ESERCIZIO 1

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t}) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t}) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_3(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{2}\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{3}\boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{9}\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{6}\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{t}) \end{cases}$$

1.1 Valutare la stabilità del sistema

La matrice A del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice A

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{bmatrix} = s \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s[s(s+3)+2] = s(s^2+3s+2)$$
$$= s(s+1)(s+2)$$

Il sistema ha autovalori $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $s_3 = -2$ quindi è semplicemente stabile (non asintoticamente).

1.2 Calcolare la funzione di trasferimento del sistema e valutarne poli, zeri, guadagno e tipo e dire se il sistema è a fase minima.

Il sistema si può scrivere in forma matriciale,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [9 \quad 6 \quad 1]$, $D = 0$

Quindi la funzione di trasferimento è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = [9 \quad 6 \quad 1] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{s(s+1)(s+2)} [9 \quad 6 \quad 1] \begin{bmatrix} * & * & a \\ * & * & b \\ * & * & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scriviamo per comodità $\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s & 2 \\ 0 & -1 & s+3 \end{bmatrix}$

Si ha che $a = det \begin{bmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1$; $b = -det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = s$; $c = det \begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2$.

Quindi

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}9 & 6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}* & * & 1\\ * & * & s\\ * & * & s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}9 & 6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ s\\ s^2\end{bmatrix}=\frac{s^2+6s+9}{s(s+1)(s+2)}$$
$$=\frac{(s+3)^2}{s(s+1)(s+2)}$$

I poli sono in $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-2$.

Gli zeri sono coincidenti in $z_{1,2}=-3$.

Il tipo è $g=1$.

Il guadagno (generalizzato) è $\mu=\lim_{s\to 0}s^gG(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{(s+3)^2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{3^2}{2}=\frac{9}{2}$

Il sistema è a fase minima perché ha tutte le singolarità (poli e zeri) a parte reale negativa o nell'origine ed ha guadagno positivo.

1.3 Con riferimento al sistema dato, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false

1.3.1 Il diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza è monotono decrescente

1.3.2 Il diagramma di Bode della fase della risposta in frequenza è monotono decrescente

1.3.3 La risposta all'impulso tende ad un valore costante per $t\to\infty$.

1.3.4 La risposta all'impulso parte dal valore 0.

1.3.5 La risposta allo scalino presenta delle oscillazioni smorzate

1.3.1 Il diagramma di Bode del modulo, analizzandolo da sinistra (basse pulsazioni) verso destra (alte pulsazioni), ha inizialmente pendenza -1, per via del polo nell'origine, dopo si trovano, nell'ordine: i due poli in -1 e in -2 che portano la pendenza a -3 ed infine il doppio zero in -3 che fa risalire la pendenza a -1. Quindi il diagramma di Bode del modulo è monotono decrescente. **VERO**.

1.3.2 Il diagramma di Bode della fase, sempre analizzandolo da sinistra (basse pulsazioni) verso destra (alte pulsazioni), ha inizialmente valore $-90°$, per via del polo nell'origine, dopo si trovano, nell'ordine: i due poli in -1 e in -2 che portano il valore della fase a $-180°$ e poi a $-270°$ ed infine il doppio zero in -3 che fa risalire la fase a $-90°$. Quindi il diagramma di Bode della fase non è monotono decrescente. **FALSO**.

1.3.3 E' sufficiente applicare il teorema del valore finale con $u(t)=imp(t)$ e quindi $U(s)=1$

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0}sG(s)U(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{(s+3)^2}{s(s+1)(s+2)}=\lim_{s\to 0}\frac{(s+3)^2}{(s+1)(s+2)}=\frac{9}{2}$$

La risposta all'impulso tende ad un valore costante. **VERO**.

1.3.4 E' sufficiente applicare il teorema del valore iniziale con $u(t)=imp(t)$ e quindi $U(s)=1$

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}sG(s)U(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{(s+3)^2}{s(s+1)(s+2)}=\lim_{s\to\infty}\frac{(s+3)^2}{(s+1)(s+2)}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2\left(1+\frac{3}{s}\right)^2}{s^2\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{2}{s}\right)}=1$$

La risposta all'impulso non parte dal valore 0. **FALSO**.

1.3.5 Perché la risposta allo scalino di un sistema asintoticamente stabile presenti oscillazioni smorzate, esso deve avere poli dominanti complessi coniugati con smorzamento basso (tipicamente almeno $\xi < 0.7$). Questo sistema non solo non ha poli con queste caratteristiche, ma non è neanche asintoticamente stabile. **FALSO**.

1.4 Determinare un vettore riga $\boldsymbol{k} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$ tale che, se il sistema viene controllato in retroazione con la legge di controllo $\boldsymbol{u(t)} = \boldsymbol{kx(t)}$, il sistema risultante abbia tutti gli autovalori in -4.

Sostituiamo la legge di controllo nell'equazione di stato. Avremo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + Bkx(t) = (A + Bk)x(t)$$

Si osservi che, essendo il vettore B con dimensioni (3×1) ed il vettore k con dimensioni (1×3), il prodotto Bk avrà dimensioni (3×3) come deve essere per poter essere sommato alla matrice A.

La matrice di stato del sistema retroazionato è quindi $A + Bk$ e possiamo calcolarne gli autovalori.

$$\begin{aligned} A + Bk &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 & -2 + k_2 & -3 + k_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \varphi(s) = \det\big(sI - (A + Bk)\big) &= \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -k_1 & 2 - k_2 & s + 3 - k_3 \end{bmatrix} \\ &= s \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 - k_2 & s + 3 - k_3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -k_1 & s + 3 - k_3 \end{bmatrix} = s[s(s + 3 - k_3) + 2 - k_2] - k_1 \\ &= s(s^2 + (3 - k_3)s + 2 - k_2) - k_1 = s^3 + (3 - k_3)s^2 + (2 - k_2)s - k_1 \end{aligned}$$

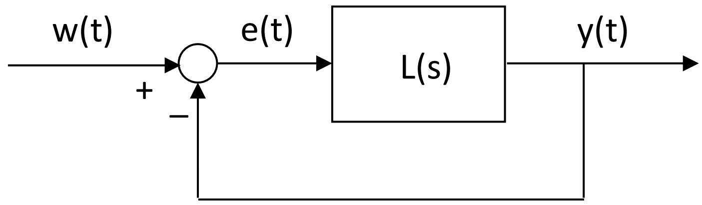
Se gli autovalori sono tutti in -4, allora il polinomio caratteristico deve essere

$$\varphi(s) = (s + 4)^3 = s^3 + 12s^2 + 48s + 64$$

da cui si ottiene facilmente $k_1 = -64$; $k_2 = -46$; $k_3 = -9$.

ESERCIZIO 2

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi



con $\boldsymbol{L(s) = \frac{\mu}{s} e^{-s\tau}}$

2.1 Sia $\boldsymbol{\tau = 0}$. Discutere al variare di $\boldsymbol{\mu > 0}$ l'andamento dell'uscita $\boldsymbol{y(t)}$ quando $\boldsymbol{w(t) = sca(t)}$.

La funzione di trasferimento di sensitività complementare è

$$F(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{\mu}{s}}{1 + \frac{\mu}{s}} = \frac{\mu}{s + \mu} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu} s}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per ogni valore di $\mu > 0$. La risposta allo scalino in anello chiuso sarà quindi quella di un sistema del primo ordine con guadagno unitario $\mu_F = F(0) = 1$ e con un polo con costante di tempo $\frac{1}{\mu}$. La risposta allo scalino in anello chiuso avrà quindi tempo di assestamento $t_a \cong \frac{5}{\mu}$ che sarà tanto più breve tanto più μ sarà grande.

2.2 Sempre con $\boldsymbol{\tau = 0}$, calcolare pulsazione critica e margine di fase al variare di $\boldsymbol{\mu > 0}$.

Con $L(s) = \frac{\mu}{s}$ si ha la risposta in frequenza

$$L(j\omega) = \frac{\mu}{j\omega}$$

Il modulo della risposta in frequenza è

$$|L(j\omega)| = \frac{\mu}{\omega}$$

La pulsazione critica ω_C è quel valore in corrispondenza del quale il modulo della risposta in frequenza della funzione d'anello vale 1 (ovvero il valore per cui attraversa l'asse a $0\ dB$), quindi

$$|L(j\omega_C)| = \frac{\mu}{\omega_C} = 1$$

$$\omega_C = \mu \quad rad/s$$

La fase della risposta in frequenza è

$$\measuredangle L(j\omega) = \measuredangle \mu - \measuredangle j\omega = 0° - 90° = -90°$$

Essa è costante e non dipende da ω. Quindi la fase critica, ovvero la fase della risposta in frequenza alla pulsazione critica è $\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C)° = -90°$ da cui si ha il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 90°$$

2.3 Sia $\mu = 100$. Calcolare il valore del massimo ritardo aggiuntivo d'anello τ_{MAX} che il sistema retroazionato può tollerare prima di perdere l'asintotica stabilità.

Bisogna riferirsi alla funzione d'anello $L(s) = \frac{\mu}{s}$ che sappiamo avere $\omega_C = \mu$ rad/s e $\varphi_m = 90°$. Il massimo ritardo aggiuntivo d'anello τ_{MAX} è il valore del ritardo τ che, alla pulsazione ω_C, produce uno sfasamento aggiuntivo pari al margine di fase.

Infatti, senza ritardo, cioè con $\tau = 0$, la funzione d'anello ha fase critica φ_C e margine di fase $\varphi_m = 180° - |\varphi_C|$. Con un ritardo aggiuntivo $\tau \neq 0$ la funzione d'anello ha fase critica $\varphi_C - \omega_C \tau \frac{180°}{\pi}$ e margine di fase $\varphi_m = 180° - \left|\varphi_C - \omega_C \tau \frac{180°}{\pi}\right|$. Il sistema retroazionato perde l'asintotica stabilità in corrispondenza del valore di ritardo τ_{MAX} per cui si ha $180° - \left|\varphi_C - \omega_C \tau_{MAX} \frac{180°}{\pi}\right| = 0°$

Quindi nel nostro caso, essendo $\varphi_C = -90°$

$$\omega_C \tau_{MAX} \frac{180°}{\pi} = 90°$$

da cui, essendo nel nostro caso $\omega_C = \mu = 100$, si ha

$$\tau_{MAX} = \frac{\pi}{200} = 0.0157 \ \ sec$$

2.4 Sia $\tau = 10$. Calcolare il massimo valore di μ che il sistema retroazionato può tollerare prima di perdere l'asintotica stabilità.

Bisogna riferirsi alla funzione d'anello $L(s) = \frac{\mu}{s} e^{-10s}$. Essa ha sempre $\omega_C = \mu$ rad/s e quindi avrà fase critica $\varphi_C = -90° - 10\omega_C \frac{180°}{\pi} = \ -90° - 10\,\mu \frac{180°}{\pi}$. Dal momento che il margine di fase è $\varphi_m = 180° - |\varphi_C|$, il sistema retroazionato perderà l'asintotica stabilità per $|\varphi_C|$=180°, cosa che accade per

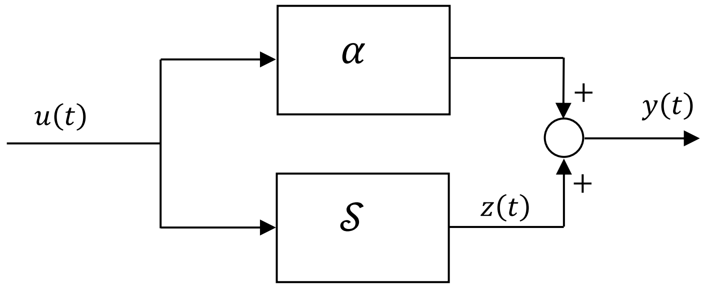
$$-90° - 10\,\mu \frac{180°}{\pi} = -180°$$

da cui

$$\mu = \frac{\pi}{180°} 9° = \frac{\pi}{20} = 0.157$$

ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo descritto dal seguente schema a blocchi



in cui il sistema $\mathcal{S}$ è descritto dalle seguenti equazioni

$$\mathcal{S}\ \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ z(t) = 2x(t) - 2u(t) \end{cases}$$

3.1 Sia $\alpha = 0$. Si risponda ai seguenti quesiti ponendo una crocetta sulla soluzione corretta

3.1.1 Il sistema è proprio (non strettamente) **[V]** **[F]**

3.1.2 Il sistema è asintoticamente stabile **[V]** **[F]**

3.1.3 L'ordine del sistema è **[1]** **[2]** **[3]** **[altro]**

3.1.4 Il tipo g del sistema è **[-1]** **[-2]** **[0]** **[1]** **[2]**

3.1.5 Il guadagno statico del sistema è nullo **[V]** **[F]**

Con $\alpha = 0$ il sistema è il solo sistema $\mathcal{S}$, quindi è sufficiente riferirsi alle sue equazioni per rispondere.

3.1.1 Il sistema è proprio perché l'uscita al tempo t dipende dall'ingresso al medesimo tempo t. **VERO**.

3.1.2. Il sistema è del primo ordine ed ha matrice di stato scalare ed uguale a -1. **VERO**.

3.1.3 Il sistema ha una sola variabile di stato e quindi è del primo ordine. **[1]**

3.1.4 Certamente la funzione di trasferimento del sistema non può avere poli nell'origine, poiché l'unico polo è l'autovalore in -1. Essendo proprio, avrà certamente uno zero e questo potrebbe essere nell'origine. Bisogna quindi calcolare la funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t) = z(t)$.

$$G(s) = 2(s+1)^{-1} - 2 = \frac{2}{s+1} - 2 = \frac{2 - 2s - 2}{s+1} = \frac{-2s}{s+1}$$

La funzione di trasferimento ha uno zero nell'origine e quindi $g = -1$. **[-1]**

3.1.5 In corrispondenza di ingresso costante $\bar{u}$, all'equilibrio si ha

$$0 = -\bar{x} + \bar{u}$$

da cui lo stato di equilibrio $\bar{x} = \bar{u}$.

La corrispondente uscita di equilibrio sarà

$$\bar{y} = \bar{z} = 2\bar{x} - 2\bar{u} = 0$$

Quindi il guadagno statico del sistema è nullo. **VERO**.

3.2 Sempre con $\alpha = 0$, calcolare la risposta allo scalino unitario a partire da condizioni iniziali nulle.

$u(t) = sca(t)$ da cui $U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{-2s}{s+1}\frac{1}{s} = \frac{-2}{s+1}$$

Quindi, antitrasformando

$$y(t) = -2e^{-t}$$

3.3 Sempre con $\alpha = 0$, mostrare che con condizione iniziale $x(0) = 1$ e con ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$ il movimento dello stato è costante.

Ciò significa che $\bar{x} = 1$ è lo stato di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $\bar{u} = 1$, cosa già verificata nel punto 3.1.5.

Alternativamente è possibile calcolare il movimento dello stato a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ e applicando l'ingresso $u(t) = 1$.

Essendo $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$ il movimento dello stato è

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Sostituendo si ha

$$x(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t} + e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{-t} + e^{-t}(e^t - 1) = 1$$

3.4 Sia ora $\alpha \neq 0$. Calcolare per quali valori di α le seguenti affermazioni sono vere.

3.4.1 La funzione di trasferimento del sistema ha uno zero a parte reale positiva

3.4.2 Il sistema è asintoticamente stabile

3.4.3 Il sistema è a fase minima

3.4.4 Il guadagno della funzione di trasferimento è positivo

3.4.5 La funzione di trasferimento non ha zeri

3.4.6 In corrispondenza di $u(t) = 5sin(t)$, a transitorio esaurito, l'uscita del sistema è nulla

L'uscita del sistema complessivo è

$$Y(s) = Z(s) + \alpha U(s) = \frac{-2s}{s+1}U(s) + \alpha U(s) = \left(\frac{-2s}{s+1} + \alpha\right)U(s) = \frac{(\alpha-2)s+\alpha}{s+1}U(s)$$

Quindi la funzione di trasferimento complessiva è

$$H(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(\alpha-2)s+\alpha}{s+1}$$

3.4.1 La funzione di trasferimento ha uno zero in $z_1 = \frac{-\alpha}{\alpha-2}$ che è reale ed è positivo solo per $0 < \alpha < 2$.

3.4.2 Il polo del sistema è in -1 indipendentemente dal valore di α, quindi il sistema è asintoticamente stabile per ogni α.

3.4.3 Il sistema è a fase minima se ha tutti i poli e gli zeri a parte reale negativa o al più nell'origine ed ha guadagno positivo.

Lo zero sarà a parte reale negativa o nullo per $\alpha \leq 0$ e per $\alpha > 2$.

Il polo è reale negativo per ogni α.

Il guadagno della funzione di trasferimento è $\mu = \alpha$ ed è positivo per $\alpha > 0$.

Da ultimo bisogna considerare che per $\alpha = 2$ la funzione di trasferimento risulta

$$H(s) = \frac{2}{s+1}$$

che è a fase minima.

Quindi il sistema è a fase minima solo se $\alpha \geq 2$.

3.4.4 Se $\alpha \neq 0$, si ha $g = 0$ e $\mu = \alpha$. Quindi il guadagno è positivo solo per $\alpha > 0$

3.4.5 La funzione di trasferimento non ha zeri se il suo numeratore è una costante. Ciò accade se il coefficiente del termine di primo grado del numeratore si annulla, cosa che accade solo per $\alpha = 2$.

3.4.6 Il sistema è asintoticamente stabile ed è quindi possibile applicare il teorema della risposta in frequenza. In corrispondenza dell'ingresso $u(t) = 5sin(t)$, l'uscita, a transitorio esaurito sarà

$$y(t) = 5|H(j)|sin\left(t + \measuredangle H(j)\right)$$

Si ha che $y(t) = 0$ se $|H(j)| = 0$.

La funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{(\alpha-2)s+\alpha}{s+1}$$

da cui la risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{(\alpha-2)j\omega+\alpha}{j\omega+1}$$

Il modulo della risposta in frequenza è

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \left((\alpha-2)\omega\right)^2}}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

Si ha che $|H(j)| = 0$ se

$$\sqrt{\alpha^2 + (\alpha-2)^2} = 0$$

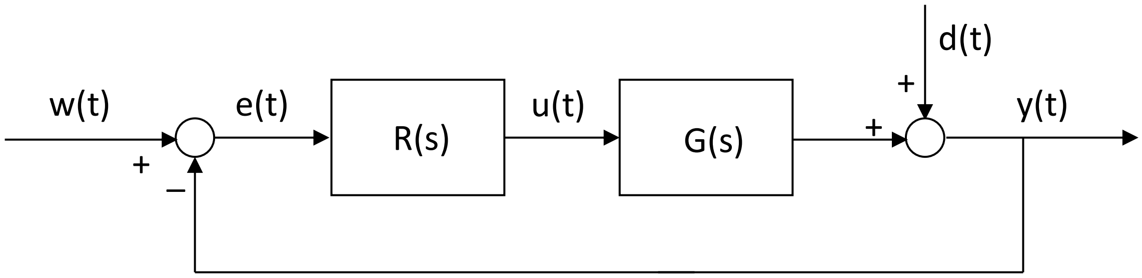
cioè per

$$\alpha^2 + (\alpha - 2)^2 = 0$$

Questa condizione non può essere verificata per nessun valore di α (è la somma di due quadrati che sono nulli in corrispondenza di valori differenti di α).

ESERCIZIO 4

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi



dove $\boldsymbol{G(s) = \frac{2}{1+s} e^{-0.3s}}$ **e** $\boldsymbol{R(s)}$ **è un controllore PI con** $\boldsymbol{K_p = 2}$ **e** $\boldsymbol{K_i = 1}$**.**

4.1 Calcolare analiticamente la pulsazione critica $\boldsymbol{\omega_C}$ **ed il margine di fase** $\boldsymbol{\varphi_m}$**.**

Il controllore PI ha la seguente funzione di trasferimento

$$R(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} = 2 + \frac{1}{s} = \frac{1+2s}{s}$$

La funzione di trasferimento d'anello è quindi

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{1+2s}{s} \frac{2}{1+s} e^{-0.3s} = \frac{2(1+2s)}{s(1+s)} e^{-0.3s}$$

La pulsazione critica ω_C è quel valore di pulsazione in corrispondenza del quale il modulo della risposta in frequenza della funzione di trasferimento d'anello è unitario.

La risposta in frequenza è

$$L(j\omega) = \frac{2(1+2j\omega)}{j\omega(1+j\omega)} e^{-0.3j\omega}$$

Il modulo della risposta in frequenza è

$$|L(j\omega)| = \frac{2|1+2j\omega|}{|j\omega||1+j\omega|} \left|e^{-0.3j\omega}\right| = \frac{2\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

Quindi bisogna risolvere la seguente equazione in $\omega > 0$

$$\frac{2\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} = 1$$

$$\omega^2(1+\omega^2) = 4(1+4\omega^2)$$

$$\omega^4 - 15\omega^2 - 4 = 0$$

Si ponga $x = \omega^2$

$$x^2 - 15x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225+16}}{2} = \begin{cases} x_1 \cong -0.26 < 0 \quad N.A. \\ x_2 \cong 15.26 \end{cases}$$

da cui

$$\omega_{1,2} \cong \pm 3.9$$

delle quali solo la radice positiva è accettabile per cui

$$\omega_C \cong 3.9 \quad rad/s$$

La fase critica è la fase della risposta in frequenza della funzione di trasferimento d'anello alla pulsazione critica cioè

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = \measuredangle 2 + \measuredangle(1+2j\omega_C) + \measuredangle e^{-0.3j\omega_C} - \measuredangle j\omega_C - \measuredangle(1+j\omega_C) =$$

$$= 0° + arctg(2\omega_C) - 0.3\omega_C \frac{180°}{\pi} - 90° - arctg(\omega_C) =$$

$$= 0° + 82°.7 - 67° - 90° - 75°.6 = -149°.9$$

Quindi il margine di fase è

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 30°.1$$

4.2 Valutare le principali caratteristiche dell'uscita quando $\boldsymbol{w(t) = sca(t)}$ e $\boldsymbol{d(t) = 0}$.

Si tratta di valutare le principali caratteristiche della risposta allo scalino unitario in anello chiuso.

La funzione di trasferimento d'anello ha tipo $g = 1$ e quindi l'uscita avrà valore di regime uguale all'ampiezza dello scalino in ingresso, cioè 1.

Il margine di fase è basso ($\varphi_m < 75°$) e quindi i poli dominanti in anello chiuso saranno complessi coniugati ed avranno

- pulsazione naturale $\omega_n \cong \omega_C \cong 3.9$ rad/s
- smorzamento $\xi \cong \frac{\varphi_m}{100} \cong 0.3$

Quindi le principali caratteristiche della risposta allo scalino sono

Valore di regime $y(\infty) = 1$

Tempo di assestamento $t_a \cong \frac{5}{\xi\omega_n} \cong 4.27 \ \ sec$

Periodo delle oscillazioni $T \cong \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 1.69 \ \ sec$

Tempo del primo picco $t_p = \frac{1}{2}T \cong 0.84 \ \ sec$

Massima sovrelongazione relativa $\Delta \cong e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 0.37$

4.3 Calcolare l'andamento a transitorio esaurito dell'uscita quando $\boldsymbol{w(t) = sin(0.1t)}$ e $\boldsymbol{d(t) = sin(10t)}$

Il riferimento è in banda di controllo poiché $\omega = 0.1 \ll \omega_C$. Quindi verrà inseguito con precisione e senza sfasamento.

Il disturbo è fuori dalla banda di controllo poiché $\omega = 10 > \omega_C$. Quindi non verrà attenuato e sarà sfasato.

Si può quindi concludere che, approssimativamente, l'uscita a transitorio esaurito sarà

$$y(t) \cong sin(0.1t) + sin(10t)$$

Questo risultato può essere verificato mediante calcoli analitici applicando il teorema della risposta in frequenza. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, l'uscita è la somma dei due contributi dovuti ai due ingressi:

$$y(t) = y_w(t) + y_d(t)$$

Il contributo all'uscita del riferimento sarà

$$y_w(t) \cong |F(j0.1)| sin\big(0.1t + \measuredangle F(j0.1)\big)$$

dove $F(s)$ è la funzione di sensitività complementare che ci dà il legame tra il riferimento $w(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Il contributo all'uscita del disturbo sarà

$$y_d(t) \cong |S(j10)| sin\big(10t + \measuredangle S(j10)\big)$$

dove $S(s)$ è la funzione di sensitività che ci dà il legame tra il disturbo $d(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Quindi, ricordando che

$$L(s) = \frac{2(1+2s)}{s(1+s)} e^{-0.3s}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \qquad S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

si ha

$$F(j0.1) = \frac{L(j0.1)}{1+L(j0.1)} \qquad S(j10) = \frac{1}{1+L(j10)}$$

Calcoliamo $|F(j0.1)|$

$$|F(j0.1)| = \frac{|L(j0.1)|}{|1+L(j0.1)|}$$

$$L(j0.1) = \frac{2(1+2j0.1)}{j0.1(1+j0.1)} e^{-j0.03} = \frac{-20j(1+0.2j)}{1+0.1j} e^{-j0.03} = \frac{4-20j}{1+0.1j} e^{-j0.03} =$$

$$= \frac{(4-20j)(1-0.1j)}{1+0.01} e^{-j0.03} = \frac{2-20.4j}{1.01} e^{-j0.03} \cong (1.98-20.2j)e^{-j0.03}$$

$$|L(j0.1)| \cong \left|(1.98-20.2j)e^{-j0.03}\right| = |1.98-20.2j| \cong 20.30$$

$$1+L(j0.1) \cong 1+(1.98-20.2j)e^{-j0.03} \cong 1+(1.98-20.2j)(cos0.03 - jsin0.03) \cong$$

$$\cong 1+(1.98-20.2j)(1-0.03j) \cong 2.37-20.26j$$

$$|1+L(j0.1)| \cong |2.37-20.26j| \cong 20.40$$

Quindi

$$|F(j0.1)| = \frac{|L(j0.1)|}{|1+L(j0.1)|} \cong \frac{20.3}{20.4} \cong 0.99$$

Calcoliamo $\measuredangle F(j0.1)$

$$\measuredangle F(j0.1) = \measuredangle L(j0.1) - \measuredangle\big(1+L(j0.1)\big)$$

$$\measuredangle L(j0.1) = \measuredangle(1.98 - 20.2j)e^{-j0.03} = \measuredangle(1.98 - 20.2j) + \measuredangle e^{-j0.03} \cong -1.47 - 0.03 \cong -1.50\, rad$$

$$\measuredangle\big(1 + L(j0.1)\big) \cong \measuredangle(2.37 - 20.26j) \cong -1.45\, rad$$

Quindi

$$\measuredangle F(j0.1) = \measuredangle L(j0.1) - \measuredangle\big(1 + L(j0.1)\big) \cong -0.05\, rad$$

Quindi il contributo all'uscita del riferimento sarà

$$y_w(t) \cong 0.99 sin(0.1t - 0.05)$$

Calcoliamo $|S(j10)|$

$$|S(j10)| = \frac{1}{|1 + L(j10)|}$$

$$L(j10) = \frac{2(1 + 2j10)}{j10(1 + j10)} e^{-j3} = \frac{-0.2j(1 + 20j)}{1 + 10j} e^{-j3} = \frac{4 - 0.2j}{1 + 10j} e^{-j3} =$$

$$= \frac{(4 - 0.2j)(1 - 10j)}{1 + 100} e^{-j3} = \frac{2 - 40.2j}{101} e^{-j3} \cong (0.02 - 0.40j)e^{-j3}$$

$$1 + L(j10) \cong 1 + (0.02 - 0.40j)e^{-j3} \cong 1 + (0.02 - 0.40j)(cos3 - jsin3) \cong$$

$$\cong 1 + (0.02 - 0.40j)(-0.99 - 0.14j) \cong 0.92 + 0.39j$$

$$|1 + L(j10)| \cong |0.92 + 0.39j| \cong 1.00$$

Quindi

$$|S(j10)| = \frac{1}{|1 + L(j10)|} \cong \frac{1}{1.00} \cong 1$$

Calcoliamo $\measuredangle S(j10)$

$$\measuredangle S(j10) = -\measuredangle\big(1 + L(j10)\big)$$

$$\measuredangle\big(1 + L(j10)\big) \cong \measuredangle(0.92 + 0.39j) \cong 0.40\, rad$$

Quindi

$$\measuredangle S(j10) = -\measuredangle\big(1 + L(j10)\big) \cong -0.40\, rad$$

Quindi il contributo all'uscita del disturbo sarà

$$y_d(t) \cong sin(10t - 0.40)$$

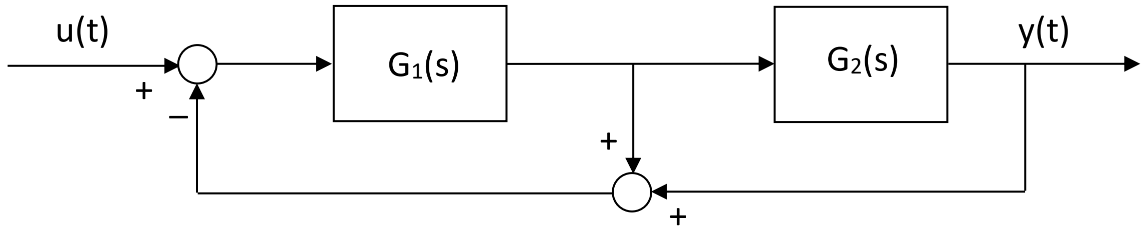
L'uscita complessiva sarà

$$y(t) \cong 0.99 sin(0.1t - 0.05) + sin(10t - 0.40)$$

risultato perfettamente coerente con quanto ottenuto all'inizio con molta meno fatica.

ESERCIZIO 5

Si consideri il sistema dinamico lineare tempo invariante con ingresso $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ ed uscita $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ descritto dal seguente schema a blocchi

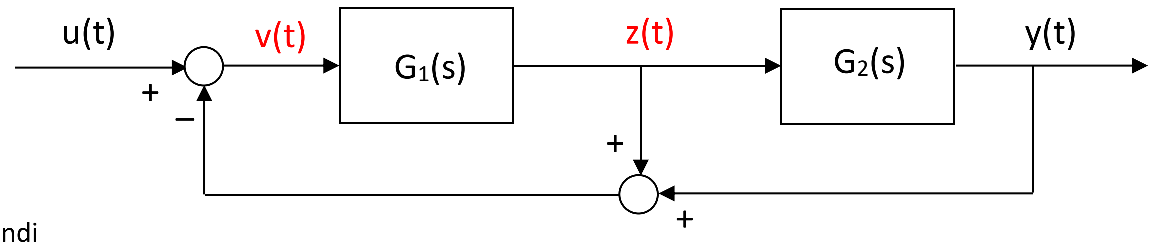


dove

$$\boldsymbol{G_1(s)=\frac{\mu}{s+1}}\qquad \boldsymbol{G_2(s)=\frac{5}{s+5}}$$

5.1 Scrivere una rappresentazione in variabili di stato dei due sottosistemi descritti dalle funzioni di trasferimento $\boldsymbol{G_1(s)}$ e $\boldsymbol{G_2(s)}$.

Indichiamo nello schema a blocchi ingressi ed uscite di $G_1(s)$ e $G_2(s)$



Quindi

$$G_1(s)=\frac{Z(s)}{V(s)}=\frac{\mu}{s+1}$$

Questo è un sistema del primo ordine strettamente proprio. La rappresentazione di stato di un sistema del primo ordine strettamente proprio con ingresso $v(t)$ ed uscita $z(t)$ è la seguente

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=ax_1(t)+bv(t)\\ z(t)=cx_1(t)\end{cases}$$

La corrispondente funzione di trasferimento è la seguente

$$H(s)=c(s-a)^{-1}b=\frac{bc}{s-a}$$

$H(s)$ è uguale a $G_1(s)$ scegliendo $a=-1$ e $bc=\mu$. In quest'ultima relazione abbiamo un grado di libertà e scegliamo $b=\mu$ e $c=1$ (altre scelte erano comunque lecite).

Quindi la rappresentazione di stato del sistema descritto dalla funzione $G_1(s)$ è la seguente

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+\mu v(t)\\ z(t)=x_1(t)\end{cases}$$

Similmente, anche il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{5}{s+5}$$

è un sistema del primo ordine strettamente proprio ed anch'esso avrà rappresentazione di stato simile alla precedente

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = ax_2(t) + bz(t) \\ y(t) = cx_2(t) \end{cases}$$

La funzione di trasferimento è la seguente

$$M(s) = c(s-a)^{-1}b = \frac{bc}{s-a}$$

$M(s)$ è uguale a $G_2(s)$ scegliendo $a = -5$ e $bc = 5$. In quest'ultima relazione abbiamo un grado di libertà e scegliamo $b = 5$ e $c = 1$ (altre scelte erano comunque lecite).

Quindi la rappresentazione di stato del sistema descritto dalla funzione $G_2(s)$ è la seguente

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = -5x_2(t) + 5z(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

5.2 Sulla base del risultato ottenuto al passo precedente, scrivere una rappresentazione in variabili di stato del sistema complessivo.

Per scrivere la rappresentazione di stato del sistema complessivo abbiamo le due rappresentazioni di stato dei due sottosistemi cioè:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \mu v(t) \\ z(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = -5x_2(t) + 5z(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

Osserviamo che $z(t) = x_1(t)$ e quindi la possiamo eliminare dalla seconda equazione di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \mu v(t) \\ \dot{x}_2(t) = -5x_2(t) + 5x_1(t) \\ y(t) = x_2(t) \\ z(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Dobbiamo ricordarci che l'ingresso del sistema complessivo è $u(t)$ e l'uscita è $y(t)$. Quindi, sfruttando le relazioni espresse dai due nodi sommatori abbiamo

$$v(t) = u(t) - \big(z(t) + y(t)\big)$$

Ricordandoci che $z(t) = x_1(t)$ e $y(t) = x_2(t)$ questa espressione diventa

$$v(t) = u(t) - \big(x_1(t) + x_2(t)\big)$$

Sostituendola nella prima equazione di stato abbiamo

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \mu\Big(u(t) - \big(x_1(t) + x_2(t)\big)\Big) = -(1+\mu)x_1(t) - \mu x_2(t) + \mu u(t)$$

Quindi la rappresentazione di stato del sistema complessivo è

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -(1+\mu)x_1(t) - \mu x_2(t) + \mu u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 5x_1(t) - 5x_2(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

La sua rappresentazione matriciale è la seguente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -(1+\mu) & -\mu \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 1]$, $D = 0$

5.3 Determinare, se esistono, per quali valori del parametro reale μ il sistema è asintoticamente stabile.

E' sufficiente calcolare il polinomio caratteristico della matrice A.

$$\varphi(s) = det(sI - A) = det \begin{bmatrix} s+(1+\mu) & \mu \\ -5 & s+5 \end{bmatrix} = \big(s+(1+\mu)\big)(s+5) + 5\mu =$$

$$= s^2 + (\mu+6)s + (5+10\mu)$$

Condizione necessaria e sufficiente perché un polinomio di secondo grado abbia radici a parte reale negativa è che abbia tutti i coefficienti concordi in segno e non nulli. Ciò accade per

$$\begin{cases} \mu + 6 > 0 \\ 5 + 10\mu > 0 \end{cases}$$

Il sistema è asintoticamente stabile per $\mu > -\frac{1}{2}$.

5.4 Determinare, se esistono, per quali valori del parametro reale μ e per quali valori costanti dell'ingresso $u(t)$ il sistema ammette infiniti stati di equilibrio

Un sistema lineare tempo invariante con equazione di stato $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ammette infiniti equilibri in corrispondenza di un ingresso costante $\bar{u}$ se $detA = 0$ ed il sistema $A\bar{x} = -B\bar{u}$ ammette infinite soluzioni $\bar{x}$.

$$detA = det \begin{bmatrix} -(1+\mu) & -\mu \\ 5 & -5 \end{bmatrix} = 5(1+\mu) + 5\mu$$

$detA = 0$ per $\mu = -\frac{1}{2}$. In corrispondenza di questo valore

$$A\bar{x} = -B\bar{u}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}$$

Si ha

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_2 = \frac{1}{2}\bar{u} \\ 5\bar{x}_1 - 5\bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Solo per $\bar{u} = 0$ si hanno infinite soluzioni, infatti

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0 \\ 5(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 \ \ qls \end{cases}$$

Si osservi che per qualsiasi $\bar{u} \neq 0$ il sistema non ammette alcuna soluzione e quindi il sistema non ammette equilibri.

5.5 Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema complessivo

Partendo dalla rappresentazione matriciale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -(1+\mu) & -\mu \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 1]$, $D = 0$
si ha

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s + (1+\mu) & \mu \\ -5 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2 + (\mu+6)s + (5+10\mu)} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+5 & -\mu \\ 5 & s+(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{5\mu}{s^2 + (\mu+6)s + (5+10\mu)}$$

Il calcolo poteva anche essere svolto risolvendo lo schema a blocchi, osservando che esso è un sistema retroazionato negativamente con funzione di trasferimento d'andata data dal prodotto $G_1(s)G_2(s)$, perché in anello aperto $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono in serie, e con funzione di trasferimento d'anello data da $G_1(s)(G_2(s)+1)$, perché lungo l'anello $G_1(s)$ è in serie al parallelo di $G_2(s)$ ed 1.

Quindi

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)(G_2(s)+1)} = \frac{\frac{\mu}{s+1}\frac{5}{s+5}}{1 + \frac{\mu}{s+1}\left(\frac{5}{s+5} + 1\right)} = \frac{\frac{\mu}{s+1}\frac{5}{s+5}}{1 + \frac{\mu}{s+1}\frac{s+10}{s+5}} =$$

$$= \frac{\frac{5\mu}{(s+1)(s+5)}}{\frac{(s+1)(s+5) + \mu(s+10)}{(s+1)(s+5)}} = \frac{5\mu}{s^2 + (\mu+6)s + (5+10\mu)}$$

5.6 Determinare, se esistono, per quali valori del parametro reale μ la funzione di trasferimento $G(s)$:

a) è di ordine 1

b) ha guadagno unitario

c) ha due poli coincidenti

a) Se il sistema fosse di ordine 1 il denominatore della sua funzione di trasferimento dovrebbe essere di grado 1. Non esistono valori di μ per cui il denominatore di $G(s)$ abbia grado 1.

b) Il guadagno è dato da

$$G(0) = \frac{5\mu}{5 + 10\mu}$$

$G(0) = 1$ per $5\mu = 5 + 10\mu$ cioè per $\mu = -1$.

c) $G(s)$ ha due poli coincidenti se il suo denominatore ha radici coincidenti. Ciò accade per

$$(\mu + 6)^2 - 4(5 + 10\mu) = 0$$

$$\mu^2 + 12\mu + 36 - 20 - 40\mu = 0$$

$$\mu^2 - 28\mu + 16 = 0$$

$$\mu_{1,2} = 14 \pm \sqrt{196 - 16} = 14 \pm \sqrt{180} = 14 \pm 6\sqrt{5}$$

ESERCIZIO 6

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false

6.1 Nessun sistema a tempo continuo con autovalori a parte reale minore

o uguale a zero è instabile .... [V] [F]

6.2 Il diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza

di $G(s) = e^{-s\tau}$ non dipende da τ.. [V] [F]

6.3 Un sistema retroazionato con funzione di trasferimento d'anello $L(s) = \frac{10}{s(1+0.01s)}$

non è in grado di inseguire correttamente il segnale di riferimento $w(t) = 5sin(0.1t)$.... [V] [F]

6.4 Due funzioni di trasferimento diverse possono avere lo stesso

diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza... [V] [F]

6.5 Due funzioni di trasferimento diverse possono avere lo stesso

diagramma di Bode della fase della risposta in frequenza.. [V] [F]

6.6 L'ordine di un sistema dipende dal numero di zeri della funzione di trasferimento .... [V] [F]

6.7 La stabilità di un sistema dinamico a tempo continuo avente poli complessi

coniugati dipende solo dal valore della pulsazione naturale dei poli .... [V] [F]

6.8 La risposta all'impulso di un integratore tende a 0 per $t \to \infty$ .... [V] [F]

6.9 La risposta allo scalino di un sistema dinamico a tempo continuo

non può mai avere oscillazioni permanenti a transitorio esaurito.................................... [V] [F]

6.1 **FALSO**. Esistono sistemi con tutti i poli a parte reale minore o uguale a zero e con poli multipli a parte reale nulla che sono instabili.

6.2 **VERO**. Il modulo della risposta in frequenza di un ritardo vale 1 (0 dB) a tutte le pulsazioni e non dipende da τ.

6.3 **FALSO**. La funzione d'anello ha pulsazione critica $\omega_C = 10\, rad/s$ (il diagramma di Bode del modulo è un integratore con guadagno 10 che quindi attraversa l'asse a 0 dB in $10\, rad/s$ perché l'altro polo è a $100\, rad/s$, dopo l'attraversamento) e quindi un riferimento sinusoidale con pulsazione $0.1\, rad/s$ è in banda di controllo e viene inseguito correttamente.

6.4 **VERO**. Basta che abbiano poli o zeri con lo stesso modulo ma con segno opposto (e tutto il resto uguale). Per esempio $G_1(s) = \frac{5(s-5)}{s+1}$ e $G_2(s) = \frac{5(s+5)}{s+1}$

6.5 **VERO**. Basta, per esempio, che una abbia poli nella stessa posizione dove l'altra ha zeri ma con segno opposto (e guadagno con lo stesso segno e tipo uguale). Per esempio $G_1(s) = \frac{5(s-5)}{s+1}$ e $G_2(s) = \frac{5(s-1)}{s+5}$ oppure $G_1(s) = \frac{5(s-5)}{s+1}$ e $G_2(s) = \frac{17(s-5)}{s+1}$

6.6 **FALSO**. Dipende solo dal numero dei poli.

6.7 **FALSO**. Dipende dal segno dello smorzamento. La pulsazione naturale indica solo la distanza di ciascun polo dall'origine, indipendentemente dalla "direzione". E' lo smorzamento che ci dà il segno dei poli, poiché è legato all'angolo che la congiungente i poli con l'origine forma con il semiasse reale negativo.

6.8 **FALSO**. Un integratore ha funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s}$. L'impulso $u(t) = imp(t)$ ha trasformata di Laplace $U(s) = 1$. Quindi la trasformata di Laplace della risposta impulsiva di un integratore è $Y(s) = \frac{1}{s}$, la cui antitrasformata è $y(t) = 1$ per $t > 0$.

6.9 **FALSO**. Un sistema del secondo ordine con poli immaginari coniugati ha risposta allo scalino che mostra oscillazioni permanenti a transitorio esaurito.