Lezione 14.
Rappresentazione grafica della risposta in frequenza

Schema della lezione

1. Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza
2. Diagramma di Bode del modulo: convenzioni
3. Diagramma di Bode del modulo: tracciamento
4. Diagramma asintotico di Bode del modulo: regole per il tracciamento
5. Diagramma di Bode della fase: convenzioni
6. Argomento di un numero complesso
7. Diagramma di Bode della fase: tracciamento
8. Diagramma asintotico di Bode della fase: regole per il tracciamento
9. Sistemi a fase minima
10. Diagramma polare
11. Matlab

1. Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza

La risposta in frequenza $G(j\omega)$ è una funzione a valori **complessi** della variabile reale (positiva) ω . Quindi, per ogni valore reale positivo di ω avrò un punto del piano complesso.

Esempio

$$G(s) = \frac{5}{1+5s}$$ fdt

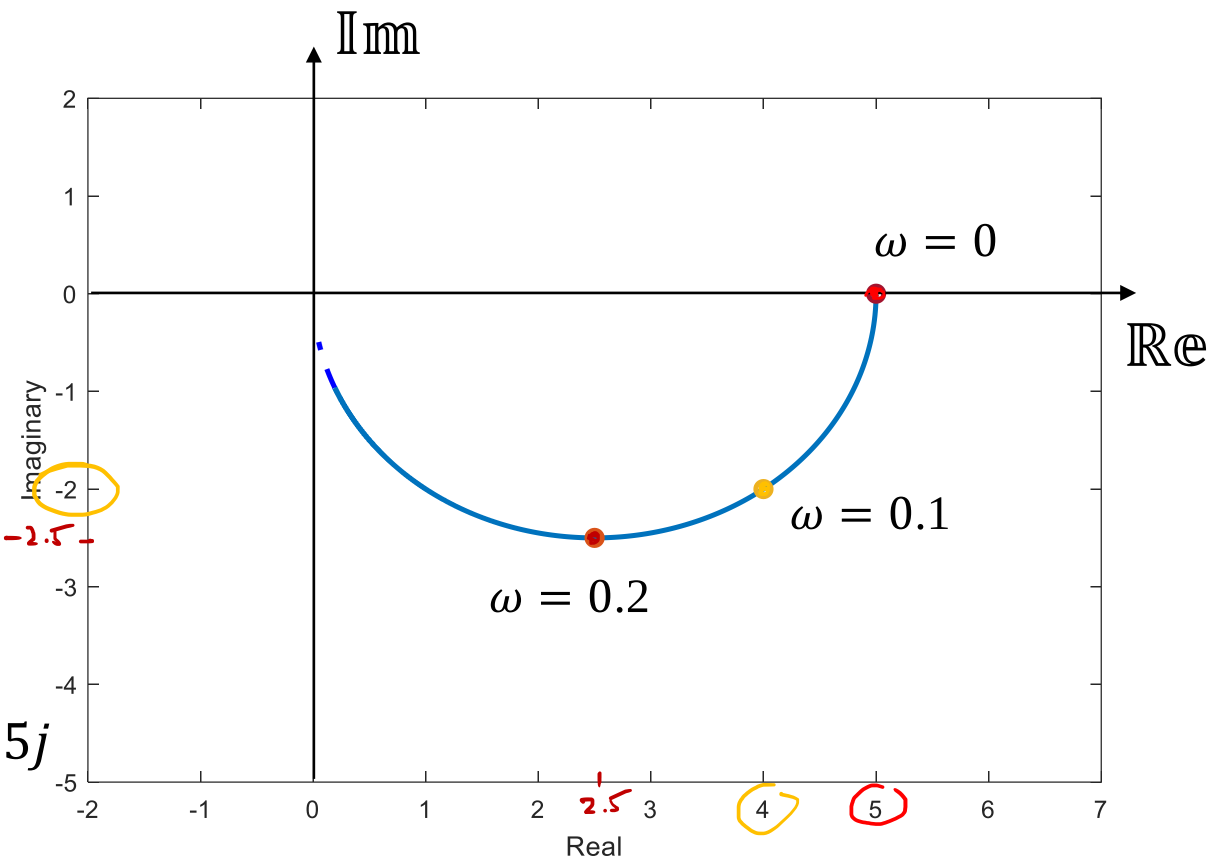
$$G(j\omega) = \frac{5}{1+5j\omega}$$ rif

Calcoliamo qualche punto

$$G(j0) = \frac{5}{1+5j0} = 5$$

$$G(j0.1) = \frac{5}{1+5j0.1} = 4 - 2j$$

$$G(j0.2) = \frac{5}{1+5j0.2} = 2.5 - 2.5j$$



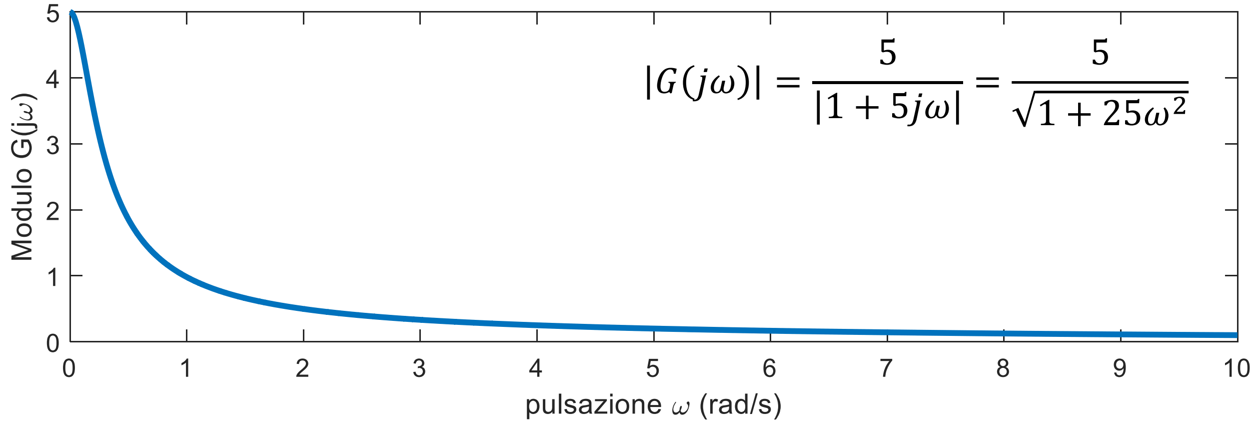
La rappresentazione nel piano complesso della risposta in frequenza si dice **diagramma polare**.

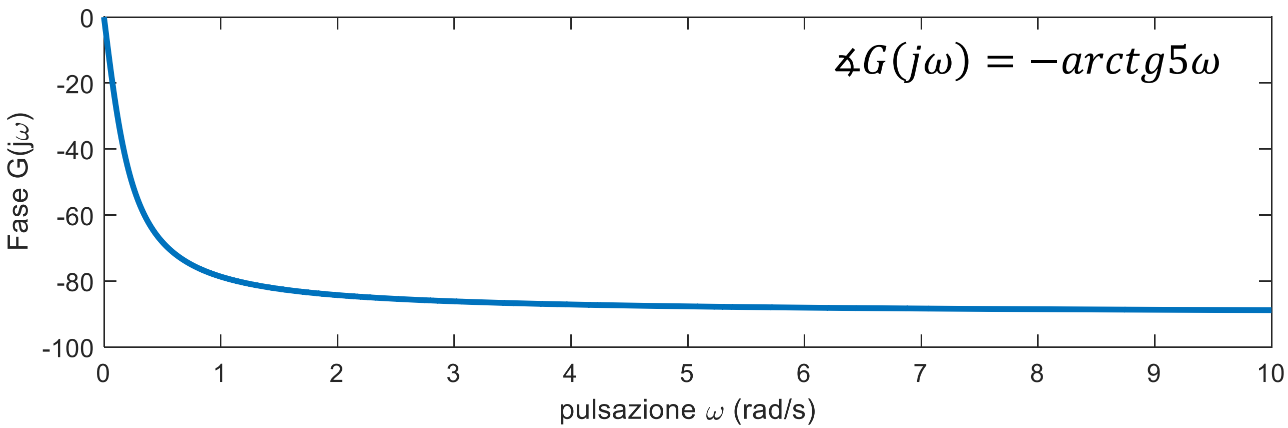
E' possibile rappresentare in **due grafici separati** il **modulo** e la **fase** della risposta in frequenza.
Sia il modulo $|G(j\omega)|$ che la fase $\measuredangle G(j\omega)$ sono funzioni a valori **reali** della variabile reale (positiva) ω .

Esempio

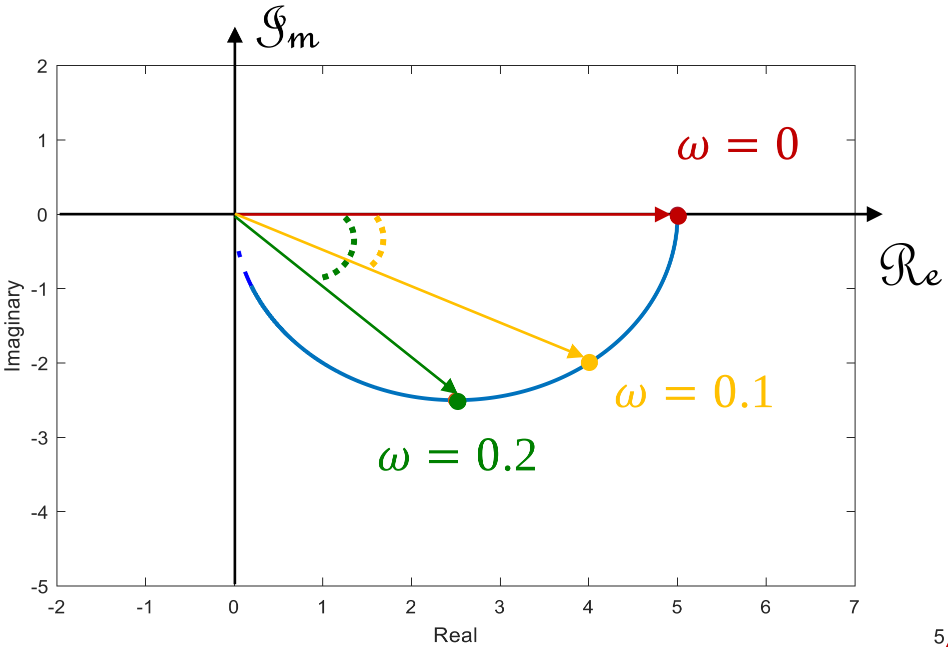
$$G(s) = \frac{5}{1+5s}$$

$$G(j\omega) = \frac{5}{1+5j\omega}$$





Le rappresentazioni di modulo e fase della risposta in frequenza in funzione della pulsazione sono **diagramma cartesiani**.



Ovviamente, il contenuto informativo dei diagrammi cartesiani è il medesimo del diagramma polare.

$$G(j0) = \frac{5}{1+5j0} = 5$$

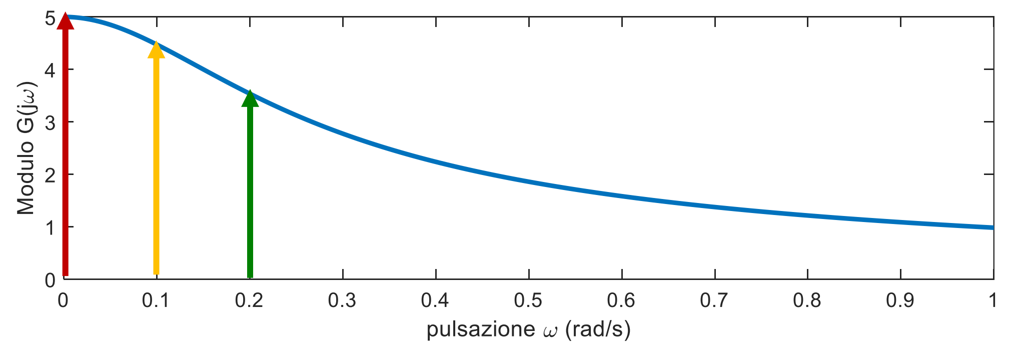
$$G(j0.1) = \frac{5}{1+5j0.1} = 4 - 2j$$

$$G(j0.2) = \frac{5}{1+5j0.2} = 2.5 - 2.5j$$

$$|G(j0)| = 5$$

$$|G(j0.1)| = \sqrt{20} \cong 4.47$$

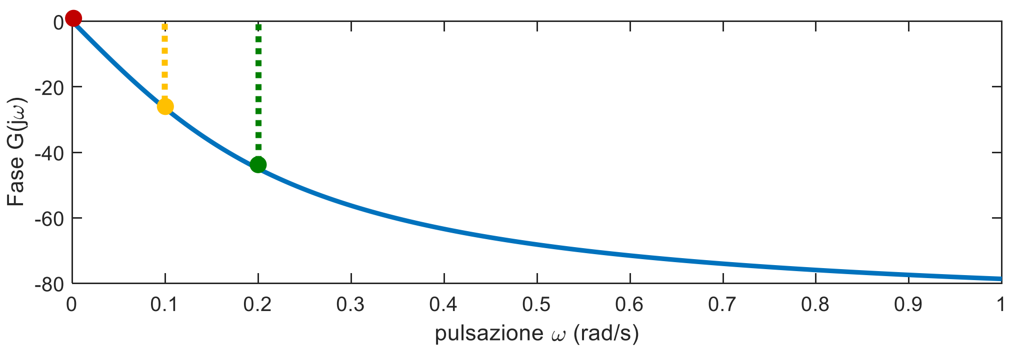
$$|G(j0.2)| = \sqrt{12.5} \cong 3.54$$



$$\measuredangle G(j0) = 0°$$

$$\measuredangle G(j0.1) = -arctg0.5 = -26°.6$$

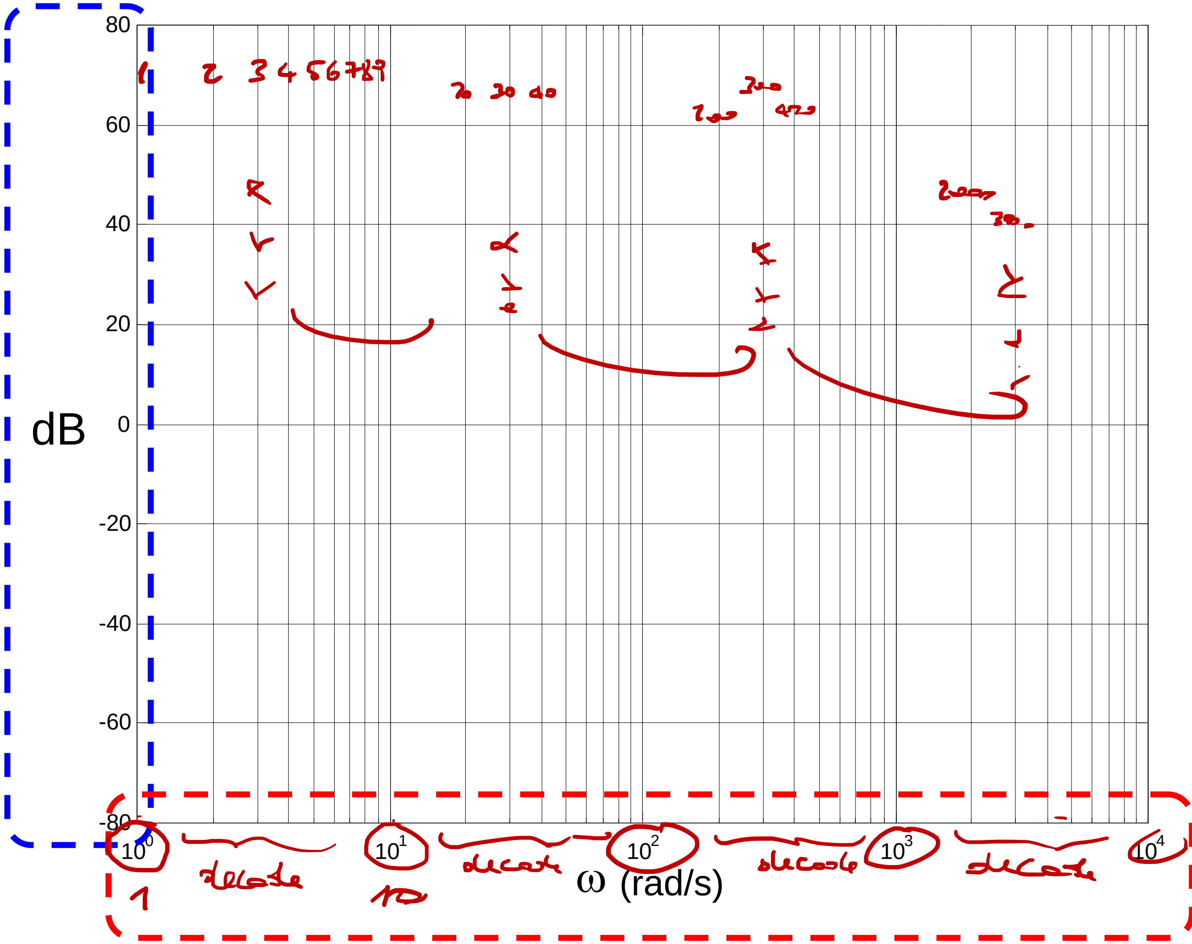
$$\measuredangle G(j0.2) = -arctg1 = -45°$$



2. Diagramma di Bode del modulo : convenzioni

Ordinata in dB

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$$



Ascissa in scala logaritmica $\log\omega_2 - \log\omega_1 = \log\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$

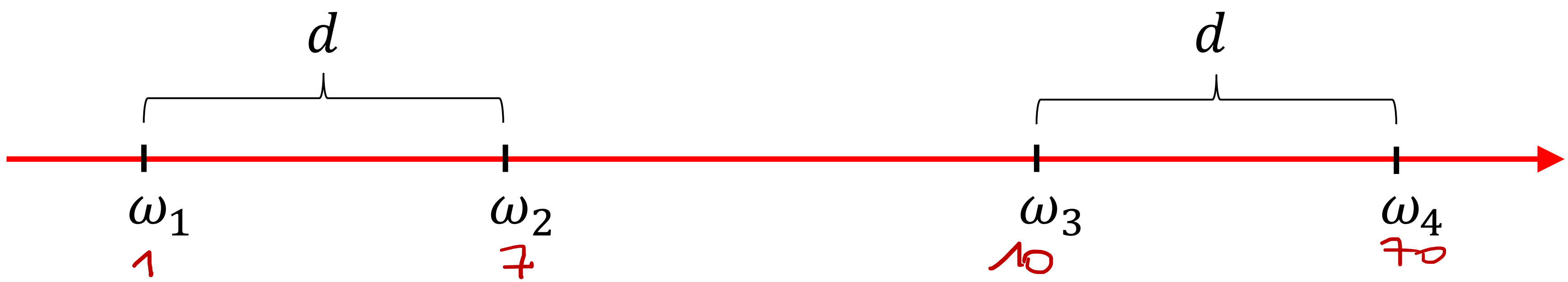
N.B. Logaritmo in base 10

Nota Bene

Scala lineare

$d = x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ Punti alla stessa distanza: uguale **differenza** delle ascisse.

Scala logaritmica



$$d = log\omega_2 - log\omega_1 = log\omega_4 - log\omega_3$$
$$= log\frac{\omega_2}{\omega_1} = log\frac{\omega_4}{\omega_3}$$

Punti alla stessa distanza:
uguale **rapporto** delle ascisse.

3. Diagramma di Bode del modulo : tracciamento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \quad \Longrightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{|j\omega|^g} \frac{\prod_i |(1 + j\omega T_i)|}{\prod_i |(1 + j\omega\tau_i)|}$$

funzione di trasferimento

modulo della risposta in frequenza

modulo della risposta in frequenza in dB

guadagno poli o zeri nell'origine

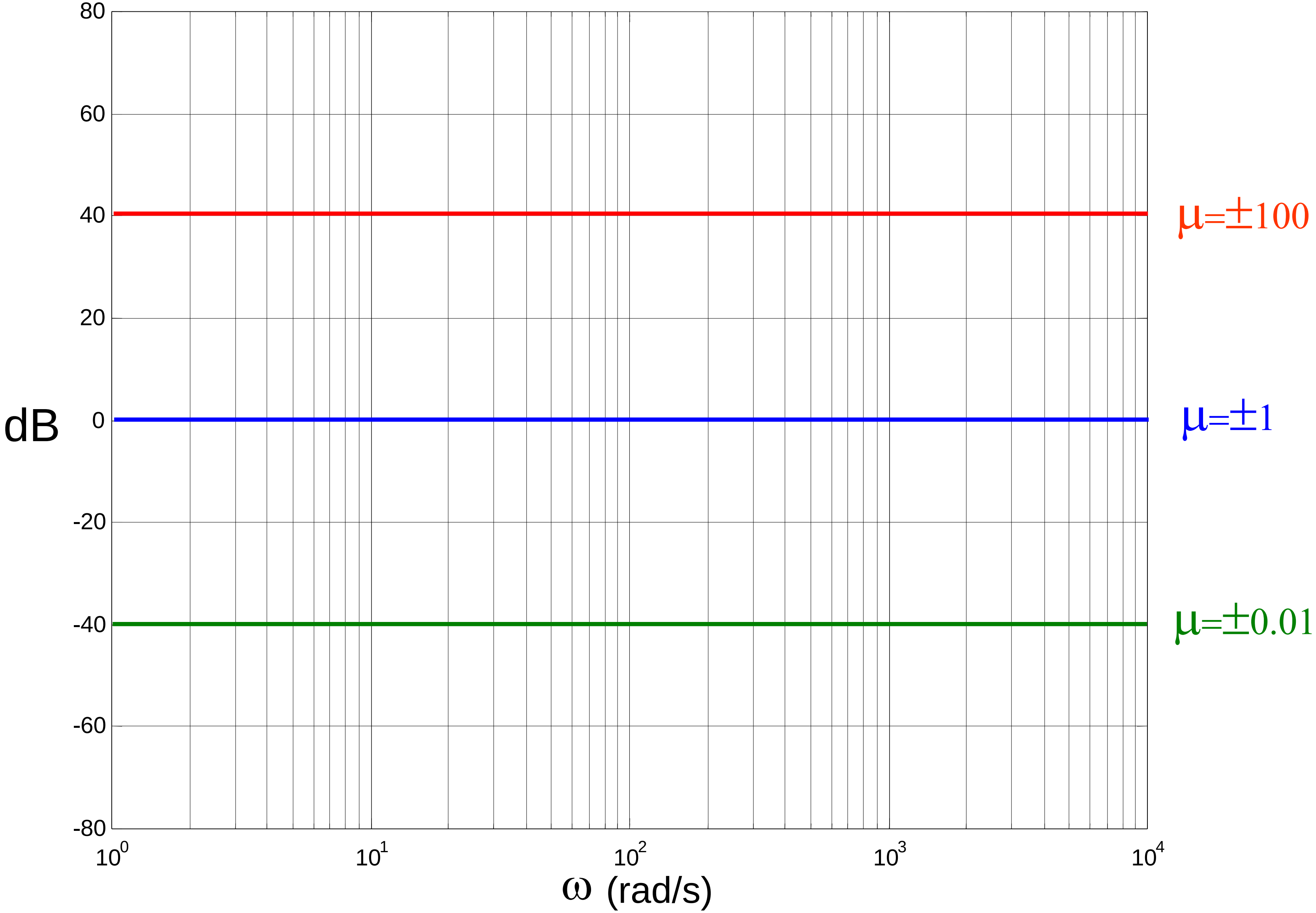
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log|\mu| - 20 \log|j\omega|^g +$$

$$+ \sum_i 20 \log|1 + j\omega T_i| +$$ zeri (reali & complessi coniugati)

$$- \sum_i 20 \log|1 + j\omega\tau_i|$$ poli (reali & complessi coniugati)

3.1 Guadagno

$20\log|\mu| \Rightarrow$ retta costante

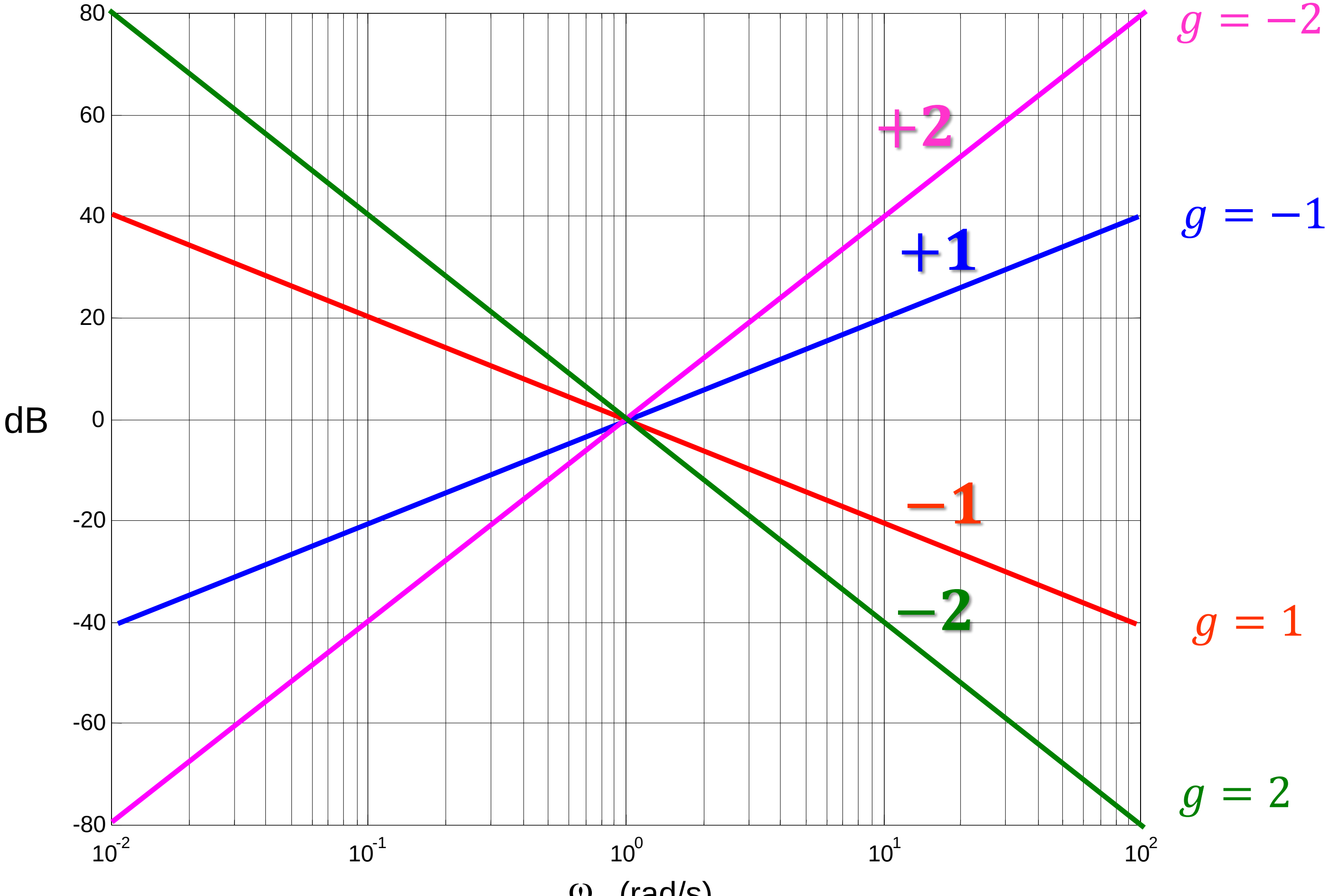


3.2 Poli o zeri nell'origine

$$-20\log|j\omega|^g = -20g\log\omega \Rightarrow$$

retta con
pendenza $-20g$ dB/decade
passante per 0 dB in $\omega = 1\ rad/s$

per convenzione la pendenza si indica con $-g$

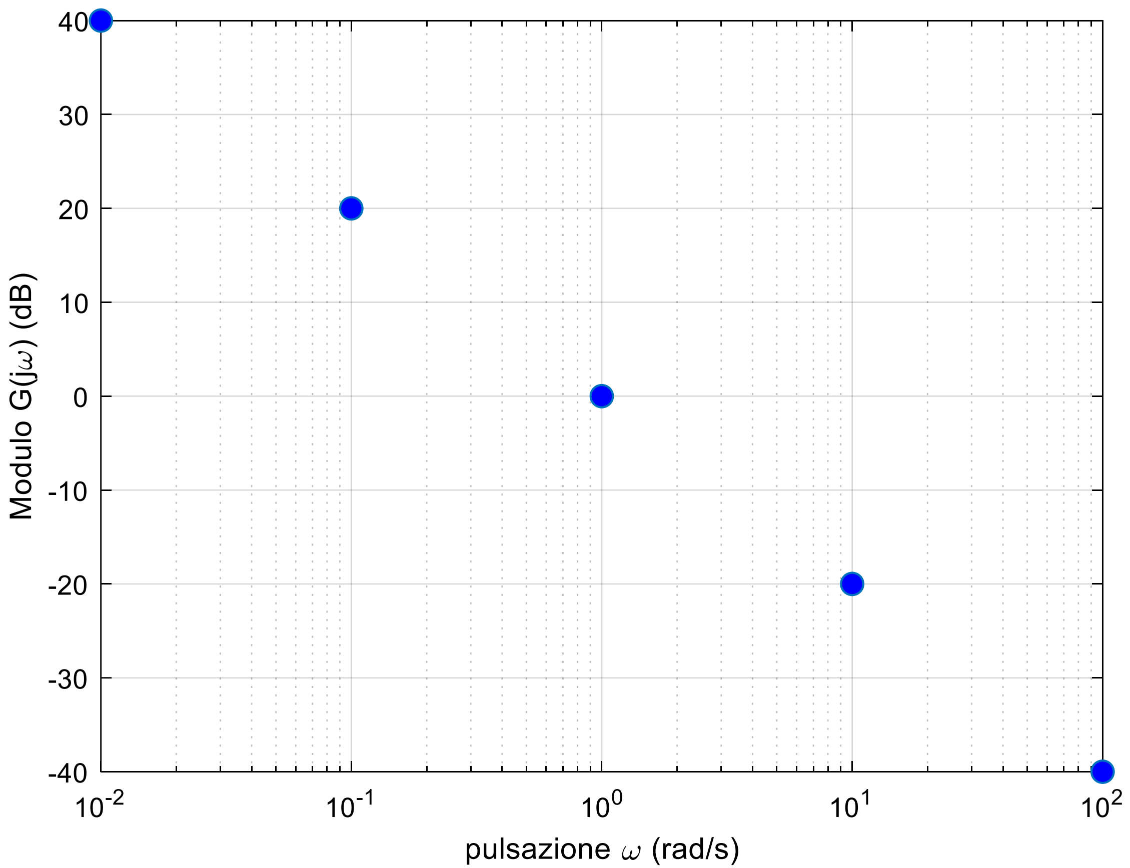


Esempio esplicativo

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

funzione di trasferimento — risposta in frequenza — modulo della risposta in frequenza

ω	$\lvert G(j\omega)\rvert = \frac{1}{\omega}$
0.01	$100 \rightarrow 40\ dB$
0.1	$10 \rightarrow 20\ dB$
1	$1 \rightarrow 0\ dB$
10	$0.1 \rightarrow -20\ dB$
100	$0.01 \rightarrow -40\ dB$



3.3.a Zero reale

$$20\log|1+j\omega T| = 20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \qquad T \text{ reale}$$

Il disegno di questa funzione di ω non è facile.

Si può trovare un'approssimazione ragionevole guardando il comportamento ad alte e basse pulsazioni.

Basse ω

se $\omega^2T^2 << 1$, cioè $\omega << \dfrac{1}{|T|}$ $\Rightarrow$ $20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong \mathbf{0\ dB}$

Alte ω

se $\omega^2T^2 >> 1$, cioè $\omega >> \dfrac{1}{|T|}$ $\Rightarrow$ $20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong$

$$\cong 20\log\omega\,|T| \cong$$

$$\cong \mathbf{20\log\omega + 20\log|T|}$$

Approssimazione asintotica

Basse ω

per $\omega < \frac{1}{|T|}$ ⇒ retta costante a 0 dB

Alte ω

per $\omega > \frac{1}{|T|}$ ⇒ retta passante per 0 dB in $\omega = \frac{1}{|T|}$

con pendenza +1

Infatti, si può calcolare l'intersezione con l'asse delle ascisse:

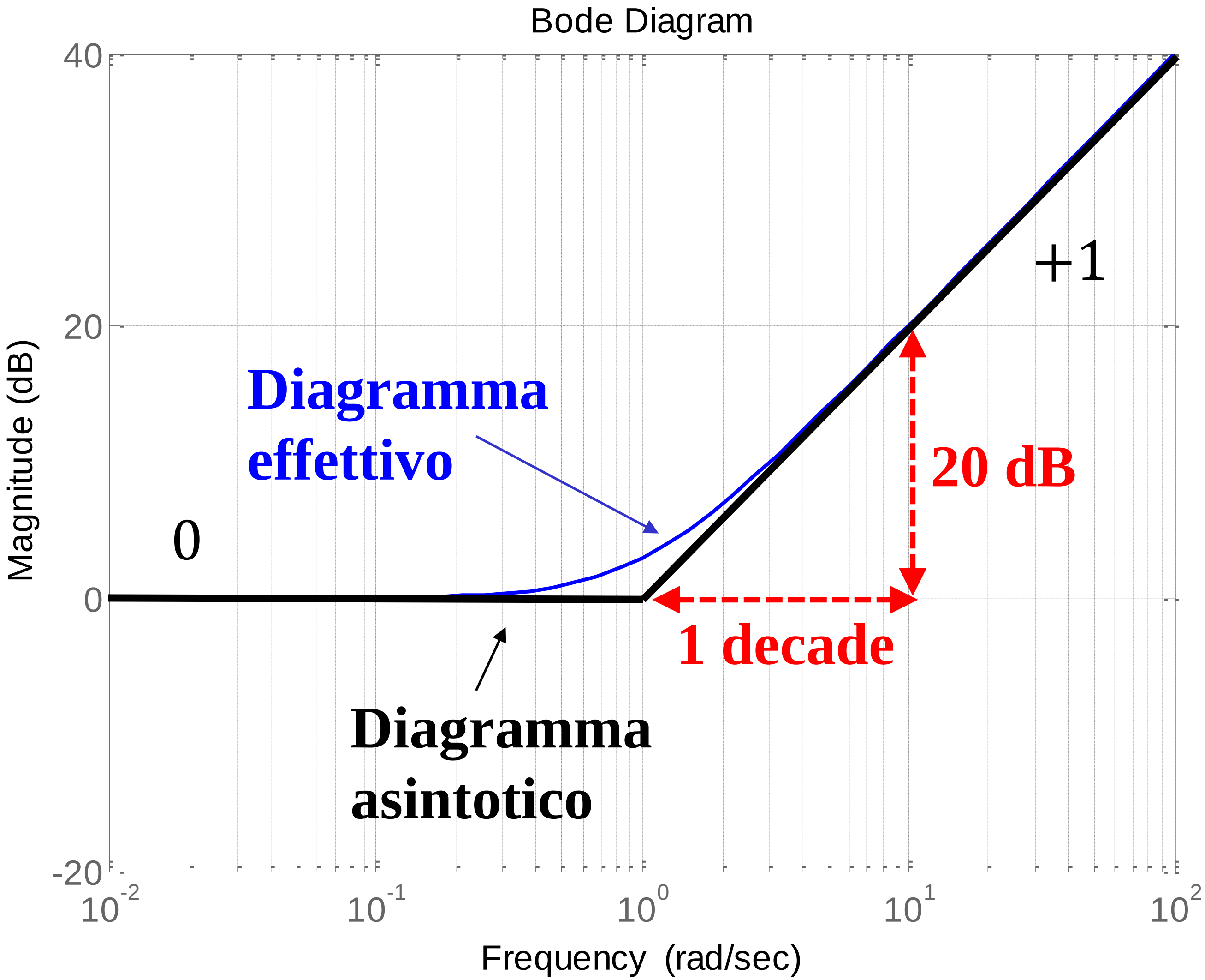
$$20\log\omega + 20\log|T| = 0$$

$$20\log\omega = -20\log|T|$$

$$20\log\omega = 20\log\frac{1}{|T|}$$

$$\omega = \frac{1}{|T|}$$

Zero reale (esempio) $G(s) = 1 + s$



Valutazione dell'errore massimo

Si consideri $G(s) = 1 + sT$

L'errore in $\omega = \frac{1}{|T|}$ vale:

$$E = 20\log|1 + j\omega T| = 20\log\sqrt{1 + \omega^2 T^2} =$$

$$= 20\log\sqrt{1 + \frac{1}{T^2}T^2} = 20\log\sqrt{2} \cong 3\ \text{dB}$$

L'errore massimo che si commette usando il diagramma asintotico è pari a 3 dB (per ogni zero), in corrispondenza della pulsazione dello zero.

3.3.b Zeri complessi coniugati

$$20\log|1+j\omega T| + 20\log|1+j\omega \bar{T}|$$ T complesso

Usiamo l'espressione con smorzamento e pulsazione naturale

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$ funzione di trasferimento

$$\tilde{G}(j\omega) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$$ risposta in frequenza

Il modulo (in dB) vale

$$\left|\tilde{G}(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Cerchiamo l'approssimazione asintotica:

Basse ω

per $\omega << \omega_n$ $\Rightarrow$ retta costante a **0 dB**

Alte ω

per $\omega >> \omega_n$ $\Rightarrow$ $\left|\tilde{G}(j\omega)\right|_{dB} \cong 20\log\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} =$

$$= 40\log\frac{\omega}{\omega_n} = 40\log\omega - 40\log\omega_n$$

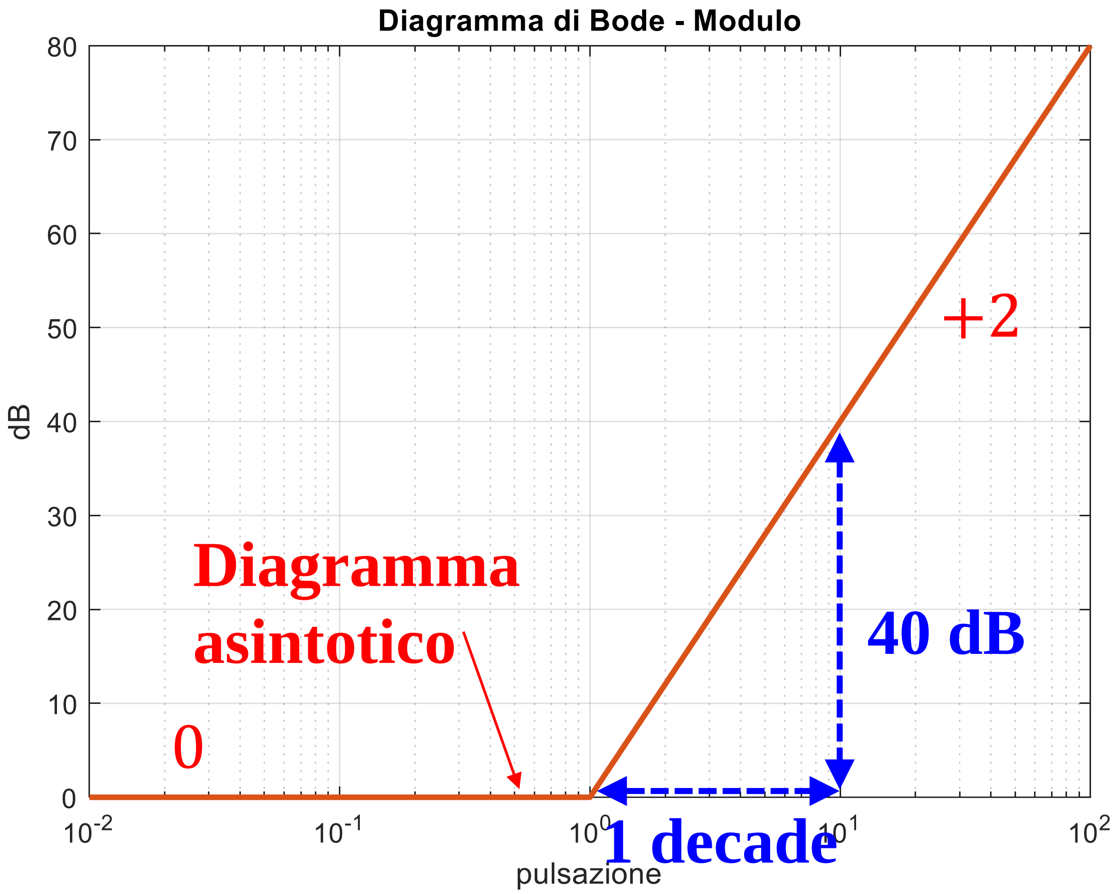
retta passante per 0 dB in $\omega = \omega_n$

con pendenza $+2$

Zeri complessi coniugati (esempio)

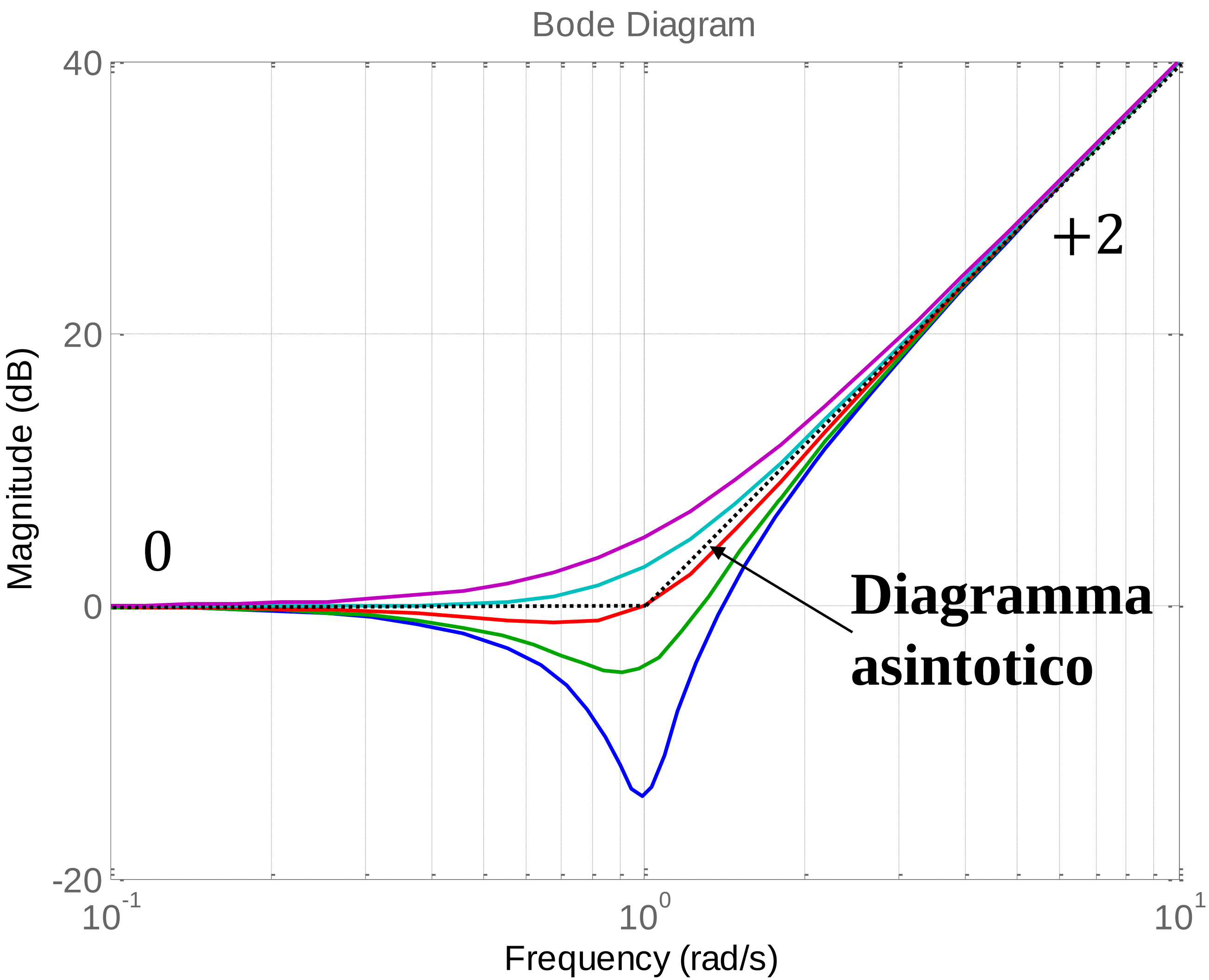
$\tilde{G}(s) = 1 + s + s^2$

$\omega_n = 1$
$\xi = 0.5$



Zeri complessi coniugati (esempio)

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2\xi s + s^2 \qquad \omega_n = 1$$



$|\xi| = 0.1$

$|\xi| = 0.3$

$|\xi| = 0.5$

$|\xi| = 0.7$

$|\xi| = 0.9$

Valutazione dell'errore massimo

L'errore in $\omega = \omega_n$ **dipende da ξ**

$$E = 20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}\,\Bigg|_{\omega=\omega_n} = 20\log\sqrt{4\xi^2} = 20\log(2|\xi|)$$

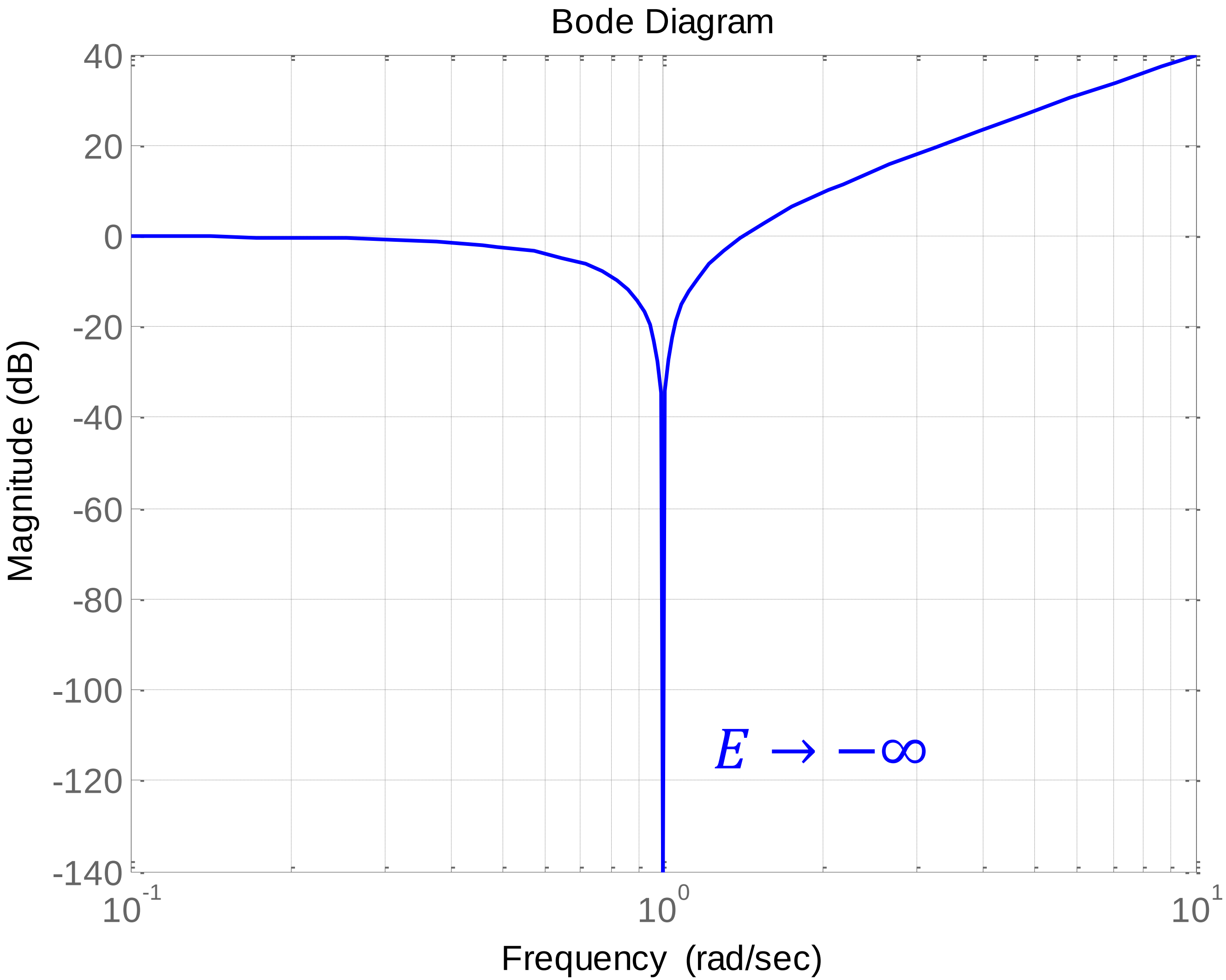
se $|\xi| = 1$ $\quad E = 20\log 2 \cong 6\text{ dB}$ (2 zeri reali coincidenti!)

se $\xi \to 0$ $\quad E \to -\infty$

Zeri immaginari coniugati (esempio)

$\tilde{G}(s) = 1 + s^2$ $\omega_n = 1$

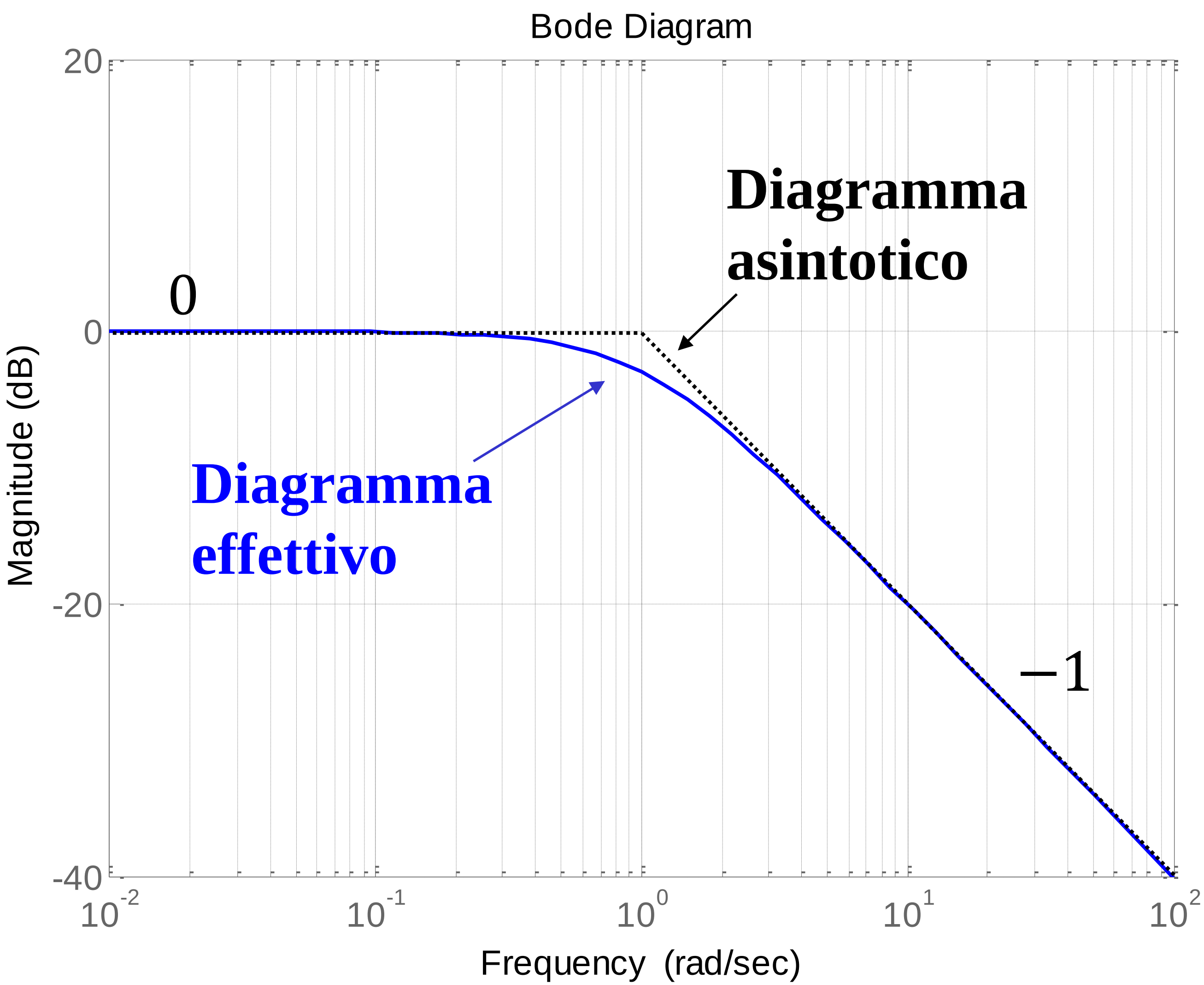
$\xi = 0$



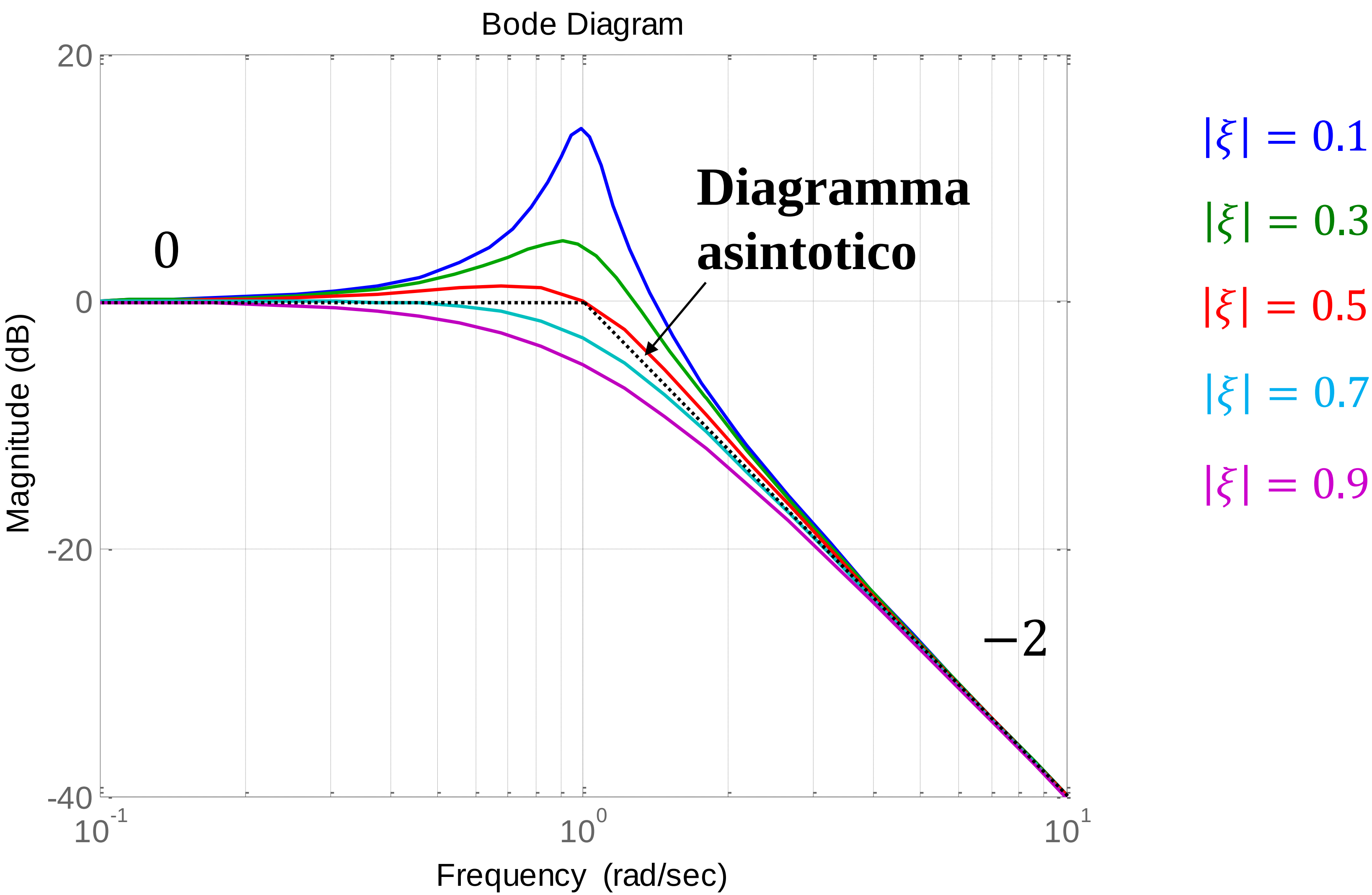
Per i **poli** i diagrammi sono uguali a quelli degli zeri con il segno cambiato

Polo reale (esempio)

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$



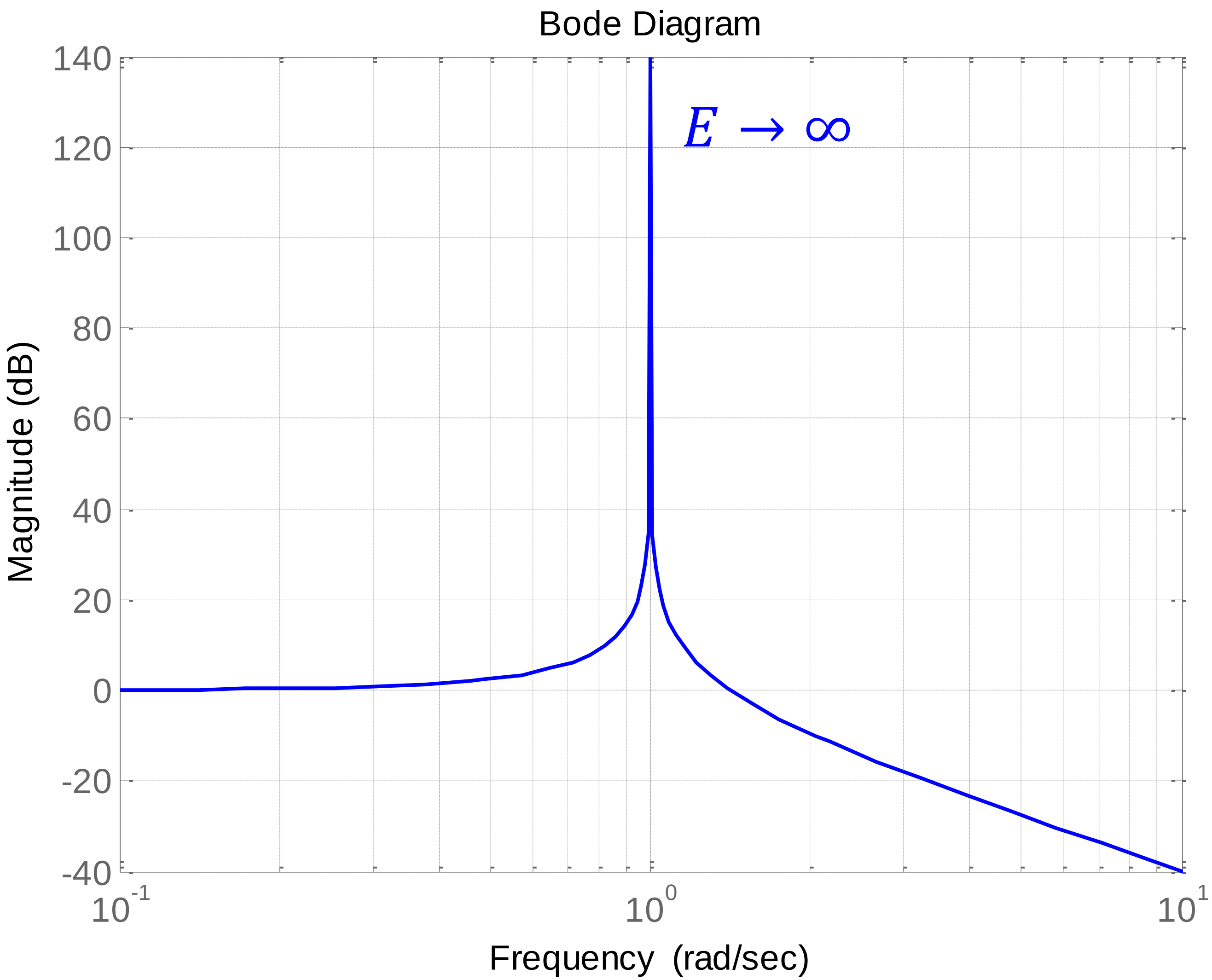
Poli complessi coniugati (esempio) $G(s) = \dfrac{1}{1 + 2\xi s + s^2}$ $\omega_n = 1$



Poli immaginari coniugati (esempio)

$$G(s) = \frac{1}{1+s^2} \qquad \omega_n = 1$$

$$\xi = 0$$



Esempio esplicativo

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

Proviamo a disegnare i singoli contributi e poi sommiamoli

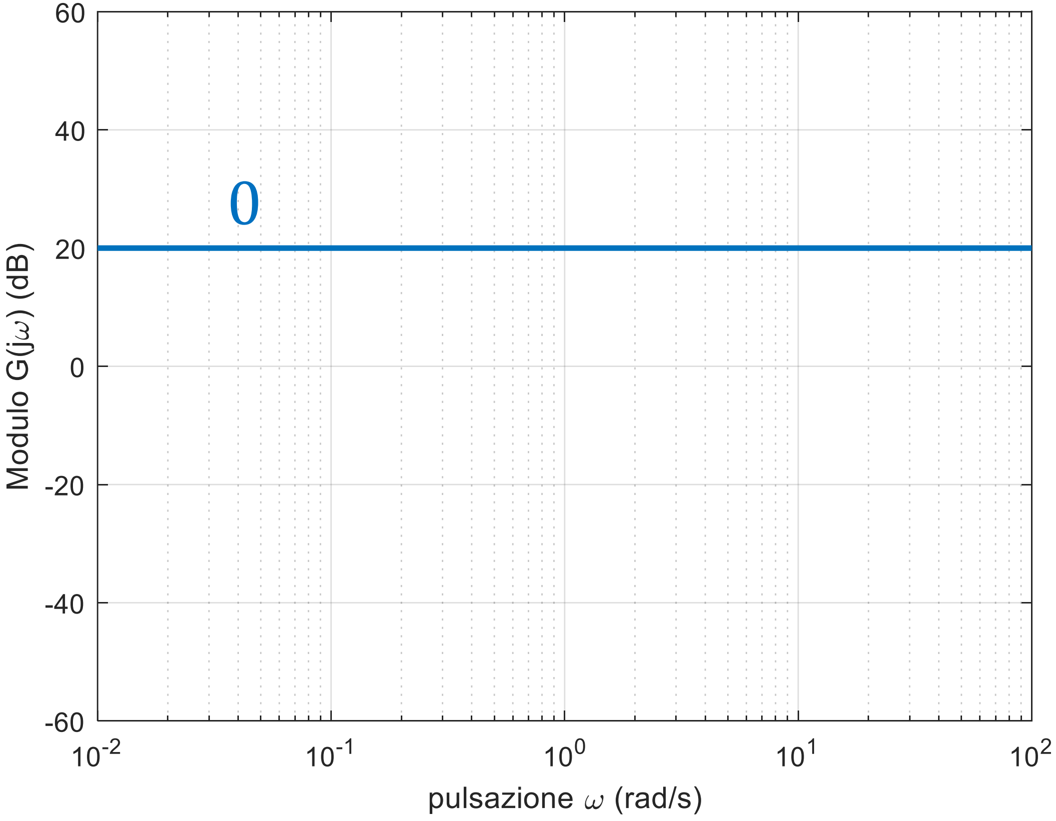
Guadagno $\mu = 10$

Un polo nell'origine $\frac{1}{s}$

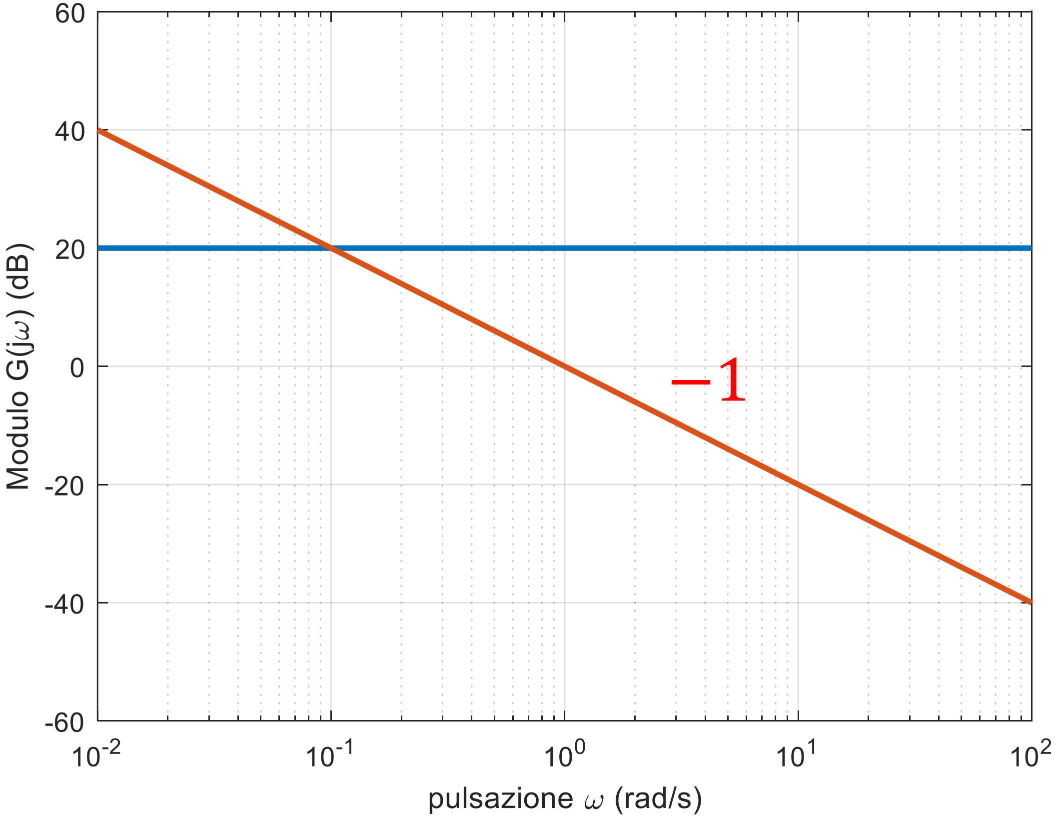
Uno zero reale in $-1 \;\rightarrow\; (1+s)$

Un polo reale in $-10 \;\rightarrow\; (1+0.1s)$

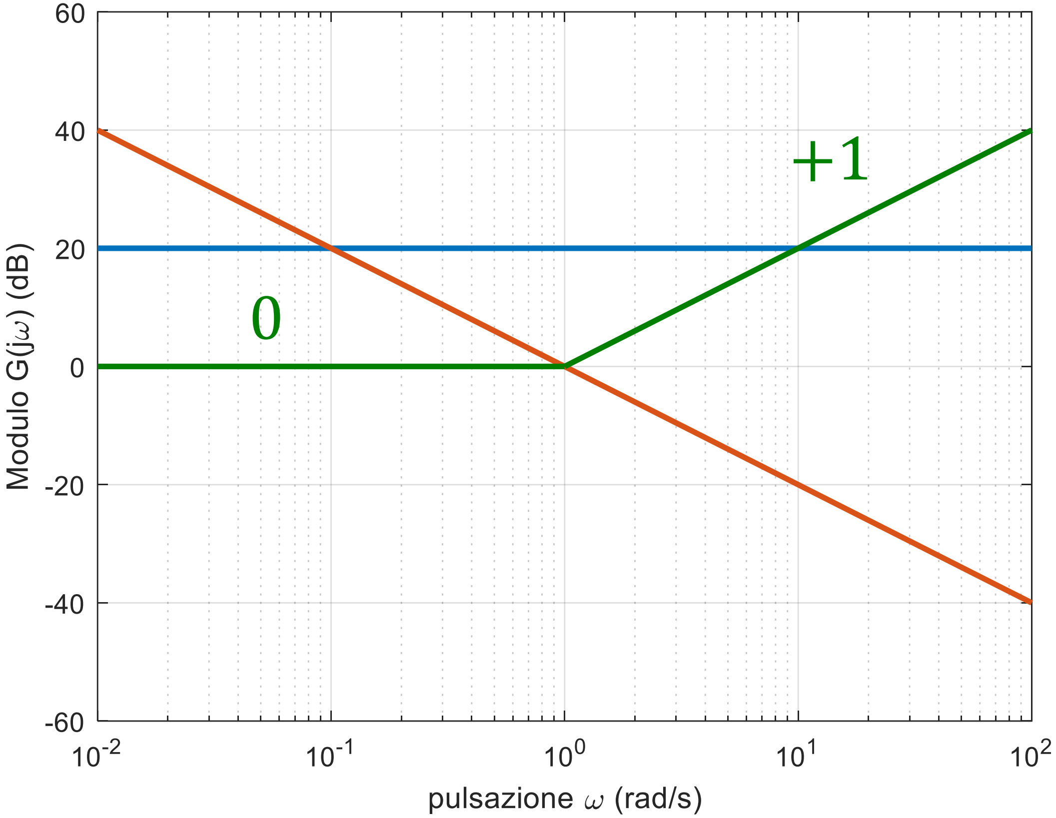
Guadagno $\mu = 10$ → retta costante a 20 dB



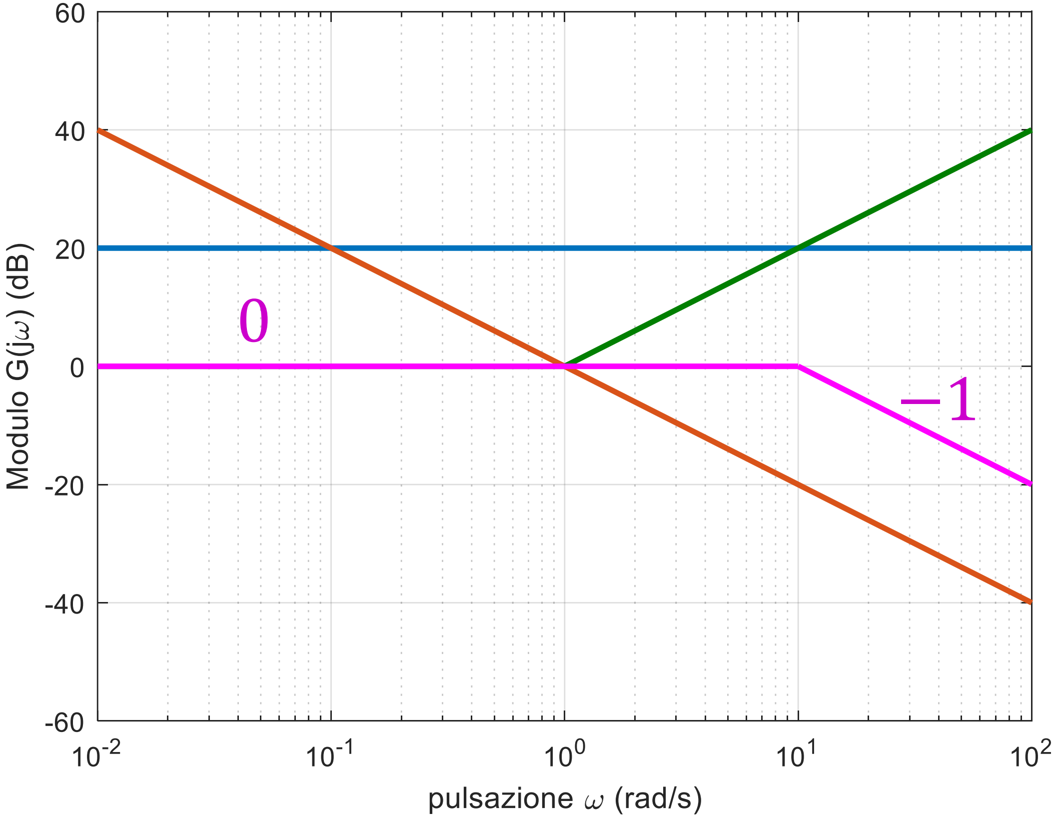
Un polo nell'origine $\frac{1}{s}$ $\rightarrow$ retta con pendenza -1 per $\omega = 1 \; rad/s$



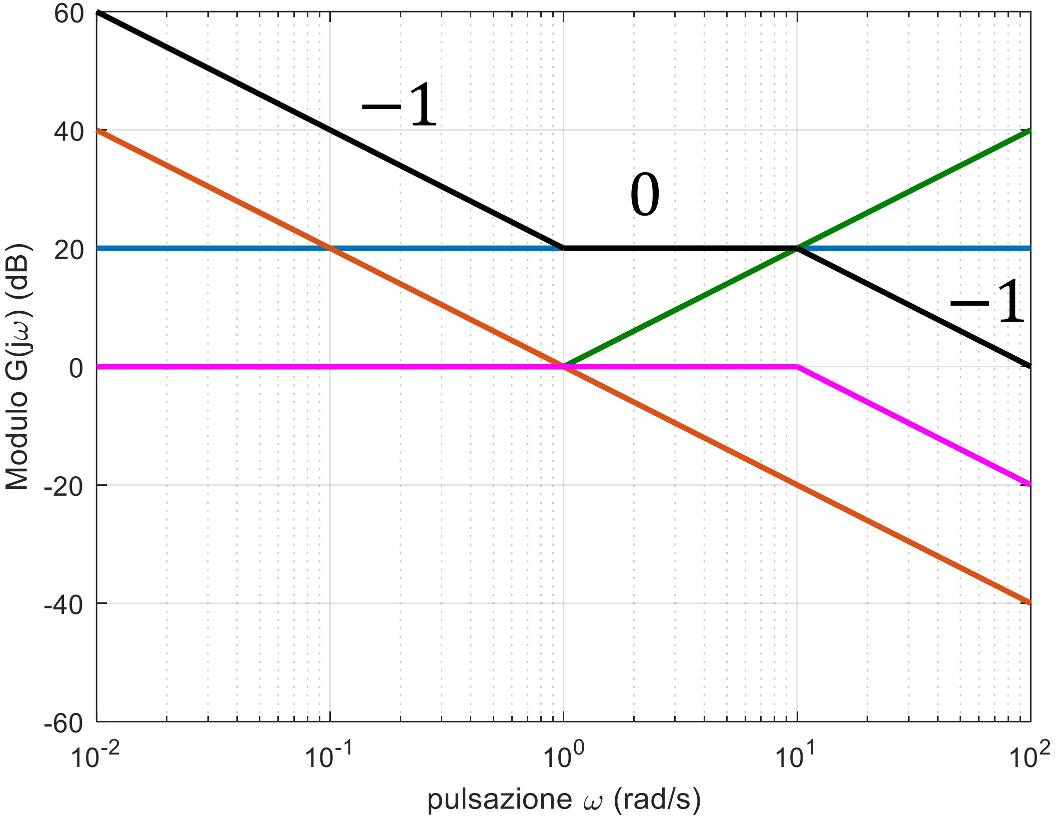
Uno zero reale $(1+s)$ $\rightarrow$ 0 dB fino ad $\omega = 1\ rad/s$ e poi retta con pendenza $+1$



Un polo reale $\frac{1}{(1+0.1s)} \rightarrow$ 0 dB fino ad $\omega = 10\ rad/s$ e poi retta con pendenza -1



Sommando le 4 curve si ottiene il diagramma



Guadagno 10

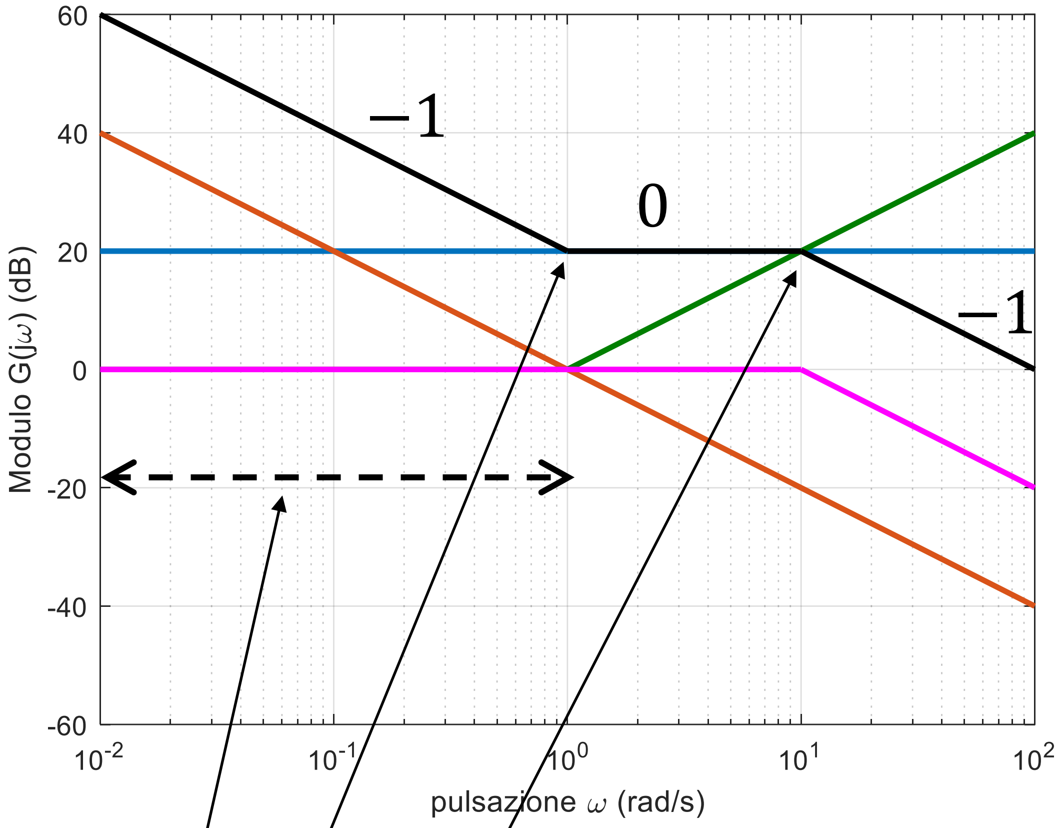
Polo nell'origine

Zero in −1

Polo in −10

Totale

E' un metodo un po' laborioso…



In questa zona il polo in -10 e lo zero in -1 non danno contributo. Contano solo il polo nell'origine ed il guadagno.

Qui «interviene» lo zero in -1 provocando un cambiamento di pendenza $+1$ e la pendenza passa da -1 a 0.

Qui «interviene» il polo in -10 provocando un cambiamento di pendenza -1 e la pendenza passa da 0 a -1.

4. Diagramma asintotico di Bode del modulo : regole per il tracciamento

1. la pendenza iniziale vale $-g$
2. il tratto iniziale passa in $|\mu|_{dB}$ per $\omega = 1\ rad/s$
3. cambi di pendenza in corrispondenza di poli (– 1) e zeri (+1)

Osservazione

La **pendenza finale** (per $\omega \to \infty$) è data da :

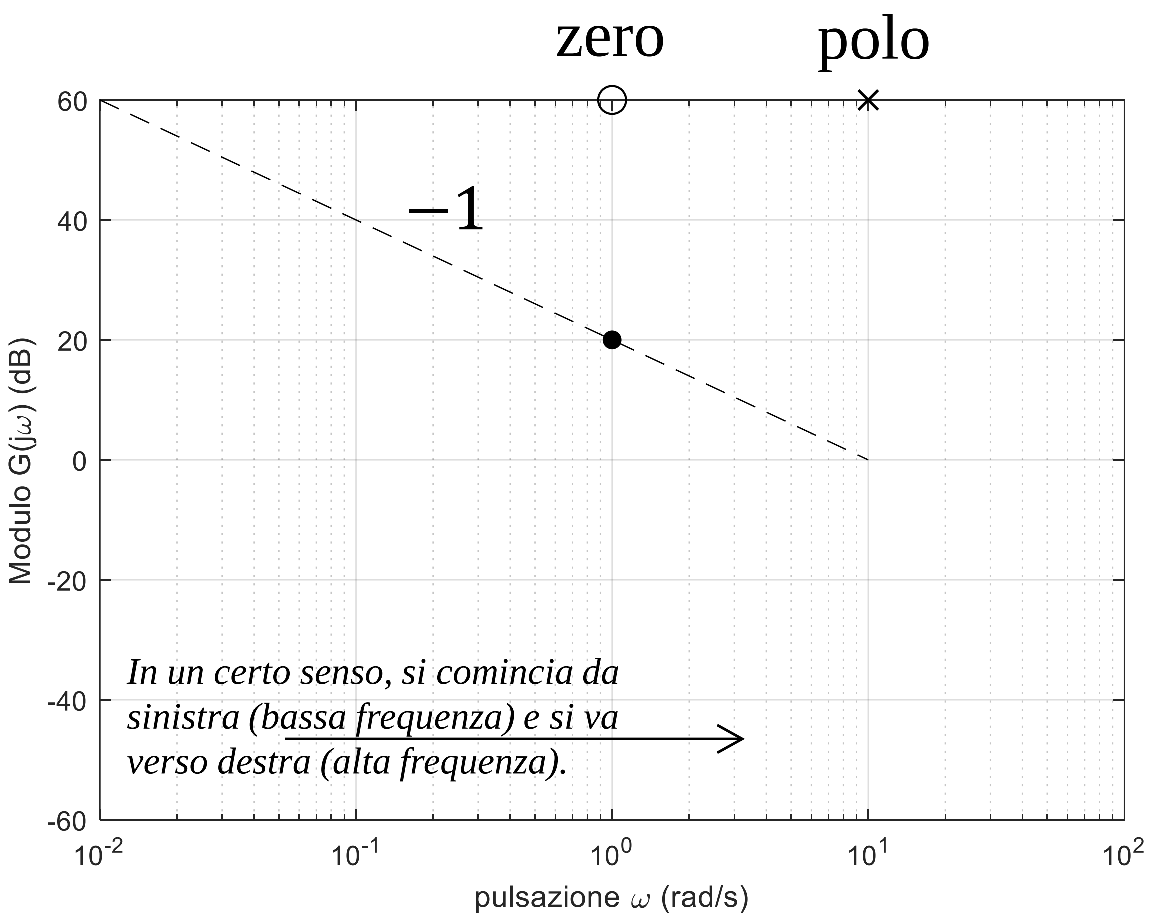
n° zeri − n° poli ≤ 0

E' uguale a 0 solo se $G(s)$ è propria (non strettamente)

Esempio

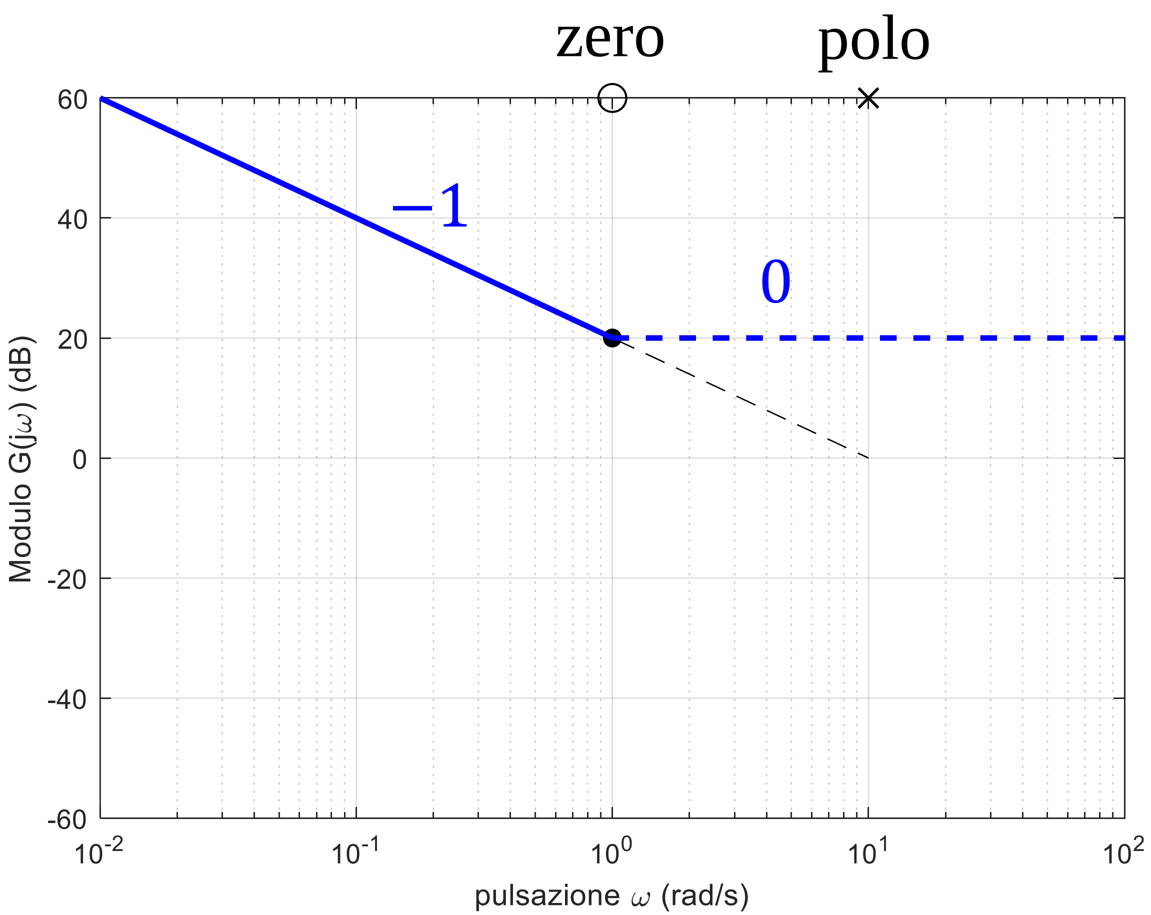
$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

1. la pendenza iniziale vale -1
2. il tratto iniziale passa in $20\ dB$ per $\omega = 1\ rad/s$



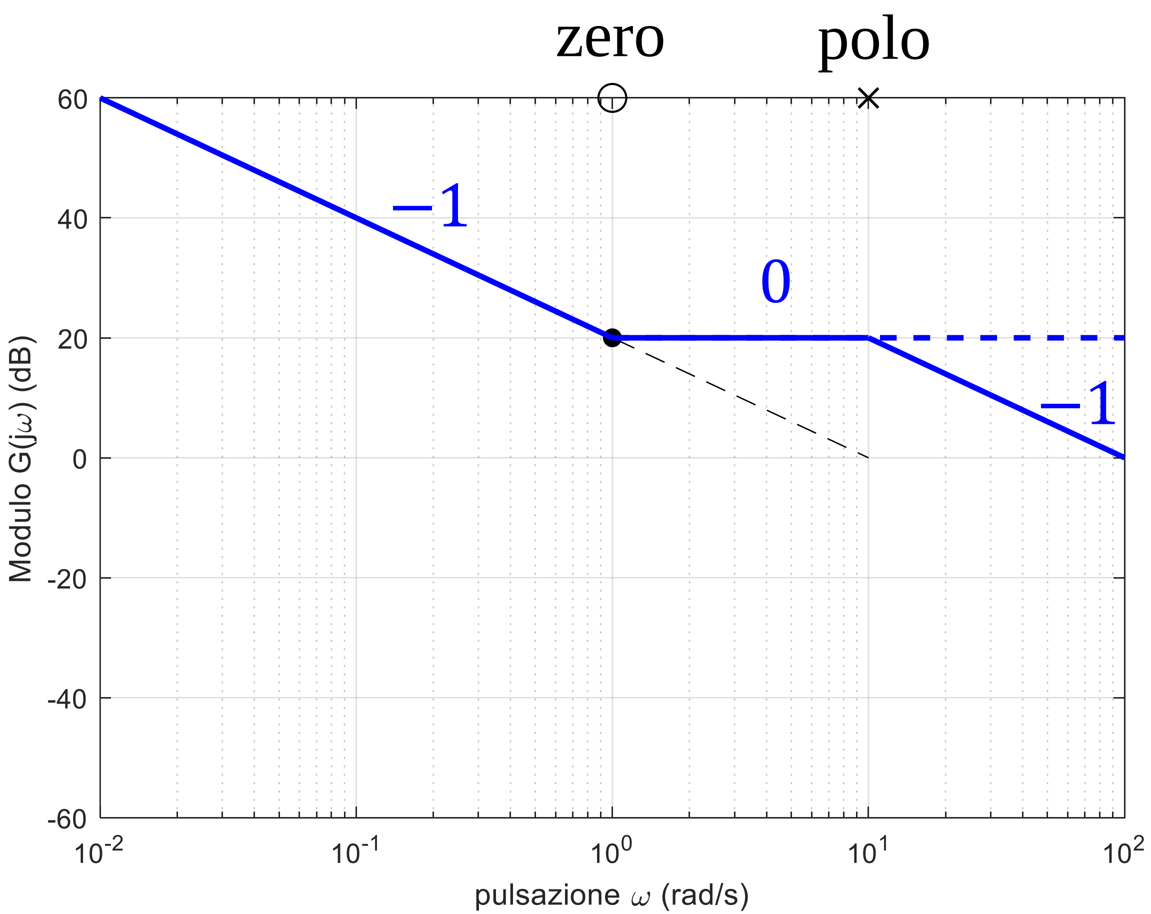
3. cambi di pendenza in corrispondenza di poli (–1) e zeri (+1)

Il primo che incontro (da sx a dx) è lo zero.



3. cambi di pendenza in corrispondenza di poli (–1) e zeri (+1)

Poi incontro il polo (sempre da sx a dx).



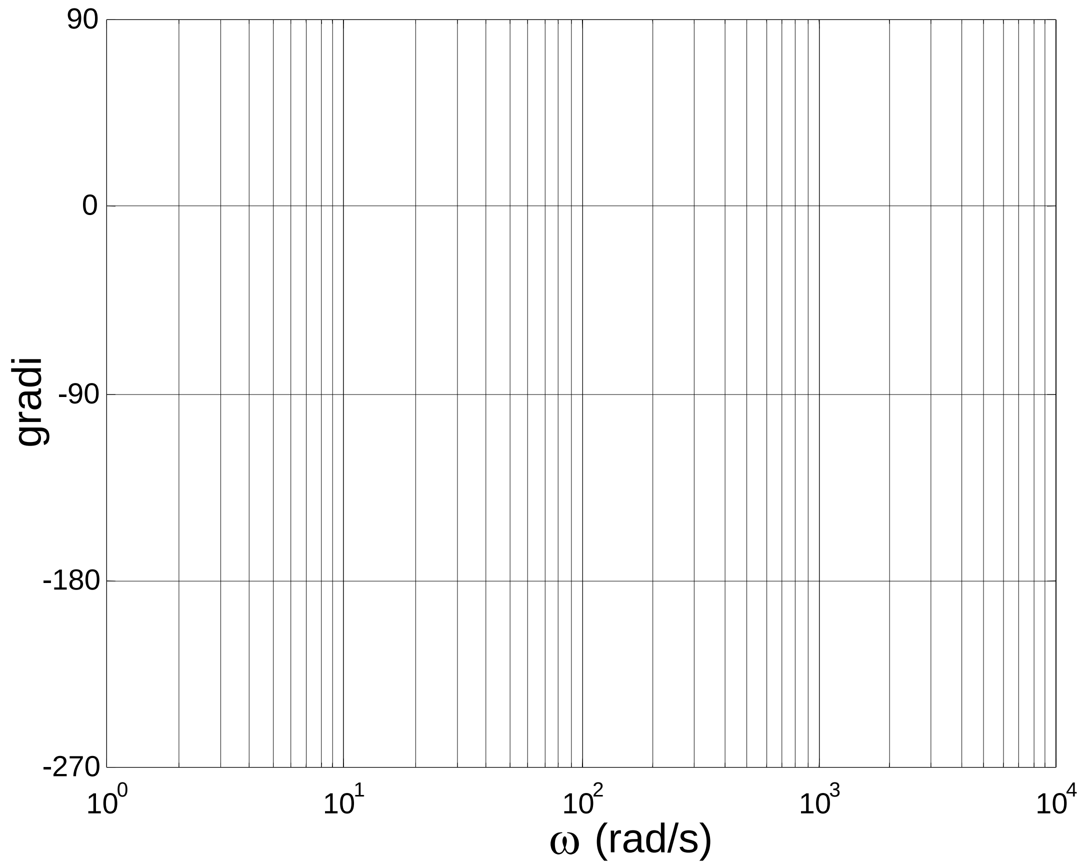
5. Diagramma di Bode della fase : convenzioni

- Ordinata in gradi

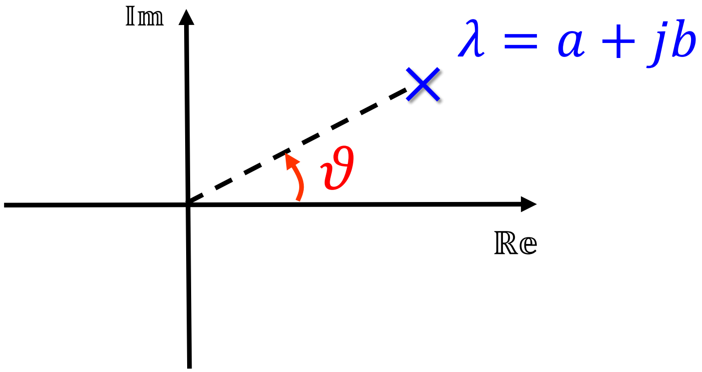
$$\measuredangle G(j\omega)$$

- Ascissa in scala logaritmica

$$\log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$$



6. Argomento o fase di un numero complesso



Convenzione:

$$-180° \leq \measuredangle\lambda < 180°$$

La fase di un numero reale negativo è – 180°

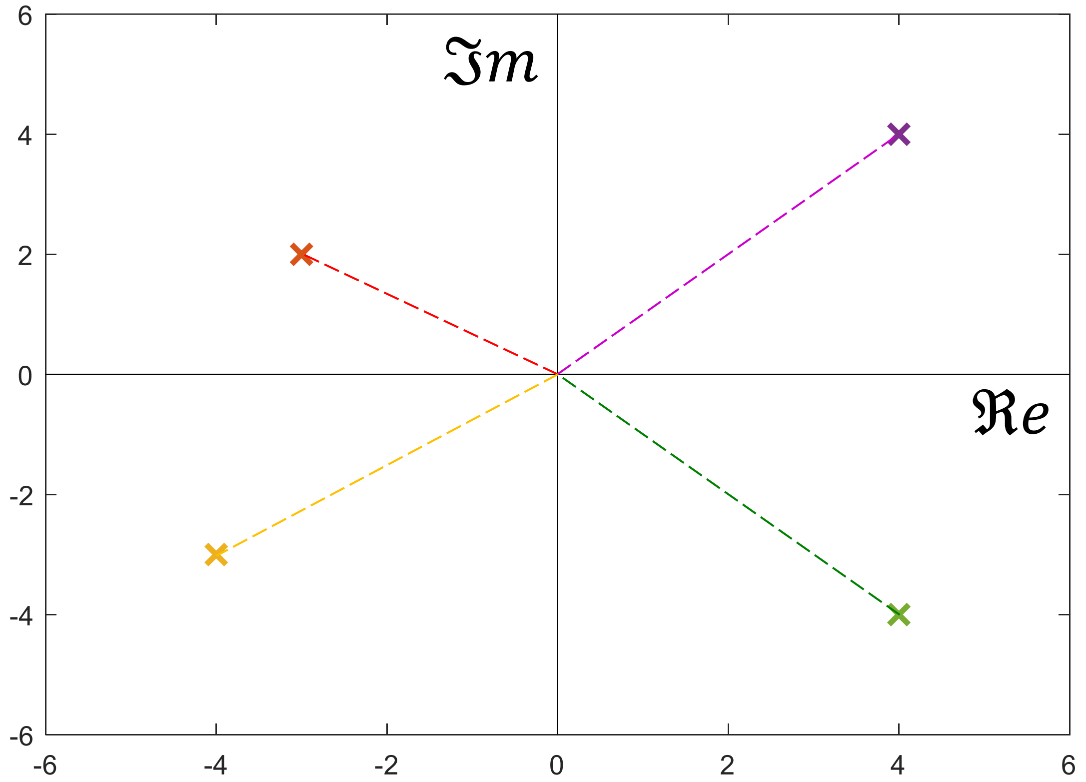
Calcolo della fase

- se $a \geq 0$ ⇨ $\measuredangle\lambda = \mathrm{atan}\dfrac{b}{a}$ $(-90° \leq \measuredangle\lambda \leq +90°)$

- se $a < 0$, $b > 0$ ⇨ $\measuredangle\lambda = \mathrm{atan}\dfrac{b}{a} + 180^{\circ}$ $(+90° < \measuredangle\lambda < +180°)$

- se $a < 0$, $b \leq 0$ ⇨ $\measuredangle\lambda = \mathrm{atan}\dfrac{b}{a} - 180^{\circ}$ $(-180° \leq \measuredangle\lambda < -90°)$

Esempi



$z_1 = +4 + j4$

$z_2 = -3 + j2$

$z_3 = -3 - j4$

$z_4 = +4 - j4$

$$\measuredangle z_1 = arctg\left(\frac{4}{4}\right) = 45°$$

$$\measuredangle z_2 = arctg\left(\frac{2}{-3}\right) + 180° = -33°.7 + 180 = +146°.3$$

$$\measuredangle z_3 = arctg\left(\frac{-4}{-3}\right) - 180° = 53°.1 - 180° = -126°.9$$

$$\measuredangle z_4 = arctg\left(\frac{-4}{4}\right) = -45°$$

7. Diagramma di Bode della fase : tracciamento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega T_i)}{\prod_i (1 + j\omega\tau_i)}$$

Funzione di trasferimento

Risposta in frequenza

Fase della risposta in frequenza (in gradi)

guadagno

poli o zeri nell'origine

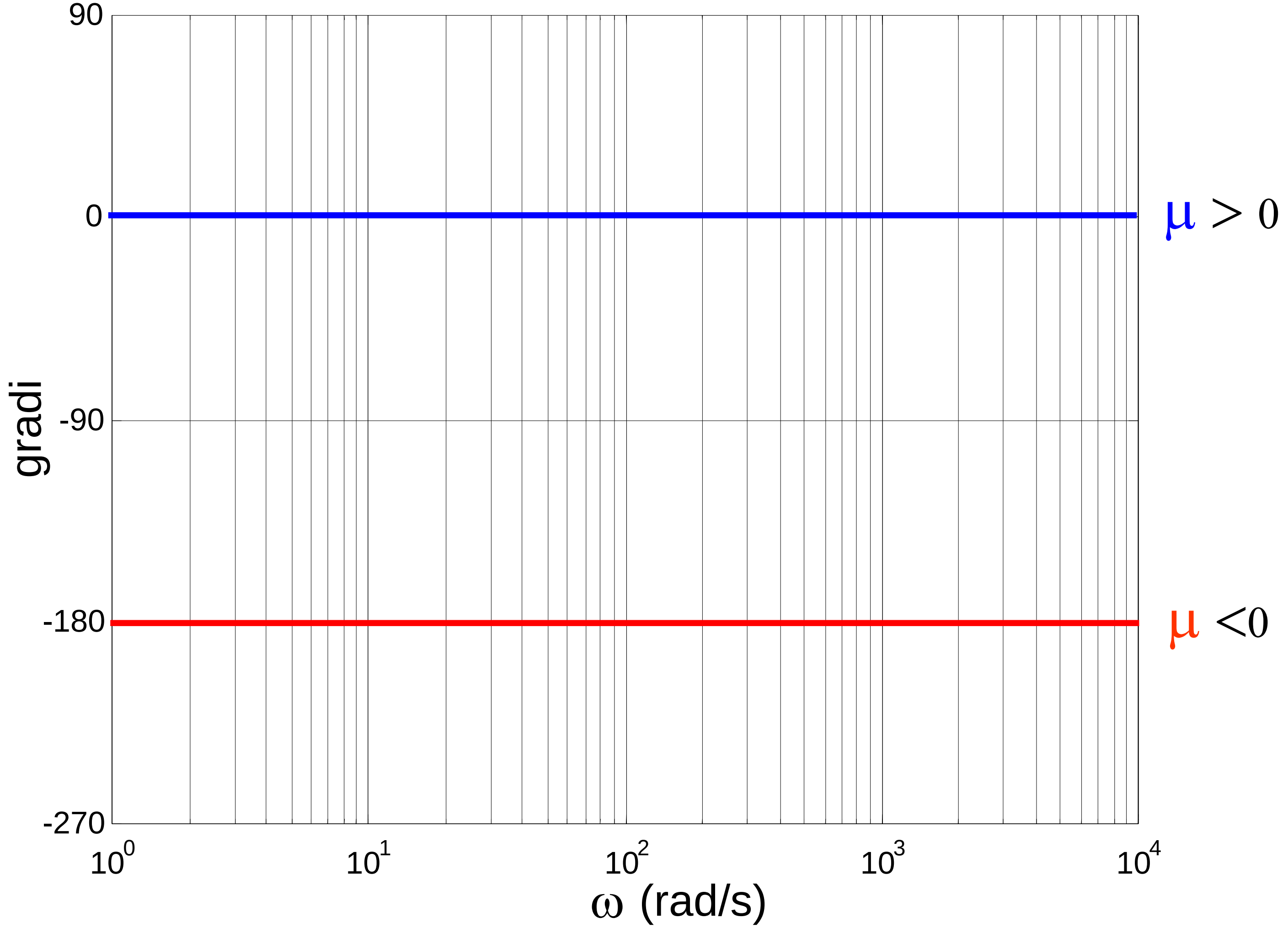
$$\angle G(j\omega) = \measuredangle\mu - \measuredangle(j\omega)^g + \sum_i \measuredangle(1 + j\omega T_i) - \sum_i \measuredangle(1 + j\omega\tau_i)$$

zeri (reali & complessi coniugati)

poli (reali & complessi coniugati)

7.1 Guadagno

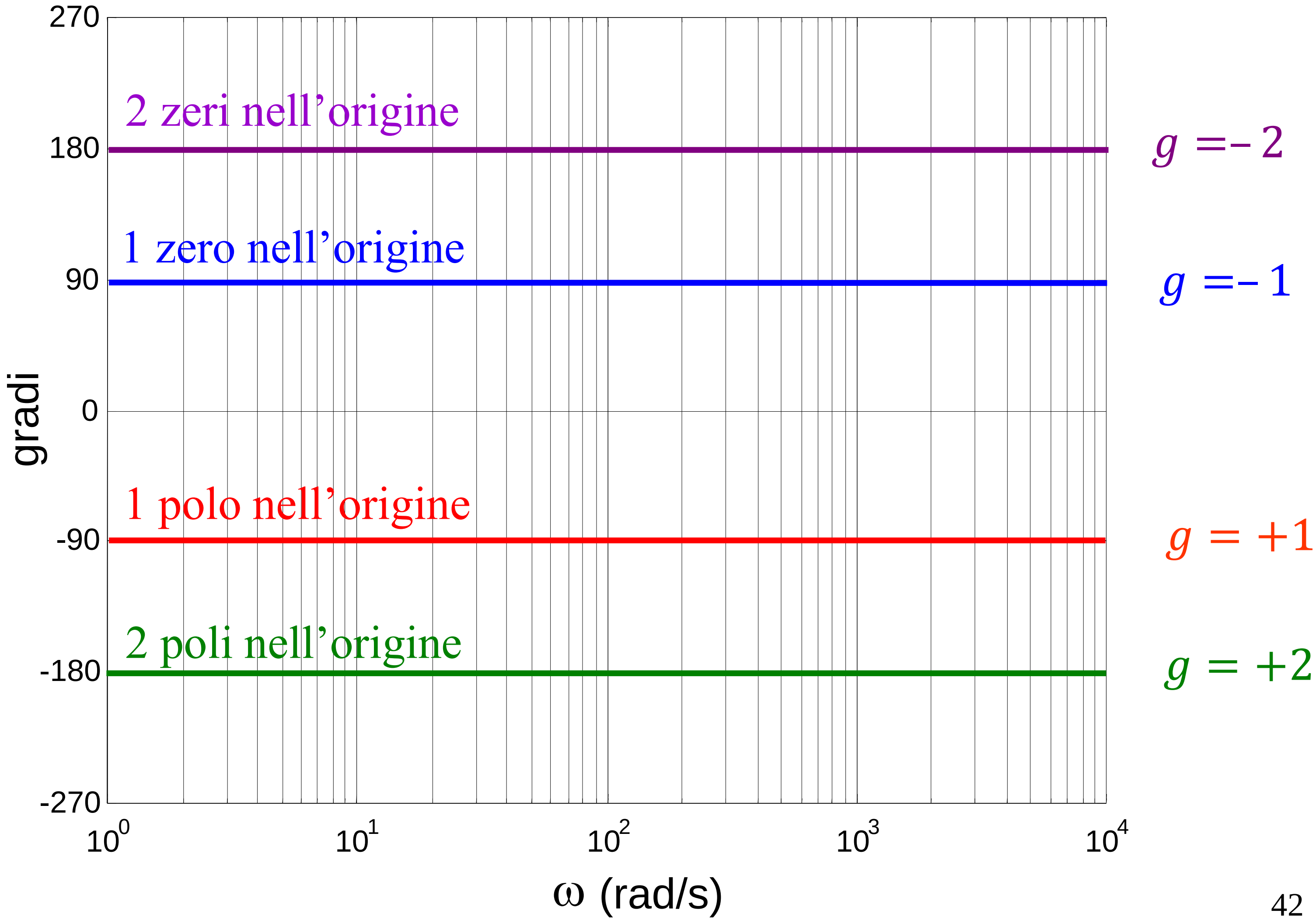
$$\measuredangle\mu = \begin{cases} 0° & \text{se } \mu > 0 \\ -180° & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$



Due sole opzioni!

7.2 Poli & zeri nell'origine

$$-\measuredangle(j\omega)^g = -g\measuredangle(j\omega) = -g90°$$ ⇨ retta costante



7.3.a Zero reale

$$\measuredangle(1 + j\omega T) = \text{atan}(\omega T) \qquad T \text{ reale}$$

Il disegno di questa funzione di ω è facile, ma si può comunque trovare un'approssimazione valida per alte e basse pulsazioni.

Basse ω

per $\omega \to 0$ $\Rightarrow$ $\text{atan}(\omega T) \longrightarrow 0°$

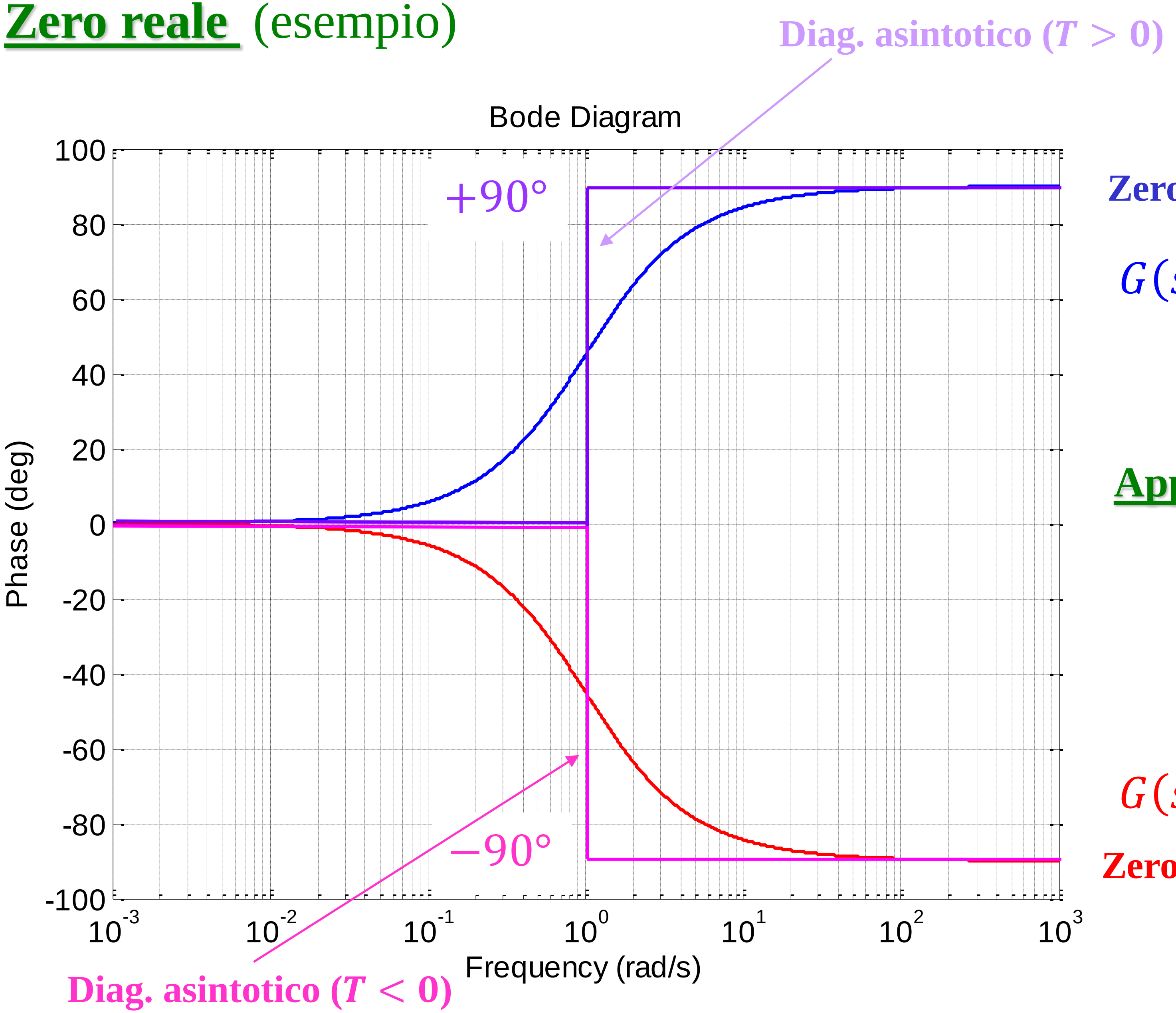
Alte ω

per $\omega \to \infty$ $\Rightarrow$ $\text{atan}(\omega T)$

$\nearrow$ $+90°$ se $T > 0$ (zero a sx)

$\searrow$ $-90°$ se $T < 0$ (zero a dx)

Zero reale (esempio)



Zero a SX ($T > 0$)

$G(s) = 1 + s$

Approssimazione asintotica

$G(s) = 1 - s$

Zero a DX ($T < 0$)

7.3.b Zeri complessi coniugati

Usiamo l'espressione con smorzamento e pulsazione naturale

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$ funzione di trasferimento

$$\tilde{G}(j\omega) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$$ risposta in frequenza

$$\measuredangle \tilde{G}(j\omega) = \measuredangle\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

Basse ω

per $\omega \to 0$ $\Longrightarrow$ $\measuredangle \tilde{G}(j\omega) = \measuredangle\ 1 = 0°$

Alte ω

per $\omega \to \infty$ $\Longrightarrow$ $\measuredangle \tilde{G}(j\omega) = \lim\limits_{\omega\to\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{\dfrac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} \pm 180°$

$(+180° \text{ se } \xi > 0)$

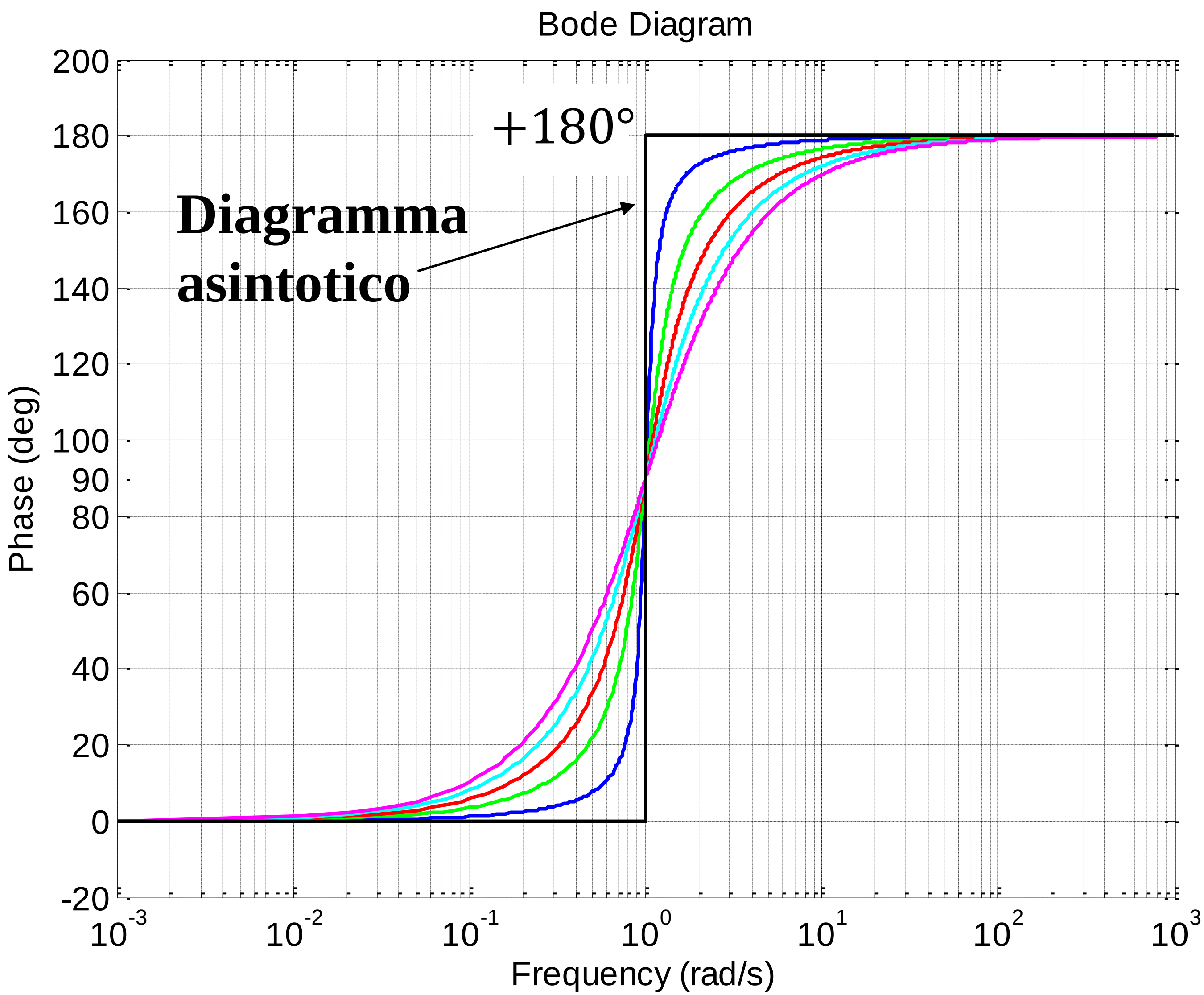
$(-180° \text{ se } \xi < 0)$

$$\text{Ma} \quad \lim_{\omega\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}} = 0°$$

Quindi

$$\measuredangle \tilde{G}(j\omega) = \begin{cases} 0° & \text{per } \omega \to 0 \\ \begin{cases} +180° \text{ se } \xi > 0 \text{ (zeri a sx)} \\ -180° \text{ se } \xi < 0 \text{ (zeri a dx)} \end{cases} & \text{per } \omega \to \infty \end{cases}$$

Zeri complessi coniugati (esempio) $G(s) = 1 + 2\xi s + s^2$ $\omega_n = 1$



Zeri a SX

$\xi = 0.1$

$\xi = 0.3$

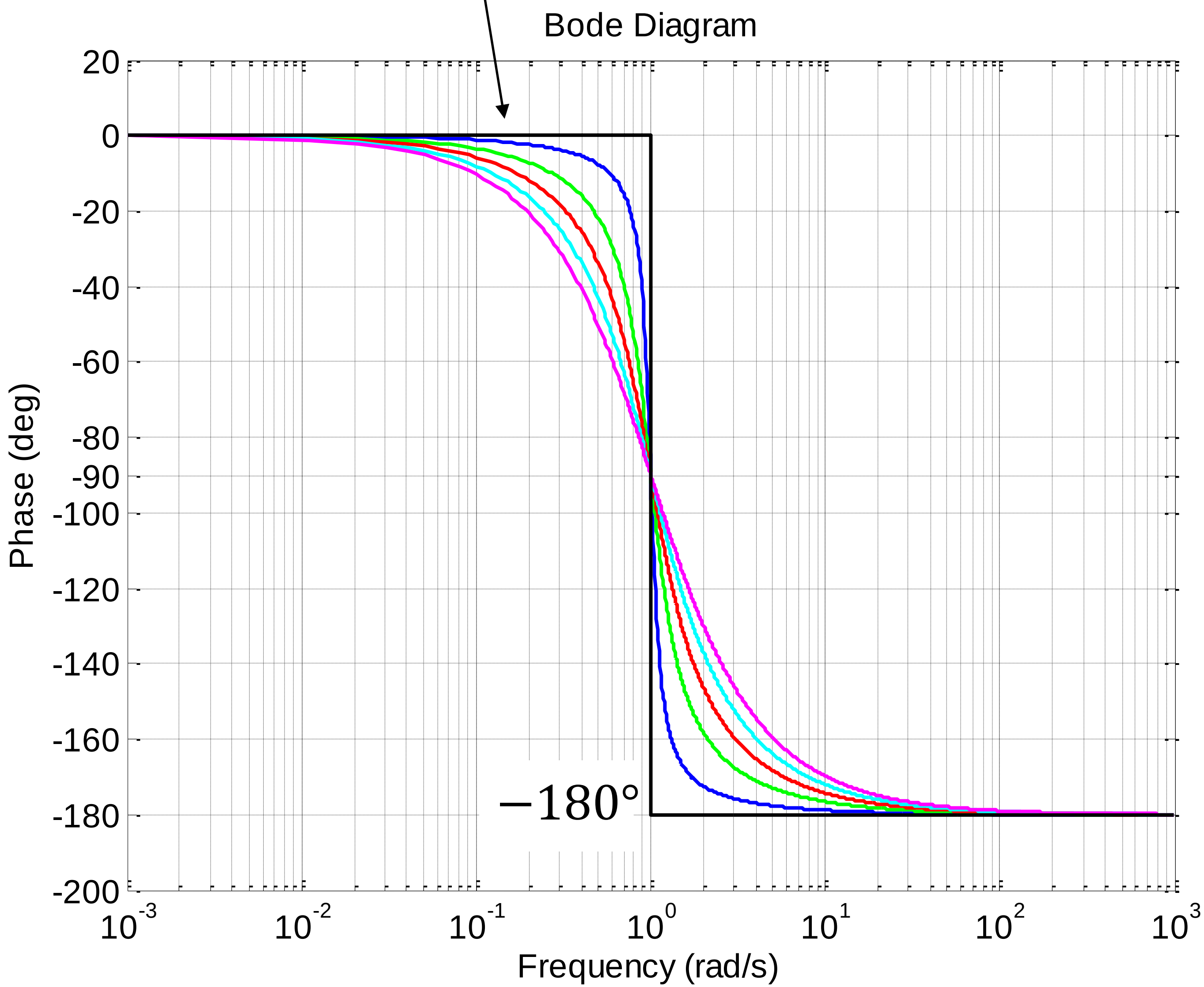
$\xi = 0.5$

$\xi = 0.7$

$\xi = 0.9$

Diagramma asintotico

$$G(s) = 1 + 2\xi s + s^2 \qquad \omega_n = 1$$



Zeri a DX

$\xi = 0$

$\xi = -0.1$

$\xi = -0.3$

$\xi = -0.5$

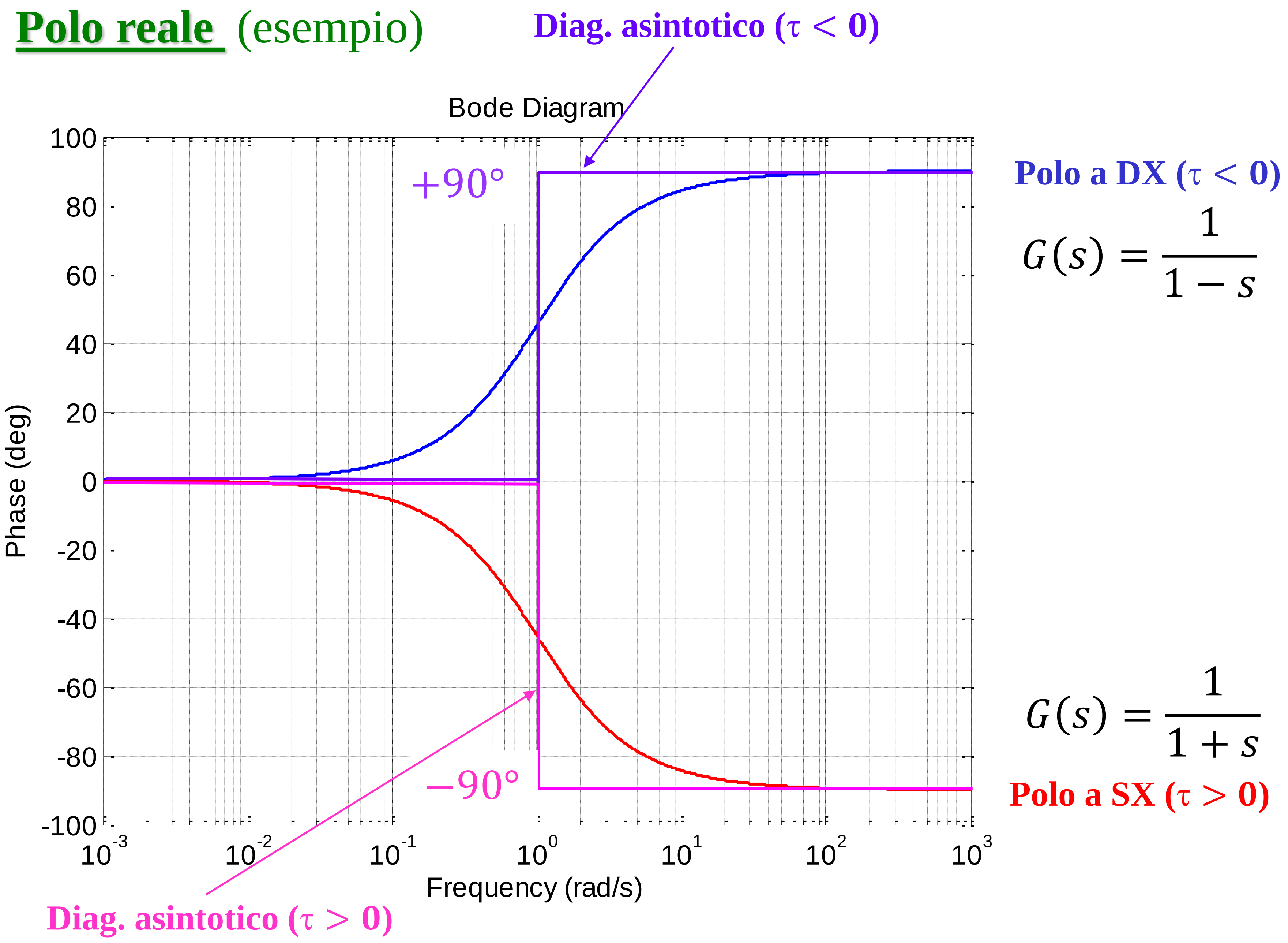
$\xi = -0.7$

$\xi = -0.9$

Per i poli valgono i medesimi ragionamenti,

fatto salvo il segno

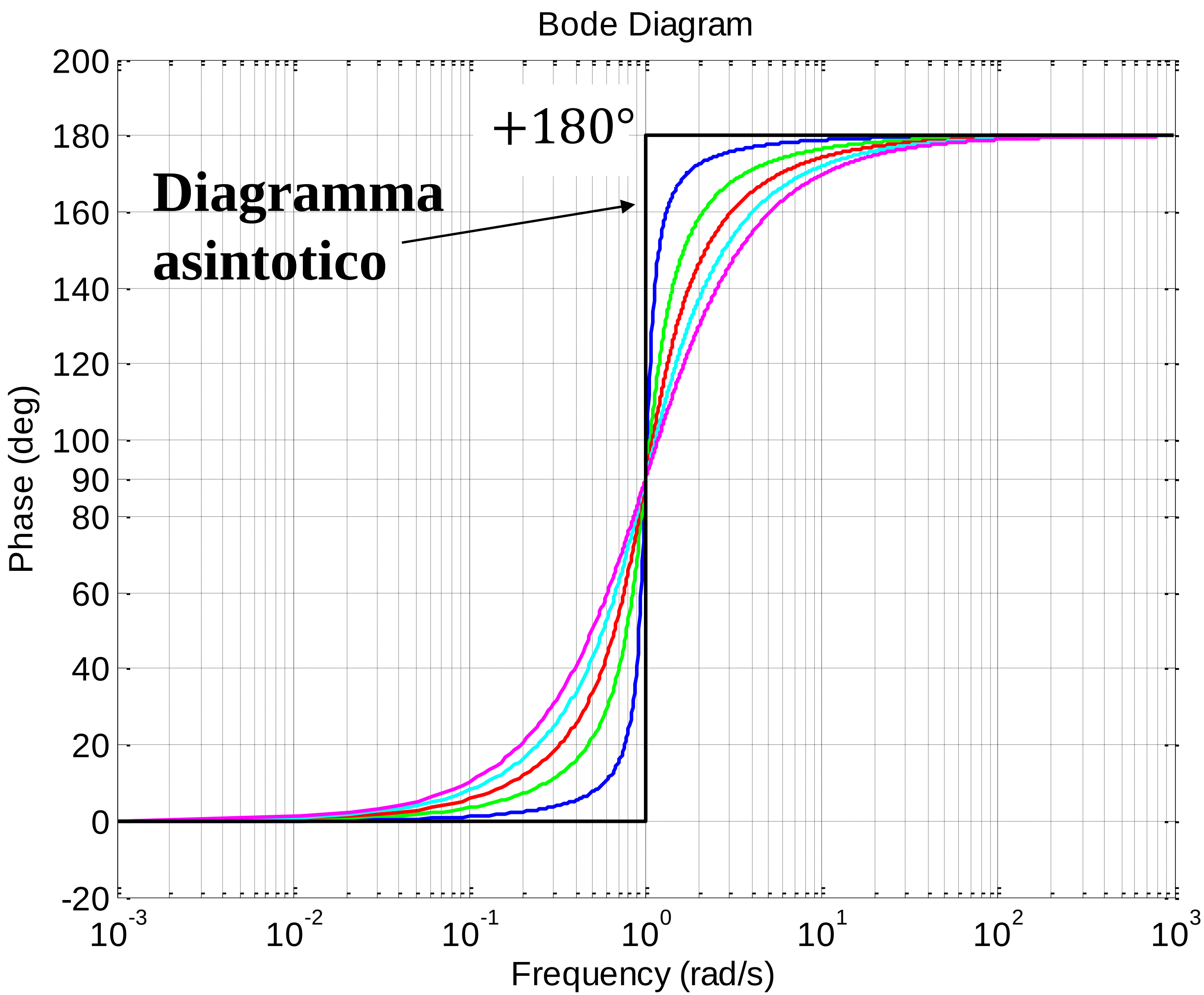
Polo reale (esempio)



$$G(s) = \frac{1}{1-s}$$

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

Poli complessi coniugati (esempio) $G(s) = \dfrac{1}{1 + 2\xi s + s^2}$ $\omega_n = 1$



Poli a DX

$\xi = -0.1$

$\xi = -0.3$

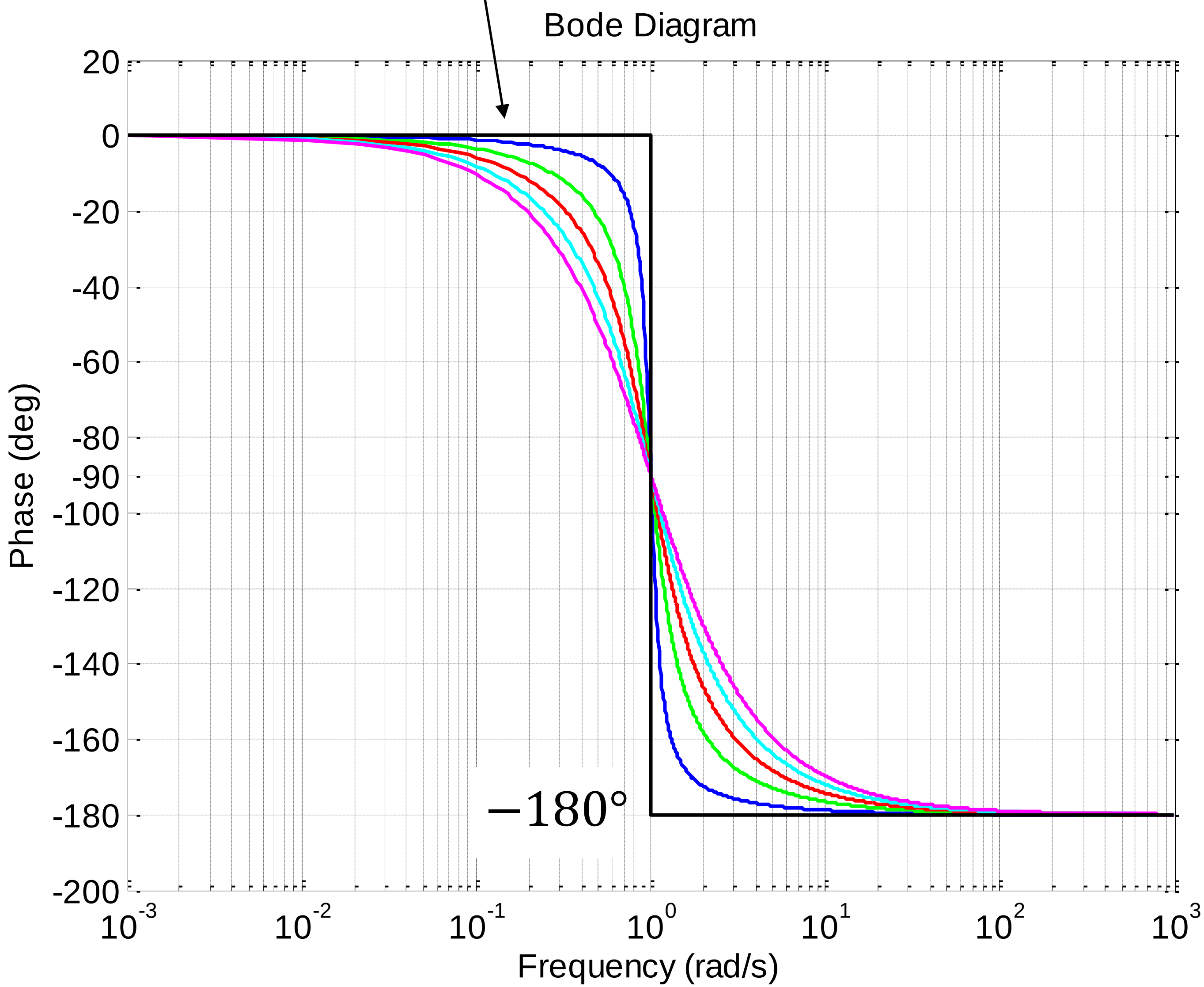
$\xi = -0.5$

$\xi = -0.7$

$\xi = -0.9$

Diagramma asintotico

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2} \qquad \omega_n = 1$$



Poli a SX

$\xi = 0$

$\xi = 0.1$

$\xi = 0.3$

$\xi = 0.5$

$\xi = 0.7$

$\xi = 0.9$

8. Diagramma asintotico di Bode della fase : regole per il tracciamento

guadagno *poli o zeri nell'origine*

1. valore iniziale $\measuredangle\mu - g90°$

2. cambi di valore in corrispondenza di poli e zeri

	semipiano sinistro	**semipiano destro**
poli	– 90°	+90°
zeri	+90°	– 90°

Esempio

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

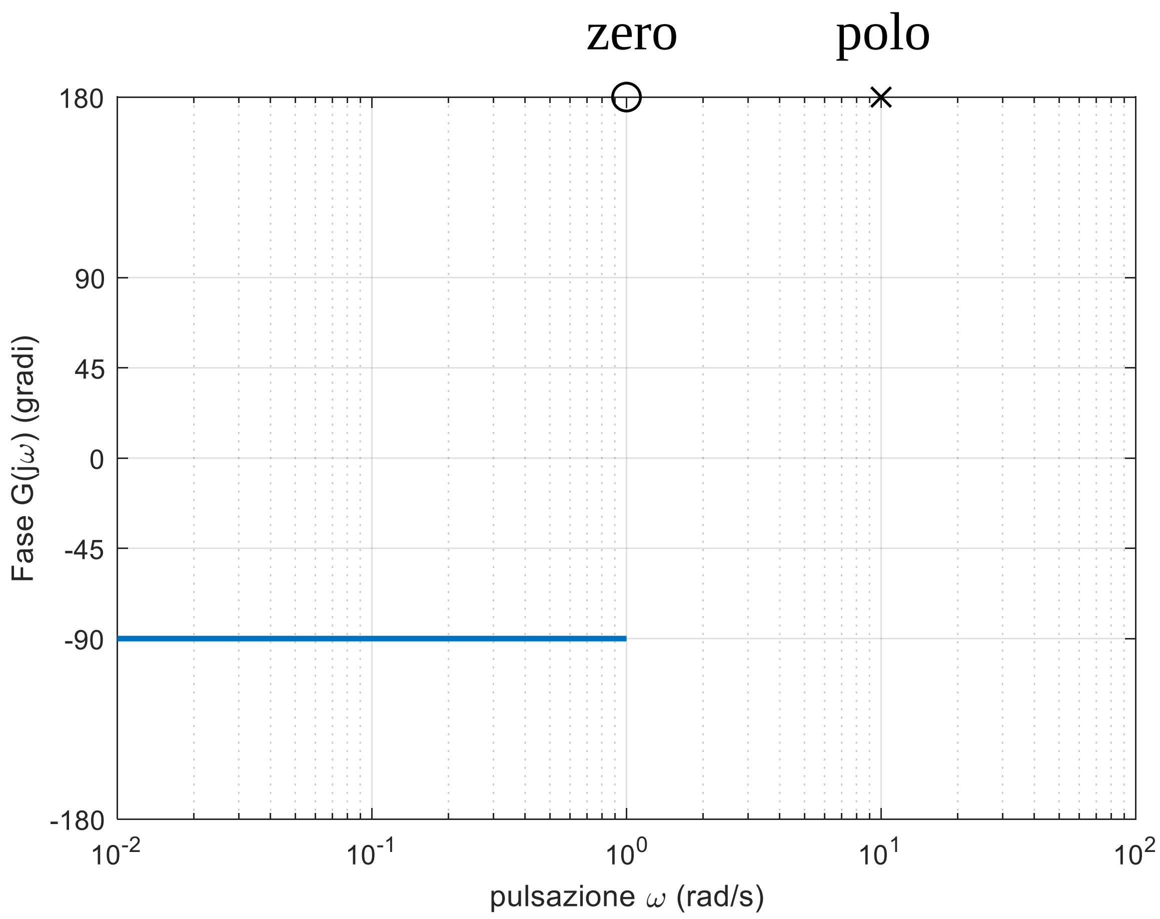
Guadagno $\mu = 10$

Un polo nell'origine $\frac{1}{s}$

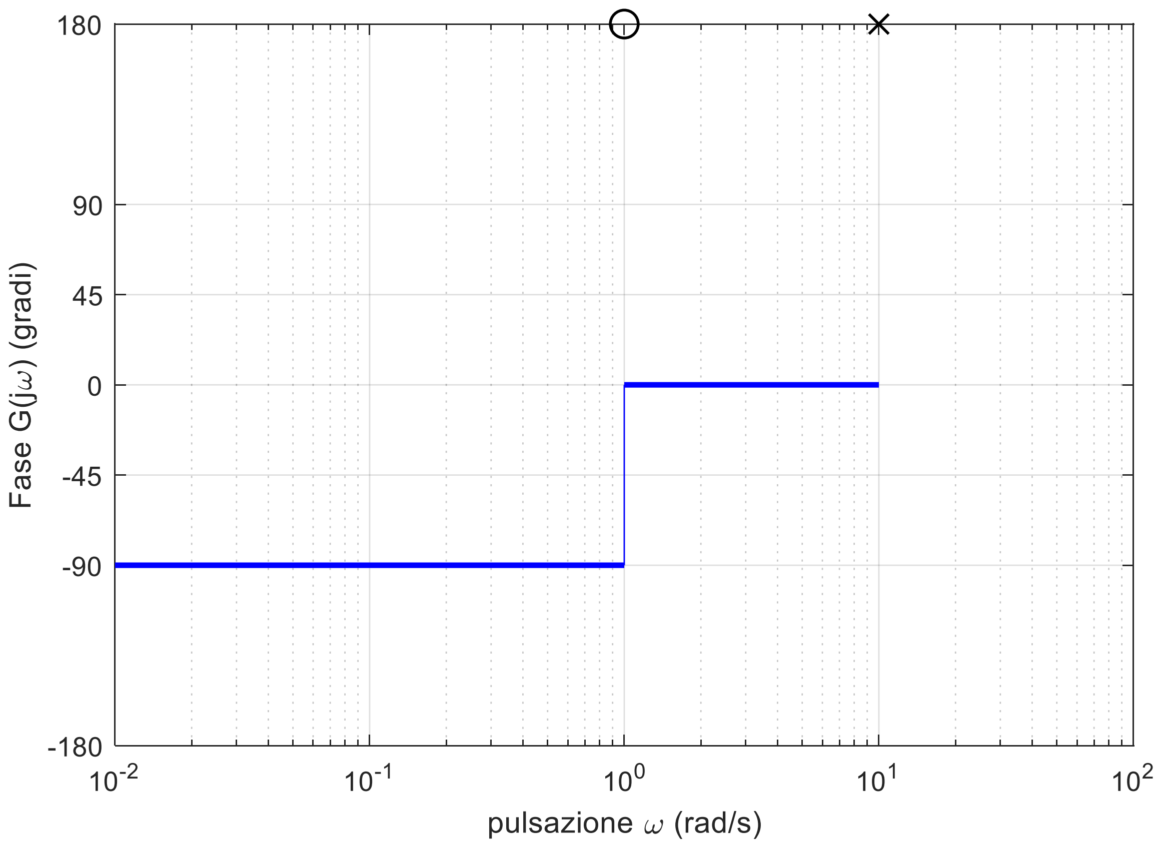
Uno zero reale in $-1 \rightarrow (1+s)$

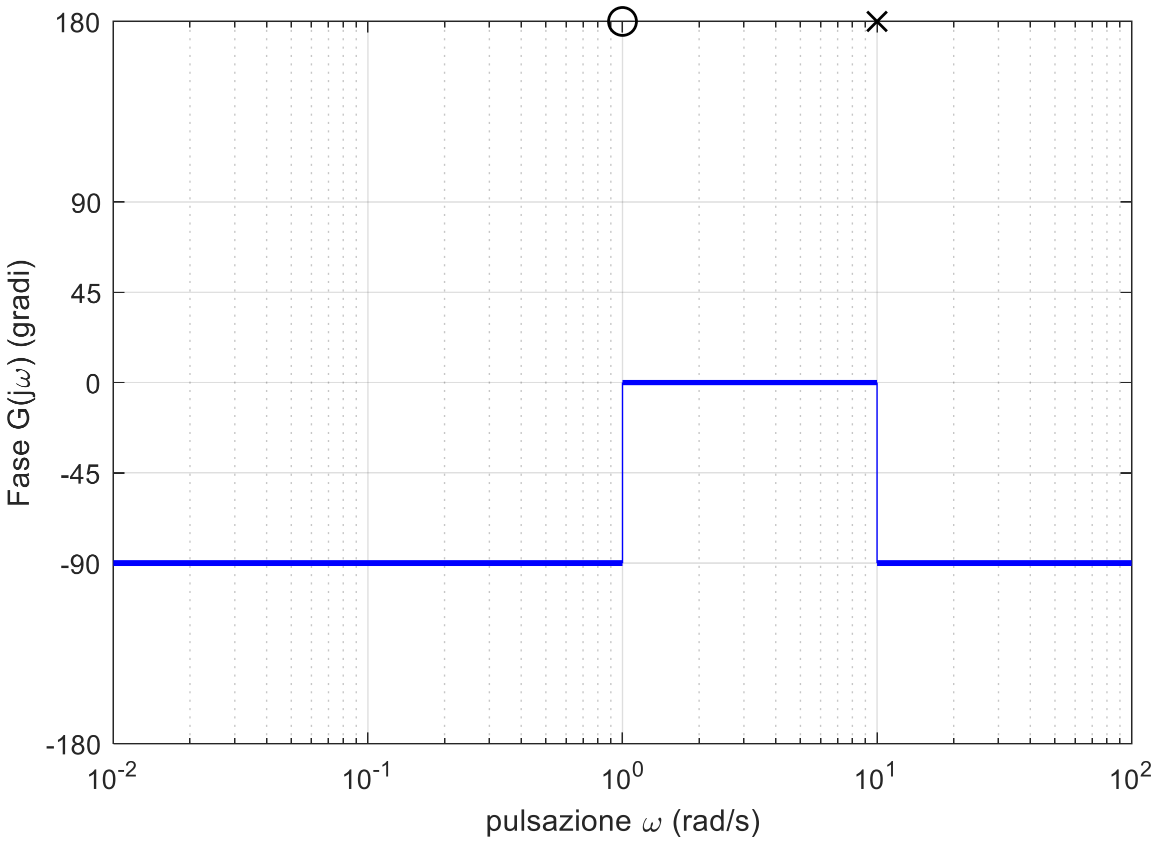
Un polo reale in $-10 \rightarrow (1+0.1s)$

Il guadagno è positivo e quindi dà contributo 0°.
Il polo nell'origine dà contributo −90°.
Comincio a tracciare da SX e mi fermo quando incontro lo zero.



Lo zero è negativo e quindi dà contributo +90°.
Continuo a tracciare e mi fermo ancora quando incontro il polo.




180
90
45
0
-45
-90
-180
Fase G(jω) (gradi)
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
pulsazione ω (rad/s)

9. Sistemi a fase minima

Definizione

Un sistema dinamico LTI a tempo continuo si dice **a fase minima** se ha:

- guadagno positivo
- tutti i poli e gli zeri con parte reale negativa o nulla

E’ quindi possibile dedurre in modo univoco il diagramma della fase da quello del modulo (in generale non è possibile senza conoscere a priori il segno del guadagno e delle singolarità).

Tutti i poli sfasano $-90°$, tutti gli zeri sfasano $+90°$ ed il guadagno non introduce sfasamento.

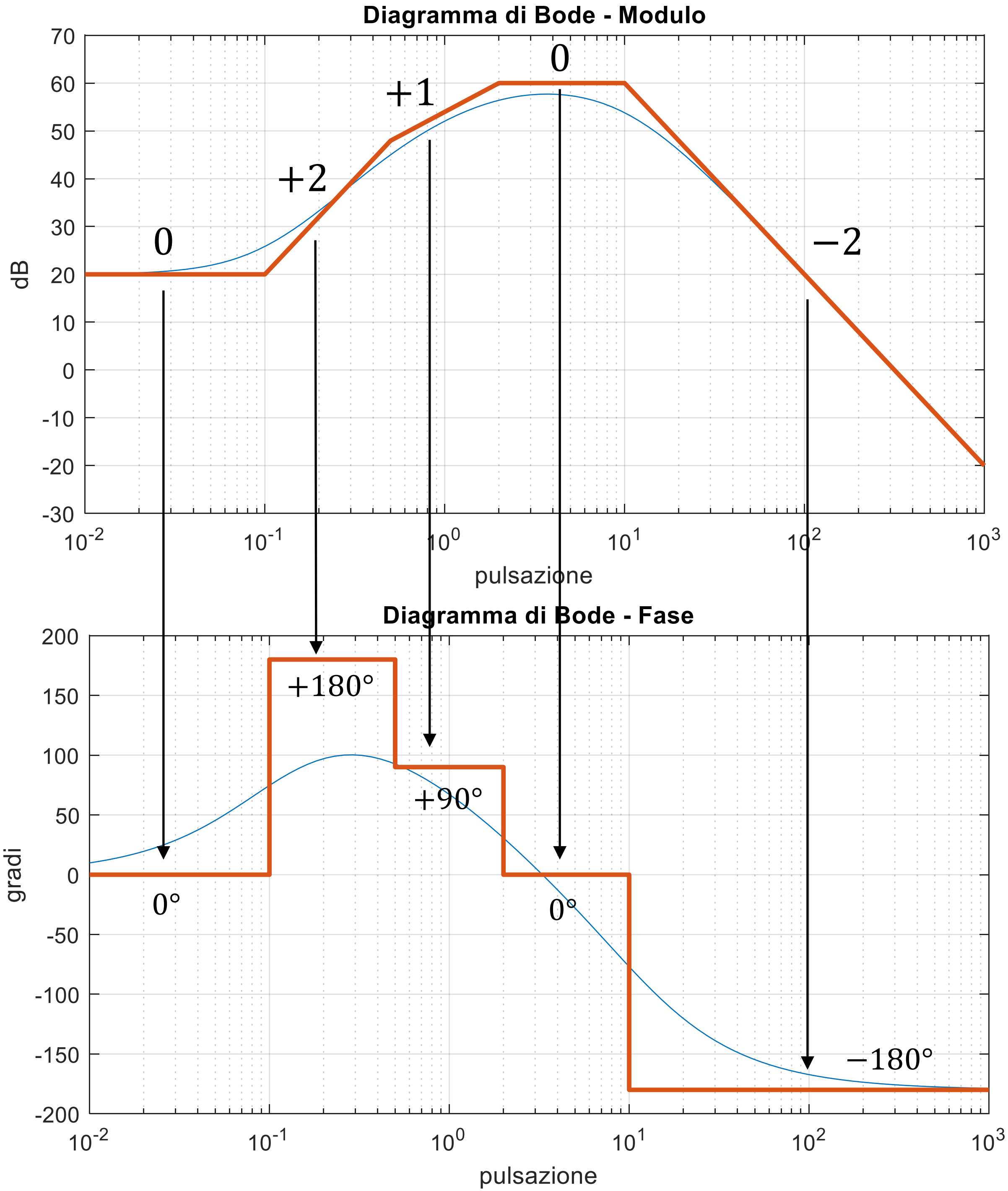
Quindi, dove il diagramma del modulo ha pendenza -1, il diagramma della fase vale $-90°$ e similmente dove il diagramma del modulo ha pendenza $+1$, il diagramma della fase vale $+90°$.

polo $\Rightarrow$ pendenza diagramma modulo **–1** $\Rightarrow$ fase **–90°**

zero $\Rightarrow$ pendenza diagramma modulo **+1** $\Rightarrow$ fase **+90°**

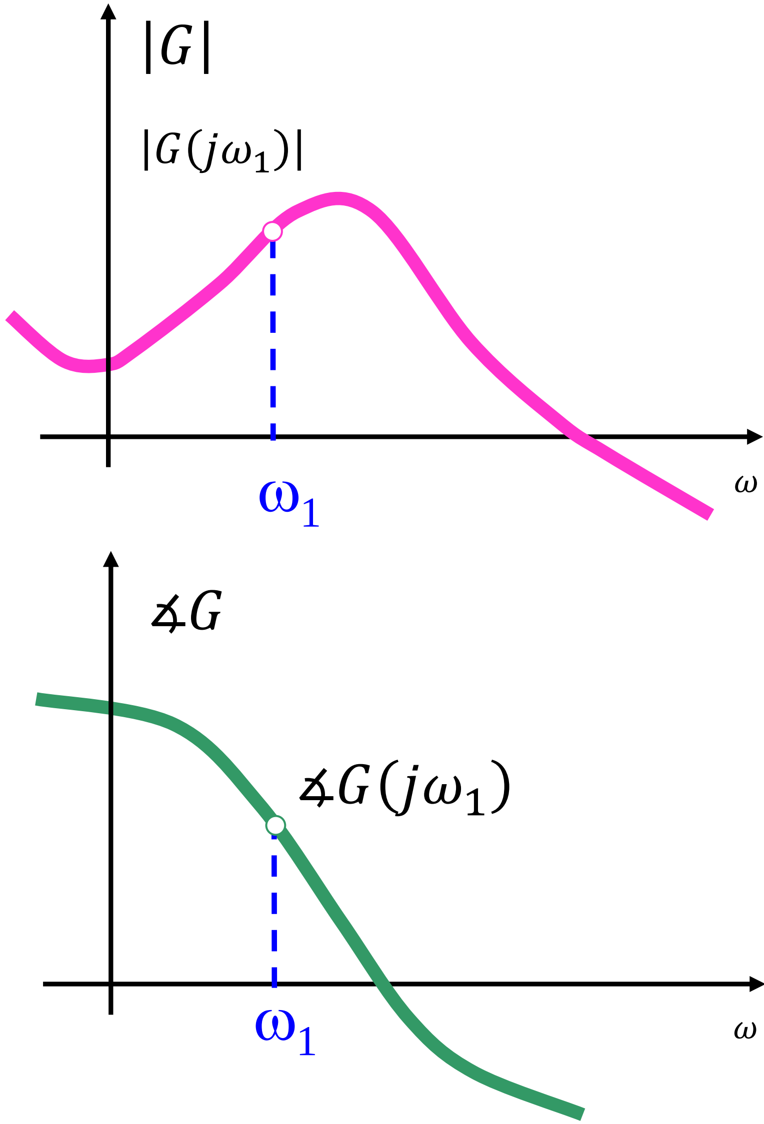
In generale, **a pendenza del diagramma del modulo $-k$, corrisponde valore del diagramma della fase $-k90°$**.

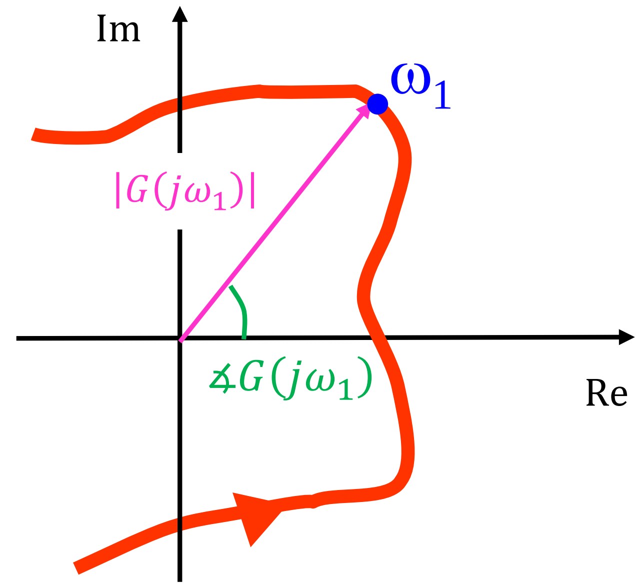
Sistema a fase minima



10. Diagramma polare

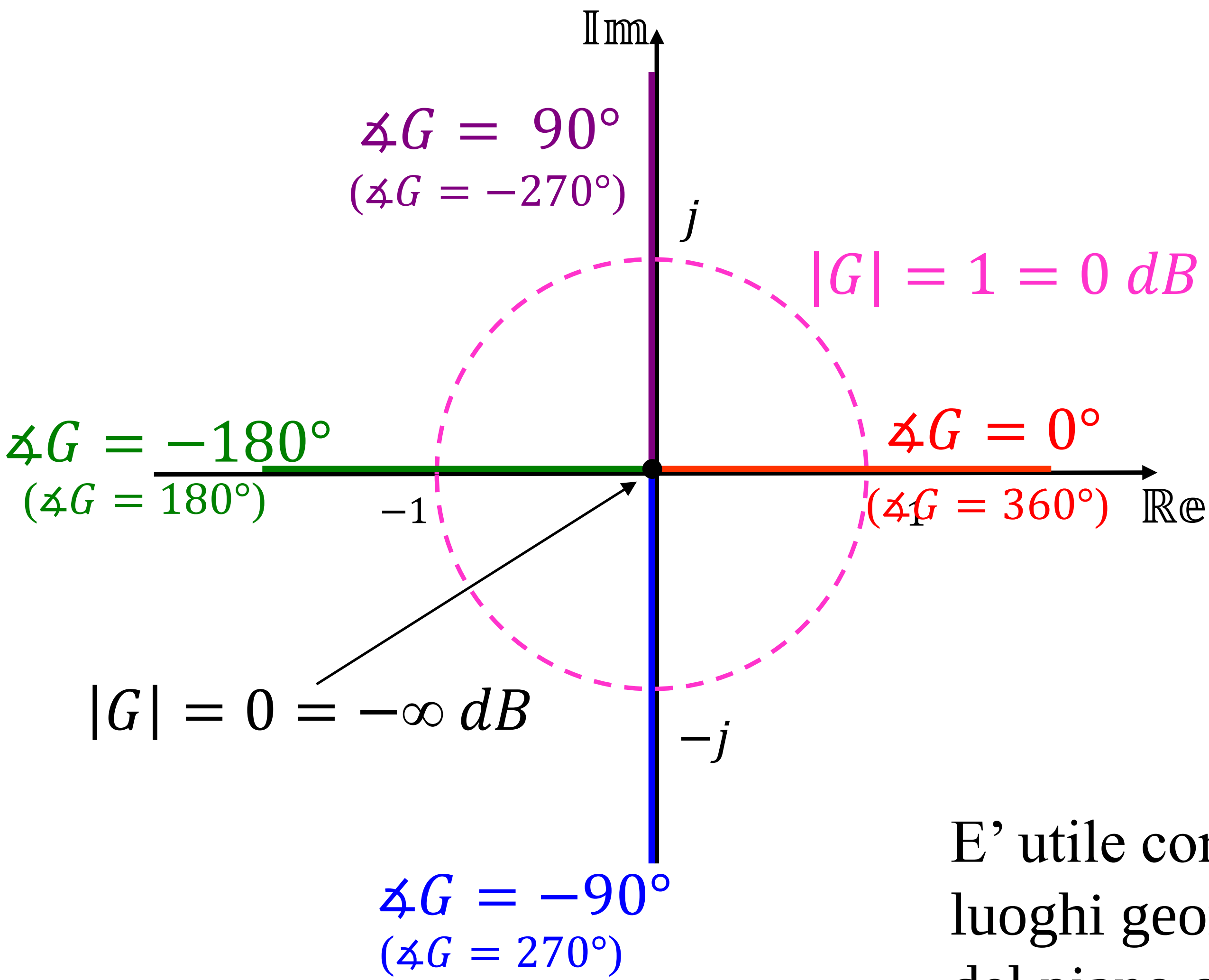
$G(j\omega), \omega \geq 0$





E' possibile tracciare il diagramma polare usando i diagrammi di Bode.

Punti e curve salienti del piano complesso



E' utile conoscere alcuni luoghi geometrici particolari del piano complesso.

Metodo

1) Traccio i diagrammi di Bode del modulo e della fase

2) Individuo alcuni punti salienti dai due diagrammi, usando anche l'espressione della risposta in frequenza, per esempio:

   - $G(j0)$ (dove inizia il grafico, per $\omega = 0$, spesso è un valore reale)
   - $G(j\infty)$ (dove termina il grafico, per $\omega \to \infty$, spesso è 0)
   - $\measuredangle G(j\infty)$ (da che lato il grafico arriva nel punto finale)
   - Se attraversa gli assi (individuo sul diagramma della fase punti con fase multipla di 90° e leggo sul diagramma del modulo il valore alla pulsazione corrispondente)
   - Se attraversa il cerchio unitario (individuo sul diagramma del modulo il punto in cui attraversa l'asse a 0 dB e leggo sul diagramma della fase il valore alla pulsazione corrispondente).

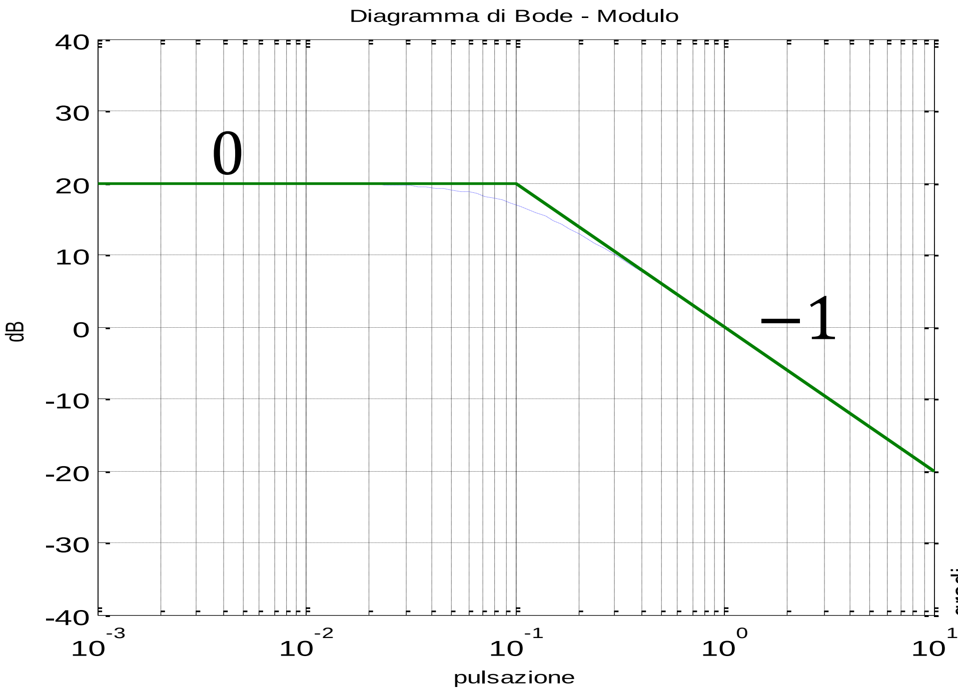
3) Un discorso a parte meritano i sistemi con tipo $g \neq 0$.

Esempio

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)}$$

$\mu = 10$ ⇨ Modulo 10 (=20 dB)
Fase 0°

$\tau = 10$ ⇨ $\omega = 0.1$



$$G(j\omega) = \frac{10}{(1+j10\omega)}$$

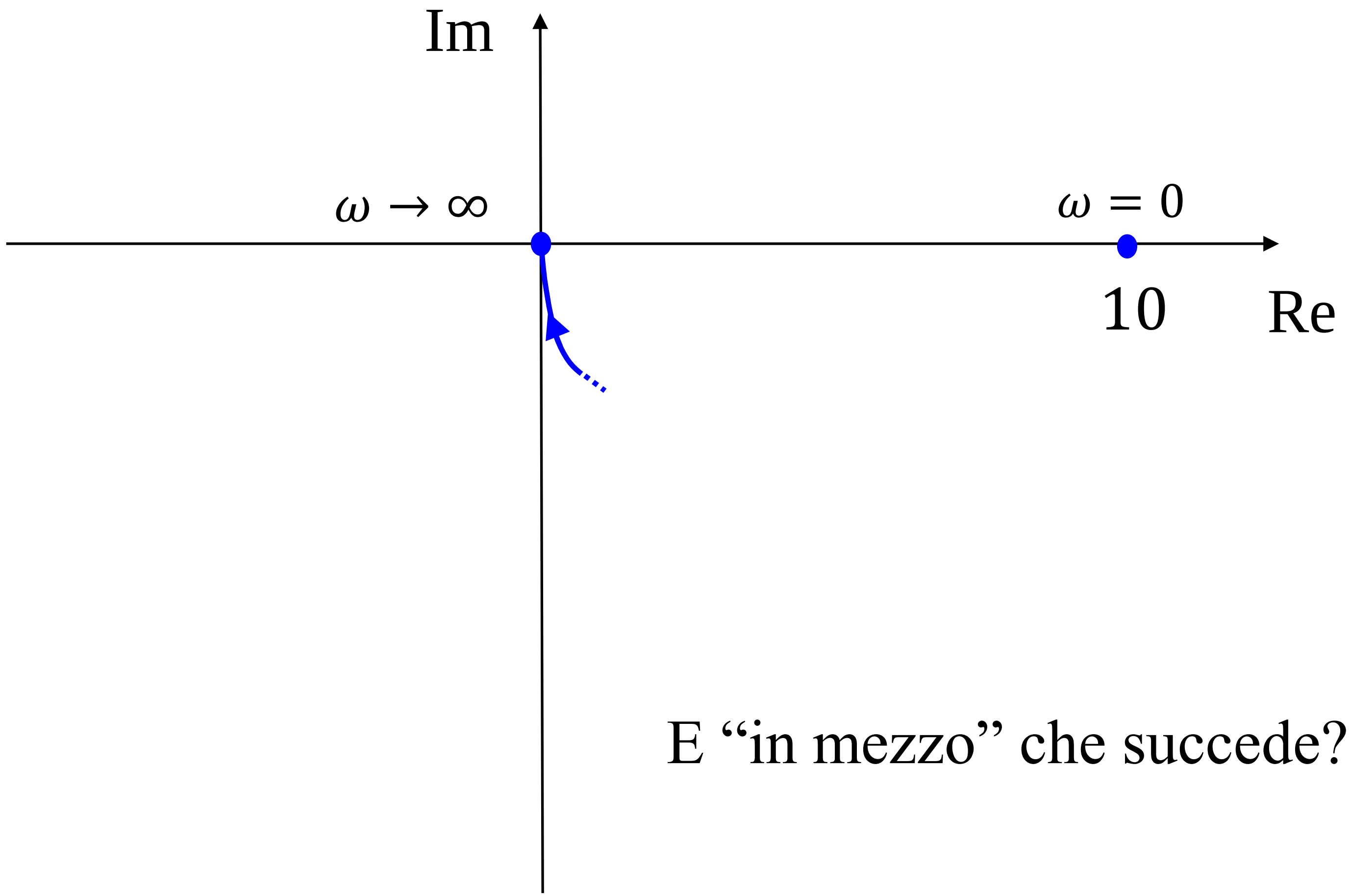
Per $\omega = 0$ $$G(j0) = \frac{10}{(1 + j10 \cdot 0)} = 10$$

Per $\omega \to \infty$ $$G(j\infty) = \frac{10}{(1 + j10 \cdot \infty)} = 0$$

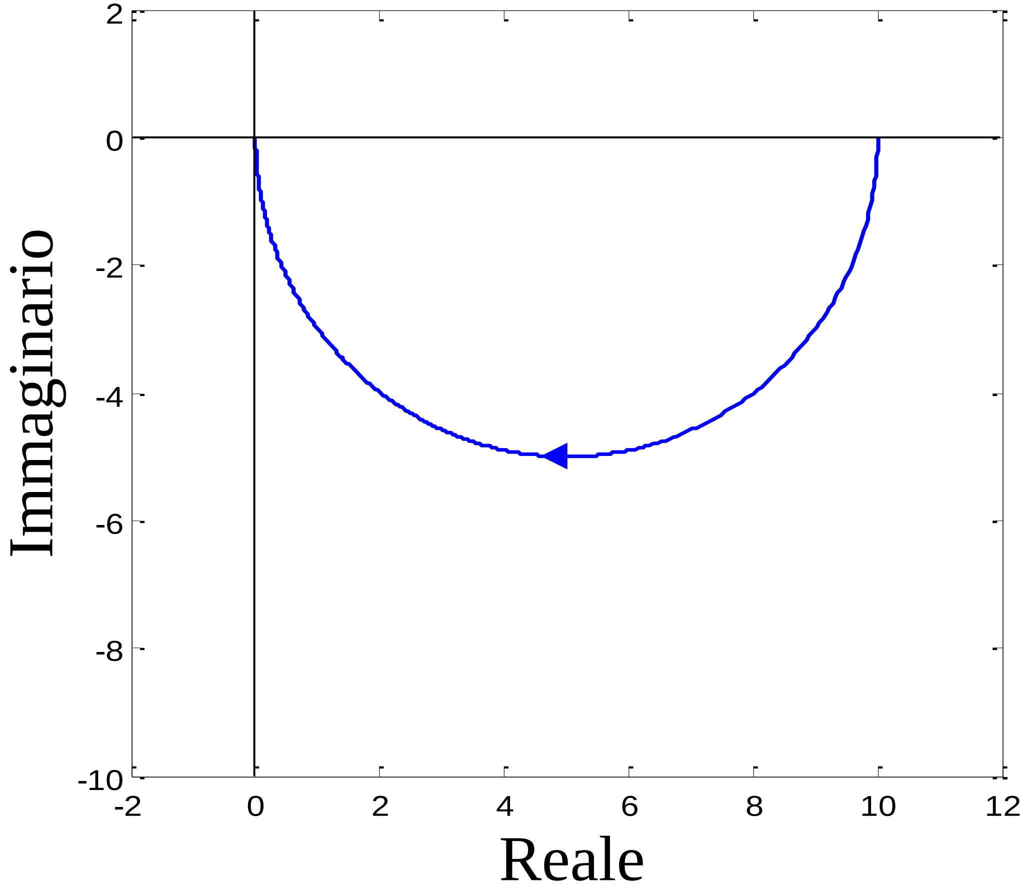
Il diagramma polare inizia in 10 ed arriva nell'origine. Ci si poteva arrivare anche dai diagrammi di Bode.

Inoltre, osservando i diagrammi di Bode si nota che:

- il modulo "parte" dal valore 10 e decresce monotonamente verso 0;
- la fase "parte" dal valore 0° e decresce monotonamente fino a raggiungere il valore di $-90°$.



E “in mezzo” che succede?


2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-2
0
2
4
6
8
10
12
Immaginario
Reale

Esempio

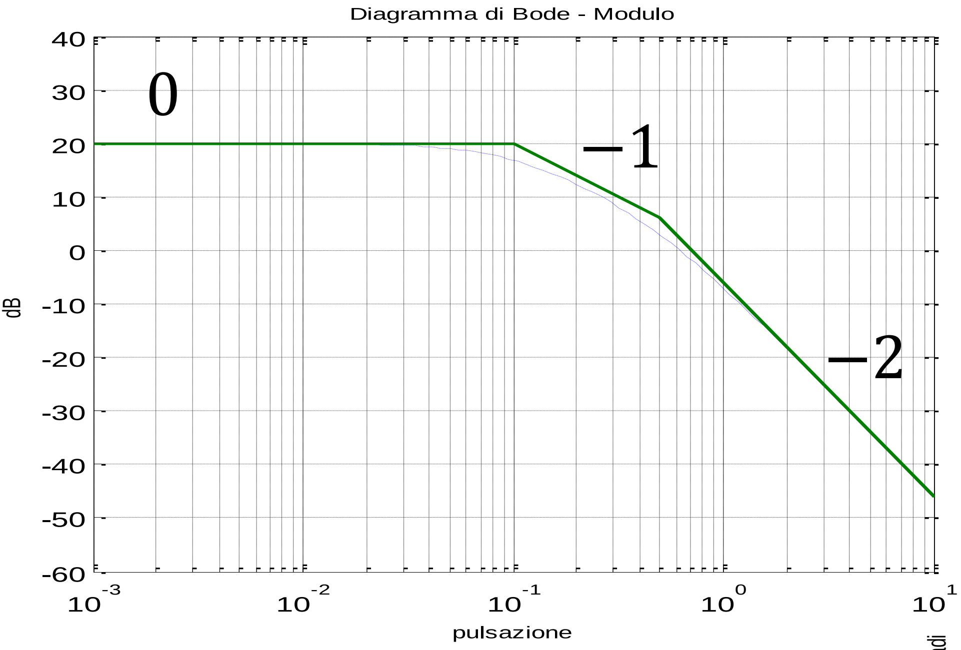
$$G(s) = \frac{-10}{(1+10s)(1+2s)}$$

$\mu = -10$ ⇨ Modulo 10 ($= 20\ dB$), Fase $-180°$

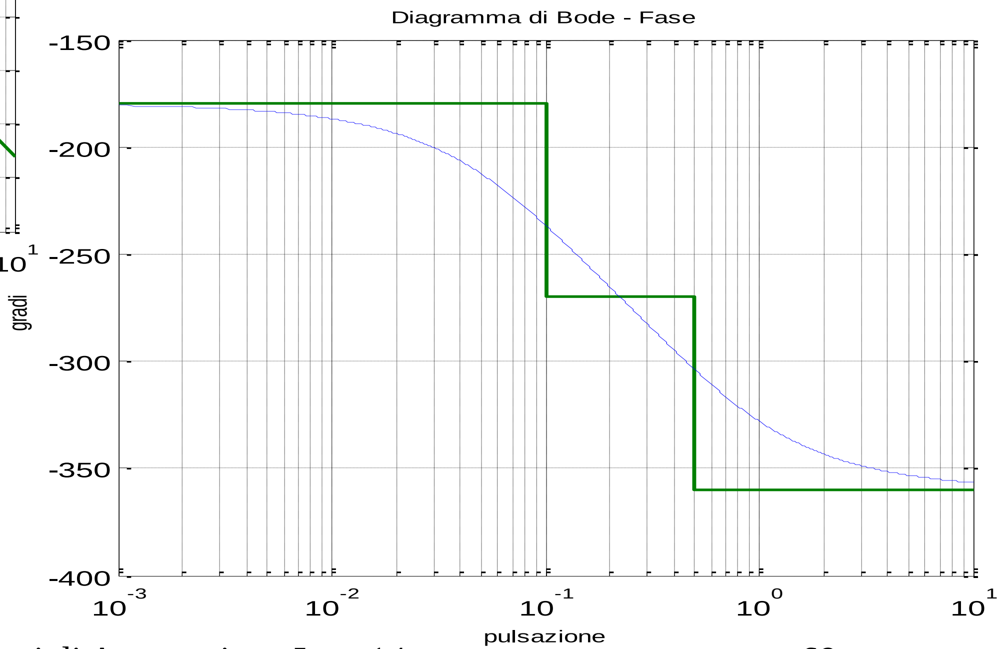
$\tau_1 = 10$ ⇨ $\omega_1 = 0.1$

$\tau_2 = 2$ ⇨ $\omega_2 = 0.5$

Attenzione! Guadagno negativo!!



$$G(j\omega) = \frac{-10}{(1+j10\omega)(1+j2\omega)}$$



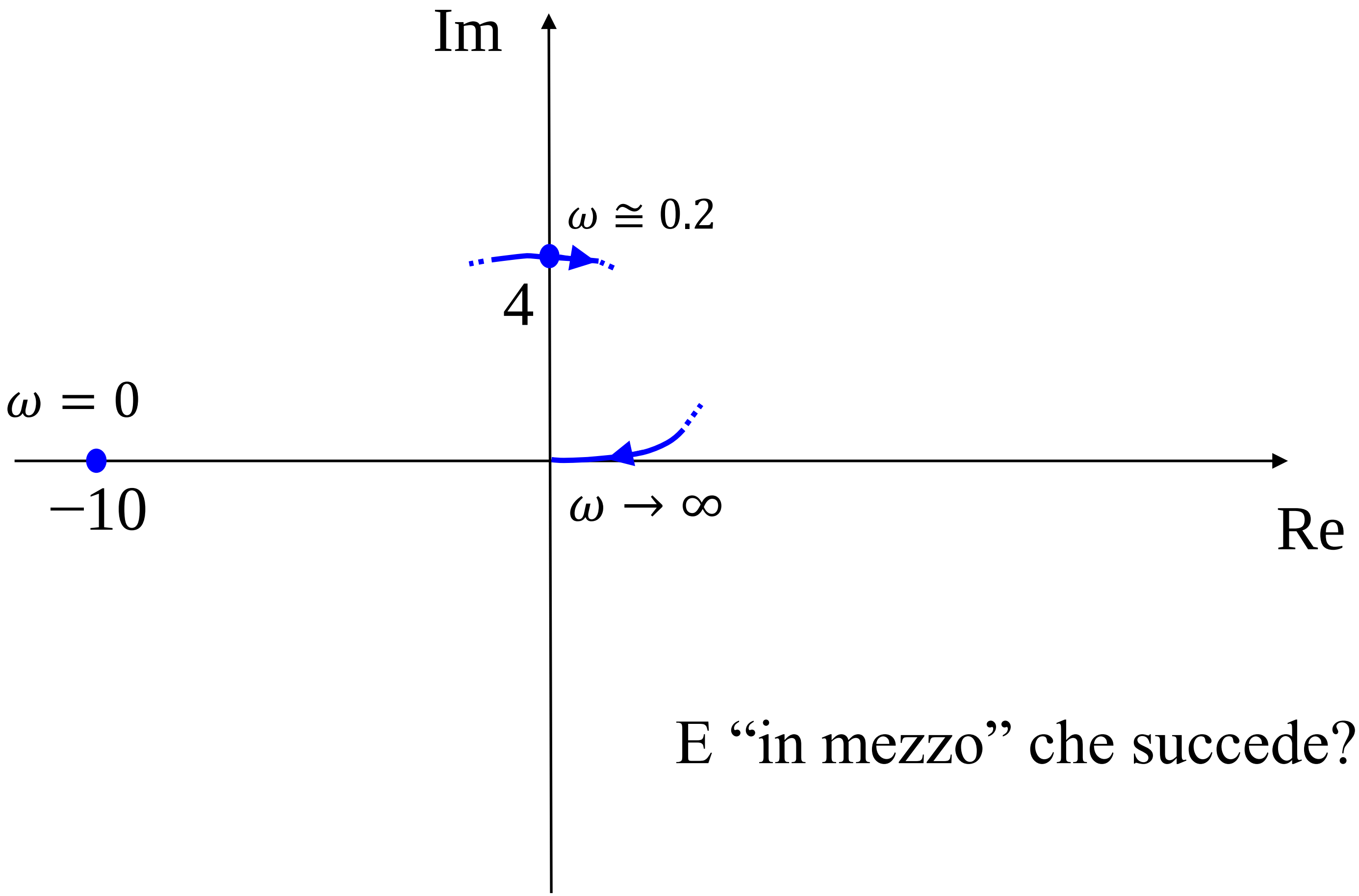
per $\omega = 0$ $G(j0) = -10$

per $\omega \to \infty$ $G(j\infty) = 0$

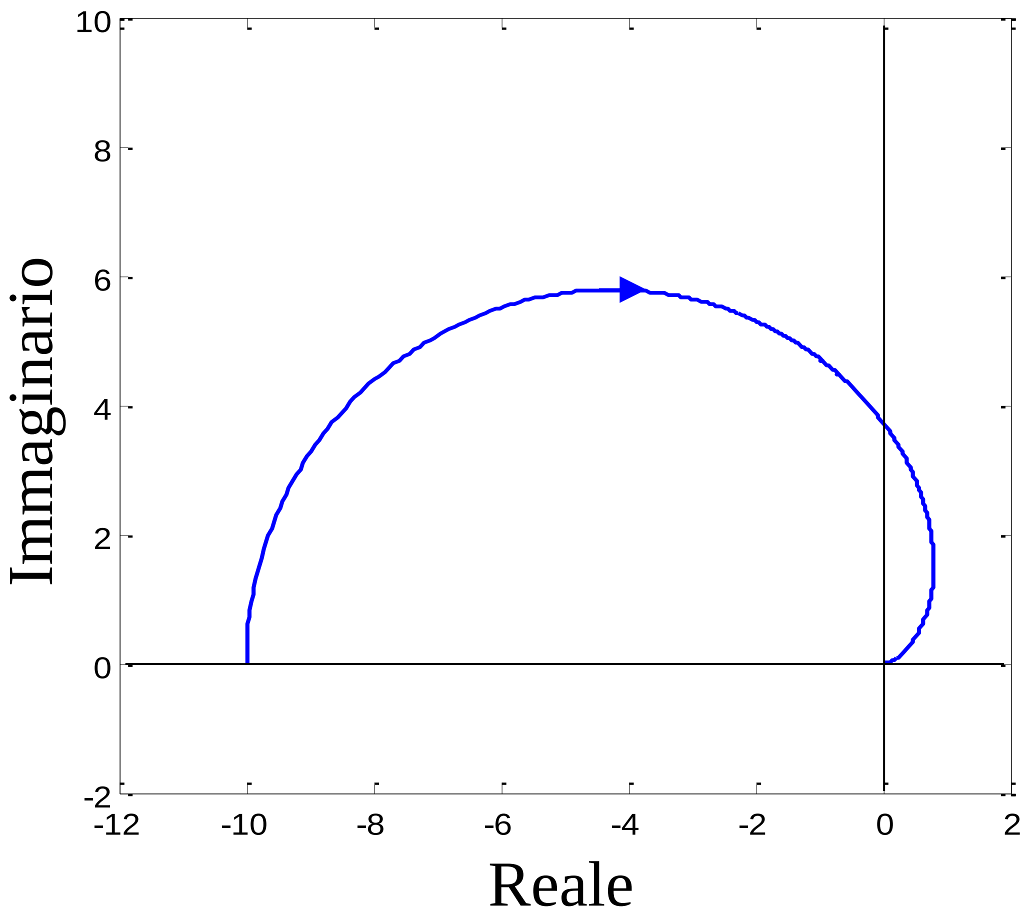
Il diagramma polare parte da -10 ed arriva nell'origine (cfr diagrammi di Bode).

Inoltre, osservando i diagrammi di Bode si nota che:

- il modulo parte dal valore 10 e decresce monotonamente verso 0;
- la fase parte dal valore $-180°$ e decresce monotonamente fino a raggiungere $-360°$;
- la fase vale $-270°$ per $\omega \cong 0.2$ ed in corrispondenza di questa pulsazione il modulo vale circa $12\ dB$ cioè circa 4. Ciò significa che il diagramma polare attraversa il semiasse immaginario positivo nel punto $+4j$;
- il diagramma del modulo attraversa l'asse a $0\ dB$ per $\omega \cong 0.7$ ed in corrispondenza di questa pulsazione la fase vale circa $-310°$. Quindi il diagramma polare attraversa la circonferenza di raggio unitario in un punto che forma un angolo di circa $50°$ con il semiasse reale positivo.



E “in mezzo” che succede?


10
8
6
4
2
0
-2
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
Immaginario
Reale

Esempio

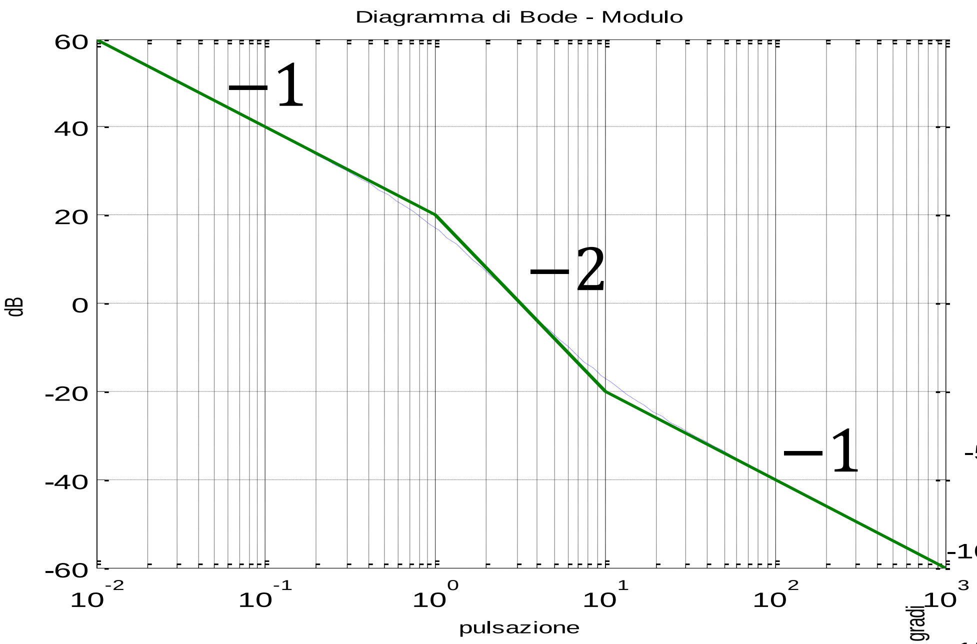
$$\mu = 10 \Rightarrow \begin{cases} \text{Modulo } 10\ (= 20\ dB) \\ \text{Fase } 0° \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{10(1+0.1s)}{s(1+s)}$$

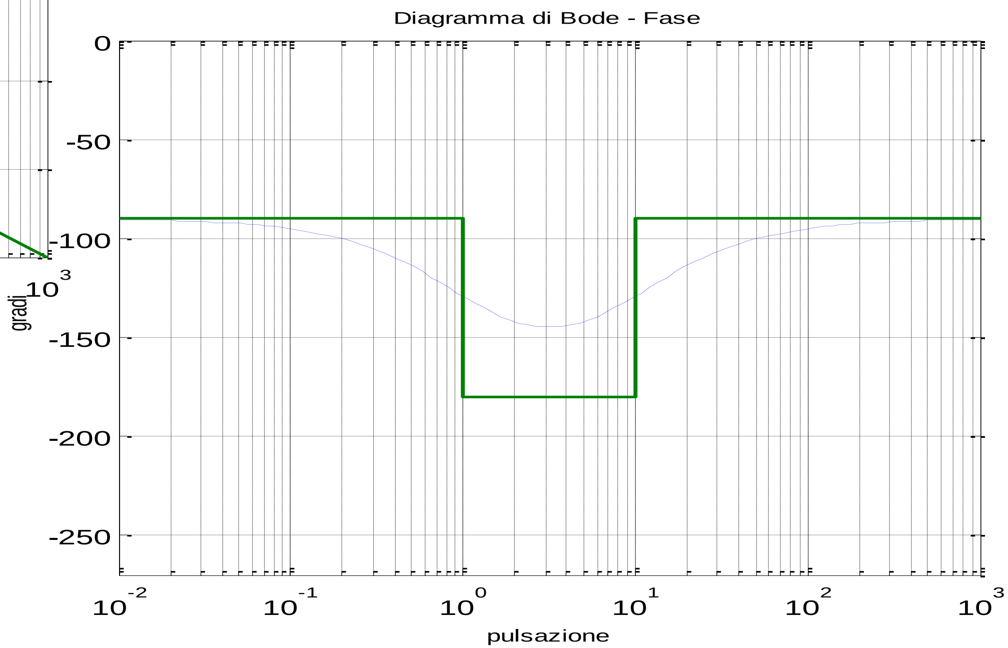
$$T = 0.1 \Rightarrow \omega = 10$$

$$\tau = 1 \Rightarrow \omega = 1$$

tipo $g = 1$



$$G(j\omega) = \frac{10(1+0.1j\omega)}{j\omega(1+j\omega)}$$



Per $\omega \to 0$ $\quad |G(j\omega)| \to \infty$

$\measuredangle G(j\omega) \to -90°$

C'è un asintoto verticale!

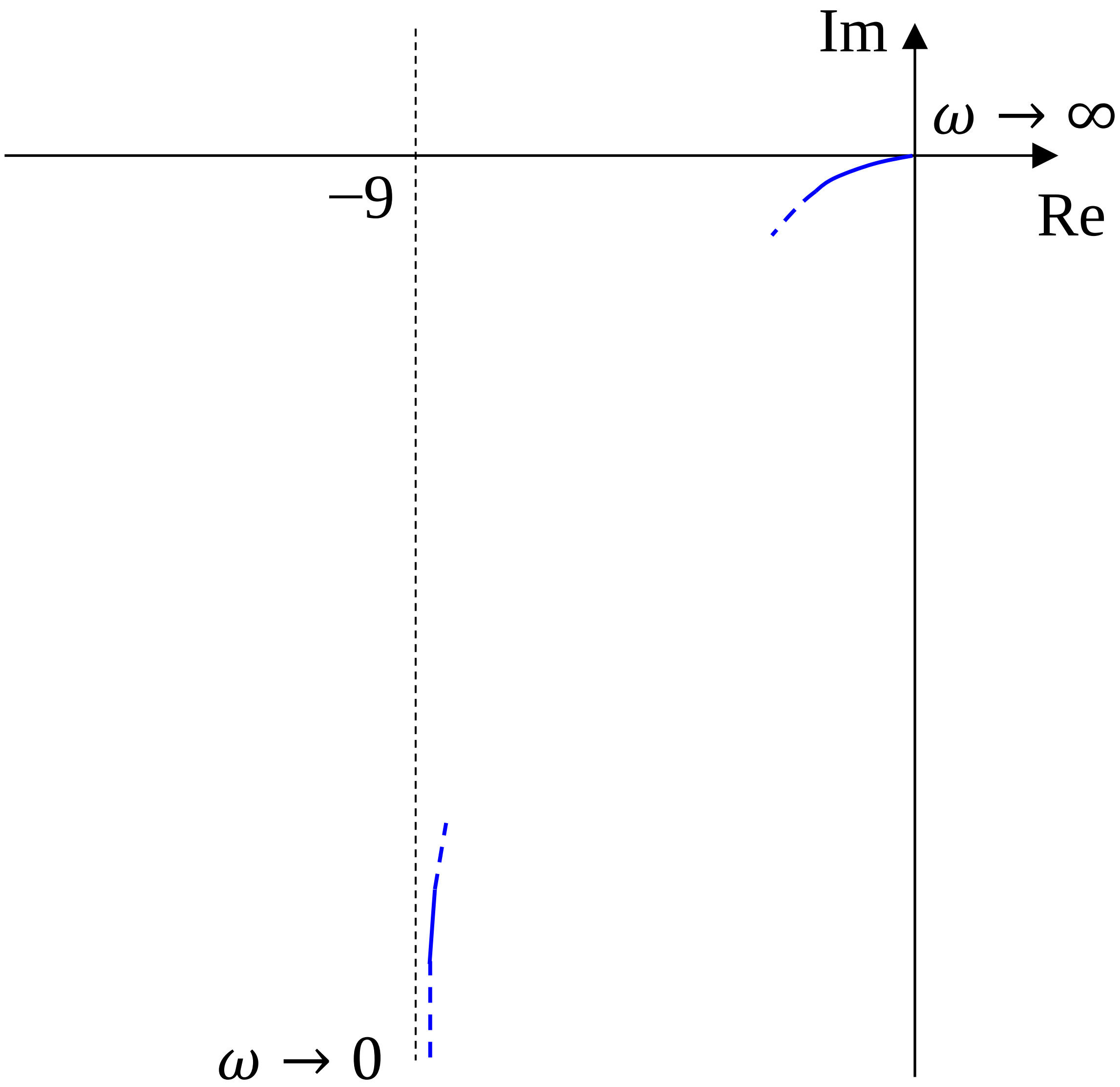
Per $\omega \to \infty$ $\quad G(j\omega) \to 0$

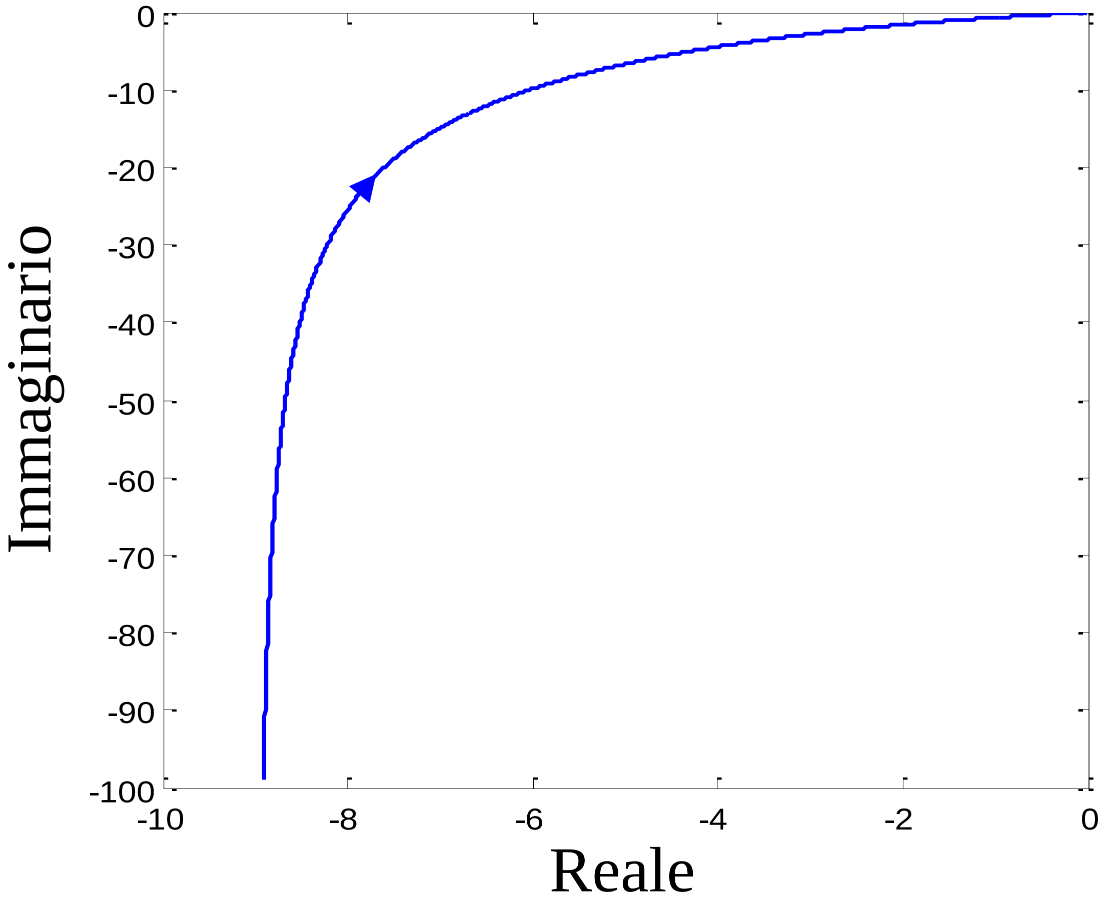
Il diagramma polare termina nell'origine.

La posizione dell' asintoto si ottiene risolvendo il seguente limite:

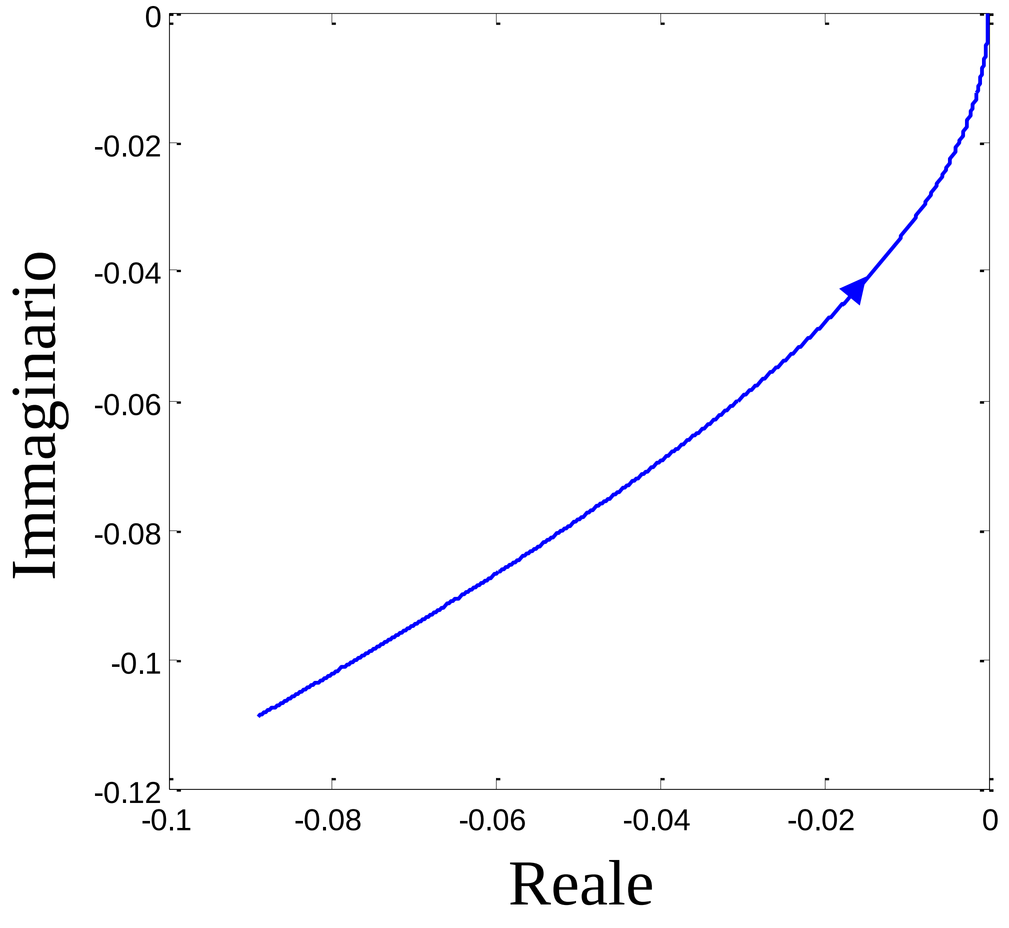
$$\lim_{\boldsymbol{\omega \to 0}} \mathbf{Re}\left(\boldsymbol{G(j\omega)}\right) = \lim_{\omega \to 0} \mathrm{Re}\left(\frac{10 + j\omega}{-\omega^2 + j\omega}\right) = \lim_{\omega \to 0} \mathrm{Re}\left(\frac{(10 + j\omega)(-\omega^2 - j\omega)}{\omega^4 + \omega^2}\right) =$$

$$= \lim_{\omega \to 0} \frac{-9\omega^2}{\omega^4 + \omega^2} = -9$$


Im
$\omega \to \infty$
-9
Re
$\omega \to 0$


0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
-10
-8
-6
-4
-2
0
Immaginario
Reale

Per $\omega \to \infty$ la fase vale 90° e quindi il diagramma polare dovrebbe arrivare nell'origine con quella fase, cioè «dal basso». E infatti è cosi (ma si vede solo su una «scala» più piccola)



$\angle G(j\omega) \to -90°$

11. Matlab

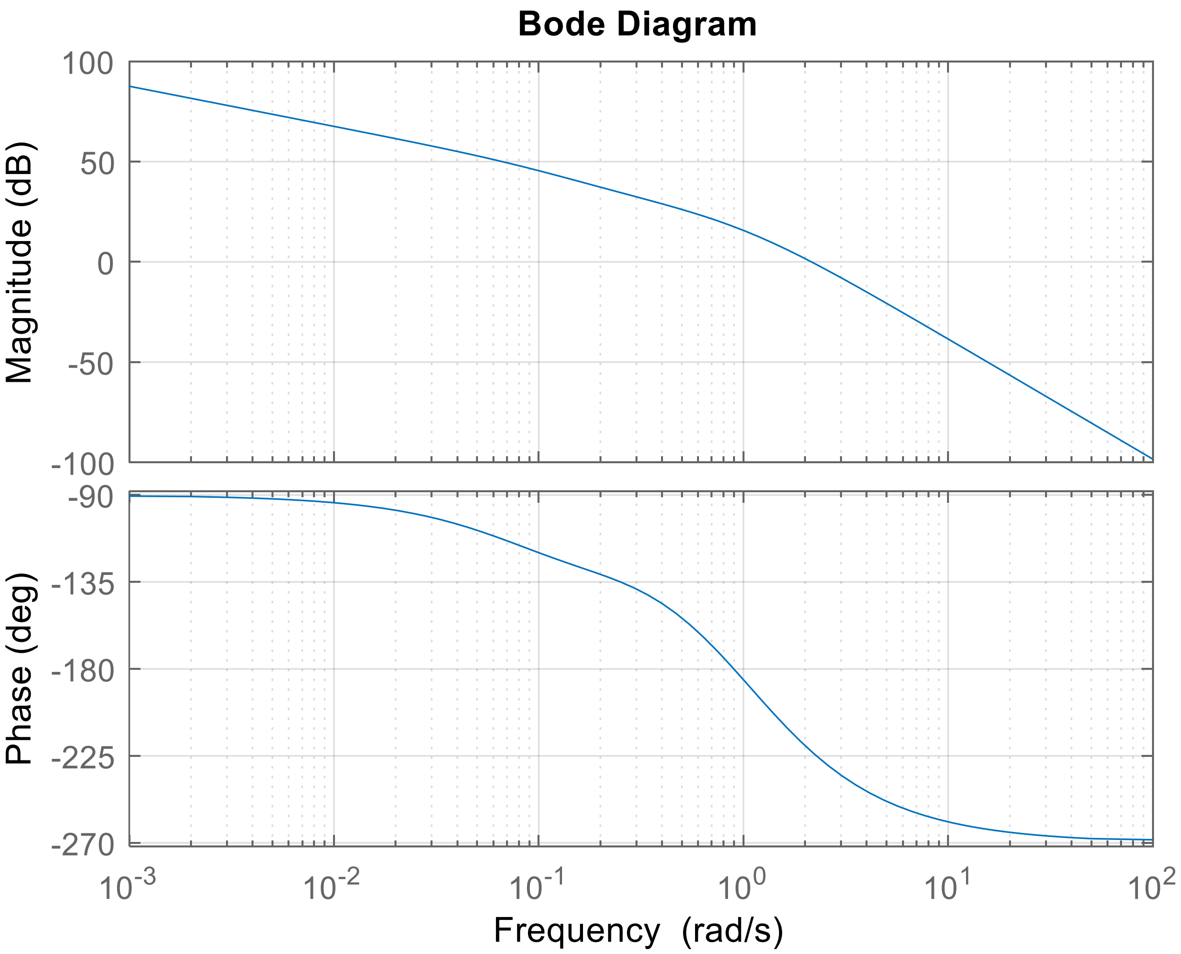
bode(SYS) Traccia i diagrammi di Bode di modulo e fase del sistema descritto da SYS.
bodemag(SYS) Traccia il solo diagramma del modulo.
Questi comandi hanno alcune opzioni utili: specificare il range di frequenze, restituire i valori di modulo e fase della risposta in frequenza per ulteriori manipolazioni, etc… (cfr **bodeoptions**).

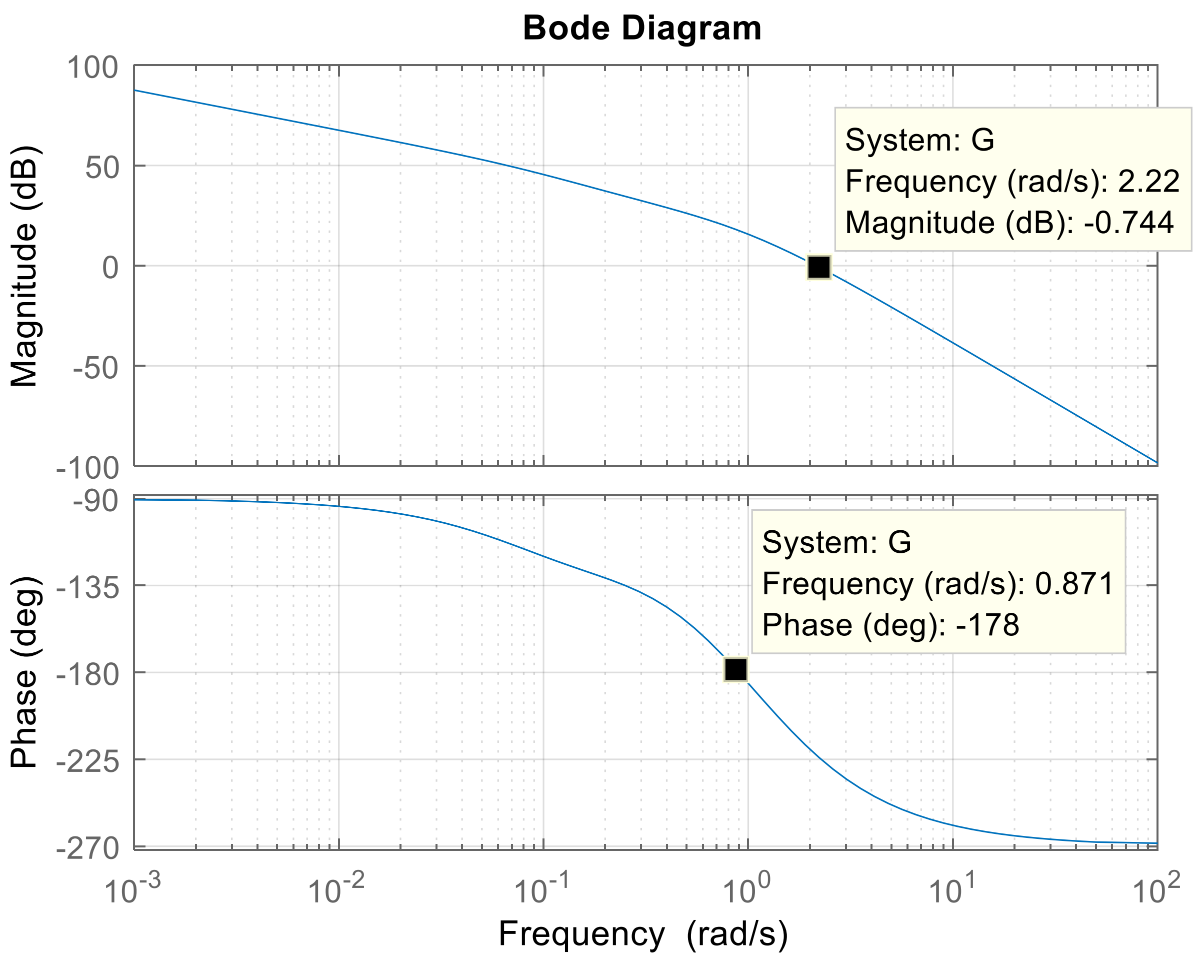
Esempio

```
>> s=tf('s');
>> G=24*(1+5*s)/(s*(1+10*s)*(1+s)^2)
G =
            120 s + 24
  ----------------------------
  10 s^4 + 21 s^3 + 12 s^2 + s

Continuous-time transfer function.

>> bode(G)
>> grid
```

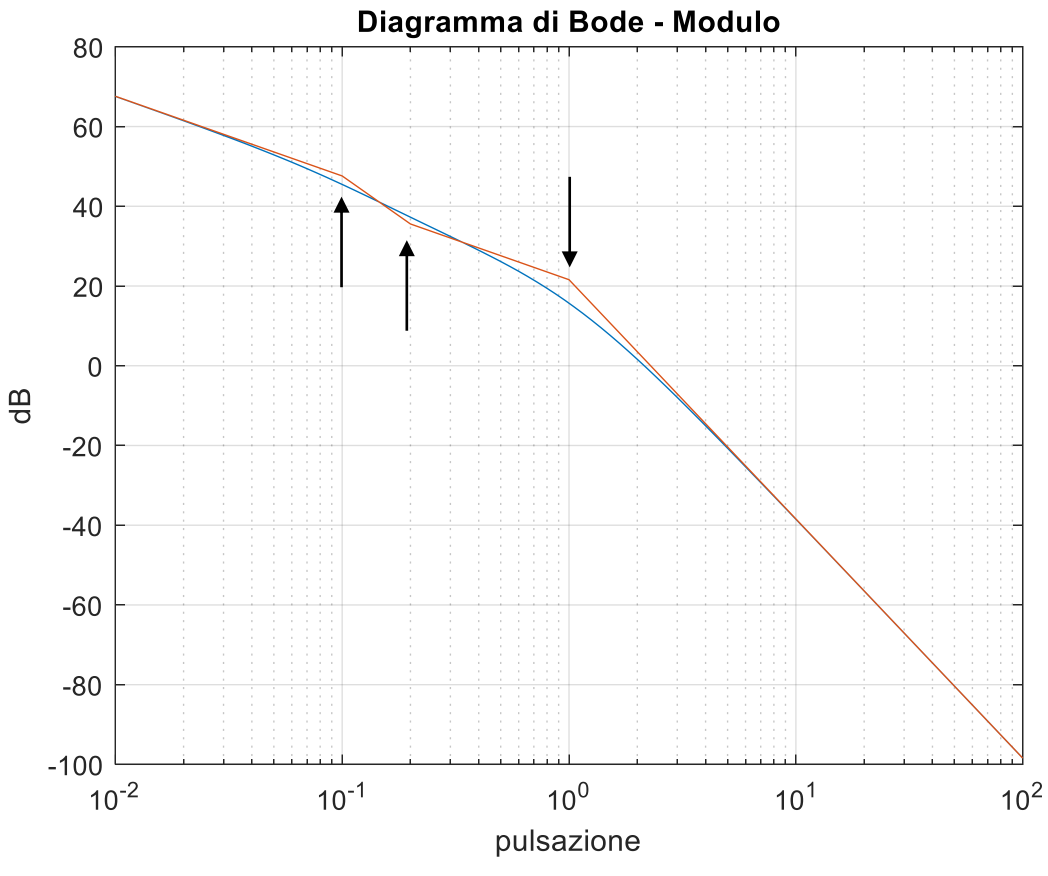

Bode Diagram
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)



Con i «datatip» si possono evidenziare alcuni punti interessanti (in modo approssimativo).

bodeasin(num,den,wmin,wmax,tipo) è una funzione (creata da Alberto Leva di PoliMi) per il tracciamento dei diagrammi asintotici.

```
>> bodeasin([120 24], [10 21 12 1 0],1e-2, 1e2,'mod')
```



`atan2(Y,X)` è il comando per il calcolo dell'arcotangente su quattro quadranti, dove X ed Y rappresentano ascissa ed ordinata del punto rispettivamente, $-\pi \leq$ atan2(Y,X) $\leq\ \pi$.

Esempio

Calcoliamo la fase dei due numeri complessi $z_1 = 3 + 3j$ e $z_2 = -3 - 3j$.
Se calcolassi la fase usando semplicemente l'arctg otterrei il medesimo risultato per entrambi i numeri. Infatti:

$$\measuredangle z_1 = arctg\left(\frac{3}{3}\right) = arctg\left(\frac{-3}{-3}\right) = \measuredangle z_2$$

Invece, usando il comando corretto

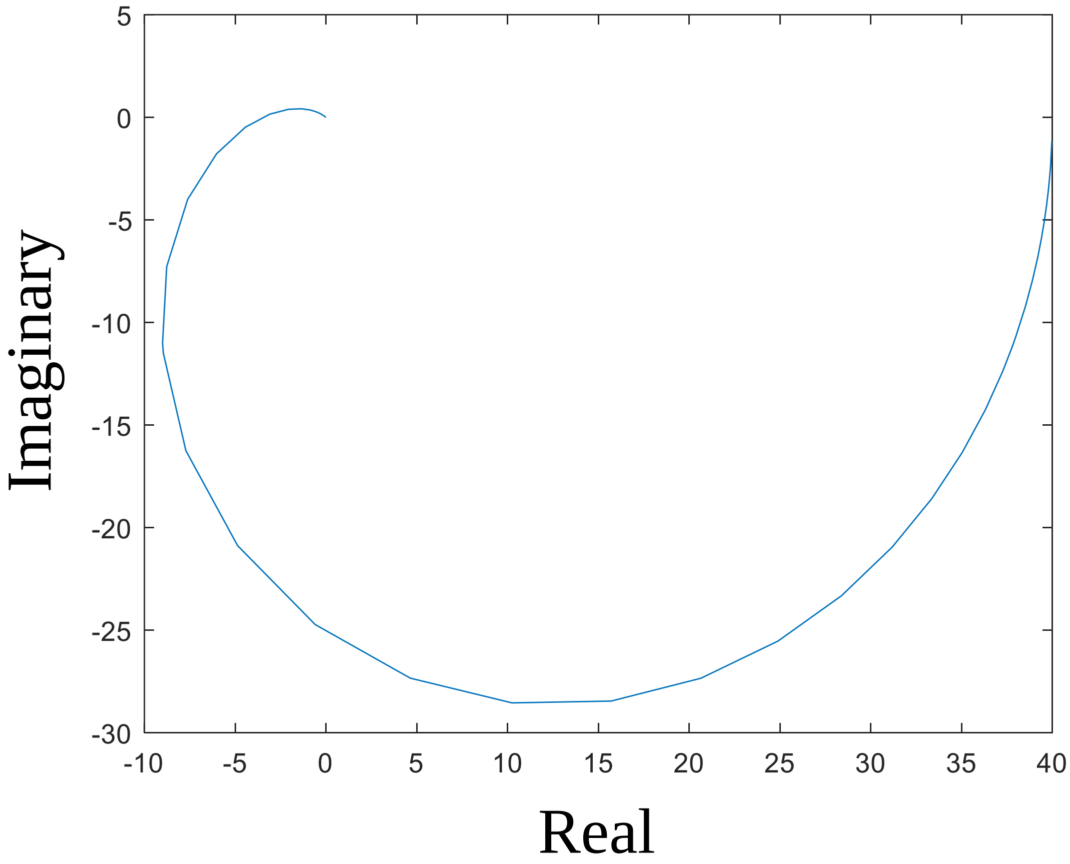
```
>> (180/pi)*atan2(3,3)
ans =
    45
>> (180/pi)*atan2(-3,-3)
ans =
  -135
```

Non esiste un singolo comando Matlab per disegnare il diagramma polare. Si può usare **freqresp** e disegnare il risultato.

```
>> G=40*(1+s)/((1+10*s)^3)
G =
             40 s + 40
  -----------------------------
  1000 s^3 + 300 s^2 + 30 s + 1

Continuous-time transfer function.

>> [H,w]=freqresp(G);
>> H2=squeeze(H);
>> plot(H2)
```



5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-10
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
Imaginary
Real