Lezione 3.
Movimento ed Equilibrio

Schema della lezione

1. Movimento dello stato e dell'uscita (generale)
2. (Movimento di) Equilibrio (generale)
3. Sistemi LTI
4. Equilibrio di sistemi LTI
5. Movimento di sistemi LTI
6. Movimento libero e movimento forzato di sistemi LTI
7. Matlab

1. Movimento dello stato e dell'uscita (generale)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \end{cases}$$

$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ stato iniziale

Sia assegnato l'ingresso $u(t),\ t \geq t_0$

Problema fondamentale della teoria dei sistemi

Integrando l'equazione di stato si ottiene

$\mathbf{x}(t),\ t \geq t_0$

movimento dello stato

Sostituendo il risultato nella trasformazione d'uscita si ha

$y(t),\ t \geq t_0$

movimento dell'uscita

2. (Movimento di) Equilibrio (generale)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\mathbf{x}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}$ stato iniziale

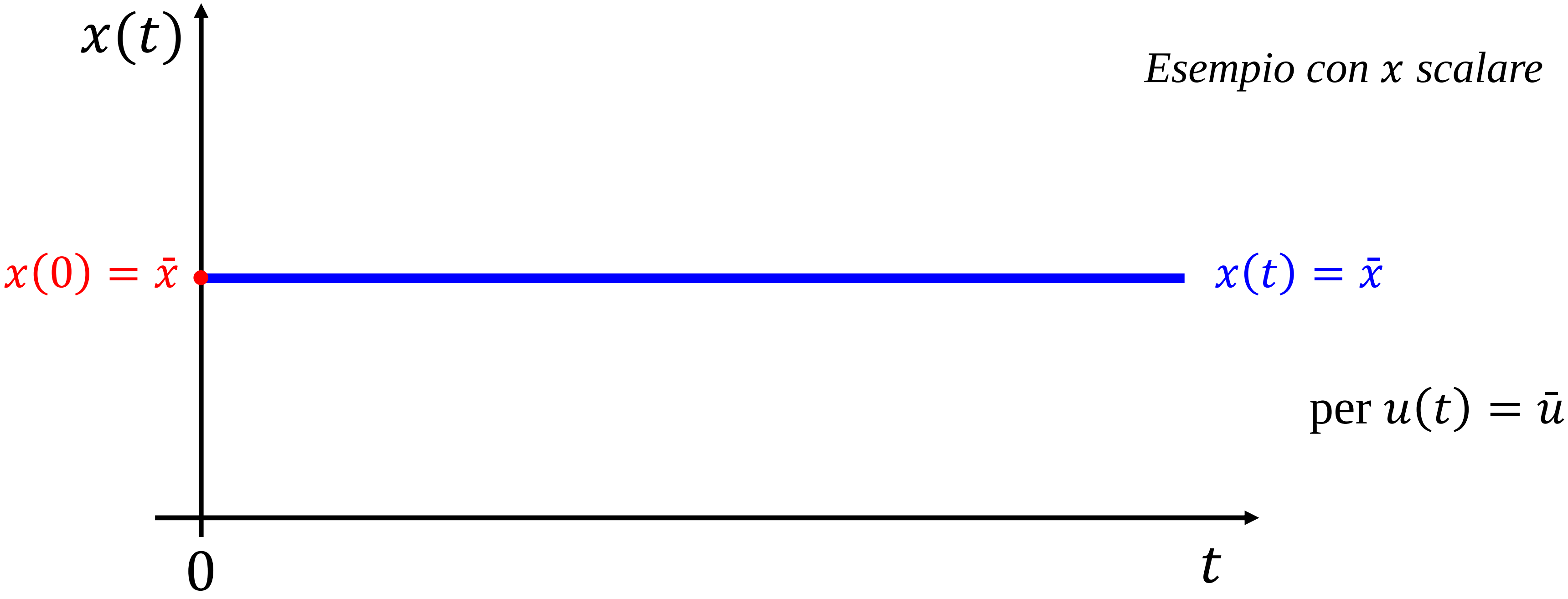
$u(t) = \bar{u}\ ,\ t \geq t_0$ **<u>ingresso costante</u>**

Stato di equilibrio

Movimento dello stato $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ <u>costante</u> nel tempo <u>in corrispondenza</u> di $u(t) = \bar{u}$ assegnato <u>costante</u>.

Uscita di equilibrio

Movimento dell'uscita $y(t) = \bar{y}$ <u>costante</u> nel tempo <u>in corrispondenza</u> di $u(t) = \bar{u}$ assegnato <u>costante</u>.



Calcolo dell'equilibrio (per sistemi a tempo continuo)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \\ \bar{y} = g(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \end{cases}$$

Sistema di equazioni algebriche

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + 3u(t) \\ y(t) = 2x(t) - u(t) \end{cases}$$

Calcolare stato ed uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = 2,\ t \geq 0$

Bisogna risolvere l'equazione algebrica

$$0 = -2\bar{x} + 3 \cdot 2 \Longrightarrow \bar{x} = 3$$

Stato di equilibrio
(per $u(t) = \bar{u} = 2$)

Se si applica l'ingresso costante $\bar{u} = 2$ con condizione iniziale $x(0) = \bar{x} = 3$, il movimento dello stato è

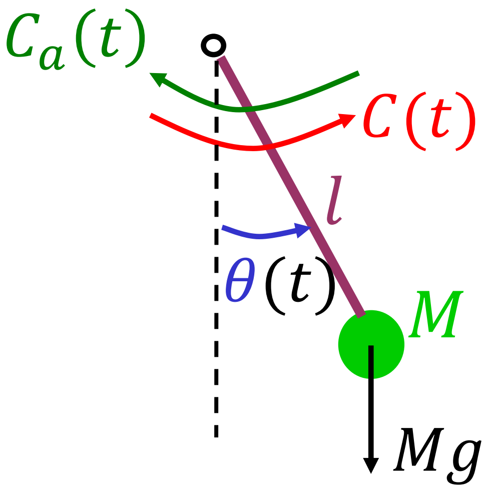
$$x(t) = \bar{x} = 3,\ t \geq 0$$

L'uscita di equilibrio è

$$\bar{y} = 2\bar{x} - \bar{u} = 4$$

Esempio

Sistema NON lineare!!



$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\big(\theta(t)\big) + \frac{h}{Ml^2}\dot{\theta}(t) = \frac{1}{Ml^2}C(t)$$

$$C(t) \to u(t) \qquad \theta(t) \to x_1(t)$$

$$\theta(t) \to y(t) \qquad \dot{\theta}(t) \to x_2(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{g}{l}\sin\big(x_1(t)\big) - \dfrac{h}{Ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{Ml^2}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Calcolare l’equilibrio in corrispondenza $u(t) = \bar{u}$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\dfrac{g}{l}\sin(\bar{x}_1) - \dfrac{h}{Ml^2}\bar{x}_2 + \dfrac{\bar{u}}{Ml^2} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \arcsin\left(\dfrac{\bar{u}}{Mgl}\right) \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$

Stato ed uscita
di equilibrio
(per $\bar{u}$ costante)

Per esempio,
se $\bar{u} = 0$ allora $\bar{x}_1 = \arcsin(0)$ ha due soluzioni $\bar{x}_{1A} = 0$ e $\bar{x}_{1B} = \pi$. Avrò quindi <u>2 equilibri in corrispondenza di un unico ingresso costante $\bar{u}$</u>.

$$\bar{u} = 0 \nearrow \bar{\mathbf{x}}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_A = 0$$

pendolo verticale
con massa in basso

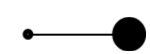
$$\bar{u} = 0 \searrow \bar{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_B = \pi$$

pendolo verticale
con massa in alto

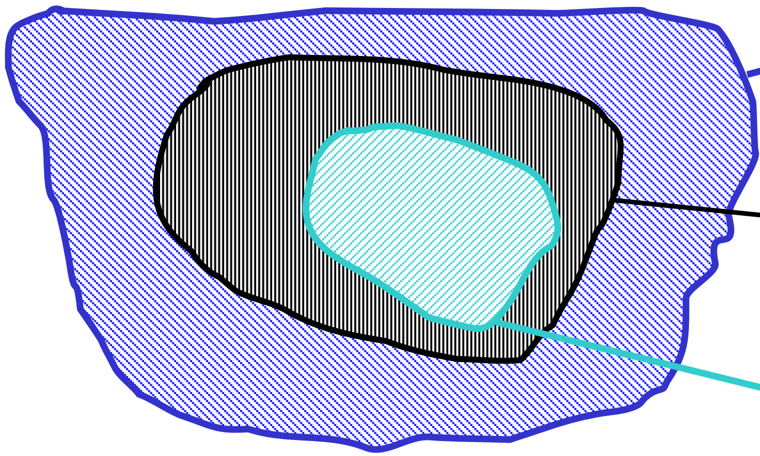
se $\bar{u} = Mgl$ allora $\bar{x}_1 = \arcsin(1)$ ha una sola soluzione $\bar{x}_{1C} = \frac{\pi}{2}$

$$\bar{u} = Mgl \longrightarrow \bar{\mathbf{x}}_C = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_C = \frac{\pi}{2}$$

pendolo orizzontale
con massa a destra



3. Sistemi dinamici Lineari Tempo-Invarianti (LTI)



Sistemi dinamici a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$$

Sistemi dinamici Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

I sistemi LTI hanno una struttura semplice e sono disponibili molti risultati teorici per il loro studio (e per il progetto di controllori).

Inoltre, molti sistemi dinamici sono descrivibili mediante sistemi LTI (almeno in prima approssimazione).

Rappresentazione di stato di sistemi dinamici Lineari Tempo Invarianti (LTI) Single Input Single Output (SISO)

Si consideri un generico sistema tempo-invariante SISO a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \end{cases}$$

Siano $\mathbf{f}(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$ **lineari** in $\mathbf{x}(t)$ e $u(t)$.

Ricordando che il vettore di stato è $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ si ha che

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1\big(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u(t)\big) \\ \dot{x}_2(t) = f_2\big(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u(t)\big) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n\big(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u(t)\big) \end{cases}$$

Se $\mathbf{f}(\cdot,\cdot)$ è lineare in $\mathbf{x}(t)$ e $u(t)$, allora tutte le sue componenti

$$f_1(\cdot,\cdot), f_2(\cdot,\cdot), \cdots, f_n(\cdot,\cdot)$$

sono lineari e quindi si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + du(t) \end{cases}$$

Raggruppando i coefficienti in matrici e vettori si ha

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}_{1\times n} \qquad D = [d]_{1\times 1}$$

Si osservi che

$$\underset{}{A\mathbf{x}(t)} = \underset{(n \times n)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} \underset{(n \times 1)}{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}} = \underset{(n \times 1)}{\begin{bmatrix} a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{bmatrix}}$$

$$Bu(t) = \underset{(n \times 1)}{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}} \underset{(1 \times 1)}{u(t)} = \underset{(n \times 1)}{\begin{bmatrix} b_1 u(t) \\ \vdots \\ b_n u(t) \end{bmatrix}}$$

Possiamo quindi scrivere l’equazione di stato come

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t)$$

Similmente

$$C\mathbf{x}(t) = \underset{(1 \times n)}{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}} \underset{(n \times 1)}{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}} = \underset{(1 \times 1)}{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)}$$

Quindi possiamo scrivere l’equazione di uscita come

$$y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t)$$

Rappresentazione di stato di sistemi dinamici Lineari Tempo Invarianti (LTI) Single Input Single Output (SISO) a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

equazione di stato

trasformazione di uscita

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vettore
$u(t) \in \mathbb{R}$ scalare
$y(t) \in \mathbb{R}$ scalare

A è una matrice $n \times n$
B è una vettore $n \times 1$
C è una vettore $1 \times n$
D è uno scalare

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ **vettore di stato**

Questa è una rappresentazione molto generale ma limitata a sistemi dinamici:

- con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ **scalari**, cioè con un solo ingresso (Single Input) ed una sola uscita (Single Output)

per questo detti **SISO**

- **Lineari** in $\mathbf{x}(t), u(t)$
- a **coefficienti costanti** (cioè A, B, C, D non dipendono dal tempo), cioè **Tempo Invarianti**

per questo detti **LTI**.

Esempio

Scrivere in forma matriciale il seguente sistema LTI –SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \mathbf{2}x_1(t) + \mathbf{3}x_2(t) - \mathbf{2}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\mathbf{2}x_1(t) + \mathbf{4}x_2(t) + \mathbf{3}u(t) \\ y(t) = \mathbf{2}x_1(t) - \mathbf{3}x_2(t) + \mathbf{2}u(t) \end{cases}$$

Il sistema è di ordine 2, il vettore di stato è $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ e quindi si ha

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -\mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -\mathbf{3} \end{bmatrix} \qquad D = \mathbf{2}$$

Osservazione

Si consideri un sistema dinamico LTI descritto dalla sua rappresentazione di stato

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Si osservi che **il sistema è strettamente proprio se e solo se $\boldsymbol{D = 0}$**.

Infatti, per $D = 0$, l'equazione d'uscita è

$$y(t) = C\mathbf{x}(t)$$

dove non compare esplicitamente l'ingresso.

4. Equilibrio di sistemi LTI-SISO

Si consideri un sistema LTI-SISO per il quale si desidera calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio in corrispondenza di un assegnato ingresso costante $u(t) = \bar{u}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Per calcolare l'equilibrio si imponga $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ e si ottiene

$$\mathbf{0} = A\bar{\mathbf{x}} + B\bar{u}$$

da cui

$$A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$$

La matrice A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Se $\mathbf{\det \boldsymbol{A} \neq 0}$ si ha

$$\bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}B\bar{u}$$

stato di equilibrio

Il sistema ha un **unico stato di equilibrio**.

Sostituendo nell'equazione di uscita si ottiene l'uscita di equilibrio

$$\bar{y} = C\bar{\mathbf{x}} + D\bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \boldsymbol{-CA^{-1}B + D}$$

guadagno statico del sistema

Se $\mathbf{\det \boldsymbol{A} = 0}$ non è possibile invertire la matrice A.

Il sistema $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$ con $\det A = 0$ può avere infinite o nessuna soluzione, cioè il sistema può avere **infiniti o nessuno stato di equilibrio**.

Un sistema LTI può avere, in corrispondenza di un dato ingresso costante $u(t) = \bar{u}$:

a) **un solo stato di equilibrio $\bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}B\bar{u}$**

se $\det A \neq 0$

b) **infiniti stati di equilibrio**

se $\det A = 0$ e

il sistema $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$ ha infinite soluzioni

c) **nessuno stato di equilibrio**

se $\det A = 0$ e

il sistema $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$ non ha nessuna soluzione

Esempio

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \;\; D = 0$$

Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio ed il guadagno statico in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 2$.

Si ha $\det A = 1 \neq 0$ e quindi il sistema ha un unico stato di equilibrio ed è possibile calcolare il guadagno statico del sistema.

$$\bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}B\bar{u} = -\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2 = -\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Le due componenti dello stato all'equilibrio sono $\bar{x}_1 = 6$ e $\bar{x}_2 = 2$.

L'uscita di equilibrio è

$$\bar{y} = C\bar{\mathbf{x}} + D\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 6$$

Il guadagno statico del sistema è

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = 3$$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \; D = 0$$

Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio ed il guadagno statico in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$.

Si ha $\det A = 0$ e quindi il sistema **NON** ha un unico stato di equilibrio. Bisogna risolvere il sistema di equazioni $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$ e vedere se ha infinite soluzioni o nessuna soluzione

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\begin{cases} -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 = -1 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni è impossibile (non ha nessuna soluzione) e quindi il sistema dinamico non ha nessuno stato di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$.

Esempio

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \; D = 0$$

Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio ed il guadagno statico in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 0$.

Si ha $\det A = 0$ e quindi il sistema **NON** ha un unico stato di equilibrio. Bisogna risolvere il sistema di equazioni $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$ e vedere se ha infinite soluzioni o nessuna soluzione

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 0$$

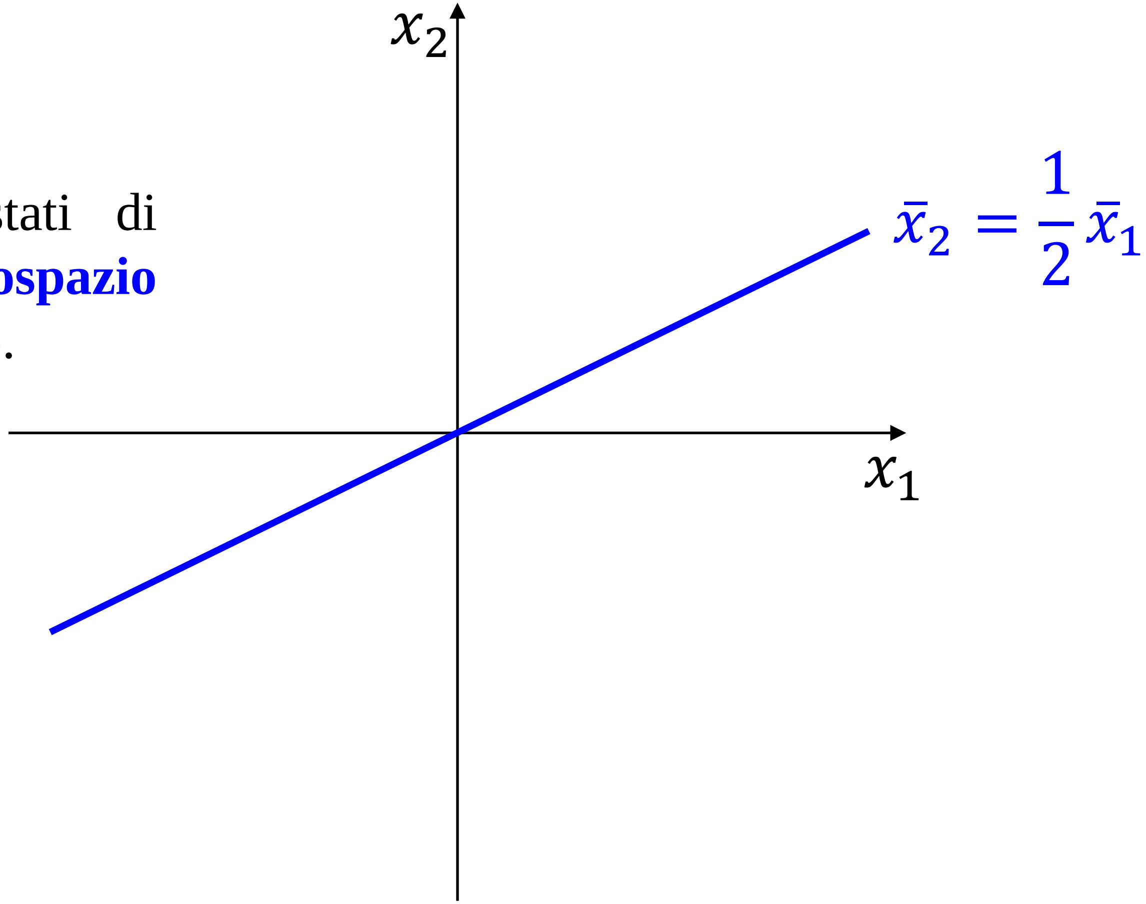
$$\begin{cases} -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

La soluzione è

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = \frac{1}{2}\bar{x}_1 \\ \bar{x}_1 \;\; qualsiasi \end{cases}$$

Il sistema di equazioni è indeterminato (ha infinite soluzioni) e quindi il sistema dinamico ha infiniti stati di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 0$, tutti gli stati che hanno la seconda componente pari alla metà della prima componente. E' anche possibile rappresentare questi infiniti stati di equilibrio nel piano $x_1 - x_2$ (lo «spazio di stato»).

L'insieme degli stati di equilibrio è un **sottospazio** dello spazio di stato.



5. Movimento dello stato e dell'uscita di sistemi LTI SISO a tempo continuo

Si consideri il sistema dinamico LTI SISO a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Si assegni una **condizione iniziale per lo stato**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Si assegni un **andamento per l'ingresso**

$$u(t)\,,\ t \geq t_0$$

Con questi è possibile integrare l'equazione differenziale e calcolare un'**espressione analitica** del **movimento dello stato $\mathbf{x}(t)$**.

Sostituendo nell'equazione di uscita si può ottenere il **movimento dell'uscita $y(t)$**.

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$u(t)\,,\ t \geq t_0$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \xrightarrow[\text{eq. differenziale}]{\text{integrazione}} \mathbf{x}(t)$$

movimento dello stato

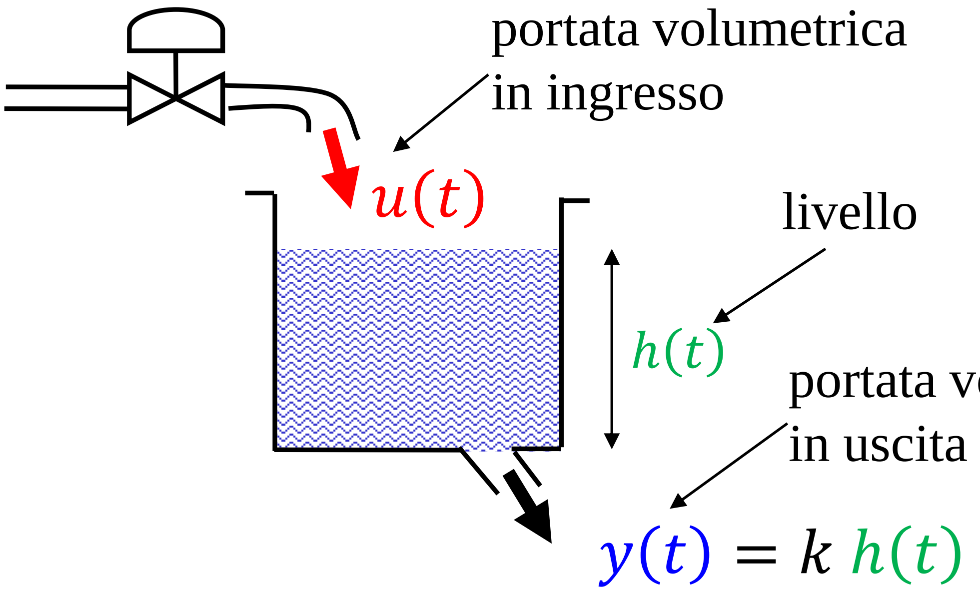
$$\mathbf{x}(t)$$
$$u(t)\,,\ t \geq t_0$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \xrightarrow[\text{algebrici}]{\text{semplici calcoli}} y(t)$$

movimento dell'uscita

Esempio



Scrivendo una legge di conservazione del volume si ottiene l'equazione differenziale

$$\dot{y}(t) + \frac{k}{A} y(t) = \frac{k}{A} u(t)$$

E' possibile scriverla in forma di **rappresentazione di stato**?

Ponendo

$$x(t) = h(t)$$

si ha che $y(t) = kx(t)$.

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{k}{A}x(t) + \frac{1}{A}u(t) \\ y(t) = kx(t) \end{cases}$$

Si osservi che è un sistema di ordine $n = 1$ dal momento che lo stato è scalare.

Sia inoltre $A = 1\, m^2$ e $k = 1\frac{m^2}{s}$ da cui si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Sia ora

$x(0) = 5$ (livello iniziale, cioè condizione iniziale dello stato)

$u(t) = 2\ \frac{m^3}{s},\ t \geq 0$ (portata in ingresso costante, ingresso del sistema assegnato)

Vogliamo calcolare il **movimento dello stato**.

Bisogna quindi integrare l'equazione differenziale $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$ con $u(t) = 2$ e con $x(0) = 5$, cioè

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + 2 \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

Ricordiamo che

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[e^\tau x(\tau)]d\tau = e^t x(t) - x(0)$$

Moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per $e^t \neq 0$

$$e^t \dot{x}(t) = -e^t x(t) + 2e^t$$
$$e^t \dot{x}(t) + e^t x(t) = 2e^t$$
$$\frac{d}{dt}[e^t x(t)] = 2e^t$$

$$\frac{d}{dt}[e^t x(t)] = 2e^t$$

Integrando entrambi i membri si ottiene

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[e^\tau x(\tau)]d\tau = \int_0^t 2e^\tau d\tau$$

$$e^t x(t) - x(0) = 2e^t - 2$$

Ricordiamo che la condizione iniziale dello stato era $x(0) = 5$

$$e^t x(t) - 5 = 2e^t - 2$$

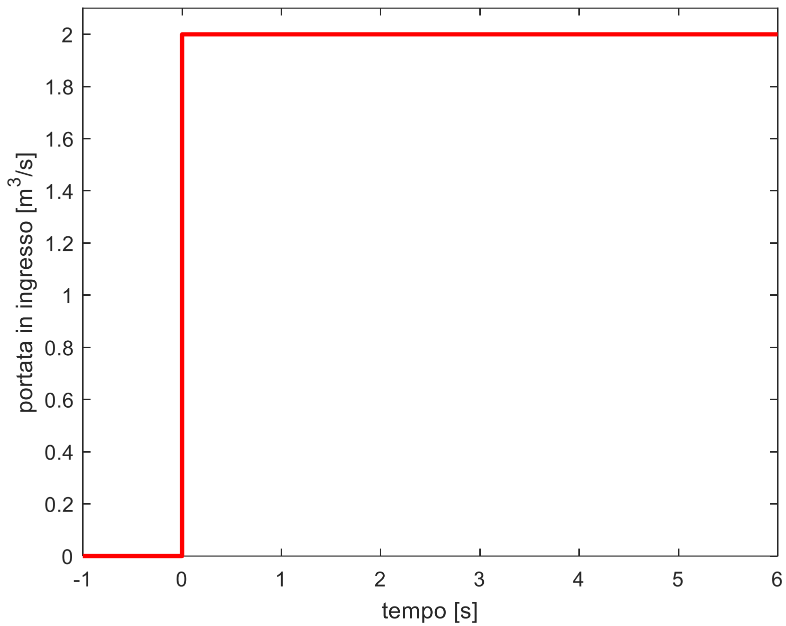
$$e^t x(t) = 2e^t + 3$$

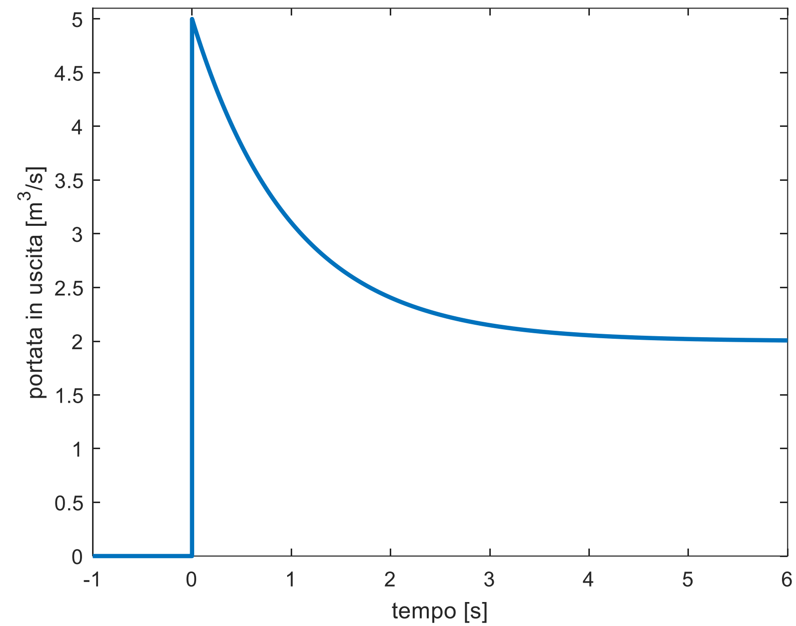
Moltiplico entrambi i membri per $e^{-t} \neq 0$ e ottengo l'**espressione analitica** del movimento dello stato

$$x(t) = 2 + 3e^{-t}$$

E banalmente del movimento dell'uscita (la portata di liquido in uscita)

$$y(t) = x(t) = 2 + 3e^{-t}$$





$$y(t) = x(t) = 2 + 3e^{-t}$$

Si osservi che, come ci si attendeva, l'andamento della portata in uscita calcolato è tale che

$$y(0) = x(0) = 2 + 3e^{0} = 5$$

e si ha che

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} 2 + 3e^{-t} = 2$$

cioè tende asintoticamente al valore 2 $\frac{m^3}{s}$

Movimento di sistemi LTI SISO

Si consideri un sistema LTI SISO del primo ordine (**$n = 1$**, stato scalare)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases}$$

Si calcoli il movimento dello stato per $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ u(t),\ t \geq 0 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}$$

Ora, si consideri un sistema LTI SISO di ordine ***n qualsiasi***

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Si calcoli il movimento dello stato per $\begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ u(t),\ t \geq 0 \end{cases}$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau}$$

Esponenziale di matrice

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots$$

Formule di Lagrange (per il calcolo del movimento di sistemi LTI)

Movimento dello stato

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,Bu(\tau)d\tau}$$

Movimento dell'uscita

$$y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) =$$

$$=C\left[e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,Bu(\tau)d\tau\right] + Du(t)$$

$$\boxed{y(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,Bu(\tau)d\tau + Du(t)}$$

6. Movimento libero e movimento forzato

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{At}\mathbf{x}_0}_{\mathbf{x}_l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)d\tau}_{\mathbf{x}_f(t)}$$

Movimento libero dello stato

Movimento forzato dello stato

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) \\ y(t) = y_l(t) \end{cases}$$

per $u(t) = 0$

Dipende solo dalla condizione iniziale

Dipende solo dall'ingresso

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) \\ y(t) = y_f(t) \end{cases}$$

per $\mathbf{x}_0 = 0$

Movimento libero dell'uscita

Movimento forzato dell'uscita

$$y(t) = \overbrace{Ce^{At}\mathbf{x}_0}^{y_l(t)} + \overbrace{C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)d\tau + Du(t)}^{y_f(t)}$$

7. Matlab

```
 ss   Construct state-space model or convert model to state space.

   Construction:
     SYS = ss(A,B,C,D) creates an object SYS representing the
continuous-time state-space model
          dx/dt = Ax(t) + Bu(t)
           y(t) = Cx(t) + Du(t)
```

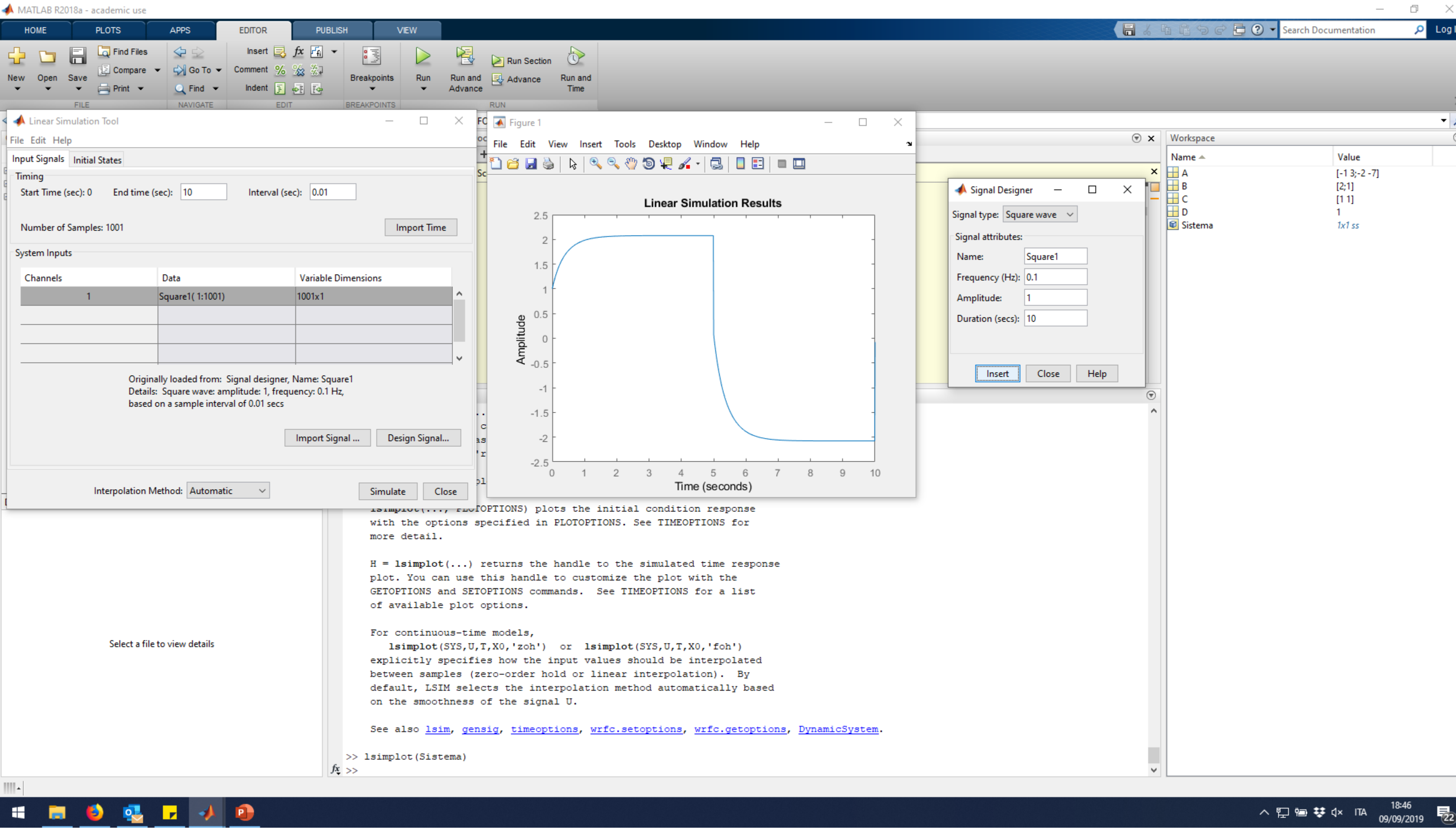
Con questo comando si crea un sistema dinamico LTI.

Esempio

```
>> A=[-1 3; -2 -7]; B=[2 1]'; C=[1 1]; D=1;
>> Sistema=ss(A,B,C,D)

Sistema =

  A =
         x1  x2
   x1   -1    3
   x2   -2   -7

  B =
         u1
   x1     2
   x2     1

  C =
         x1  x2
   y1     1   1

  D =
         u1
   y1     1

Continuous-time state-space model.
```

```
lsim  Simulate time response of dynamic systems to arbitrary inputs.

    lsim(SYS,U,T) plots the time response of the dynamic system SYS to the
    input signal described by U and T. The time vector T is expressed in the
    time units of SYS and consists of regularly spaced time samples.
    For example,
            t = 0:0.01:5;   u = sin(t);   lsim(sys,u,t)
    simulates the response of a single-input model SYS to the input
    u(t)=sin(t) during 5 time units.

    lsim(SYS,U,T,X0) specifies the initial state vector X0 at time T(1)
    (for state-space models only). X0 is set to zero when omitted.

    Y = lsim(SYS,U,T) returns the output history Y.

lsimplot(SYS) opens the Linear Simulation Tool for the dynamic system SYS,
    which enables interactive specification of the driving input(s), time
    vector, and initial state.
```

Con questo comando si può calcolare (non analiticamente) il movimento di un sistema LTI a partire da una data **condizione iniziale** e con un assegnato **ingresso**.


MATLAB R2018a - academic use
HOME PLOTS APPS EDITOR PUBLISH VIEW
Linear Simulation Tool
File Edit Help
Input Signals Initial States
Timing
Start Time (sec): 0 End time (sec): 10 Interval (sec): 0.01
Number of Samples: 1001
Import Time
System Inputs
Channels Data Variable Dimensions
1 Square1(1:1001) 1001x1
Originally loaded from: Signal designer, Name: Square1
Details: Square wave: amplitude: 1, frequency: 0.1 Hz,
based on a sample interval of 0.01 secs
Import Signal ... Design Signal...
Interpolation Method: Automatic
Simulate Close
Figure 1
Linear Simulation Results
Amplitude
Time (seconds)
Signal Designer
Signal type: Square wave
Signal attributes:
Name: Square1
Frequency (Hz): 0.1
Amplitude: 1
Duration (secs): 10
Insert Close Help
Workspace
Name Value
A [-1 3;-2 -7]
B [2;1]
C [1 1]
D 1
Sistema 1x1 ss
lsimplot(...,PLOTOPTIONS) plots the initial condition response
with the options specified in PLOTOPTIONS. See TIMEOPTIONS for
more detail.
H = lsimplot(...) returns the handle to the simulated time response
plot. You can use this handle to customize the plot with the
GETOPTIONS and SETOPTIONS commands. See TIMEOPTIONS for a list
of available plot options.
For continuous-time models,
lsimplot(SYS,U,T,X0,'zoh') or lsimplot(SYS,U,T,X0,'foh')
explicitly specifies how the input values should be interpolated
between samples (zero-order hold or linear interpolation). By
default, LSIM selects the interpolation method automatically based
on the smoothness of the signal U.
See also lsim, gensig, timeoptions, wrfc.setoptions, wrfc.getoptions, DynamicSystem.
>> lsimplot(Sistema)
>>
Select a file to view details

Questo comando serve per calcolare il solo **movimento libero** di un sistema.

```
initial  Initial condition response of state-space models.

    initial(SYS,X0) plots the undriven response of the state-space
model SYS (created with SS) with initial condition X0 on the states.
This response is characterized by the equations
                         .
      Continuous time:   x = A x ,  y = C x ,  x(0) = x0

When invoked with left hand arguments,
       [Y,T,X] = initial(SYS,X0)
    returns the output response Y, the time vector T used for
simulation, and the state trajectories X
```