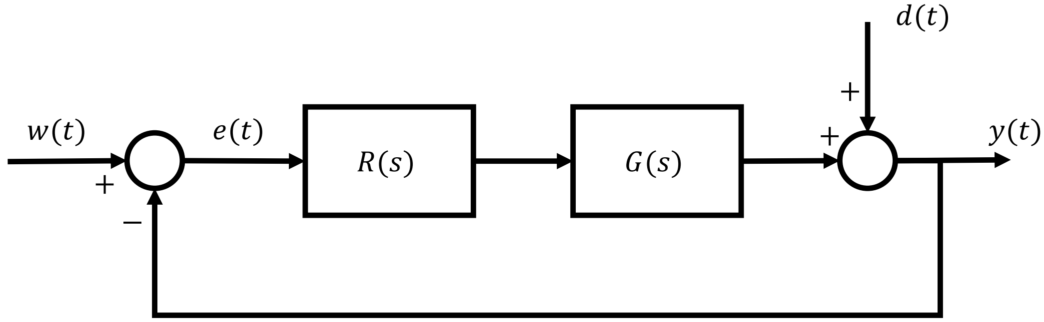
Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo retroazionato a tempo continuo descritto dal seguente schema a blocchi:



dove $G(s) = \frac{6}{(1+s)^2(1+0.5s)}$**.**

Punto 1: Si progetti il controllore $R(s)$ **in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e che siano rispettate le seguenti specifiche:**

- $|e(\infty)| \leq 0.1$ **a fronte di un andamento del riferimento** $w(t) = 5\textbf{sca}(t)$ **e del disturbo** $d(t) = \pm\textbf{sca}(t)$**,**
- $\omega_c \geq 1\frac{rad}{sec}$**,**
- $\varphi_m \geq 60°$**.**

Progetto statico

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello:

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) \\ &= R_1(s)R_2(s)G(s) \\ &= \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{6}{(1+s)^2(1+0.5s)} \\ &= 6\frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{1}{(1+s)^2(1+0.5s)} \end{aligned}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 6\mu_R$.

Il tipo della funzione d'anello è $g = r$.

Si applica la disuguaglianza "caso pessimo":

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

I singoli contributi valgono (vedi tabellina):

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{5}{1+6\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = \begin{cases} \frac{1}{1+6\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

Scegliendo $r = 0$:

$$\begin{aligned} |e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| &\leq 0.1 \\ \frac{5}{1+6\mu_R} + \frac{1}{1+6\mu_R} &\leq 0.1 \\ 0.1 + 0.6\mu_R &\geq 6 \\ \mu_R &\geq 9.8\bar{3} \end{aligned}$$

Scegliamo:

$$\begin{aligned} \mu_R &= \frac{100}{6} \\ &= 16.\bar{6} \end{aligned}$$

$$r = 0$$

Quindi:

$$R_1(s) = \frac{100}{6}$$

Si noti bene che sarebbe stato lecito scegliere $r = 1$ per garantire le specifiche statiche, lasciando μ_R come ulteriore grado di libertà per soddisfare invece le specifiche dinamiche.

Progetto dinamico (caso $r = 0$ e $\mu_R = \frac{100}{6}$)

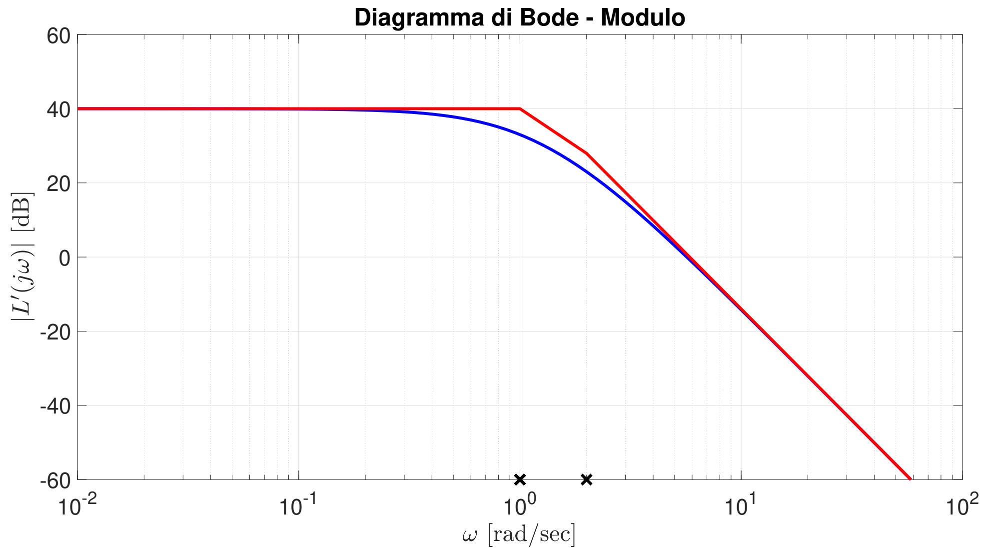
La funzione di trasferimento d'anello è

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) \\ &= R_1(s)R_2(s)G(s) \\ &= \frac{100}{6}\frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}\frac{6}{(1+s)^2(1+0.5s)} \\ &= \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}\frac{100}{(1+s)^2(1+0.5s)} \end{aligned}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$

Si ha quindi:

$$L'(s) = \frac{100}{(1+s)^2(1+0.5s)}$$



Si ha $\omega_c \approx 5.7 \frac{rad}{sec}$.

Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \angle L'(j\omega_c) \\ &= -2\arctan(5.7) - \arctan(5.7 \cdot 0.5) \\ &= -160.1^\circ - 70.7^\circ \\ &= -230.8^\circ\end{aligned}$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= 180^\circ - |\varphi_c| \\ &= 180^\circ - 230.8^\circ \\ &= -50.8^\circ\end{aligned}$$

Non rispetta le specifiche.
Il primo tentativo soddisfa il primo vincolo ma non il secondo, quindi procediamo con un altro tentativo.

Secondo tentativo $R_2(s) = \frac{(1+s)^2(1+0.5s)}{(1+50s)(1+0.1s)^2}$

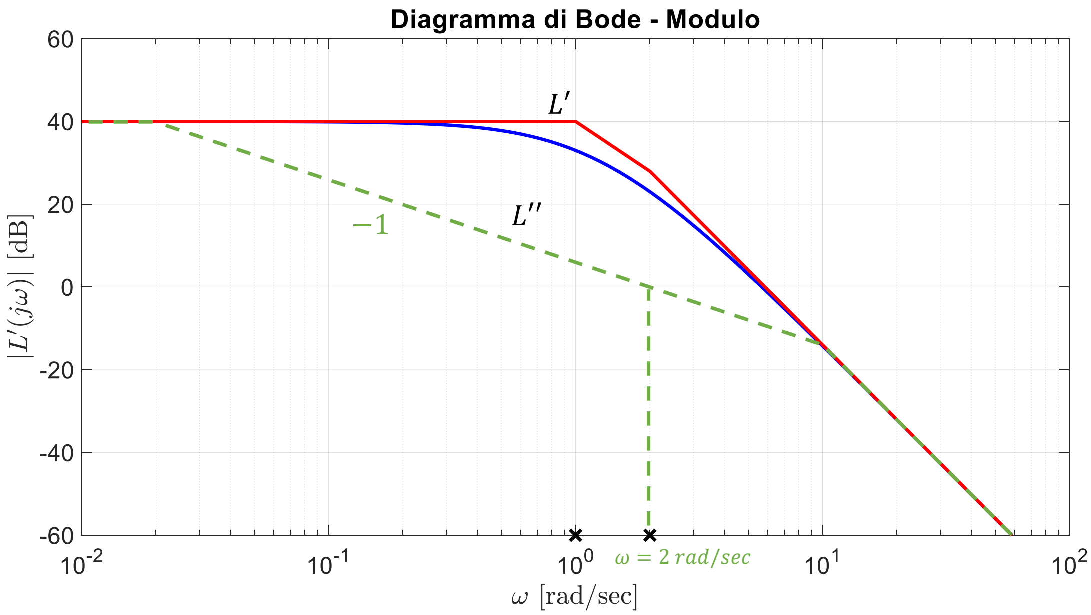
Eseguiamo un raccordo Bassa-Alta frequenza.
Si deve costruire $|L''(j\omega)|$ in modo che tagli l'asse a $0dB$ in $\omega_c \approx 2\frac{rad}{sec}$ con pendenza -1 $(-20\frac{dB}{decade})$.
Ciò si può ottenere:

- cancellando (con tre zeri) i tre poli di $G(s)$,
- raccordando il diagramma $|L''(j\omega)|$ di con il diagramma $|L'(j\omega)|$ in bassa frequenza ed in alta frequenza, mediante l'introduzione in $|L''(j\omega)|$ di tre poli in posizioni opportune.

Quindi:

$$R_2(s) = \frac{(1+s)^2(1+0.5s)}{(1+\tau_{bf}s)(1+\tau_{af}s)^2}$$

La posizione dei poli di raccordo si desume dal grafico:



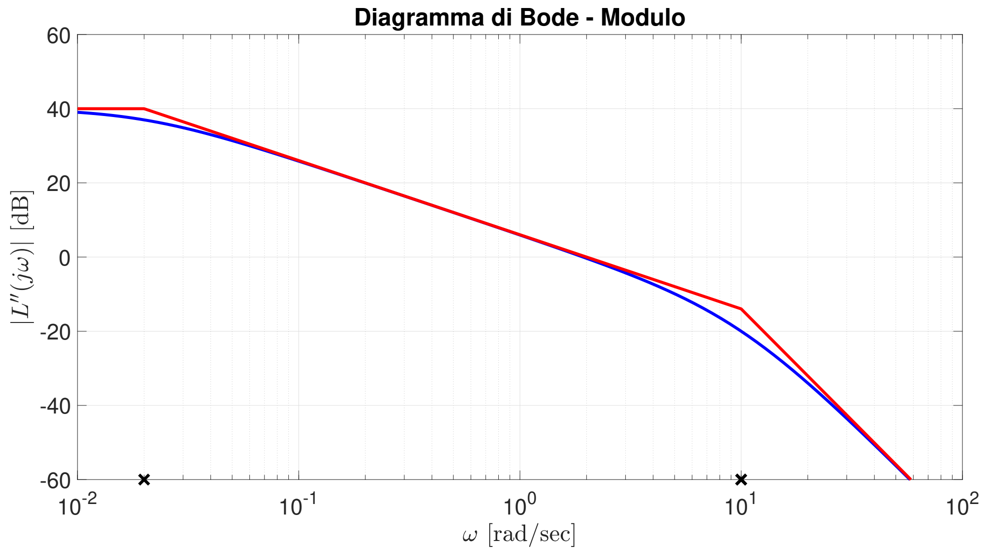
- il polo in bassa frequenza non può che essere in $\omega = 0.02\frac{rad}{sec}$, cioè $\tau_{bf} = 50sec$,
- la coppia di poli in alta frequenza è circa in $\omega = 10\frac{rad}{sec}$, cioè $\tau_{af} = 0.1sec$.

$$R_2(s) = \frac{(1+s)^2\,(1+0.5s)}{(1+50s)\,(1+0.1s)^2}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} L''(s) &= R(s)G(s) \\ &= R_1(s)R_2(s)G(s) \\ &= \frac{100}{6}\frac{(1+s)^2\,(1+0.5s)}{(1+50s)\,(1+0.1s)^2}\frac{6}{(1+s)^2\,(1+0.5s)} \\ &= \frac{100}{(1+50s)\,(1+0.1s)^2} \end{aligned}$$

Si traccia il diagramma di Bode del modulo di $|L''(j\omega)|$ per la verifica delle specifiche.



Si ha $\omega_c \approx 2\frac{rad}{sec}$.

Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \angle L''(j\omega_c)\\ &= -\arctan(2 \cdot 50) - 2\arctan(2 \cdot 0.1)\\ &= -89.4^\circ - 22.6^\circ\\ &= -112^\circ\end{aligned}$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= 180^\circ - |\varphi_c|\\ &= 180^\circ - 112^\circ\\ &= 68^\circ\end{aligned}$$

che rispetta le specifiche.
Quindi il controllore progettato è:

$$R(s) = \frac{100}{6}\frac{(1+s)^2(1+0.5s)}{(1+50s)(1+0.1s)^2}$$

Progetto dinamico (caso $r = 1$ e μ_R libero)

Consideriamo ora il progetto statico alternativo nel quale si è scelto di introdurre un integratore nel regolatore. La funzione di trasferimento d'anello è:

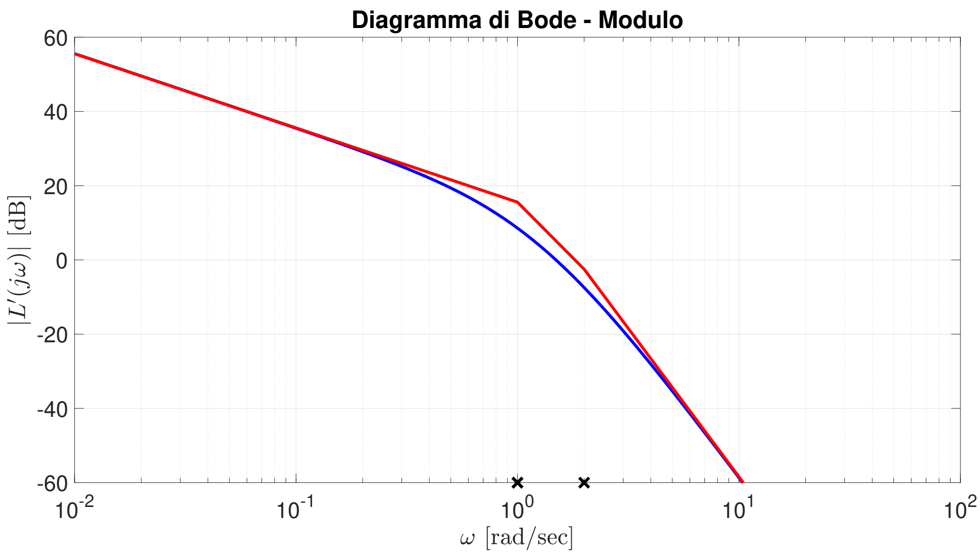
$$\begin{aligned}L(s) &= R(s)G(s)\\ &= R_1(s)R_2(s)G(s)\\ &= \frac{\mu_R}{s}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{6}{(1+s)^2(1+0.5s)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{6\mu_R}{s(1+s)^2(1+0.5s)}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$ **e** $\mu_R = 1$

Si ha quindi:

$$L'(s) = \frac{6}{s(1+s)^2(1+0.5s)}$$



Si ha $\omega_c \approx 1.8 \frac{rad}{sec}$.
Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned}
\varphi_c &= \angle L'(j\omega_c) \\
&= -90° - 2\arctan(1.8) - \arctan(1.8 \cdot 0.5) \\
&= -90° - 121.9° - 42.0° \\
&= -253.9°
\end{aligned}$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$\begin{aligned}
\varphi_m &= 180° - |\varphi_c| \\
&= 180° - 253.9° \\
&= -73.9°
\end{aligned}$$

Non rispetta le specifiche.
Il primo tentativo soddisfa il primo vincolo ma non il secondo, quindi procediamo con un altro tentativo.

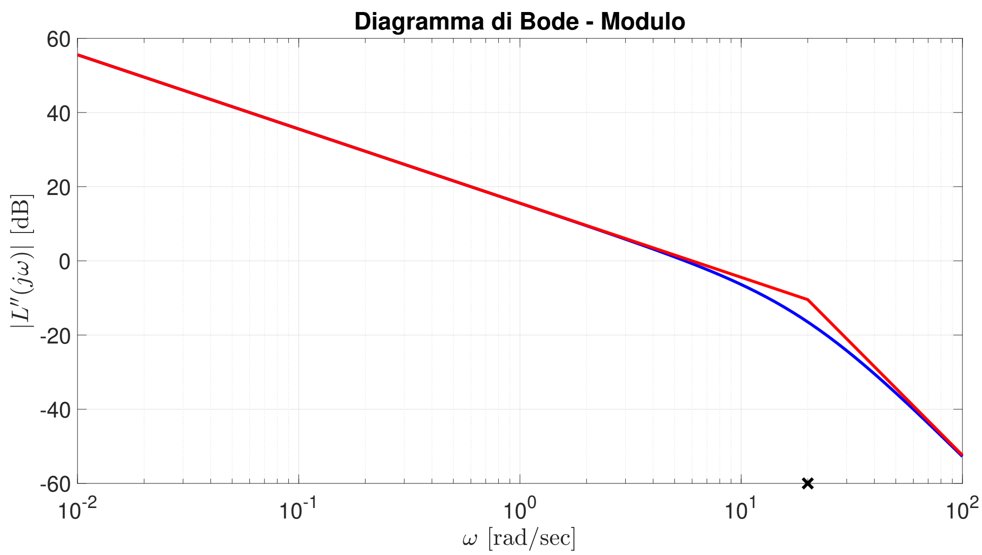
Secondo tentativo $R_2(s) = \frac{(1+s)^2(1+0.5s)}{(1+0.05s)^2}$ **e** $\mu_R = 1$

Cancelliamo i poli di $G(s)$ introducendo nel regolatore tre zeri alle rispettive frequenze. Per mantenere il controllore realizzabile, aggiungiamo due poli ad una pulsazione maggiore di ω_c. Per esempio, possiamo posizionarli in -20. La parte dinamica del regolatore è:

$$R_2(s) = \frac{(1+s)^2(1+0.5s)}{(1+0.05s)^2}$$

Si noti bene che il regolatore risultante $R(s) = R_1(s)R_2(s)$ è proprio in quanto è presente un integratore nella parte statica $R_1(s)$. La funzione d'anello risulta:

$$\begin{aligned} L''(s) &= \frac{1}{s}\frac{(1+s)^2(1+0.5s)}{(1+0.05s)^2}\frac{6}{(1+s)^2(1+0.5s)} \\ &= \frac{6}{s(1+0.05s)^2} \end{aligned}$$



Si ha $\omega_c \approx 6\frac{rad}{sec}$.
Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \angle L''(j\omega_c) \\ &= -90° - 2\arctan(6 \cdot 0.05) \\ &= -90° - 33.4° \\ &= -123.4° \end{aligned}$$

Da cui, il margine di fase:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= 180° - |\varphi_c| \\ &= 180° - 123.4° \\ &= 56.6° \end{aligned}$$

Il sistema risultante rispetta la specifica su ω_c ($\omega_c \geq 1\frac{rad}{sec}$) con un buon margine ma non quella su φ_m

($\varphi_m \geq 60°$) per pochi gradi. Dalla progettazione statica, abbiamo lasciato μ_R libero e quindi possiamo scegliere un guadagno $\mu_R < 1$ sufficientemente piccolo da non abbassare troppo la pulsazione critica ma che alzi invece il margine di fase.

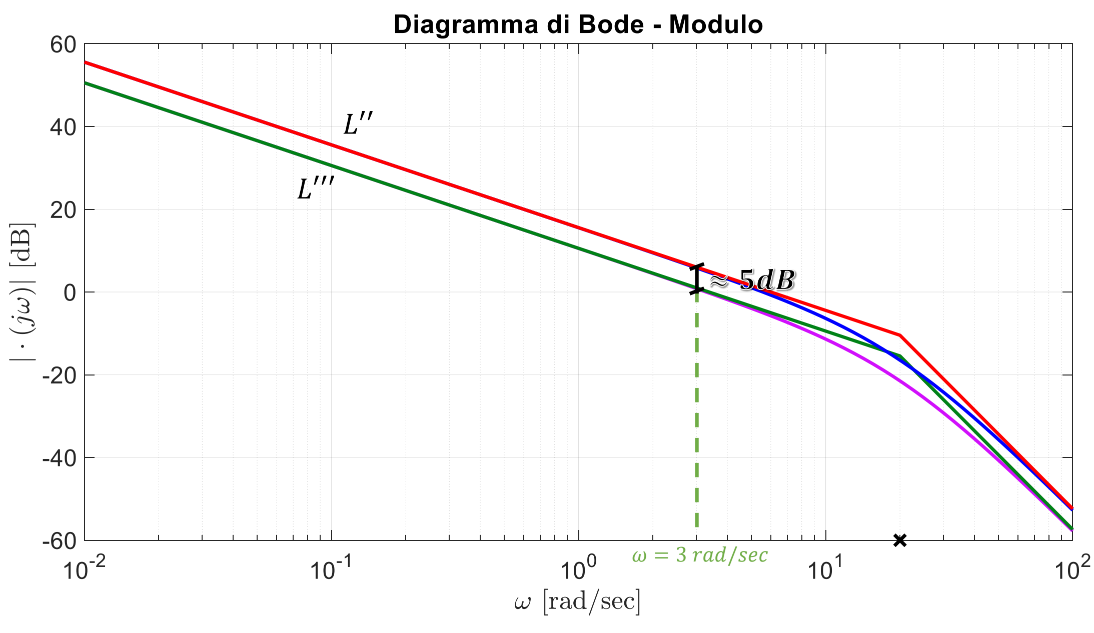
Terzo tentativo $R_2(s) = \frac{(1+s)^2(1+0.5s)}{(1+0.05s)^2}$ **e** $\mu_R = 0.5623$

Scegliamo μ_R in modo tale che la pulsazione critica diventi $\omega_c \approx 3\frac{rad}{sec}$. Per fare ciò, osserviamo che $|L''(j3)|_{dB} \approx 5dB$ e di conseguenza è sufficiente scegliere il guadagno del regolatore in modo tale che questo abbassi il diagramma di Bode del modulo di $L''(s)$ di $5dB$, ovvero:

$$\begin{aligned}\mu_{R_{dB}} &= -5dB \\ &\downarrow \\ \mu_R &= 10^{-\frac{5}{20}} \\ &= 0.5623\end{aligned}$$

La funzione d'anello diventa:

$$\begin{aligned}L'''(s) &= \frac{0.5623}{s}\frac{(1+s)^2(1+0.5s)}{(1+0.05s)^2}\frac{6}{(1+s)^2(1+0.5s)} \\ &= \frac{3.3738}{s(1+0.05s)^2}\end{aligned}$$



La fase critica risulta:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \angle L'''(j\omega_c) \\ &= -90° - 2\arctan(3 \cdot 0.05) \\ &= -90° - 17.1°\end{aligned}$$

$$= -107.1^\circ$$

Da cui, il margine di fase:

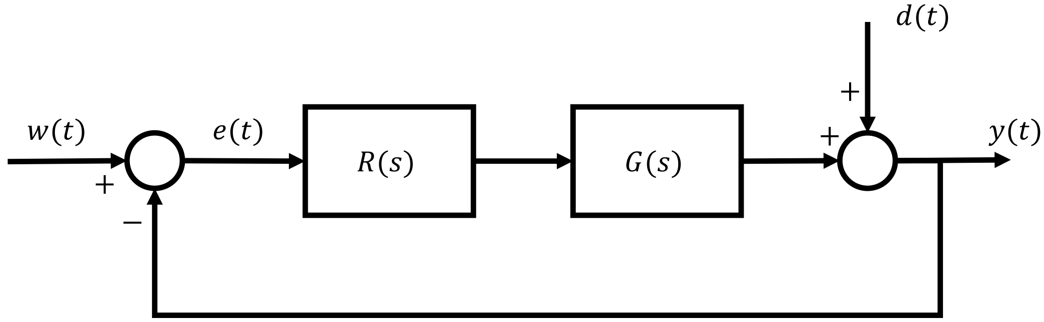
$$\begin{aligned} \varphi_m &= 180^\circ - |\varphi_c| \\ &= 180^\circ - 107.1^\circ \\ &= 72.9^\circ \end{aligned}$$

che rispetta le specifiche.
Quindi il controllore progettato è:

$$R(s) = \frac{0.5623}{s} \frac{(1+s)^2(1+0.5s)}{(1+0.05s)^2}$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema di controllo retroazionato a tempo continuo descritto dal seguente schema a blocchi:



dove $G(s) = \frac{5}{s(1+s)(1+2s)}$**.**

Punto 1: Si progetti il controllore $R(s)$ **in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e che siano rispettate le seguenti specifiche:**

- $|e(\infty)| \leq 0.15$ **a fronte di un andamento del riferimento** $w(t) = \mathbf{ram}(t)$ **e del disturbo** $d(t) = \mathbf{sca}(t)$**.**

Progetto statico

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello:

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) \\ &= R_1(s)R_2(s)G(s) \\ &= \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}\frac{5}{s\,(1+s)\,(1+2s)} \\ &= 5\frac{\mu_R}{s^{r+1}}\frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}\frac{1}{(1+s)\,(1+2s)} \end{aligned}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 5\mu_R$.

Il tipo della funzione d'anello è $g = r + 1$.

Si applica la disuguaglianza "caso pessimo":

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

I singoli contributi valgono (vedi tabellina):

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{1}{5\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = 0, \forall r \geq 0$$

Scegliendo $r = 0$:

$$\begin{aligned} |e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| &\leq 0.15 \\ \frac{1}{5\mu_R} + 0 &\leq 0.15 \\ \mu_R &\geq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Scegliamo:

$$\mu_R = 2$$

$$r = 0$$

Quindi:

$$R_1(s) = 2$$

Progetto dinamico

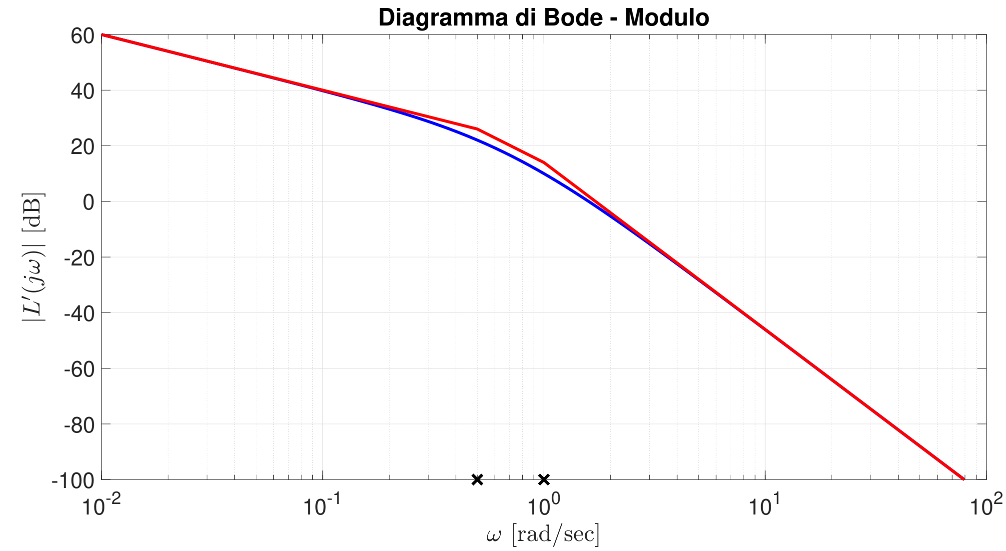
La funzione di trasferimento d'anello è ora

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) \\ &= R_1(s)R_2(s)G(s) \\ &= 2\frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)} \frac{5}{s(1+s)(1+2s)} \\ &= \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)} \frac{10}{s(1+s)(1+2s)} \end{aligned}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$

Si ha quindi:

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+s)(1+2s)}$$



Si ha $\omega_c \approx 1.6 \frac{rad}{sec}$.
Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \angle L'(j\omega_c) \\ &= -90° - \arctan(1.6) - \arctan(2 \cdot 1.6) \\ &= -90° - 58.0° - 72.6° \\ &= -220.6°\end{aligned}$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= 180° - |\varphi_c| \\ &= 180° - 220.6° \\ &= -40.6°\end{aligned}$$

Non rispetta le specifiche.
Il sistema risultante non è asintoticamente stabile, procediamo con un secondo tentativo.

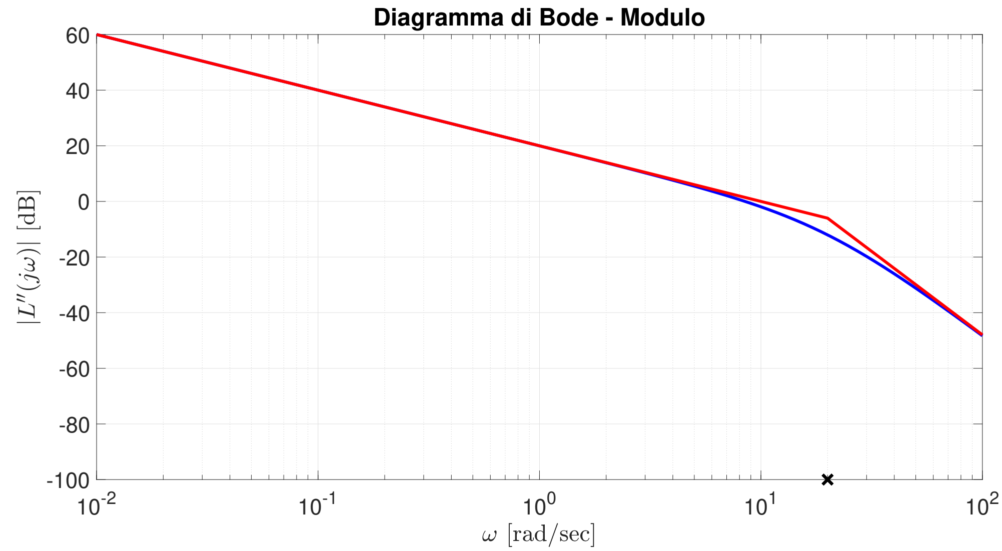
Secondo tentativo $R_2(s) = \frac{(1+s)(1+2s)}{(1+0.05s)^2}$

Cancelliamo i poli di $G(s)$ introducendo nel regolatore uno zero in -1 e uno in -0.5. Per mantenere il controllore proprio, aggiungiamo due poli in alta frequenza (in generale, si pongono ad una pulsazione maggiore della ω_c). In questo caso particolare, si può scegliere di posizionare due poli in -20. Quindi la parte dinamica del regolatore è:

$$R_2(s) = \frac{(1+s)(1+2s)}{(1+0.05s)^2}$$

Si ha quindi che la funzione d'anello è:

$$\begin{aligned}L''(s) &= 2\frac{(1+s)(1+2s)}{(1+0.05s)^2}\frac{5}{s(1+s)(1+2s)} \\ &= \frac{10}{s(1+0.05s)^2}\end{aligned}$$



Si ha $\omega_c \approx 10 \frac{rad}{sec}$.
Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned}
\varphi_c &= \angle L''(j\omega_c) \\
&= -90° - 2\arctan(10 \cdot 0.05) \\
&= -90° - 53.1° \\
&= -143.1°
\end{aligned}$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$\begin{aligned}
\varphi_m &= 180° - |\varphi_c| \\
&= 180° - 143.1° \\
&= 36.9°
\end{aligned}$$

che rispetta le specifiche.
Quindi il controllore progettato è:

$$R(s) = 2\frac{(1+s)(1+2s)}{(1+0.05s)^2}$$

Punto 2: Per il controllore determinato al punto precedente, valutare approssimativamente il tempo di assestamento e la sovraelongazione massima percentuale del sistema in anello chiuso per $w(t) = \mathbf{sca}(t)$.

Possiamo osservare che il sistema retroazionato avrà poli dominanti complessi coniugati (con $\omega_n = \omega_c$) per via del valore del margine di fase. Calcoliamo in modo approssimato lo smorzamento dei rispettivi poli complessi coniugati come:

$$\begin{aligned}
\xi &\approx \frac{\varphi_m}{100} \\
&= 0.369
\end{aligned}$$

Il tempo di assestamento della risposta allo scalino di un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati è:

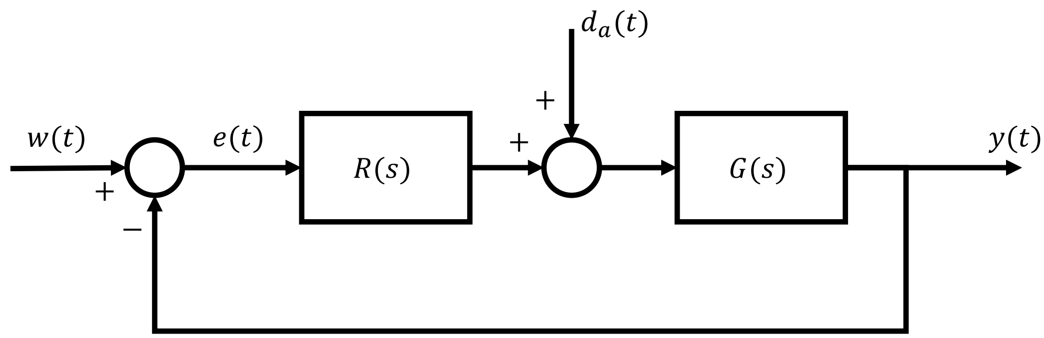
$$
\begin{aligned}
t_a &\approx \frac{5}{\xi\omega_n} \\
&= \frac{5}{0.369 \cdot 10} \\
&= 1.35 sec
\end{aligned}
$$

Infine, la sovraelongazione massima percentuale è pari a:

$$
\begin{aligned}
S\% &= 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
&= 100 e^{-\frac{0.369 \cdot \pi}{\sqrt{1-0.369^2}}} \\
&= 28.7\%
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo retroazionato a tempo continuo descritto dal seguente schema a blocchi:



dove $G(s) = \frac{2}{s}$**.**

Punto 1: Si progetti il controllore $R(s)$ **in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e che siano rispettate le seguenti specifiche:**

- $e(\infty) = 0$ **in corrispondenza di** $d_a(t) = A\mathrm{sca}(t)$ **per** A **qualsiasi,**
- $0.1 \frac{rad}{sec} \leq \omega_c \leq 1 \frac{rad}{sec}$**,**
- $\varphi_m > 70°$**.**

Progetto statico

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello:

$$
\begin{aligned}
L(s) &= R(s)G(s) \\
&= R_1(s)R_2(s)G(s) \\
&= \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{2}{s} \\
&= 2\frac{\mu_R}{s^{r+1}} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}
\end{aligned}
$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 2\mu_R$.

Il tipo della funzione d'anello è $g = r + 1$.

Si calcola $|e_{d_a}(\infty)|$ utilizzando il teorema del valore finale.
La funzione di trasferimento dal disturbo $d_a(t)$ all'errore $e(t)$ è:

$$\begin{aligned}\frac{E(s)}{D_a(s)} &= \frac{-G(s)}{1+L(s)}\\ &= -G(s)S(s)\end{aligned}$$

Quindi, tenendo conto che la parte dinamica del controllore non è ancora stata scelta:

$$\begin{aligned}e_{d_a}(\infty) &= \lim_{s\to 0} s\left(-G(s)S(s)\right)D_a(s)\\ &= -\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{2}{s}\cdot\frac{1}{1+2\frac{\mu_R}{s^{r+1}}}\cdot\frac{A}{s}\\ &= -2A\lim_{s\to 0}\frac{s^r}{s^{r+1}+2\mu_R}\\ &= \begin{cases}-\frac{A}{\mu_R} & r=0\\ 0 & r>0\end{cases}\end{aligned}$$

Per rispettare le specifiche è indispensabile scegliere $r=1$, mentre μ_R verrà scelto nel progetto dinamico.
Quindi si ottiene:

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

Progetto dinamico

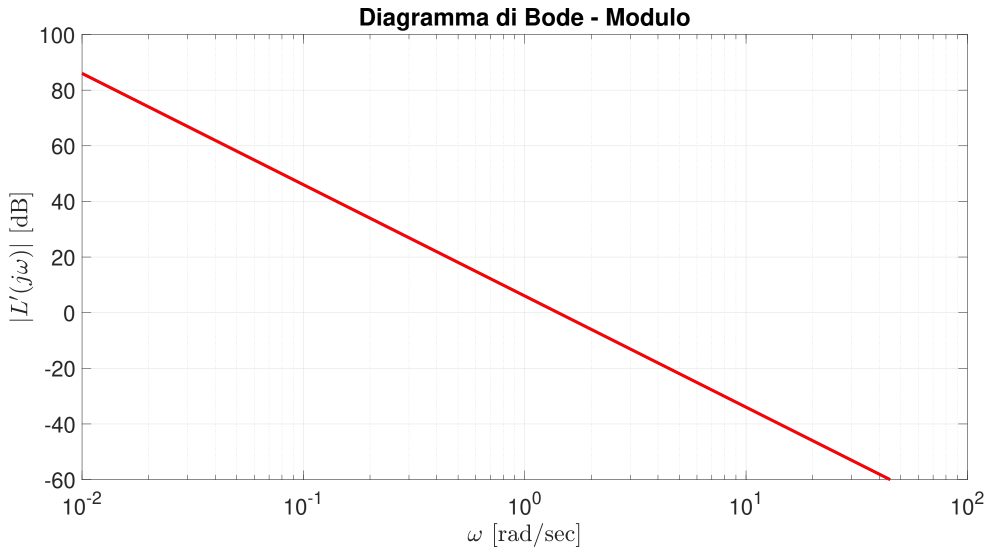
La funzione di trasferimento d'anello è ora

$$\begin{aligned}L(s) &= R(s)G(s)\\ &= R_1(s)R_2(s)G(s)\\ &= \frac{\mu_R}{s}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{2}{s}\\ &= \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{2\mu_R}{s^2}\end{aligned}$$

Primo tentativo $R_2(s)=1$ **e** $\mu_R=1$

Si ha quindi:

$$L'(s) = \frac{2}{s^2}$$



Si ha $\omega_c \approx 1.4 \frac{rad}{sec}$.
Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \angle L'(j\omega_c) \\ &= -180^\circ\end{aligned}$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= 180^\circ - |\varphi_c| \\ &= 180^\circ - 180^\circ \\ &= 0^\circ\end{aligned}$$

Non rispetta le specifiche.
Il primo tentativo non soddisfa entrambi i vincoli, quindi procediamo con un altro tentativo.

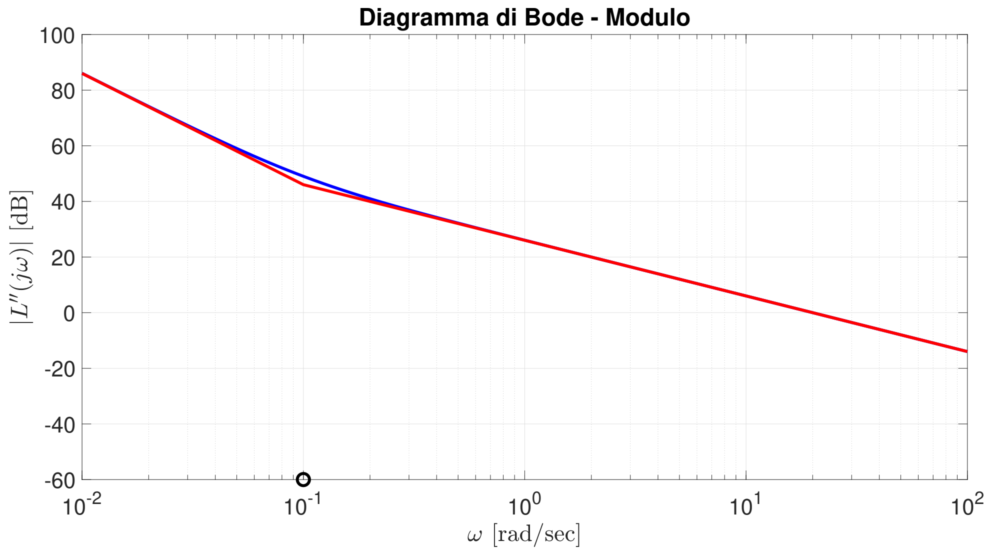
Secondo tentativo $R_2(s) = (1 + 10s)$ **e** $\mu_R = 1$

Introduciamo nel regolatore uno zero in -0.1 per fare in modo che il diagramma di Bode del modulo di $L''(s)$ attraversi l'asse a $0dB$ con pendenza -1. Il controllore $R(s)$ è comunque proprio. La parte dinamica del regolatore risulta:

$$R_2(s) = (1 + 10s)$$

Si ha quindi che la funzione d'anello è:

$$\begin{aligned}L''(s) &= \frac{1}{s} \cdot (1 + 10s) \cdot \frac{2}{s} \\ &= \frac{2\,(1 + 10s)}{s^2}\end{aligned}$$



Si ha $\omega_c \approx 20\frac{rad}{sec}$.
Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \angle L''(j\omega_c) \\ &= -180° + \arctan(20 \cdot 10) \\ &= -180° + 89.7° \\ &= -90.3°\end{aligned}$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= 180° - |\varphi_c| \\ &= 180° - 90.3° \\ &= 89.7°\end{aligned}$$

Il secondo tentativo soddisfa il secondo vincolo ma non il primo, quindi procediamo con un altro tentativo.

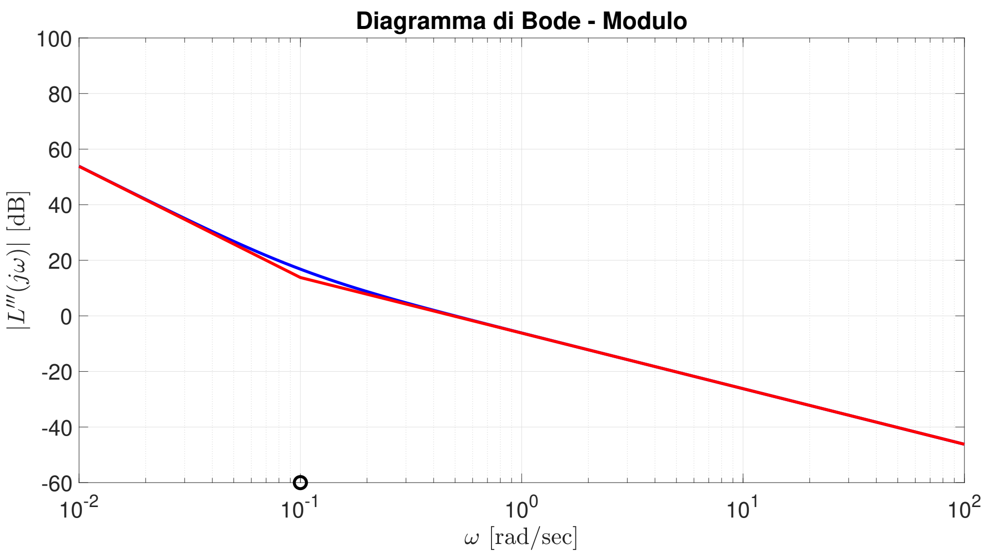
Terzo tentativo $R_2(s) = (1 + 10s)$ **e** $\mu_R = 0.0245$

Si lascia invariato $R_2(s)$, ma si modifica μ_R. In particolare, scegliendo $\mu_R < 1$ si diminuisce il guadagno d'anello e quindi il diagramma di Bode del modulo della funzione d'anello traslerà verso il basso, diminuendo la pulsazione critica.
Se desiderassimo avere $\omega_c \approx 0.5\frac{rad}{sec}$, osservando il diagramma di Bode del modulo del secondo tentativo, notiamo che dobbiamo abbassare il diagramma di $|L''(j\omega)|$ di circa $35dB$. In questo caso è possibile (ed agevole) calcolare il valore esatto. Infatti, valutando il valore di $|L''(j\omega)|$ alla pulsazione $\omega_c \approx 0.5\frac{rad}{sec}$ si ha:

$$\begin{aligned}|L''(j0.5)| &= \left|\frac{2\,(1 + 10 \cdot j0.5)}{(j0.5)^2}\right| \\ &= \frac{\sqrt{2^2 + 10^2}}{0.5^2} \\ &\approx 40.8 \\ &\approx 32.2dB\end{aligned}$$

In questo caso, si sceglie $\mu_R = \frac{1}{40.8} \approx 0.0245$.
Era comunque possibile effettuare una scelta approssimata direttamente dal grafico.
Si ha quindi che la funzione d'anello è:

$$\begin{aligned} L'''(s) &= \frac{1}{40.8s} \cdot (1+10s) \cdot \frac{2}{s} \\ &= \frac{0.049\,(1+10s)}{s^2} \end{aligned}$$



Si ha $\omega_c \approx 0.5 \frac{rad}{sec}$.
Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \angle L'''(j\omega_c) \\ &= -180° + \arctan(0.5 \cdot 10) \\ &= -180° + 78.7° \\ &= -101.3° \end{aligned}$$

Infine, si calcola il margine di fase:

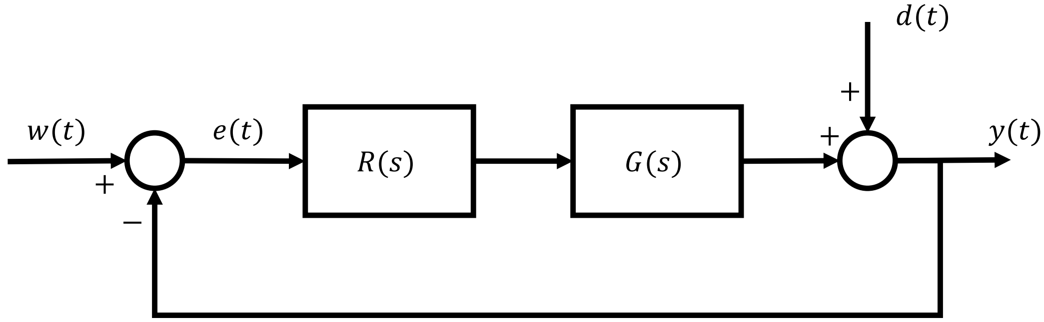
$$\begin{aligned} \varphi_m &= 180° - |\varphi_c| \\ &= 180° - 101.3° \\ &= 78.7° \end{aligned}$$

che rispetta le specifiche.
Quindi il controllore progettato è:

$$R(s) = 0.0245 \frac{(1+10s)}{s}$$

Esercizio 4

Si consideri il sistema di controllo retroazionato a tempo continuo descritto dal seguente schema a blocchi:



dove $G(s) = \frac{1}{(1+s)^2} e^{-4s}$**.**

Punto 1: Si progetti il controllore $R(s)$ **in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e che siano rispettate le seguenti specifiche:**

- $e(\infty) = 0$ **a fronte di un andamento del riferimento** $w(t) = \mathbf{sca}(t)$**,**
- $\omega_c \geq 0.1 \frac{rad}{sec}$**,**
- $\varphi_m > 30°$**.**

Progetto statico

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello:

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) \\ &= R_1(s)R_2(s)G(s) \\ &= \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)} \frac{1}{(1+s)^2} e^{-4s} \end{aligned}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = \mu_R$.

Il tipo della funzione d'anello è $g = r$.

La presenza del ritardo non incide sul progetto statico del regolatore.

A transitorio esaurito abbiamo (vedi tabellina):

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{1}{1+\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

Per rispettare le specifiche è indispensabile scegliere $r = 1$, mentre μ_R verrà scelto nel progetto dinamico. Quindi si ottiene:

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

Progetto dinamico

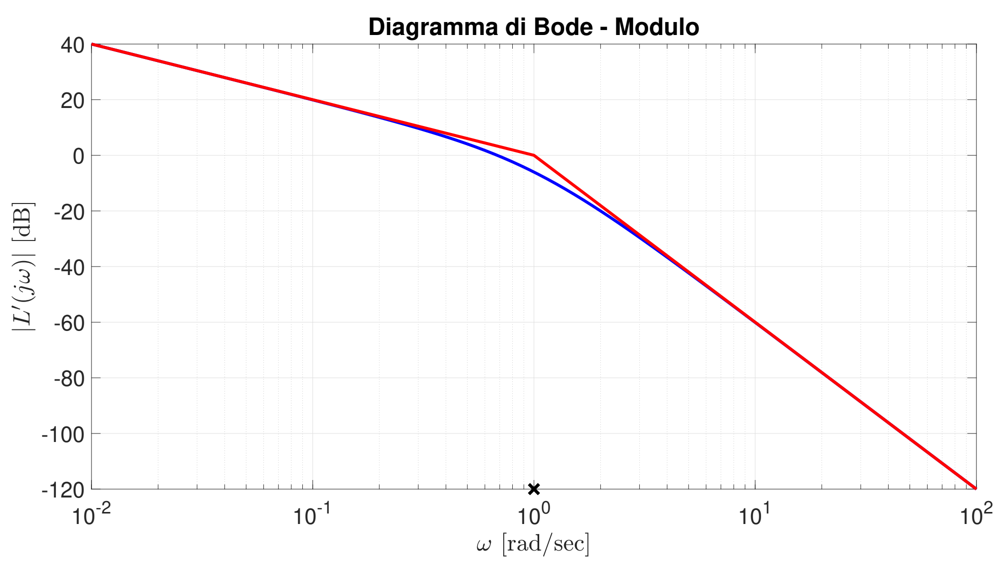
La funzione di trasferimento d'anello è ora

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) \\ &= R_1(s)R_2(s)G(s) \\ &= \frac{\mu_R}{s}\frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}\frac{1}{(1+s)^2}e^{-4s} \\ &= \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}\frac{\mu_R}{s(1+s)^2}e^{-4s} \end{aligned}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$ e $\mu_R = 1$

Si ha quindi:

$$L'(s) = \frac{1}{s(1+s)^2}e^{-4s}$$



Si ha $\omega_c \approx 1 \frac{rad}{sec}$.
Si calcola ora la fase critica (il contributo di un ritardo di tempo τ generico sulla fase critica è pari a $-\omega_c \cdot \tau \cdot \frac{180°}{\pi}$):

$$\varphi_c = \angle L'(j\omega_c)$$

$$
\begin{aligned}
&= -90^\circ - 2\arctan(1 \cdot 1) - 1 \cdot 4 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \\
&= -90^\circ - 90^\circ - 229.1^\circ \\
&= -409.1^\circ
\end{aligned}
$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$
\begin{aligned}
\varphi_m &= 180^\circ - |\varphi_c| \\
&= 180^\circ - 409.1^\circ \\
&= -229.1^\circ
\end{aligned}
$$

Non rispetta le specifiche.
Il primo tentativo soddisfa il primo vincolo ma non il secondo, quindi procediamo con un altro tentativo.

Secondo tentativo $R_2(s) = (1 + s)$ e $\mu_R = 0.2$

Visto il contributo significativo del ritardo sulla fase critica, risulta opportuno ricavare un limite destro (superiore) per la pulsazione critica. Dalle specifiche desideriamo:

$$\varphi_m \geq 30^\circ \to |\varphi_c| \leq 150^\circ$$

Per migliorare la fase critica, mantenendo il regolatore realizzabile, aggiungiamo uno zero in -1 per cancellare uno dei poli di $G(s)$ (il regolatore resta comunque proprio). La parte dinamica del controllore risulta quindi:

$$R_2(s) = (1 + s)$$

Consideriamo questa volta un generico $\mu_R > 0$, la funzione d'anello è:

$$
\begin{aligned}
L''(s) &= \frac{\mu_R}{s}(1+s)\frac{1}{(1+s)^2}e^{-4s} \\
&= \frac{\mu_R}{s\,(1+s)}e^{-4s}
\end{aligned}
$$

Per semplicità, ignoriamo inizialmente il polo in -1 di $L''(s)$, ovvero consideriamo $L''(s) = \frac{\mu_R}{s}e^{-4s}$. La sua fase critica è:

$$
\begin{aligned}
\varphi_c &= \angle L''(j\omega_c) \\
&= -90^\circ - \omega_c \cdot 4 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \\
&= -90^\circ - \omega_c \cdot 229.1
\end{aligned}
$$

Dalle specifiche desideriamo:

$$
\begin{aligned}
|\varphi_c| &\leq 150^\circ \\
|-90^\circ - \omega_c \cdot 229.1| &\leq 150^\circ
\end{aligned}
$$

Ricaviamo il limite superiore per la pulsazione critica:

$$
\begin{cases}
-90^\circ - \omega_c \cdot 229.1 \leq 150^\circ \\
-90^\circ - \omega_c \cdot 229.1 \geq -150^\circ
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \omega_c \cdot 229.1 \geq -240° \\ \omega_c \cdot 229.1 \leq 60° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_c \geq -1.048 \frac{rad}{sec} \\ \omega_c \leq 0.262 \frac{rad}{sec} \end{cases}$$

Consideriamo solo il vincolo $\omega_c \leq 0.262 \frac{rad}{sec}$ (pulsazione positiva). Di conseguenza, tenendo da conto anche del vincolo sulla pulsazione critica imposto dalle specifiche, otteniamo:

$$0.1 \frac{rad}{sec} \leq \omega_c \leq 0.262 \frac{rad}{sec}$$

Per ricavare il vincolo superiore, non abbiamo considerato il polo in -1 di $L''(s)$ sebbene questo abbia un contributo negativo sul margine di fase. Tuttavia, il polo si trova circa ad una decade dopo rispetto a $0.262 \frac{rad}{sec}$ e quindi il suo contributo sarà piccolo (ma non trascurabile). Per tenerne da conto, stiamo sufficientemente conservativi sulla pulsazione critica (lontani dal vincolo destro).
Ricaviamo analiticamente ω_c:

$$\begin{aligned} |L''(j\omega_c)| &= 1 \\ \left| \frac{\mu_R}{j\omega_c (1 + j\omega_c)} e^{-4j\omega_c} \right| &= 1 \\ \left| \frac{\mu_R}{j\omega_c (1 + j\omega_c)} \right| &= 1 \end{aligned}$$

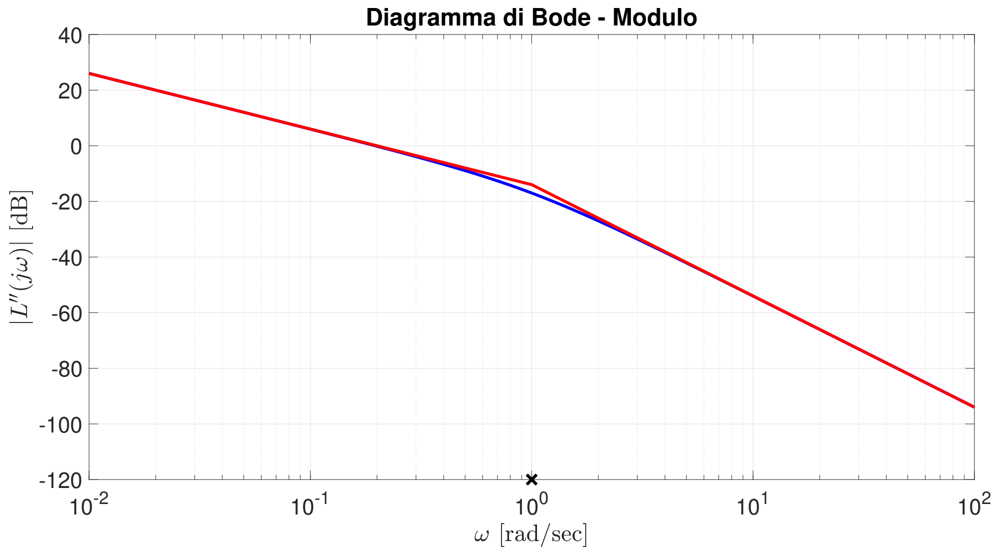
Vogliamo ottenere $\omega_c < 0.262 \frac{rad}{sec}$ che è sufficientemente lontana dal polo in -1. Di conseguenza, il suo contributo sul modulo sarà (circa) nullo:

$$\left| \frac{\mu_R}{j\omega_c (1 + j\omega_c)} \right| \approx \left| \frac{\mu_R}{j\omega_c} \right| \quad \text{Per } \omega_c < 0.262 \frac{rad}{sec}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mu_R}{j\omega_c} \right| &= 1 \\ \omega_c &= \mu_R \end{aligned}$$

Viste le considerazioni fatte in precedenza, scegliamo $\mu_R = 0.2$. Si ha quindi che la funzione d'anello è:

$$L''(s) = \frac{0.2}{s (1 + s)} e^{-4s}$$



Si ha $\omega_c \approx 0.2 \frac{rad}{sec}$.
Si calcola ora la fase critica:

$$\begin{aligned}
\varphi_c &= \underline{/L''}(j\omega_c) \\
&= -90^\circ - \arctan(1 \cdot 0.2) - 0.2 \cdot 4 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \\
&= -90^\circ - 11.3^\circ - 45.8^\circ \\
&= -147.1^\circ
\end{aligned}$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$\begin{aligned}
\varphi_m &= 180^\circ - |\varphi_c| \\
&= 180^\circ - 147.1^\circ \\
&= 32.9^\circ
\end{aligned}$$

che rispetta le specifiche.
Quindi il controllore progettato è:

$$R(s) = 0.2 \frac{(1+s)}{s}$$