Università di Bergamo
Primo anno di Ingegneria

Anno accademico 2023–2024
Foglio 1

Geometria e Algebra Lineare

Numeri complessi — prima esercitazione

Esercizio 1.1. Trovare la somma e la differenza dei due numeri complessi

$$z = 5 - 2i, \quad w = 2 + 3i;$$

rappresentare poi z, w, $z + w$ e $z - w$ nel piano di Gauss.
SOLUZIONI: $z + w = 7 + i$, $z - w = 3 - 5i$.

Esercizio 1.2. Calcolare il prodotto e il quoziente dei due numeri complessi

$$z = 3 - 2i, \quad w = -1 + i;$$

rappresentare poi z, w, zw e z/w nel piano di Gauss.
SOLUZIONI: $zw = -1 + 5i$, $z/w = -5/2 - i/2$.

Esercizio 1.3. Scrivere in forma algebrica (ossia, $a + ib$) i seguenti numeri complessi e posizionarli sul piano di Gauss.

a) $\dfrac{1+2i}{1-i}$;

b) $\dfrac{2-i}{1+i}$;

c) $\dfrac{i}{i-1}$;

d) $\dfrac{3+i}{i}$;

e) $\dfrac{2+i}{1+i} + (2-i)(1+i) - (2-i)^2$;

f) $\dfrac{(2+i)^2}{1+i} + (2-i)(1+i)\dfrac{4-3i}{2i}$.

SOLUZIONI:

a) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$;

b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$;

c) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$;

d) $1 - 3i$;

e) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{2}i$;

f) $1 - 7i$.

Esercizio 1.4. Scrivere in forma algebrica:

- il complesso coniugato di $z_1 = \dfrac{2-3i}{1-i}$;
- gli inversi dei numeri $z_2 = i$, $z_3 = 2$, $z_4 = 1 + i$, $z_5 = 2 - 3i$.

SOLUZIONI: $\overline{z_1} = 5/2 + i/2$; $z_2^{-1} = -i$, $z_3^{-1} = 1/2$, $z_4^{-1} = 1/2 - i/2$, $z_5^{-1} = 2/13 + 3i/13$.

Esercizio 1.5. Siano
$$z = 2 - i, \quad w = 5 + 3i.$$
Si eseguano le operazioni
$$z\,\overline{w}, \quad \frac{\overline{z}}{w}, \quad \overline{z}^3, \quad \overline{z^3}.$$
SOLUZIONI: $z\,\overline{w} = 7 - 11i$, $\overline{z}/w = 13/34 - i/34$, $\overline{z}^3 = \overline{z^3} = 2 + 11i$.

Esercizio 1.6. Calcolare

a) $(i^4 + 2)(i^3 - 3)$;

b) $5i\dfrac{1-i}{3-4i} - 13\dfrac{1-4i}{5+12i}$;

c) $\dfrac{(3i)^3 - (5-7i)}{4i(3-i)} - \dfrac{3+4i}{7i}$.

SOLUZIONI: a) $-9 - 3i$; b) $202/65 + 251i/65$; c) $-123/56 + 17i/56$.

Esercizio 1.7. Verificare che $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ e $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ con $z = 3 + 4i$ e $w = 2 - 5i$.

Esercizio 1.8. Sia
$$z = \frac{x - 1 + 3i}{x - 2i}.$$

a) Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ il numero z è reale?

b) Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ il numero z è immaginario puro?

SOLUZIONI: a) $x = 2/5$. b) $x = -2$ *oppure* $x = 3$.

Esercizio 1.9. Determinare i numeri complessi z per cui $z^2 + 2$ risulta essere reale e strettamente positivo, si abbia cioè
$$z^2 + 2 \in \mathbb{R}, \qquad z^2 + 2 > 0.$$
Disegnare l'insieme di tali z sul piano di Gauss.
SOLUZIONI: z *reale, oppure* $z = iy$ *con* y *reale e* $-\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$.

Esercizio 1.10. Data l'equazione nel campo complesso
$$z\left((1+2i)^2 + 2\right) = 3 + 2i$$
determinare z, $|z|$, $\overline{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$.
SOLUZIONI: $z = 5/17 - 14i/17$, $|z| = \sqrt{13/17}$, $\overline{z} = 5/17 + 14i/17$, $\operatorname{Re} z = 5/17$, $\operatorname{Im} z = -14/17$.

Esercizio 1.11. Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni.

a) $\dfrac{z}{\overline{z}} = 1$;

b) $z + 2i\overline{z} = 4i$;

c) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$;

d) $|z| = z + |i - z|$;

e) $z^2 + |z^2 - 1| = \operatorname{Re} z$;

f) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = |z|$.

SOLUZIONI:

a) $z \in \mathbb{R}$, *con* $z \neq 0$*;*

b) $z = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}i$*;*

c) $z = -1$ *oppure* $z = 1 \pm 2i$*;*

d) $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$*;*

e) $z = 1$*;*

f) z *reale oppure* z *immaginario puro.*

Esercizio 1.12. Rappresentare sul piano di Gauss i seguenti insiemi (i numeri r e R sono dei reali positivi tali che $r < R$, c è un reale e α è un complesso).

a) $A = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = r\}$;

b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} \colon \dfrac{1}{2} < |z| < 2\right\}$;

c) $C = \{z \in \mathbb{C} \colon r < |z - \alpha| < R\}$;

d) $D = \big\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z^2) = c\big\}$;

e) $E = \left\{z \in \mathbb{C} \colon \left|\dfrac{z-4}{z+4}\right| \geqslant 3\right\}$;

f) $F = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z - \alpha) > -1 \text{ e } \operatorname{Im}(z - \alpha) > 0\}$.

SOLUZIONI:

a) A *è la circonferenza di centro* $z_0 = 0$ *e raggio* r.

b) B *è la corona circolare di centro* $z_0 = 0$, *raggio interno* $1/2$ *e raggio esterno 2 (bordi esclusi).*

c) C *è la corona circolare di centro* $z_0 = \alpha$, *raggio interno* r *e raggio esterno* R *(bordi esclusi).*

d) Se $c > 0$, *l'insieme* D *è l'iperbole equilatera avente i vertici nei punti* $(\pm\sqrt{c}, 0)$. *Se* $c = 0$, D *è l'unione delle rette* $y = x$ *e* $y = -x$. *Se* $c < 0$, D *è l'iperbole equilatera avente i vertici nei punti* $(0, \pm\sqrt{-c})$.

e) E *è il cerchio di centro* $z_0 = -5$ *e raggio 3 (bordo incluso), tranne* $z = -4$.

f) $F = \{x + iy \mid x > \operatorname{Re}(\alpha) - 1, y > \operatorname{Im}(\alpha)\}$.