilito. Tuttavia dal punto di vista modellistico il componente ideale risulta molto utile nell'analisi delle reti elettriche, come si vedràin seguito.

Si usa dire che il generatore di tensione e quello di corrente sono dispositivi duali.
per i generatori si usa solitamente la seguente convenzione: la tensione viene misurata come d.d.p. tra il morsetto da cui la corrente esce e quello in cui la corrente entra: convenzione dei generatori.
Una modellizzazione più realistica dei generatori è quella di associare sempre ad un generatore ideale di tensione una resistenza serie e a quello di corrente una resistenza parallelo. Queste resistenze rendono conto: per il generatore di tensione, della c.d.t. dovuta al fatto che, se nel generatore passa corrente, anche questa incontreràuna resistenza, per cui la tensione ai morsetti risulterà inferiore a quella ideale, in misura proporzionale alla corrente stessa; dualmente, per il generatore di corrente, del fatto che se il generatore eroga internamente la corrente prevista e si presenta una certa d.d.p. ai morsetti, comunque una parte di questa corrente verràdrenata internamente, in misura proporzionale alla tensione stessa. Questa modellizzazione è molto vicina alla realtà

2.3 - Serie e parallelo

I bipoli possono essere posti in serie o in parallelo.
In serie significa che ciascun bipolo è posto in successione al precedente, quindi con il primo morsetto collegato all'ultimo del precedente e l'ultimo al primo del successivo. Se sono posti tra due nodi A e B, solo il primo morsetto del primo bipolo sarà collegato ad A solo l'ultimo del dell'ultimo bipolo saràcollegato a B.

Ne risulta che i bipoli in serie sono attraversati dalla stessa corrente, la tensione risultante è la somma algebrica delle tensioni di tutti i bipoli posti in quella serie.
In parallelo significa che tutti i bipoli sono collegati alla stessa coppia di morsetti A e B: ogni bipolo ha un morsetto collegato ad A e l'altro collegato a B.
Ne risulta che i bipoli in parallelo sono soggetti alla medesima tensione, mentre la corrente totale (entrante da A e uscente da B, o viceversa) è la somma algebrica delle correnti di tutti i bipoli posti in quel parallelo.
Se si pongono in serie dei generatori di tensione, la tensione totale è la somma algebrica delle tensioni di ciascuno.
Se si pongono in parallelo dei generatori di corrente, la corrente totale è la somma algebrica delle correnti di ciascuno.
Non si devono invece mai porre in parallelo dei generatori di tensione o in serie dei generatori di corrente: nel primo caso si avrebbero delle maglie (ogni maglia con due generatori) con una f.e.m. totale diversa da 0, e nessuna resistenza, col risultato di far passare una corrente di valore infinito; nel secondo caso si avrebbero dei nodi con somma di correnti diversa da 0, col risultato (duale al precedente) di creare dei valori infiniti di tensione.

Se si pongono in serie delle resistenze:

$$V_{AB} = R_1 I + R_2 I + \ldots\ldots + R_N I = \sum_j R_j I$$

da cui:

$$\underline{R_S = \sum R_j}$$

La resistenza equivalente ad una serie di resistenze è la somma delle resistenze stesse.

Se invece sono in parallelo:

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \ldots + \frac{V}{R_N} = V \sum_j \frac{1}{R_j}$$

da cui:

$$Rp = \left(\sum R_j^{-1} \right)^{-1}$$

La resistenza equivalente ad un parallelo di resistenza è il reciproco della somma dei reciproci delle resistenze stesse.
A tal proposito si introduce un'altra grandezza, la conduttanza pari al reciproco della resistenza:

$$G = \frac{1}{R}$$

La conduttanza si misura in Siemens, simbolo S, che è pari esattamente al reciproco di u ohm. Vale quindi:

$$G_S = \left(\sum G_j^{-1} \right)^{-1}$$

$$G_p = \sum G_j$$

Queste formule sono duali a quelle con le resistenze.

2.4 - Metodi per la soluzione di reti elettriche lineari

Il problema di risoluzione di una rete elettrica consiste, in termini generali, note le forzanti dei generatori e le reistenze di tutti i lati, nella determinazione di tutte le correnti che percorrono i singoli lati della rete e di tutte le tensioni agli estrmi degli stessi.
Gli strumenti che che si rendono disponibili per questo scopo sono le leggi delle correnti, delle tensioni e di Ohm che devono essere combinate per formare un sistema di equazioni avente come incognite le incognite della rete.
Dopo aver determinato se il problema è risolubile un primo problema che si pone è quello di combinare le equazioni di cui sopra in modo da pervenire ad sistema algebrico in tante equazioni indipendenti quante incognite.
La legge delle correnti e la legge delle tensioni fanno riferimento soltanto alla topologia della rete senza alcun riferimento alla natura dei suoi lati.
In luogo della rete si può perciò considerare il suo grafo, ottenuto sostituendo i bipoli con un segmento di linea che congiunge i nodi estremi.
Un grafo si dice connesso se esiste sempre un percorso che congiunga due nodi qualsiasi del grafo, tutto costituito di lati del grafo.

Per albero di un grafo si intende un percorso costituito da lati del grafo che congiunge tutti i nodi senza formare maglie. I lati dell'albero sono n-1, se n è il numero di nodi.
Si chiama coalbero l'insieme dei lati del grafo che non appartengono ad un albero; i lati di un coalbero sono l-n+1 se l è il numero dei lati.
Si chiama insieme di taglio l'insieme dei lati che attraversano una superficie chiusa tracciata entro la rete.

Si possono scrivere:
- n-1 equazioni linearmente indipendenti nelle correnti dei lati applicando la legge delle correnti a tutti i nodi della rete meno 1.
- m=l-n+1 equazioni linearmente indipendenti nelle tensioni dei lati applicando la legge delle tensioni ed altrettante maglie scelte opportunamente.
- l equazioni di Ohm per gli l lati (certamente indipendenti).

Il numero delle equazioni pareggia perciò quello delle incognite ed il problema è determinato.
La scelta delle maglie indipendenti può essere fatta con molta libertà ma non arbitrariamente. Scelto un albero della rete la legge delle tensioni applicata alle maglie contenenti un solo lato del coalbero (maglie fondamentali) fornisce l-n+1 equazioni linearmente indipendenti nelle tensioni dei lati.
Dualmente la legge delle correnti può essere scritta per gli insiemi di taglio, perché ciò equivale a scriverla per una superficie chiusa. Costruisci un insieme di taglio per ciascun lato dell'albero, insieme con alcuni altri lati del coalbero, in modo che la superficie tagli un solo lato dell'albero alla volta (insieme di taglio fondamentale). La legge delle correnti applicata agli n-1 insiemi di taglio fondamentali fornisce altrettante equazioni nelle correnti linearmente indipendenti.
I sensi di riferimento della corrente e della tensione per i lati possono scegliersi arbitrariamente, anche se in una trattazione sistematica è conveniente assumere tali sensi di riferimento associati in un'unica convenzione di segno per tutti i lati.

Per la soluzione si può procedere secondo tre diversi metodi basati sulle equazioni di Kirchhoff:

Metodo delle correnti di lato
Si scelgono come incognite le correnti nei lati, assegnando liberamente ad ogni lato un verso convenzionalmente positivo.
Si possono quindi scrivere subito le N-1 eq. di K ai nodi.
Si scrivono quindi, in funzione delle incognite, la L-N+1 eq. di K. alle maglie, effettuando i prodotti delle resistenze per le correnti e sommando le fem dei generatori.
Si hanno così (N-1)+(L-N+1) = L equazioni, con L incognite.
Risolto il sistema, si possono trovare le tensioni in ogni nodo, partendo dal nodo di riferimento e via agli altri, sommando le cdt resistive e le fem dei lati che congiungono i nodi.
Il metodo spesso è pesante perché le equazioni sono spesso in numero elevato.

Metodo delle tensioni di nodo
Si scelgono come incognite le tensioni di N-1 nodi (tutti, escluso il nodo di riferimento).
In funzione di tali incognite si hanno subito le ddp sui vari lati, e quindi le correnti negli stessi.
Si possono così scrivere le N-1 eq. di K. ai nodi.
Si hanno così (N-1) equazioni con (N-1) incognite.
Risolto il sistema, dalle ddp si ottengono le correnti nei lati.

Metodo delle correnti di maglia
Si assegna ad ognuna delle L-N+1 maglie una corrente, per ora incognita, detta corrente di maglia, per la quale si fissa anche il verso convenzionalmente positivo. Questa corrente saràtale che: se un lato appartiene ad una sola maglia, la corrente in quel lato coincide con la corrente di maglia; se un lato è condiviso da più maglie, la corrente in quel lato è la somma algebrica delle correnti di tutte le maglie a cui il nodo appartiene (tenere conto del verso convenzionale).
Si possono così esprimere le correnti di lato in funzione di quelle di maglia, e di conseguenza le tensioni nei lati e quindi le L-N+1 eq. di K. alle maglie.
Si hanno così (l-N+1) equazioni con (L-N+1) incognite.
Risolto il sistema, si ricostruiscono le correnti di lato e quindi, come sopra, le tensioni nodali.

Un primo criterio di scelta tra i metodi considerati può essere individuato nel numero delle equazioni del sistema risolutivo:

$$n-1 \gtreqless l-n+1$$

Si possono presentare poi dei casi particolari:
1- Un ramo presenta solo un generatore di tensione, senza alcuna resistenza:
- se si risolve la rete con il metodo delle correnti di lato, non ci sono problemi perché esiste direttamente l'espressione di una delle ddp da inserire nelle eq. di K alle maglie
- se si risolve la rete con il metodo delle tensioni di nodo, manca l'espressione della corrente di quel lato; in compenso però una ddp tra due nodi è giàdefinita; si pone come ulteriore incognita la corrente nel generatore, ottenendo una incognita in più, ma anche un'equazione in più, perché la ddp tra i due nodi fornisce una semplice equazione contenente due tensioni nodali incognite
- se si risolve utilizzando il metodo delle correnti di maglia, non ci sono problemi perché esiste direttamente l'espressione di una delle ddp da inserire nelle eq. di K. alle maglie.

2 - Un ramo presenta solo un generatore di corrente, senza alcuna resistenza

- se si risolve con il metodo delle correnti di lato, manca l'espressione della tensione in quel lato; in compenso è già nota una delle correnti; si pone come ulteriore incognita la tensione sul generatore, quindi si ha questa un'incognita in più, ma anche una corrente incognita in meno
- se si risolve con il metodo dei potenziali di nodo, non ci sono problemi perché esiste direttamente l'espressione della corrente in quel lato
- se si risolve col metodo delle correnti di maglia, manca l'espressione della tensione in quel lato; in compenso è già nota una delle correnti di lato; si pone come ulteriore incognita la tensione sul generatore, quindi si ha questa un'incognita in più, ma anche un'equazione in più essendo tale corrente la somma algebrica delle correnti di maglia a cui quel lato appartiene.

Ciascun ramo potrà presentare la serie di più resistenze, più generatori di tensione, e al più di un solo generatore di corrente. E' allora opportuno, come primo passo, porre in serie tutte le resistenze, ottenendo una equivalente, per ciascun ramo; e così pure per i generatori di fem. In seguito le tensioni sui singoli bipoli passivi potranno essere facilmente ricostruite, una volta nota la corrente che scorre nel ramo.
Così pure può succedere che ad una coppia di nodi afferiscano più rami in parallelo composti da sole resistenze. E' allora conveniente ridurre tali rami ad uno solo, con la resistenza equivalente al parallelo delle resistenze originali. In seguito le correnti sui singoli bipoli passivi potranno essere facilmente ricostruite, una volta nota la ddp tra i due nodi.

2.5 - Equivalenti e sovrapposizione degli effetti.

Eq. generatore di corrente e di tensione

Si consideri un ramo costituito da un generatore ideale di tensione in serie con una resistenza. Vedendo il ramo come un unico bipolo, si può esprimere la sua caratteristica:

$$V = E - RI$$

dove si utilizza la convenzione dei generatori, e la tensione V è stata con lo stesso verso utilizzato per la tensione generata E.

Si consideri invece ora il parallelo di un generatore di corrente e di una resistenza. Vedendo anche questo come un unico bipolo, si può esprimere
la sua caratteristica:

$$V = R (A - I) = RA - RI$$

dove si è utilizzata la stessa convenzione e dove A è la corrente generata.

In entrambi i casi la caratteristica prevede un termine costante (E, RA) e un decremento lineare all'aumentare della corrente, con pendenza pari al valore della resistenza. dal punto di vista esterno i due casi sono quindi equivalenti (l'affermazione è giustificabile dal fatto che i bipoli sono lineari e che due rette sono coincidenti quando hanno la stessa penedenza e lo stesso termine noto). Questo vuol dire che in una rete elettrica un generatore di tensione E con in serie una resistenza R può essere sostituito, ai fini della risoluzione del problema, con un generatore di corrente di valore A = E/R in parallelo alla stessa resistenza, e viceversa. Questo a volte semplifica le cose, o rende più visibile e immediata alla persona che affronta il problema, la soluzione della rete.
Il tipo di equvalenza descritto viene indicato come equivalenza agli effetti esterni dal momento che esternamente i due bipoli si comportanto allo stesso modo pur essendo internamente differenti.

Sovrapposizione degli effetti

Si consideri ora un semplice circuito (una sola maglia) costituito dalla serie di due generatori di tensione e una resistenza. La corrente che circola vale quindi:

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R}$$

Si è già notato come la tensione di un generatore ideale di fem non dipenda dalla corrente, e come questo possa permettere il passaggio, in generale, di qualunque corrente. Si supponga allora di disattivare il generatore 2, continuando però a permettere il passaggio di qualunque corrente. Si avrà allora solo l'effetto del generatore 1:

$$I_{(1)} = \frac{E_1}{R}$$

Riattivando il generatore 2 e ripetendo l'operazione per il generatore 1, si avrà

$$I_{(2)} = \frac{E_2}{R}$$

Si nota che la corrente ottenuta con entrambi i generatori accesi e la somma di queste due correnti danno lo stesso valore. Cioè è possibile considerare la situazione effettiva come la somma, o meglio la sovrapposizione dei due effetti, a condizione che in ciascun singolo effetto ogni generatore spento venisse considerato come passaggio libero di corrente, cioè un collegamento privo di resistenza, o, come si dice in elettrotecnica, un cortocircuito (abbreviato in cto cto).
Esempio duale: due generatori di corrente in parallelo tra loro e in parallelo con una resistenza. Vale:

$$V = R(A_1 + A_2)$$

Il generatore di corrente può ammette agli estermi qualunque tensione, ma impone la corrente. Disattivarne uno vorrebbe dire permettere qualunque tensione, ma nessuna corrente: quindi un circuito aperto. Disattivando prima l'uno e poi l'altro si avranno:

$$V_{(1)} = RA_1$$

$$V_{(2)} = RA_2$$

e la somma di queste due tensioni coincide con la tensione presente quando sono entrambi attivati. Anche qui si può considerare la situazione effettiva come somma, o meglio sovrapposizione degli effetti, a condizione che in ciascun singolo effetto il generatore spento sia sostituito con un circuito aperto.
Si noti che in entrambi i casi la sovrapposizione è possibile se la rete è lineare e i generatori ideali, cioè se il valore della resistenza non dipende dalla corrente in transito o dalla tensione applicata, e così pure le tensioni generate non risentano delle correnti in transito e le correnti generate non risentano delle tensioni applicate.
Se la rete elettrica fosse anche più complessa, le cose non cambierebbero. Risolvendo la rete in forma simbolica, si noterebbe che in ogni tensione nodale e in ogni corrente di lato è una funzione lineare delle tensioni e delle correnti dei generatori. Quindi si enuncia il principio di sovrapposizione degli effetti nel caso delle reti elettriche:

In una rete lineare è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti, vale a dire: la tensione in ogni nodo è la somma delle tensioni e la corrente in ogni lato è la somma delle correnti che si ottengono attivando volta per volta solo uno o una parte dei generatori, fino a considerarli tutti una e una sola volta, e lasciando spenti tutti gli altri, lasciandoli cioè in cortocircuito se generatori di tensione e in circuito aperto se generatori di corrente.

La rete con tutti i generatori posti in queste condizioni può essere definita rete passiva.

Dal principio di sovrapposizione degli effetti discende che: se in una rete lineare viene acceso un nuovo generatore o ne viene spento uno esistente, non occorre risolvere ex novo la rete ma basta aggiungere o togliere alla soluzione preesistente il nuovo effetto, calcolato sulla rete passiva.

2.6 - I teoremi di Thevenin e di Norton

Si considerino ancora gli esempi iniziali del par 2.5. Si nota che la caratteristica è data dalla somma di due termini: uno costante, e uno lineare.
Se si considera il generatore di tensione in serie alla resistenza, si nota anche che il termine costante corrisponde alla tensione a vuoto, cioè a quella tensione che si presenta ai capi dei morsetti quando questi non sono richiusi su nessun altro circuito e quindi non scorre corrente. Il termine lineare invece è pari alla caratteristica che si presenta disattivando il generatore, ponendolo cioè in cto cto: è la caratteristica della rete passiva, in questo caso molto semplice.
Se si considera l'altro esempio, riscrivibile in questa forma:

$$I = A + \frac{V}{R} = A + GV$$

si nota che il termine costante è pari alla corrente che si avrebbe quando i due morsetti sono posti in cto cto, cioè quando questi sono richiusi con un collegamento privo di resistenza: in queste condizioni non c'è tensione sui morsetti e quindi neppure corrente nella resistenza. Il termine lineare invece è pari alla caratteristica che si presenta disattivando il generatore, cioè trasformandolo in un circuito aperto: è la caratteristica della rete passiva, in questo caso molto semplice.

Si può dimostrare, utilizzando la linearità della rete, il principio di sovrapposizione degli effetti, che le stesse regole valgono anche quando la rete sia più complessa, presenti anche più generatori e una magliatura articolata di resistenze: e cioè che, vedendo le cose da due morsetti della rete e considerandola da lì come unico bipolo, la caratteristica di una rete lineare qualunque è sempre data dalla somma di un termine costante, pari alla tensione a vuoto che si ottiene lasciando i due morsetti a vuoto, oppure pari alla corrente che si ottiene ponendo i due morsetti in cto cto, e un termine lineare, con la stessa caratteristica della rete passiva vista dai due morsetti.
Si enunciano allora:

Teorema di Thevenin

Una qualunque rete lineare vista da due suoi nodi può essere sostituita con una rete equivalente costituita da: un generatore ideale di tensione che eroga la tensione a vuoto tra due nodi, in serie con una resistenza di valore pari alla resistenza di tutta la rete in questione, passiva, vista degli stessi due nodi.

Teorema di Norton

Una qualunque rete lineare vista da due suoi nodi può essere sostituita con una rete equivalente costituita da: un generatore di corrente che eroga la corrente di cto cto tra due nodi, in parallelo con una conduttanza di valore pari alla conduttanza di tutta la rete in questione, passiva, vista degli stessi due nodi.

Per "resistenza (conduttanza) di valore pari alla resistenza (conduttanza) di tutta la rete passiva vista dai due nodi" si intende questo: per la rete passiva si può scrivere un'equazione corrispondente alla caratteristica vista dai due nodi, cioè alla relazione che lega V ed I nei due nodi. Questa caratteristica passa per l'origine, essendo la rete passiva, ed è una retta, essendo la rete lineare. Quindi il coefficiente angolare della relazione V-I è pari alla resistenza da porre nell'equivalente di Thevenin e il duo reciproco alla conduttanza da porre nell'equivalente di Norton.
In generale tale equazione caratteristica potrebbe essere trovata in questo modo: si pone una prima tensione di tentativo tra due nodi e si misura la corrente (o si risolve la rete con questa forzante); si pone una seconda tensione di tentativo e si ricava ancora la corrente. Si sono così ottenuti due punti della caratteristica. Ma essendo questa una retta, ecco che con due punti tale retta è definita. meglio ancora poiché è noto a priori che la retta passa per l'origine, basta misurare e risolvere una sola volta, perché un punto è sufficiente a determinare la retta.
Solitamente però il problema può essere risolto in maniera più diretta: spesso le reti passive sono riducibili gradualmente, attraverso riduzioni successive tipo serie o parallelo: dapprima tutti i gruppi di resistenze in serie vengono sostituiti con le rispettive resistenze equivalente serie e tutti i gruppi di resistenze in parallelo vengono sostituiti con le rispettive resistenze equivalente parallelo; la nuova rete così ridotta può ancora presentare altre serie o altri paralleli, che vengono ancora ridotti, e così via.

2.7 - Le conversioni stella-triangolo e triangolo-stella

Nella riduzione di una rete si possono incontrare delle configurazioni di questo tipo:

che non sono riducibili mediante normali riduzioni tipo serie o tipo parallelo.
Esistono cioè due configurazioni particolari, che si presentano fra tre nodi, con un eventuale quarto nodo in posizione centrale. Queste configurazioni sono: la configurazione a stella e quella a triangolo.
Indicando con A, B, C i tre nodi e con H il quarto:
- la configurazione a stella si ha quando ciascun nodo A, B, C è collegato al nodo H, detto centro stella;
- la configurazione a triangolo si ha quando (non esiste H) si hanno collegamenti A-B, B-C, C-A, come i lati di un triangolo.

Una configurazione a stella può essere trasformata in una equivalente a triangolo, e viceversa. Si indichino:

R_X la resistenza a stella tra X, con X= (A, B, C), ed H

R_X la resistenza a triangolo tra y e z, (x, y, z) = UI(A, B, C) a rotazione

Valgono allora le seguenti relazioni:

$$R_A = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_a = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$

per le altre resistenze (indici B, C, b, c) basta ruotare di conseguenza gli indici al secondo membro
In particolare, se le tre resistenze a stella sono uguali, lo sono anche quelle a triangolo, e viceversa; in tal caso le resistenze a triangolo sono 3 volte maggiori di quelle a stella.

2.8 - Reti elettriche non lineari

Una rete elettrica viene considerata non lineare quando non è più lineare almeno uno dei suoi componenti, sia esso attivo oppure passivo.
Per esempio certe resistenze presentano una caratteristica del tipo:

$V = K \exp(I / I_0)$

o altre funzioni più o meno complesse.
Per queste reti, ovviamente, si applicano comunque i principi di Kirchhoff, con la differenza che si otterrà un sistema di equazioni non lineari, che dovrà essere risolto con metodi numerici.
Nel caso la rete presenti un solo componente non lineare, o pochissimi componenti localizzati in lati tra loro vicini, mentre il resto della rete è lineare, la soluzione può essere ottenuta più agevolmente ricorrendo ai teoremi di Thevenin e/o di Norton.
Un esempio chiariràcome procedere.

Si supponga di avere una rete tutta lineare, fatta eccezione per un bipolo, per il quale vale:

$V = f(I)$ con f non lineare

Siano A e B i due nodi ai quali il bipolo è collegato. Si immagini allora di togliere temporaneamente il bipolo non lineare della rete., e di effettuare l'equivalente della rete dai due nodi A e b, per esempio con il teorema di Thevenin. Si otterràcosì solo un generatore equivalente in serie con una resistenza equivalente. A questo punto si reinserisca il bipolo tra i due nodi. Il circuito risultante è semplicissimo: una sola maglia, con il generatore in serie alla resistenza e al componente. l'equazione di funzionamento:

$E_{Th} = R_{Th} \cdot I + f(I)$

Anziché un intero sistema non lineare si è trovata una sola equazione non lineare, che può essere risolta graficamente oppure numericamente per tentativi, per esempio con metodi tipo Newton o con il metodo delle secanti.

Anche scrivendo il sistema (per esempio con il metodo dei potenziali di nodo) si sarebbe ottenuta una sola equazione non lineare, ma inserita in un sistema di molte altre lineari; l'applicazione dell'equivalente di Thevenin (o di Norton) equivale al procedimento matematico che avrebbe permesso di isolare l'equazione lineare dall'intero sistema.

2.9 - Potenza elettrica - Effetto Joule

In tutti i discorsi fatti fino ad ora non si è ancora affrontato il problema della potenza. Ogni applicazione elettrica di fatto scambia o trasmette energia, e quindi ad essa è associata una potenza.

Si consideri una carica elettrica Q che venga portata dal potenziale V_1 al potenziale V_2. Ad essa è quindi stata fornita energia, per la definizione stessa di potenziale, nella misura di:

$E_{el} = Q (V_2 - V_1) = Q . \Delta V$

Si ricorda che il potenziale, e quindi la ddp, oppure la tensione, si misurano in Volt e che 1V = 1J / 1C. La grandezza così ottenuta ha quindi proprio la dimensione dei Joule.

Nel caso una corrente elettrica fluisca in un generatore, questa formula vale per ogni carica. E poiché in caso di corrente si ha il passaggio di un certo numero di cariche per ogni unità di tempo, si ha la fornitura di una certa quantità di energia per ogni unità di tempo: si ha cioè una potenza fornita dal generatore alle cariche:

$$P = \frac{dE_{el}}{dt} = \frac{dQ}{dt} \Delta V = I . \Delta V$$

o, più semplicemente:

P = V.I

dove con V si intende una ddp o una fem.

La potenza elettrica si manifesta quindi quando esiste passaggio di corrente in presenza di differenza di potenziale, ed è pari al prodotto della tensione per la corrente.
Quando in un generatore si ha corrente uscente dal morsetto a potenziale maggiore, si ha quindi potenza elettrica erogata dal generatore verso il resto del circuito. con la convenzione dei generatori, allora, la potenza è erogata dal bipolo se tensione e corrente sono entrambi positivi o entrambi negativi.

L La potenza (in generale qualunque potenza, ed in particolare quella elettrica) si misura in watt, simbolo W:

1W = 1V . 1A = 1J / 1s

Le cariche, muovendosi nel circuito, trasportano l'energia potenziale elettrica che ciascuna ha con sé. Incontrando una resistenza elettrica, esse devono però cedere almeno parte di questa energia, e si ha quindi una potenza elettrica assorbita dal resistore. La potenza assorbita sarà ancora pari al prodotto di tensione per corrente; la convenzione degli utilizzatori prevede per la corrente (o per la tensione) un verso positivo opposto a quello della convenzione dei generatori; quindi con la convenzione degli utilizzatori, allora, la potenza è assorbita dal bipolo se tensione e corrente sono entrambi positivi o entrambi negativi. Poiché per il resistore vale:

V = R . I

allora la potenza assorbita vale:

$$P = I . V = I . R I = R . I^2 = \frac{V^2}{R}$$

La potenza assorbita è proporzionale alla resistenza e al quadrato della corrente.
Tale potenza, nel resistore, viene completamente trasformata in calore, di modo che un resistore percorso da corrente dissipa verso l'esterno un certo numero di calorie per ogni secondo. Questo fenomeno prende il nome di effetto Joule.

L'effetto Joule è molto importante.
Poiché le resistenze si scaldano, con correnti troppo elevate si possono danneggiare o, più facilmente. danneggiare gli isolanti di cui sono rivestite. per questo le correnti troppo elevate sono pericolose.
Inoltre, il riscaldamento conseguente al passaggio di corrente comporta un aumento della resistività (che cresce linearmente con la temperatura), e quindi della resistenza; pertanto i parametri circuitali vengono modificati dal passaggio di corrente. In questo senso si potrebbe dire che i resistori non sono in realtà bipoli lineari, perché la R cresce proporzionalmente al quadrato della corrente. Va però notato che nelle applicazioni normali, con conduttori dimensionati correttamente e correnti contenute entro i limiti indicati dal progettista, la variazione è abbastanza piccola, e comunque perché la temperatura aumenti occorre che il calore si accumuli, e questo richiede un certo periodo di tempo (transitorio termico).

In una rete elettrica la somma delle potenze generate è pari alla somma delle potenze dissipate nelle resistenze per effetto Joule.
Questa affermazione è comprensibile intuitivamente, se si ricorda che l'energia non si può distruggere, ma solo trasformare: quindi la potenza introdotta nella rete dai generatori non potrà che prendere la forma di calore, disperso verso l'esterno o accumulato nei materiali durante la fase di riscaldamento, ma comunque tutto prodotto per effetto Joule.
In maniera più rigorosa, però, l'affermazione è anche dimostrabile.

Non va però pensato che tutta la potenza dei generatori sia potenza positiva erogata: ci sono generatori che possono funzionare anche con erogazione negativa, cioè con assorbimento di potenza da parte del generatore. Questo si verifica quando in un generatore di tensione la corrente, anziché essere entrante nel morsetto a potenziale maggiore, è uscente da questo morsetto, oppure quando la ddp applicata ad un generatore di corrente è negativa. Quando questo si verifica, la trasformazione di energia che avviene all'interno del generatore avviene in senso inverso: se per esempio si tratta di un generatore di tipo elettrochimico, anziché avere energia chimica trasformata in energia elettrica per ogni unità di tempo, si avrà energia elettrica trasformata in energia chimica (accumulatore); se si tratta di un generatore di tipo elettromeccanico, anziché avere potenza meccanica trasformata in elettrica, si avrà potenza elettrica trasformata in meccanica(motore elettrico). In realtà non tutti i generatori sono reversibili; se non lo sono, quando la grandezza (corrente o tensione) viene invertita reagiscono bloccando il passaggio della corrente e comportandosi come circuiti aperti.
Quando invece sono reversibili, di fatto si è attuato il trasporto dell'energia elettrica dal generatore erogante al bipolo (motore, accumulatore, ecc.) che lo utilizza e la accumula.

Le relazione viste finora mostrano come non sia possibile trasportare potenza elettrica da un punto all'altro senza dissiparne almeno una frazione per effetto Joule. Infatti, si nota che il termine dissipativo, essendo una funzione quadratica della corrente, è sempre positivo (al più nullo, se non passa corrente). Nelle moderne reti elettriche la potenza dissipata è tuttavia molto piccola, al più dell'ordine di qualche percento del totale per circuiti molto lunghi. Esistono materiali detti superconduttori, per i quali la resistività è nulla; tuttavia tale caratteristica si presenta solo a temperature eccezionalmente basse e quindi non vengono utilizzati se non per applicazioni molto particolari.

File: baggio 2 - d:\proj\unibg\elett\CAP2.DOC
Stampato: gg/03/aa 21.52
Ver/Rev: drf,fin,tmp,old/0.50