Matrici quadrate

Una matrice $A \in Mat(n,n)$ è detta <u>matrice quadrata</u> di ordine n.
$$Mat(n,n) = Mat(n)$$

- Se $A \in Mat(n)$ allora $A^t \in Mat(n)$
- Se $A, B \in Mat(n)$ allora $AB, BA \in Mat(n)$ (ma in generale $AB \neq BA$)
- $I_n \in Mat(n)$ e $AI_n = I_nA = A$ per ogni $A \in Mat(n)$

Definizione: Una matrice quadrata $A \in Mat(n)$ è detta

<u>Triangolare superiore</u> se
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Es
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Triangolare inferiore</u> se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

<u>diagonale</u> se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Definizione: $A \in Mat(m)$ è detta

<u>simmetrica</u> se $A^t = A$

Es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

<u>antisimmetrica</u> se $A^t = -A$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Determinante

Il determinante $\det A$ di una matrice quadrata $A \in Mat(n)$ è un importante numero associato ad A. Lo definiamo in maniera ricorsiva:

- definizione esplicita per $n=1$
- la definizione per $n \geq 2$ si riconduce al calcolo di n determinanti di matrici di ordine $n-1$.

Sia $A \in Mat(n)$ data da

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Per definire il determinante di A introduciamo le seguenti notazioni:

Dato un elemento a_{ij} di A definiamo:

1) Il minore complementare M_{ij} di a_{ij} è il determinante della matrice che si ottiene da A eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima

2) Il complemento algebrico A_{ij} di a_{ij} è il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Definizione: Il determinante di una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine 1 è la quantità $\det A = a_{11}$. Se invece A ha ordine $n \geq 2$ il suo determinante è

$$\boxed{\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}}$$

Esempi:

1. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Allora: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$,

dove $A_{11} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=\,1} M_{11} = M_{11} = \det \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix} = \det(a_{22}) = a_{22}$

$A_{12} = \underbrace{(-1)^{1+2}}_{=\,-1} M_{12} = -M_{12} = -\det \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix} = -\det(a_{21}) = -a_{21}$

Quindi $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

oss: Useremo la notazione $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

2) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Per definizione: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$$= 8A_{11} + 2A_{12} - A_{13}$$

dove

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - (-5)\cdot 0 = 12$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -\left(4\cdot 4 - (-5)\cdot(-6)\right) = -(16-30) = 14$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot 0 - 3\cdot(-6) = 18$$

Quindi: $\det A = 8\cdot 12 + 2\cdot 14 - 18 = 106$

Per il calcolo del determinante si può usare il

Teorema di Laplace: Se $A \in Mat(n)$ allora per ogni $k = 1, \dots, n$ si ha

$$\det A = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj} & \text{(riga } k\text{-esima)} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} & \text{(colonna } k\text{-esima)} \end{cases}$$

Esempi:

1) Consideriamo ancora $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Se scegliamo la 2ª colonna, abbiamo che

$$\det A = \cancel{2A_{12} + 3A_{22}}\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= 2A_{12} + 3A_{22} + \cancel{0 \cdot A_{32}}$$

Sappiamo che $A_{12} = 14$.

Inoltre

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 - (-1) \cdot (-6) = 26$$

$$\Rightarrow \det A = 2 \cdot 14 + 3 \cdot 26 = 106$$

Esercizio: utilizzare la terza riga.

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + \cancel{0 \cdot A_{21}} + 2 A_{31} + \cancel{0 \cdot A_{41}} =$$

$$= 1 \cdot \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \underbrace{(-1)^{1+3}}_{=1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \left(4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right)$$

$= 3(2+1) + 2\Big(4(-4+5) - (-4+3) + (10-6)\Big)$ 6.9

$= 9 + 2(4+1+4) = 27$

Proprietà del determinante

Sia $A \in Mat(n)$.

i) Se A ha una riga di zeri, allora $\det A = 0$

ii) Scambiando due righe di A, ~~il~~ il determinante cambia segno.

iii) Se A ha due righe uguali allora $\det A = 0$

iv) Il determinante è una funzione lineare su ogni riga. Per esempio,

nel caso della prima riga :

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}^1+\underline{b}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{b}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda\underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

v) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

vi) Se ad una riga si aggiunge un multiplo di un'altra riga, ~~il~~ il determinante non cambia.

vii) Se A è triangolare

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ allora $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

(stessa cosa per triangolari inferiori e diagonali) oss: le proprietà i), ..., vii) valgono anche se al posto di "riga" si sostituisce "colonna"

Dimostriamo (alcune) delle proprietà del determinante:

i) (Esercizio)

ii) Esercizio: verificare la proprietà nei casi $n=2$, $n=3$.

iii) Sia $\underline{a}^i = \underline{a}^j$ $i \neq j$. Allora

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}^i \\ \vdots \\ \underline{a}^j \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} \overset{\substack{(ii) \\ R_i \leftrightarrow R_j}}{=} -\det \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}^j \\ \vdots \\ \underline{a}^i \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} \overset{\underline{a}^i = \underline{a}^j}{=} -\det \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}^i \\ \vdots \\ \underline{a}^j \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} = -\det A$$

Quindi $\det A = -\det A \Rightarrow 2 \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$

iv) Siano $\underline{a}^1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\underline{b}^1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$ (6.12)

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}^1 + \underline{b}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} = (a_{11}+b_{11})A_{11} + (a_{12}+b_{12})A_{12} + \dots + (a_{1n}+b_{1n})A_{1n}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} + b_{11}A_{11} + b_{12}A_{12} + \dots + b_{1n}A_{1n}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{b}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix}$$

Esercizio: mostrare che $\det\begin{pmatrix} \lambda\underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix}$

v) $$\det(\lambda A) = \det\begin{pmatrix} \lambda\underline{a}^1 \\ \lambda\underline{a}^2 \\ \vdots \\ \lambda\underline{a}^n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \lambda\underline{a}^2 \\ \vdots \\ \lambda\underline{a}^n \end{pmatrix} = \lambda^2 \det\begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \lambda\underline{a}^3 \\ \vdots \\ \lambda\underline{a}^n \end{pmatrix} = \dots = \lambda^n \det A$$

vi)
$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}^1+\lambda\underline{a}^j \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} \overset{(iv)}{=} \det\begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda \det\begin{pmatrix} \underline{a}^j \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^j \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{0}\ (ii)} = \det\begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^n \end{pmatrix}$$

vii)
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Esercizio: verificare la vii) per $n=2,3$.