rev. 1.0

1

Introduzione all'elettrotecnica

1.1 - Carica elettrica e campo elettrico

È ben noto che la carica elettrica è una delle proprietà della materia, come la massa; differentemente da questa, che è di un unico tipo e che è sempre associata alla materia, la carica elettrica può avere un segno e può anche essere assente. Possiamo così distinguere corpi con carica positiva, corpi con carica negativa, e corpi neutri.
Dal punto di vista atomico, anzi nucleare, esistono particelle positive (protoni), negative (elettroni) r neutre (neutroni); gli elettroni e i protoni presentano carica uguale e contraria. Esistono anche altre particelle cariche, ma non sono comunemente presenti in natura (almeno, non in quella con cui abbiamo a che fare) e quindi in questa sede non ce ne occupiamo.
Dal punto di vista macroscopico un corpo è sempre composto da una combinazione di queste particelle elementari, in numero tale che solitamente le cariche positive e quelle negative sono in numero uguale di modo che complessivamente il corpo è elettricamente neutro; se per qualche motivo questo equilibrio viene alterato si dice che il corpo è elettricamente carico. Non bisogna quindi credere né che un corpo neutro non ci siano cariche elettriche, né che in un corpo carico le uniche cariche elettriche presenti siano solo quelle in eccesso. Ci sono (e sono la grande maggioranza) le cariche uguali e contrarie, che in condizioni particolari potrebbero spostarsi dando luogo a squilibri elettrici.
Senza entrare in altri dettagli né dimostrazioni si rammenta che la carica elettrica si misura in coulomb, simbolo C, e che se nello spazio circostante ad una carica elettrica ne esiste un'altra, tra le due si presenteranno forze attrattive o repulsive.
In particolare se le cariche sono (o possono essere considerate) puntiformi, indicando con i e j le due cariche e definendo:

q_i = valore della carica i $r_j = (x_i, y_i, z_i)$ = posizione della carica

q_j = valore della carica j $r_j = (x_j, y_j, z_j)$ = posizione della carica

allora la forza che sulla carica i agisce per effetto della carica j vale:

$$\overline{F}_{ij} = k \frac{q_i q_j}{d^2_{ij}} \overline{u}_{ji}$$

dove:

$$d_{ij} = \text{ distanza tra i e j } = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$\bar{u}_{ij} = \text{versore da j a i } = \frac{\bar{u}_x(x_i - x_j) + \bar{u}_y(y_i - y_j) + \bar{u}_z(z_i - z_j)}{d_{ij}}$$

per versore si intende un vettore unitario, che serve solo ad indicare una direzione e un verso. In particolare i tre versori:

$$\bar{u}_x,\ \bar{u}_y,\ \bar{u}_z$$

indicano la direzione dei tre assi di riferimento (x, y, z).
Analizzando la formula si nota che:

- la forza agisce nella direzione della congiungente le due cariche
- se le due cariche sono concordi, la forza è repulsiva
- se le due cariche sono discordi, la forza è attrattiva
- la forza decresce con legge quadratica all'aumentare della distanza.

Si è inoltre definita la costante k:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

dove:
ε è la permettività elettrica della materia dove avviene il fenomeno.
In particolare si trovato sperimentalmente (proprio a parte da misure di forza elettrica):

$$\varepsilon_o = 8{,}854 \times 10^{-12}\ C^2/Nm^2$$

che è la permettività elettrica del vuoto; per gli altri minerali:

$$\varepsilon = \varepsilon_o\ \varepsilon_r$$

dove:
ε_r è la permettività elettrica relativa.
La permettività elettrica relativa dell'aria è con ottima approssimazione unitaria: cioè la permettività assoluta dell'aria è praticamente uguale a quella del vuoto.
Allora, più in generale, una carica q, che indicheremo come carica secondaria, posta nelle vicinanze di una carica Q, che considereremo carica principale, è soggetta, nell'aria o nel vuoto, ad una forza:

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qQ}{d^2}\bar{u}$$

dove il versore indica la direzione della congiungente le due cariche e il verso che dalla carica principale va alla secondaria.
Per eliminare la dipendenza della carica esploratrice si introduce il concetto di campo elettrico:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{d^2}\bar{u}$$

come si nota questa grandezza è indipendente dall'entità della carica secondaria: questa può anche non esserci, e il campo elettrico rimane comunque definito.
Una carica elettrica puntiforme di entità Q genera allora nello spazio circostante, un campo elettrico avente direzione radiale, verso uscente dalla carica se questa è positiva o entrante se questa è negativa, modulo variabile con legge inversalmente quadratica con la distanza.
Il campo elettrico si misura in newton su coulomb. In seguito si fornirà un'altra definizione dimensionale.
La presenza di più cariche genera in ogni punto dello spazio un campo elettrico che può essere facilmente calcolato, punto per punto, come somma vettoriale dei campi elettrici prodotti da ciascuna carica. Il campo così ottenuto dipenderà dalla posizione r = (x, y, z) del punto che si considera e dalla posizione ed entità delle cariche che lo generano.

$$\overline{E} = \overline{E}(\overline{r}) = \sum_i \overline{E}_i(\overline{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q_i}{d_i^2(\overline{r})} \overline{u}_i(\overline{r})$$

dove:

$$d_i(\overline{r}) = \sqrt{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 (z - z_i)^2]}$$

$$\overline{u}_i(\overline{r}) = \frac{\overline{u}_x (x - x_i) + \overline{u}_y (y - y_i) + \overline{u}_z (z - z_i)}{d_i(\overline{r})}$$

In questo modo, una volta calcolato il campo elettrico in una regione dello spazio, ci si può anche dimenticare delle cariche che lo hanno generato e affermare che una carica secondaria sarà soggetta ad una forza:

$$\overline{F} = q\overline{E}$$

Non soltanto cariche concentrate, ma anche cariche distribuite danno origine a campi elettrici. Il valore del campo in ogni punto dello spazio può essere calcolato considerando il contributo di campo, secondo la legge radiale, di ogni porzione di spazio e di superficie dove siano presente cariche distribuite. Per esempio nel caso di cariche distribuite su una superficie:

$$\overline{E}(\overline{r}) = \iint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\sigma_i dS_i}{d_i^2(\overline{r})} \overline{u}_i(\overline{r})$$

1.2 - Potenziale elettrico

Una carica che si trovi in un campo elettrico è sottoposta ad una forza, attrattiva o repulsiva. Se questa forza fosse libera di agire (la particella libera di muoversi), compirebbe un lavoro che darebbe alla particella velocità e quindi energia cinetica.
Si deve quindi concludere che la carica possiede una certa energia iniziale, che potrà essere tramutata tutta o in parte in energia cinetica o in altra forma di lavoro. O mostrando, abbastanza semplicemente, che il campo elettrico è conservativo (il lavoro che il campo elettrico compie non dipende dal percorso scelto, ma solo dal punto di partenza e di arrivo); tale energia risulta essere potenziale.
In particolare si potrebbe considerare nulla l'energia potenziale elettrica di una particella posta a distanza infinita dalla carica principale Q (che genera il campo e la forza). Volendo calcolare l'energia potenziale elettrica ad una distanza d finita dalla carica Q, occorre

calcolare (mediante un integrale) il lavoro necessario per portare la particella dall'infinito alla distanza d richiesta: il lavoro fornito sarà quindi pari all'energia potenziale accumulata.
Nel caso di campo elettrico radiale, e seguendo un percorso rettilineo e anch'esso radiale, si avrà:

$$U_p = \int_\infty^d \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qQ}{r^2}\bar{u}\cdot d\bar{r} = \int_\infty^d \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qQ}{r^2}dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\int_\infty^d \frac{1}{r^2}dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^d = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qQ}{d}$$

Si può introdurre anche un'altra grandezza, che è il potenziale elettrico V, pari al rapporto tra l'energia potenziale elettrica e la carica secondaria a cui questa energia è associata:

$$V = \frac{U_p}{q} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{d}$$

Per come è definito, il potenziale elettrico è una grandezza scalare, e non dipende dalla carica secondaria a cui può essere applicato.
Il potenziale elettrico dipende pertanto solo dalla posizione del punto dello spazio in cui lo si considera, e non dal percorso scelto per arrivarvi.
In particolare vale che:

$$\bar{E} = -\bar{u}_x\frac{\partial V}{\partial x} - \bar{u}_y\frac{\partial V}{\partial y} - \bar{u}_z\frac{\partial V}{\partial z} = -\bar{\nabla}V$$

Il potenziale elettrico si misura in volt, simbolo V:

$$1V = \frac{1J}{1C}$$

Le dimensioni del campo elettrico, precedentemente definite in newton su coulomb, possono allora essere definite anche in volt su metro.
Il potenziale di un punto dello spazio in cui agiscono più campi elettrici è dato dalla somma dei singoli potenziali. Va notato che tale somma è composta di addendi scalari, quindi risulta decisamente più agevole della somma dei campi elettrici (grandezze vettoriali).

1.3 - Il flusso del campo elettrico

Si definisce flusso di un vettore (E) attraverso una superficie S la grandezza:

$$\Phi = \int\int_S \bar{E}\cdot\bar{u}_n dS$$

dove il versore indica la direzione normale alla superficie, punto per punto (occorrerà scegliere anche un verso, cioè stabilire quale faccia della superficie sia da considerarsi "di ingresso" e quale "di uscita").
Il flusso è una grandezza scalare.
Se si considera una carica puntiforme q e una sfera di raggio R con il centro coincidente con il punto in cui si trova la carica, il campo elettrico generato dalla carica sarà radiale e in ogni punto della sfera perpendicolare alla sua superficie; avrà inoltre lo stesso valore in ogni punto della superficie. Pertanto il flusso è il prodotto del campo per la superficie della sfera:

$$\Phi = \oint\!\!\oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R^2}dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Si noti che il flusso non dipende dal raggio della sfera.
Si può dimostrare che:

- se la carica viene spostata dal centro della sfera, il valore del flusso continua ad avere lo stesso valore;
- se la superficie anziché essere sferica fosse di forma qualunque, l'espressione del flusso non cambia.

Per dimostrare questi due punti occorre ragionare a parità di angolo solido: se si considera un cono infinitesimale di spazio a partire dalla carica (corrispondente ad un valore infinitesimo di anglo solido), questo intersecherà una porzione infinitesima della superficie. Se questa è lontana, il campo sarà minore con legge quadratica, ma la superficie sarà maggiore con legge quadratica; viceversa, se la superficie sarà vicina il campo sarà maggiore ma la superficie minore; per cui il prodotto campo per superficie rimane costante. Il fatto che la superficie possa non essere perpendicolare all'asse del cono non cambia niente, perché va sempre considerato il prodotto del campo per il versore normale.
Se all'interno della superficie sono presenti più cariche, poiché il campo è una funzione lineare della carica, così sarà anche il flusso; pertanto il flusso totale è dato dalla somma dei flussi delle singole cariche.
Pertanto: il flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa vale:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

dove q indica la carica totale (somma delle cariche).
Questa relazione è nota come legge di Gauss, qui espressa in forma integrale.
Le implicazioni e le applicazioni della legge di Gauss sono molteplici.
Una conseguenza immediata è la considerazione che se in una superficie chiusa non sono presenti cariche elettriche, il flusso è nullo. Questo non significa che su singole porzioni della superficie non ci sia flusso e quindi non ci sia campo: questo può esserci per effetto di cariche esterne; ma la somma di tutti questi flussi locali (o meglio, l'integrale del campo elettrico normale su tutta la superficie) dà valore nullo.
Il teorema della divergenza, detto anche teorema di Gauss, recita che l'integrale di superficie del prodotto scalare di un campo vettoriale per il versore normale esterno esteso a tutta una superficie chiusa è pari all'integrale di volume della divergenza del campo stesso esteso a tutto il volume racchiuso dalla stessa superficie chiusa (se il campo scalare è differenziabile con continuità su tutto il volume). Vale quindi:

$$\oint\!\!\oint_S \overline{E}\cdot\overline{u}_n dS = \iiint_{V(S)} \overline{\nabla}\cdot\overline{E}dV$$

Inoltre si può anche scrivere che la carica totale contenuta in un volume è pari all'integrale, esteso a tutto il volume, della densità di carica per unità di volume che verrà indicata con ρ; vale quindi che:

$$\iiint_{V(A)} \overline{\nabla}\cdot\overline{E}dV = \frac{q}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}\iiint_{V(A)} \rho dV$$

La relazione non vale solo in forma integrale, ma anche in forma differenziale, cioè locale:

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Questa relazione è detta anche legge di Gauss in forma differenziale.
Un'applicazione della legge di Gauss (in forma integrale) è lo studio del campo elettrico di una lastra piana infinita uniformemente carica.
Si possono subito fare delle considerazioni di simmetria: il campo elettrico sarà normale alla superficie, ed uscirà da (o entrerà in) entrambe le facce della lastra con uguale modulo ma verso opposto.
Se si considera un cilindro avente la superficie laterale normale alla lastra, e sezionato dalla lastra stessa, in modo che le due basi siano una al di sopra e una al di sotto della lastra e paralleli ad essa, ed essendo A l'area di tali basi, si ha che il flusso totale uscente dal cilindro è dato solo dall'effetto del campo attraverso le due basi. La superficie laterale infatti è parallela al campo e quindi non ne è attraversata.
Quindi:

$$\Phi = 2AE$$

Ma per la legge di Gauss:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

Quindi si ritrova l'espressione:

$$\frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = 2AE \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

1.4 - Corrente elettrica

Gli elettroni (che hanno un elevato rapporto carica/massa) in alcune sostanze come i metalli o gli ioni, presenti nei fluidi, hanno una mobilità elevata. Altre particelle, come i protoni sono più vincolate o più lente.
Se si considera una superficie finita S (delimitata da una linea chiusa), si può misurare il passaggio di cariche elettriche attraverso di esse. Si deve scegliere un verso convenzionale di attraversamento e, in presenza di moto di cariche elettriche, si misura il passaggio di una certa carica Q in un tempo T. In particolare occorre porre attenzione al segno delle cariche che passano, ed effettuare la misura in senso algebrico: il passaggio di un certo numero di cariche negative nel senso convenzionalmente preso come positivo va considerato come un passaggio dello stesso numero di cariche positive nel senso opposto.
Si può allora definire il concetto di corrente media:

$$I = \frac{Q}{T}$$

il concetto di corrente istantanea:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La corrente, o meglio la sua intensità, si misura in ampere, simbolo A.

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

Contrariamente a quello che forse si crede, gli ampere non sono grandezze derivate dai coulomb, ma viceversa: il sistema internazionale si chiama appunto mksA proprio perché ha definito, oltre al campione unitario per metro, kilogrammo e secondo, anche il campione unitario dell'ampere.
Si consideri ora il seguente esempio: si supponga che lo scorrere delle cariche elettriche avvenga in una porzione di spazio definita, per esempio in un corpo cilindrico, con la direzione del moto parallela alle pareti laterali (o all'asse) del cilindro stesso. Questo è il caso tipico di corrente elettrica in un conduttore di sezione uniforme. La superficie in cui si misura la corrente può essere qualunque sezione normale del corpo cilindrico.
Per questo caso è possibile scrivere una relazione che lega il valore della corrente alla velocità e alla carica delle singole particelle e alla loro densità nel corpo stesso.
Si supponga che la corrente sia data tutta da particelle dello stesso segno, tutte con carica q, e distribuite uniformemente nella sezione del conduttore. Se si ha una corrente i, allora questo significa che in un tempo unitario la sezione normale è attraversata da un numero di cariche elettriche m pari a:

$$m = \frac{i}{q}$$

m indicherà quindi un numero di particelle al secondo.
Si supponga che immediatamente dopo la sezione ci sia una porzione di cilindro (un segmento del conduttore) che, fin quando la corrente non inizia a fluire non presenta cariche in moto. Allora dopo un tempo T (per esempio, 1 s) le particelle che hanno iniziato a fluire avranno raggiunto una distanza L:

$$L = \upsilon T$$

essendo υ la velocità di spostamento.
Se si considera allora il segmento di cilindro di lunghezza L, si nota che all'istante T esso sarà stato riempito di cariche in moto e da quell'istante in poi, se il flusso sarà regolare e non presenterà accumulo di cariche, il numero delle particelle entranti sarà pari a quelle uscenti. Inoltre tale numero, che verrà indicato con N, sarà pari al numero delle particelle che hanno potuto entrare nel tempo T:

$$N = m\,T$$

Questa situazione è valida per ogni sezione del cilindro. Allora se nel tratto L ci sono N cariche in moto, la densità lineare di cariche in moto (numero di cariche in moto per metro di lunghezza) n vale:

$$n = \frac{N}{L} = \frac{mT}{\upsilon T} = \frac{m}{\upsilon} = \frac{i}{q\upsilon}$$

da cui(*) :

(*) Come è intuitivo, la corrente è tanto maggiore quanto più:
- è grande il numero di cariche mobili presenti per unità di lunghezza del conduttore
- è grande la carica di ciascuna particella
- è grande la loro velocità

$$nq\upsilon = i$$

Il fatto che si parli di cariche libere di muoversi, nel numero di n per unità di lunghezza, non significa affatto che il corpo non sia più elettricamente neutro. Possono esistere (ed è quanto normalmente succede) altrettante cariche di segno opposto, ma non libere di muoversi. Per esempio, nel caso dei metalli ci sono elettroni liberi che apparentemente costituiscono cariche negative in eccesso; ma questi hanno abbandonato i loro atomi, che sono rimasti così in eccesso di cariche positive. I due fenomeni si annullano a vicenda. Se in ogni segmento di conduttore il numero di elettroni entrante è pari a quello uscente, non si creano squilibri di carica.
Per come è stata definita, la corrente è una grandezza scalare, il moto delle particelle cariche, caratterizzato da una velocità delle particelle stesse, è invece un fenomeno tipicamente vettoriale. Inoltre la corrente elettrica è una grandezza che richiede, per essere misurata, l'analisi del suo passaggio in una sezione: cioè non un fenomeno che non viene visto in modo strettamente locale, ma nei suoi effetti su una intera area. Anche per questo non può assumere un valore vettoriale: la superficie può essere attraversata da cariche con velocità diverse per modulo, direzione e verso.
Esiste allora un'altra grandezza, che presenta invece le caratteristiche di località e di vettorialità è la densità di corrente. Essa è pari al rapporto tra la corrente che attraversa una superficie infinitesima e la superficie infinitesima stessa; e poiché localmente, su un area infinitesima, la direzione e il verso sono univocamente determinate, la densità di corrente è una grandezza vettoriale.
Nel seguito la densità di corrente verrà indicata con il simbolo J:

$$\overline{J} = \frac{dI}{dA}\overline{u}$$

J si misura in ampere su metro quadrato o più comunemente in ampere su millimetro quadrato.
Vale pertanto:

$$I = \iint_A \overline{J} \cdot \overline{u}_n dA$$

Nella formula il versore indica la direzione normale alla superficie, punto per punto; si noti inoltre che appare il doppio segno di integrale, perché è un integrale superficiale (in realtà il differenziale di superficie è un differenziale del 2° ordine), ed appare il prodotto scalare tra il vettore densità di corrente e il versore normale.
In regime stazionario, cioè quando tutte le grandezze mantengono lo stesso valore nel tempo, vale il principio di solenoidalità della corrente. Se si considera una superficie chiusa A, il valore totale della corrente entrante in (o uscente da) essa è pari a zero:

$$I = \oiint_A \overline{J} \cdot \overline{u}_n dA = 0$$

In caso invece di regime qualunque, si può presentare nel volume interno alla superficie chiusa una variazione della carica elettrica presente; indicando i versori normali per esempio come versori uscenti dalla superficie, con Q la carica totale presente nel volume interno, e con ρ la densità di carica per unità di volume:

$$I = \oiint_A \overline{J} \cdot \overline{u}_n dA = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV$$

Se dalla superficie globalmente esce corrente, la carica interna diminuirà tanto più in fretta quanto è maggiore l'intensità di tale corrente.
Applicando anche il teorema della divergenza, noto anche come teorema di Gauss, si ha quindi:

$$-\frac{d}{dt}\iiint_{V(A)} \rho dV = I = \oiint_A \bar{J}\cdot\bar{u}_n dA = \iiint_{V(A)} \bar{\nabla}\cdot\bar{J} dV$$

Si dimostra che la relazione vale non solo in termini integrali, sull'intero volume, ma anche localmente, punto per punto:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

1.5 - Campo magnetico

Il movimento di cariche elettriche produce nello spazio circostante un fenomeno detto campo magnetico.
Una singola carica produce nello spazio circostante una forza magnetica data dal seguente prodotto vettoriale:

$$\bar{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} q \frac{\bar{\upsilon} x \bar{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} q \frac{\bar{\upsilon} x \bar{u}_r}{r^2}$$

dove:
q è il valore della carica
$\bar{u}$ è la velocità della carica
$\bar{r}$ è il vettore che congiunge la carica con il punto in cui si valuta il campo
Quest'ultimo vettore va considerato orientato dal punto in cui si trova la carica al punto in cui si vuole considerare il campo.
Il campo magnetico si indica con il simbolo H e si misura in ampere su metro. Ma di uso più comune è il campo B che si misura in tesla, simbolo T, detto induzione magnetica e che è legato al precedente da(*):

$$\bar{B} = \mu\bar{H} = \mu_o\mu_r\bar{H}$$

dove:
μ = permeabilità magnetica della materia in cui avviene il fenomeno
$\mu_o = 4\pi 10^{-7} = 1{,}2566\ 10^{-6}$ mkg/C^2 è la permeabilità magnetica del vuoto; per gli altri materiali si esprime sia una permeabilità assoluta, sia una relativa a quella del vuoto:

(*) La definizione di una terminologia unificata per i fenomeni magnetici non è univoca, in modo particolare per le grandezze B ed H.
Il problema è molto complesso e si compone di due grosse parti: una più generale ed astratta che riguarda la scelta dei termini dell'etimologia più adatta e l'altra pragmatica, più pressante, che riguarda la necessità di un'unificazione finalizzata alla compressione recirproca.
La convenzione terminologica adottata in questo documento è quella indicata nelle Norme CEI 24-1 (Unità di misura e simboli letterali da usare in elettrotecnica - Ed. 1982) riportata nella tabella seguente.

Grandezza		Unità di misura	Note
Simbolo	Nome	SI	
H	campo magnetico (forza magnetica)	A/m	IEC e ISO non menzionano il termine forza magnetica
B	induzione magnetica	T	--

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o}$$

Per l'aria e quasi tutti i materiali il valore delle permeabilità relativa è pressoché unitario; solo per il ferro essa assume valori elevati, dell'ordine delle centinaia o delle migliaia.
Con questa formula si può studiare il campo prodotto dalla corrente che fluisce in un conduttore cilindrico di lunghezza infinita, e il cui raggio sia trascurabile rispetto alle distanze dall'asse del conduttore in cui si vuole calcolare il campo.
Si consideri il conduttore coincidente con l'asse Z di un sistema di assi cartesiani. Il punto P in cui si vuole calcolare il campo si trovi nel piano XY ad una distanza ρ dall'asse del conduttore, quindi:

$$\overline{P} = \overline{u}_x x + \overline{u}_y y = \overline{u}_x \rho \cos\theta + \overline{u}_y \rho \,\mathrm{sen}\,\theta = \overline{u}_\rho \rho$$

Un segmento infinitesimo dz di conduttore, posto sull'asse Z ad una distanza z dall'origine, fornisce un contributo infinitesimo dB al campo magnetico in P:

$$d\overline{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} dq \frac{\overline{\upsilon} x \overline{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} nqdz \frac{\overline{\upsilon} x \overline{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} nq\upsilon dz \frac{\overline{u}_i x \overline{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} idz \frac{\overline{u}_i x \overline{r}}{r^3}$$

Infatti la carica infinitesima dq è pari al prodotto del numero di cariche per metro (n) per la lunghezza infinitesima (dz) e per il valore di ogni carica (q). Il versore con pedice i indica direzione e verso della corrente e coincide quindi con il versore dell'asse Z.
Esplicitando anche il versore distanza:

$$d\overline{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\overline{u}_z(\overline{u}_x x + \overline{u}_y y - \overline{u}_z z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} idz = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\overline{u}_x(-y) + \overline{u}_r(+x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} idz = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\overline{u}_\theta \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} idz$$

Indipendentemente dalla posizione del segmento considerato sul conduttore, il contributo infinitesimo risulta tangente alla circonferenza di raggio ρ nel punto P.
La forza totale del campo magnetico si otterrà integrando il contributo del segmento infinitesimo per tutta la lunghezza del conduttore, che si suppone infinita:

$$\overline{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\overline{u}_\theta \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} idz = \overline{u}_\theta \frac{\mu_o}{4\pi} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz = \overline{u}_\theta \frac{\mu_o}{4\pi} i2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

si consideri α, l'angolo da cui il tratto di conduttore di lunghezza z è visto dal punto P.
Allora:

$$z = r \,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad \rho^2 + z^2 = \rho^2(1 + \tan^2\alpha) = \frac{\rho^2}{\cos^2\alpha}$$

$$z = \rho \tan\alpha \qquad dz = \rho \;(1 + \tan^2\alpha) d\alpha = \frac{\rho^2}{\cos^2\alpha} d\alpha$$

quindi:

$$\overline{B} = \overline{u}_\theta \frac{\mu_o}{4\pi} i 2\int_0^{+\infty} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz = \overline{u}_\theta \frac{\mu_o}{4\pi} i 2\int_0^{\pi/2} \frac{\rho \cdot \rho / \cos^2\alpha}{(\rho^2 / \cos^2\alpha)^{3/2}} d\alpha =$$

$$= \overline{u}_\theta \frac{\mu_o}{4\pi} i 2\int_0^{\pi/2} \frac{\rho^2 \cdot \rho / \cos^2\alpha}{(\rho^3 / \cos^3\alpha)^{3/2}} d\alpha = \overline{u}_\theta \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{i}{\rho} \int_0^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha = \overline{u}_\theta \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{i}{R}$$

dove $\overline{\mu}_\theta$ è il versore tangente alla circonferenza con centro sul conduttore ed R la distanza dal punto considerato.

1.6 - Flusso magnetico

Come per il campo elettrico e per la densità di corrente, anche per il campo magnetico è utile definire il flusso attraverso una superficie S:

$$\Phi_B = \iint_S \overline{B} \cdot \overline{u}_n dS$$

Le linee di forza del campo magnetico sono sempre chiuse. Per questa ragione il flusso entrante in (o uscente da) una superficie chiusa è sempre nullo:

$$\Phi_B = \oiint_S \overline{B} \cdot \overline{u}_n dS = 0$$

Questa è la legge di Gauss per il campo magnetico di forma integrale.
Applicando ancora una volta il teorema della divergenza, o teorema di Gauss, si ritrova che l'integrale di superficie del flusso normale è pari all'integrale di volume della divergenza del flusso:

$$\oiint_S \overline{B} \cdot \overline{u}_n dS = \iiint_{V(S)} \overline{\nabla} \cdot \overline{B} dV$$

e si dimostra che le eguaglianze sono vere anche localmente, cioè in forma differenziale:

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{B} = 0$$

Questa è la legge di Gauss per il campo magnetico in forma differenziale.

1.7 - Moto di una carica in un campo elettromagnetico

Una particella carica posta in un campo elettromagnetico si trova sottoposta ad una forza:

$$\overline{F} = q(\overline{E} + \overline{\upsilon} x \overline{B})$$

Questa espressione presenta due termini. Il primo, che esprime l'effetto del campo elettrico, indica la forza di origine elettrostatica. Il secondo, che esprime l'effetto del campo magnetico, è noto come forza di Lorentz; si presenta soltanto quando esiste una componente di velocità della particella in una direzione che non sia parallela a quella del campo magnetico.
Un'applicazione pratica è quella del calcolo della forza agente su un conduttore percorso da corrente e immerso in un campo magnetico. Si supponga per esempio che il conduttore sia

rettilineo e posto sull'asse X, mentre il campo magnetico sia uniforme e nella direzione dell'asse Y. Per ogni tratto di conduttore di lunghezza L si ha:

$$\overline{F} = q\overline{\upsilon}x\overline{B} = nqL\upsilon B\overline{u}_x x\overline{u}_y = \overline{u}_z nq\upsilon LB = \overline{u}_z iLB$$

quindi indicando la forza per unità di lunghezza si ha (f):

$$\overline{f} = \frac{\overline{F}}{L} = \overline{u}_z iB$$

1.8 - La circuitazione dei campi elettrico e magnetico

Dall'espressione del campo induzione magnetica prodotto da un conduttore rettilineo infinito:

$$\overline{B} = \mu_o \frac{i}{2\pi R_a} \overline{\mu}_\theta$$

si può subito notare che integrando il prodotto scalare del campo B per il versore tangente alla circonferenza lungo tutta la circonferenza stessa, si ha.

$$\oint_L \overline{B} \cdot \overline{u}_\theta dl = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{i}{\rho} 2\pi\rho = \mu_o i$$

Questa formula ha validità generale per una qualunque circuitazione, cioè anche se il percorso non è una circonferenza, purché sia una linea chiusa; il termine al secondo membro deve contenere la somma di tutte le correnti che attraversano la superficie delimitata dalla linea chiusa; quindi tale termine può essere sostituito con l'integrale delle densità di corrente normale su tutta la superficie:

$$\oint_L \overline{B} \cdot d\overline{l} = \mu_o i = \mu_o \iint_{S(L)} \overline{J} \cdot \overline{u}_n dS$$

Questa formula è nota come legge di Ampère-Maxwell in forma integrale.
Per quanto riguarda i versi della circuitazione e della corrente, si può ricordare questa regola: la corrente deve fluire nel verso di una vite destrorsa che ruoti nello stesso verso in cui si sta effettuando la circuitazione.
Il teorema di Stokes recita che l'integrale di circuitazione di un campo su una linea chiusa è pari all'integrale, esteso a ogni superficie limitata dalla linea chiusa, del prodotto scalare tra il rotore del campo stesso e il versore punto per punto normale alla superficie.
Quindi:

$$\oint_L \overline{B} \cdot d\overline{l} = \iint_{s(L)} (\overline{\nabla} x \overline{B}) \cdot \overline{u}_n dS = \mu_o i = \mu_o \iint_{S(L)} \overline{J} \cdot \overline{u}_n dS$$

Si dimostra che l'espressione non vale solo in termini integrali, ma anche differenziali, cioè localmente:

$$\overline{\nabla} x \overline{B} = \mu_o \overline{J}$$

Questa è la legge Ampère-Maxwell espressa in forma differenziale.

Entrambe queste espressioni della legge Ampère-Maxwell sono però valide in regime stazionario: in regime variabile nel tempo le espressioni sono più complesse.
Per calcolare tali espressioni, si riprendono le equazioni:

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad \text{e} \quad \overline{\nabla} \cdot \overline{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

Combinandole si nota che:

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{J} = -\frac{d}{dt}(\varepsilon_o \overline{\nabla} \cdot \overline{E})$$

e quindi:

$$\overline{J} = -\varepsilon_o \frac{d\overline{E}}{dt} \qquad \text{vale a dire} \qquad \overline{J} + \varepsilon_o \frac{d\overline{E}}{dt} = 0$$

Tornando ad integrare il flusso di queste grandezze su una superficie chiusa, si ritrova:

$$\oiint_S (\overline{J} + \varepsilon_o \frac{d\overline{E}}{dt}) \cdot \overline{u}_n dS = \oiint_S \overline{J} \cdot \overline{u}_n dS + \oiint_S \varepsilon_o \frac{d\overline{E}}{dt} \cdot \overline{u}_n dS =$$

$$= -\frac{dQ}{dt} + \varepsilon_o \iiint_{V(S)} \overline{\nabla} \cdot \overline{E} dV = -\frac{dQ}{dt} + \varepsilon_o \iiint_{V(S)} \frac{\rho}{\varepsilon_o} dV = -\frac{dQ}{dt} + \frac{dQ}{dt} = 0$$

Come deve essere, visto che la funzione integranda è nulla.
Si consideri ora la circuitazione del campo magnetico e l'equazione di Ampère-Maxwell in forma integrale. Poiché la superficie su cui si calcola il flusso della densità di corrente può essere scelta liberamente, si consideri una superficie molto grande (come un palloncino di cui la linea chiusa sia l'imboccatura per gonfiarlo). Restringendo sempre di più il percorso della circuitazione, anzi facendolo tendere a zero, è ovvio che il valore dell'integrale deve anch'esso tendere a zero; al secondo membro si tende invece all'integrale di flusso della densità di corrente su di una superficie chiusa. Tale integrale non è nullo, come visto con l'equazione:

$$I = \oiint_A \overline{J} \cdot \overline{u} dA = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

se non in condizioni stazionarie; risulterebbe nullo se anziché utilizzare la sola densità di corrente si utilizzasse l'espressione

$$\overline{J} = -\varepsilon_o \frac{d\overline{E}}{dt}$$

valida per l'appunto in regime variabile. In tale regime le equazioni di Ampère-Maxwell diventano quindi:

$$\oint_L \overline{B} \cdot d\overline{l} = \mu_o \iint_{S(L)} (\overline{J} + \varepsilon_o \frac{d\overline{E}}{dt}) \cdot \overline{u}_n dS = \mu_o I + \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \iint_{S(L)} \overline{E} \cdot \overline{u}_n dS$$

$$\overline{\nabla} x \overline{B} = \mu_o \overline{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{d\overline{E}}{dt}$$

Anche per il campo elettrico è nota la legge che esprime il valore dell'integrale di circuitazione. Qualunque integrale di percorso del campo elettrostatico è pari alla differenza di potenziale tra il punto di arrivo e quello di partenza, ed essendo il campo conservativo tale integrale non dipende dal cammino scelto, ma solo dagli estremi.
Si consideri ora questo esempio: vi sia un circuito composto dalla successione di quattro segmenti dl, disposti come a formare un rettangolo nel piano XY. Si supponga che nello spazio sia presente un campo magnetico uniforme e costante, di modulo B e disposto con direzione e verso come l'asse Z. Si supponga anche che un lato del circuito, per esempio quello parallelo all'asse X, possa spostarsi nel senso dell'asse Y, cioè senza ruotare. Se esso è dotato di una velocità nella direzione e nel verso dell'asse Y, ogni particella carica q si troverà sottoposta alla forza di Lorentz:

$$\overline{F} = \overline{\upsilon} x \overline{B} = q\upsilon B \ \overline{u}_y x \overline{u}_z = q\upsilon B \overline{u}_x$$

Tale effetto avrebbe potuto essere ottenuto anche con un campo elettrico equivalente di entità

$$\overline{E}_{eq} = \upsilon B \overline{u}_x$$

In assenza di altri campi elettrici la circuitazione di questo campo equivalente lungo tutto il rettangolo, effettuata in senso antiorario (la vite destrorsa avanza lungo l'asse Z, nel verso positivo di tale asse), fornisce:

$$\oint_L \overline{E}_{eq} = 0 \ l_x + 0 \ l_y + E_{eq}(-l_x) + 0 \ (l_y) = -E_{eq} \ l_x = -\upsilon B \ l_x$$

Se si considera il flusso del campo magnetico nella superficie chiusa, esso vale:

$$\Phi_B = B \ l_x \ l_y = B \ l_x \ (l_{yo} + \upsilon t)$$

e quindi la sua derivata:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = B \ l_x \ \upsilon$$

Si nota che tale derivata vale sempre, non solo per questa geometria particolare e non solo nel caso che il flusso sia cambiato per variazione dell'area interessata, ma anche per variazione dell'intensità del campo magnetico nel tempo.
Quindi si può esprimere questo con un'equazione in forma integrale, e applicando il teorema di Stokes o del rotore, anche in forma differenziale:

$$\oint_L \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(L)} \overline{B} \cdot \overline{u}_n dS$$

$$\overline{\nabla} x \overline{E} = -\frac{d\overline{B}}{dt}$$

Queste equazioni sono l'espressione della legge di Faraday-Henry in forma integrale e differenziale rispettivamente.
Le implicazioni di questa legge sono notevoli. Se si considera una spira di conduttore, e tale spira è attraversata da un campo magnetico variabile, su questa spira si manifesta una tensione. Se per esempio si considera una spira circolare con un diametro di 0,40 m e attraversata da un campo magnetico variabile nel tempo con legge sinusoidale, con una frequenza di 50 Hz e un valore massimo di 1 T:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \approx 0{,}50\ m^2; \qquad \Phi_B(t) = A \cdot B(t) = 0{,}50\ 1 \cos(2\pi\ 50t)$$

quindi la tensione che si misura tra gli estremi della spira vale:

$$V = -\oint_L \overline{E} \cdot d\overline{l} = \frac{d\Phi_B}{dt} = -2\pi \cdot 50 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 50t) \approx -314 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 50t)$$

si presenta quindi una tensione, sfasata nel tempo di 1/4 di periodo rispetto al campo magnetico, con un valore massimo di 314 V.

1.9 - Fenomeni statici, stazionari, quasi-stazionari, non stazionari

Nei precedenti paragrafi sono state ricordate le equazioni di Maxwell:

- legge di Gauss per il campo elettrico:

$$\oiint_S \overline{E} \cdot \overline{u}_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_o}; \qquad \overline{\nabla} \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

- legge di Gauss per il campo magnetico:

$$\oiint_S \overline{B} \cdot \overline{u}_n dS = 0; \qquad \overline{\nabla} \cdot \overline{B} = 0$$

- legge di Faraday-Henry:

$$\oint_L \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\frac{d}{dt} \oiint_{S(L)} \overline{B} \cdot \overline{u}_n dS\ ; \qquad \overline{\nabla} x \overline{E} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

- legge di Ampère-Maxwell:

$$\oint_L \overline{B} \cdot d\overline{l} = \mu_o I + \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \oiint_{S(L)} \overline{E} \cdot \overline{u}_n dS\ ; \qquad \overline{\nabla} x \overline{B} = \mu_o \overline{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$$

e l'equazione di continuità

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Si nota che nelle espressioni appaiono delle derivate (parziali se in forma differenziale o totali se in forma integrale) rispetto al tempo .

I fenomeni elettrici possono essere suddivisi in due grandi categorie: fenomeni elettrostatici e fenomeni elettrodinamici.
Nella prima categoria si ha che: la densità volumetrica di carica, punto per punto, non cambia nel tempo; il campo elettrico è costante; la densità di corrente è nulla in ogni punto (e di conseguenza è nulla la corrente in ogni sezione); l'integrale di circuitazione del campo elettrico è nullo (campo conservativo); non esiste campo magnetico.
In questa situazione ci possono essere solo cariche puntiformi e corpi elettricamente carichi, con distribuzione di carica superficiale o volumetrica.
Perché un fenomeno rientri nella seconda categoria, invece, occorre almeno il presupposto che il vettore densità di corrente sia, in generale, non nullo. I fenomeni che rientrano in questa seconda categoria vengono a loro volta suddivisi:

- fenomeni stazionari: tutte le derivate rispetto al tempo sono nulle;
- fenomeni non-stazionari: in generale tutte le derivate rispetto al tempo sono diverse da zero.

Da un punto di vista ingegneristico, tuttavia, si considera anche una terza situazione, intermedia tra le due, che viene definita regime quasi-stazionario. In tale situazione molte delle derivate rispetto al tempo sono nulle, o di valore trascurabile ai fini pratici, mentre altre possono essere sensibilmente diverse da zero. Le discriminazioni su quali grandezze possano e quali non possano essere accettate come variabili nel tempo, per considerare il regime come quasi-stazionario, è una discriminazione molto delicata sulla quale si entrerà nel merito in seguito.

1.10 - Cenni di elettrostatica

Le principali leggi dell'elettrostatica sono: la legge di Coulomb, che descrive il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme, e la legge di Gauss per il campo elettrico, che lega flusso e carica (forma integrale) o divergenza del flusso e densità di carica (forma differenziale).
L'utilizzo della legge di Coulomb o della legge di Gauss per il campo elettrico permettono di descrivere il campo elettrico generato da distribuzioni di carica superficiale e volumetrica, come è per esempio il caso della lastra piana.
Poiché in elettrostatica non si ha densità di corrente, la densità di carica è costante nel tempo. Se il suo valore è noto per ogni punto del corpo in cui la densità carica si manifesta, è possibile integrare tale valore sul corpo stesso ed ottenere così campo e potenziale elettrici, note ovviamente le condizioni al contorno.
Già in condizioni elettrostatiche è inoltre possibile effettuare un'importante classificazione dei corpi, in base alla sostanza di cui sono composti. Per quanto riguarda il moto delle cariche elettriche, esistono materiali conduttori e materiali non conduttori, detti anche isolanti.
Nei primi le cariche, se sollecitate da un campo elettrico, sono libere di spostarsi, anche se il campo elettrico è molto debole.
Nei secondi la libertà di movimento delle cariche è fortemente limitata, di modo che una distribuzione volumetrica di carica non subisce variazioni apprezzabili (se non in tempi molto lunghi).
Se un corpo conduttore viene posto in un campo elettrico, subito le cariche tenderanno a spostarsi muovendosi nella direzione del campo: le cariche positive in verso concorde, le negative in verso discorde. Si realizza così una separazione di cariche (le positive da una parte e le negative dall'altra), che genera a sua volta un campo elettrico.
Tale campo all'interno del corpo conduttore sarà uguale e contrario a quello imposto dall'esterno: infatti, solo quando i due campi si annulleranno a vicenda il moto delle cariche potrà cessare perché si è raggiunta una nuova condizione di equilibrio. Lo studio della fase transitoria in cui si ha movimento di cariche non compete all'elettrostatica, mentre ad essa compete la determinazione del nuovo stato di equilibrio, cioè della situazione "a regime".

A tale proposito occorre notare che:

- internamente ad un corpo conduttore non può mai presentarsi, a regime in condizioni elettrostatiche campo elettrico, perché se ci fosse si presenterebbe ancora moto di cariche, fino al suo annullamento;
- come conseguenza il potenziale è uniforme in tutto il conduttore (equipotenzialità);
- le cariche che si sono spostate e separate si posizionano sulla superficie del conduttore, perché se esistesse una densità volumetrica di carica non si avrebbe equipotenzialità, vedi l'eq. di Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

cioè non si avrebbe equilibrio elettrostatico.

Ovviamente, se il corpo è invece costituito da materiale isolante, il campo elettrico non può essere annullato dallo spostamento di cariche, e pertanto è possibile la presenza di campo elettrico all'interno di tali materiali. Se questi corpi presentano una costante dielettrica relativa diversa da quella del vuoto, il valore del campo elettrico verrà modificato di conseguenza.
Un caso interessante si presenta quando il corpo conduttore presenta una cavità al suo interno. Per il principio di equipotenzialità, la superficie interna del conduttore si presenta tutta allo stesso potenziale V. Poiché nella cavità non esistono cariche, l'equazione di Laplace ammette come soluzione il valore V, uniforme in tutta la cavità, di conseguenza non esiste campo elettrico.
Si è così realizzato uno schermo elettrostatico. Perché lo schermo sia efficace spesso non è necessario avere un intero corpo chiuso intorno al volume che si vuole schermare, ma basta un conduttore che circondi tale volume anche con delle finestre, come una rete, purché abbastanza fissa. L'esempio tipico è la gabbia di Faraday: una qualunque gabbia di materiale conduttore, purché circondi per intero il volume e sia abbastanza fitta, si comporta come uno schermo elettrostatico.

1.10.1 - L'effetto capacitivo

Ogni volta che si presentano due conduttori, separati da un isolante (anche l'aria), che possono reciprocamente interagire per quanto riguarda i fenomeni elettrici, si manifesta un effetto che è detto capacitivo.
L'effetto capacitivo, è legato al deposito, in presenza di sollecitazioni esterne, su un conduttore di cariche elettriche di un segno e sull'altro di cariche di segno opposto. Tra i due conduttori insorge quindi un campo elettrico e quindi una differenza di potenziale.
Si definisce allora la capacità come il rapporto tra la carica presente su ogni conduttore e la differenza di potenziale.

$$C = \frac{Q}{V} \qquad\qquad 1F = \frac{1C}{1V}$$

La capacità si misura in farad, simbolo F.
Il componente sistemistico (modello) che si introduce per rappresentare l'effetto capacitivo è il condensatore
Il caso più semplice per affrontare l'effetto in esame è costituito da due lastre piane reciprocamente affacciate (condensatore piano). Se le lastre sono abbastanza grandi rispetto alla distanza che le separa, in tutti i punti del condensatore, esclusi al più i bordi delle lastre stesse, si può considerare il campo elettrico come se le lastre piane fossero di dimensioni infinite. Vale allora:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o\varepsilon_r}$$

in direzione perpendicolare alle lastre. Questo è il campo generato da una sola lastra; l'altra genera un campo uguale in modulo e direzione, e che all'esterno delle lastre annulla il campo della prima, mentre all'interno si somma, raddoppiandolo.
Definendo:

- d distanza tra le lastre
- A area di ogni lastra

$$\sigma = Q / A$$

allora vale:

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_o\varepsilon_r} d = \frac{Q}{\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{d}{A}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_o\varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Un altro caso tipico geometricamente semplice è rappresentato dal condensatore cilindrico, costituito da due conduttori cilindrici coassiali, di raggio R_1 e R_2, posti uno dentro l'altro. In questo caso le cariche presenti sul cilindro esterno non danno alcun contributo al campo interno; applicando il teorema di Gauss al cilindro interno, e supponendo la distanza tra i due cilindri molto più piccola della lunghezza assiale l del condensatore, si ha che ad ogni distanza R dall'asse il campo elettrico, radiale, è pari al flusso diviso per l'area.

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{1}{2\pi Rl}$$

Quindi:

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{1}{2\pi Rl} dR = \frac{Q}{\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{1}{2\pi\ell} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

da cui la capacità

$$C = \frac{Q}{V} \varepsilon_o\varepsilon_r \frac{2\pi\ell}{\ln(R_2 / R_1)}$$

La presenza della costante dielettrica del vuoto rende sempre molto piccoli i valori di capacità tale costante presenta infatti un ordine di grandezza di 10^{-12}. In realtà quindi non si usa mai il farad ma i suoi sottomultipli pico, nano, micro farad.
Un esempio potrebbe essere la capacità del pianeta Terra, considerando il secondo conduttore come posto a distanza infinita.

$$V = \int_{R}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi 8{,}854\ 10^{-12} \cdot \frac{40\ 10^6}{2\pi} = 708\ \mu F$$

Come si vede persino un corpo così grande come la Terra ha una capacità di meno di un millesimo di farad; questo vuol dire che per depositare sulla Terra una carica (complessiva!) di 1 C occorre una differenza di potenziale, rispetto al resto dell'Universo, di più di 1000 V (1412 V).

1.11 - Elettrodinamica stazionaria

L'elettrodinamica stazionaria è per definizione caratterizzata dall'avere presenza di densità di corrente diverse da 0 e derivate rispetto al tempo nulle per i campi elettrico e magnetico e per la densità volumetrica di carica.
E' già stato messo in evidenza che il vettore densità di corrente presenta la caratteristica di essere solenoidale, fatto salvo l'eventuale accumulo di carica (variazione nel tempo della densità volumetrica di carica). Nelle condizioni di stazionarietà la solenoidalità è comunque perfetta, pertanto ogni filetto di corrente deve richiudersi descrivendo un percorso chiuso. Questo filetto o tubo di flusso può, durante tale percorso, allargarsi o restringersi (e quindi il modulo della densità di corrente diminuisce o aumenta, rispettivamente), ma la quantità totale del flusso di J rimane costante.
Per circuito elettrico si intende allora, nella sua definizione più essenziale, un tubo di flusso del vettore densità di corrente. Ed essendo tale flusso una corrente elettrica, si parla di corrente di un circuito elettrico, a partire dal presupposto che tale grandezza mantiene lo stesso valore per ogni sezione del circuito stesso.
Quasi sempre i circuiti elettrici sono costituiti da un supporto materiale, cioè un materiale conduttore, spesso di sezione filiforme, entro il quale avviene il passaggio della corrente; tale conduttore è rivestito di materiale isolante per evitare la dispersione della corrente in percorsi che, anche se chiusi, non permetterebbero più di individuare delle sezioni definite dove la corrente sia sempre la stessa; oppure tali conduttori sono fili tesi tra supporti isolanti, di modo che per gran parte della sua lunghezza il conduttore è circondato dall'aria, che è pure un materiale isolante. Possono esistere però flussi di corrente anche "liberi", privi di supporto definito, come le corrente di dispersione nel terreno oppure come le migrazioni ioniche nei fluidi o nel vuoto.
Nel linguaggio comune si indica spesso con la stessa parola "circuito" qualcosa di più complesso, che potrebbe essere definito come l'unione di più rami di circuiti diversi, formando un insieme di maglie più o meno articolata ma tale che da ogni suo punto se ne può raggiungere qualunque altro. In essa quindi ciascun circuito può condividere con altri parti del suo percorso. Il termine corretto per indicare questa struttura è però quello di rete elettrica, anche se nel seguito verranno usati indifferentemente entrambi i termini.

1.11.1 - Effetto resistivo

Il moto delle cariche elettriche, anche nei migliori materiali conduttori, non può però avvenire senza un'opportuna forzante. Una carica elettrica incontrerà comunque una opposizione al suo movimento (così come in meccanica non esiste un moto privo di attriti, se non nel vuoto), di modo che dovrà cedere parte della sua energia per ogni tratto che percorre. Vedendo le cose da un punto di vista energetico, o integrale, ogni carica perderà energia potenziale elettrica per muoversi, e quindi il suo potenziale elettrico nel punto di partenza dovrà essere maggiore del potenziale elettrico nel punto di arrivo (se la carica è positiva, viceversa se negativa). Vedendo le cose da un punto di vista dinamico, o locale, dovrà esistere un campo elettrico (forzante) che applicato alla particella carica produrrà una forza che vincerà l'opposizione al moto offerta dal materiale.

Sperimentalmente si trova che, la densità di corrente $(\bar{J})$, conseguente all'applicazione di un campo elettrico $(\bar{E})$, è legata a questo da una costante di proporzionalità funzione del mezzo materiale nel quale il fenomeno avviene.
Si può pertanto scrivere la seguente legge:

$$\bar{E} = \rho \bar{J}$$

dove la costante che appare prende il nome di resistività del materiale; tale effetto è detto resistivo. Per i materiali conduttori vale che la resistività non dipende dal valore del campo elettrico o della densità di corrente, entro ampi limiti di tali grandezze; varia invece con la temperatura. Su questo si tornerà in seguito; intanto possiamo affermare che, per questa proprietà, il fenomeno descritto dall'equazione di cui sopra è lineare.
Vedendo le cose dall'esterno, occorre comunque che il potenziale elettrico nel punto di partenza della corrente sia maggiore di quello del punto di arrivo.
Se si considerano due punti A e B, corrispondenti a due distinte sezioni di un circuito tra le quali fluisce una corrente I (da A a B), la differenza di potenziale tra i due punti vale:

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_B^A \rho \bar{J} \cdot d\bar{l} = \int_B^A \rho \frac{I}{A(l)} \, . \, dl = I \int_B^A \frac{\rho}{A(l)} dl = R_{AB} \cdot I$$

dove si è definita la nuova grandezza:

$$R_{AB} = \int_B^A \frac{\rho}{A(l)} dl$$

che prende il nome di resistenza tra il punto A e il punto B (o tra B e A: la resistenza va considerata in valore assoluto, e cambiando l'ordine degli estremi tale valore non cambia).
In particolare per una sezione uniforme lungo tutta la lunghezza del tratto di circuito:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Questa formula particolare, come pure quella più generale, esprimono in maniera rigorosa un principio intuitivo: la resistenza che una corrente incontra è:
- tanto maggiore quanto maggiore è la resistività del materiale;
- tanto maggiore quanto lo è la lunghezza del percorso;
- tanto minore quanto più è grande la sezione (perché in tal modo la corrente può meglio distribuirsi, quindi avere una densità minore).

Il componente sistemistico (modello) che si introduce per rappresentare l'effetto resistivo è il resistore (resistenza è il valore del parametro).
La resistenza si misura in ohm, simbolo Ω; vale:

$$1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

Si può quindi enunciare la legge di Ohm, per esempio in questa forma: dato un segmento di circuito di resistenza R e di estremi A e B, la corrente I che fluisce da A a B è pari alla differenza di potenziale tra A e B diviso per la resistenza del segmento:

$$I_{A \to B} = \frac{V_A - V_B}{R_{AB}}$$

Si noti che quando si parla di corrente si intende sempre la corrente convenzionalmente positiva: cioè se il potenziale d A è maggiore del potenziale di B, fluiscono cariche positive da A verso B, oppure cariche negative da B verso A, oppure entrambi i casi; nella realtà, nei metalli e nei conduttori in generale si muovono gli elettroni.
Occorre però intendersi bene sulle convenzioni: il campo elettrico è il campo elettrico forzante, cioè quello che causa il flusso di corrente; da un altro punto di vista si potrebbero vedere le cose con il segno opposto, indicando però quello che equivale ad un campo elettrico opponentesi al moto.
E' però ora importante considerare cosa succede nell'intero circuito, e non solo su un singolo segmento di esso.
In regime stazionario non ci sono variazioni di flusso magnetico. Per la legge di Faraday-Henry non esistono allora nemmeno tensioni indotte, cioè l'integrale di circuitazione del campo elettrico è nullo, il campo elettrico è conservativo.
Affinché possa circolare corrente nel circuito, il ragionamento appena fatto per un singolo segmento va esteso a tutto il circuito, e quindi il punto di partenza e quello di arrivo coincidono; perché scorra corrente occorrerebbe una differenza di potenziale tra due punti coincidenti, e questo sarebbe in contraddizione con il fatto che il campo elettrico è conservativo. Per poter far scorrere corrente devono quindi esistere delle sorgenti di d.d.p. (differenza di potenziale), cioè punti del circuito, oppure segmenti di esso (o l'intero circuito) dove esistono sorgenti di una grandezza equivalente al campo elettrico e quindi di d.d.p.
Tali sorgenti sono indicate come generatori di tensione o di forza elettromotrice (fem). Il termine forza è improprio, visto che si parla di differenza di potenziale, ma viene usato per motivi storici. I generatori possono essere di varia natura, ma come esempio più significativo citiamo l'origine elettrochimica (pile ed accumulatori).
Indicando con:

$\overline{E}$ il campo elettrico di origine elettrostatica, conservativo

$\overline{E}_G$ il fenomeno equivalente ad un campo elettrico, dovuto ai generatori

$\overline{E}_R$ il fenomeno equivalente ad un campo elettrico, dovuto alla resistività

allora si può scrivere che:

$$\oint_L (\overline{E} + \overline{E}_G + \overline{E}_R) \cdot d\overline{l} = 0$$

e poiché:

$$\oint_L \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0 \quad \text{(essendo il campo elettrostatico conservativo)}$$

indicando:

$$e = \oint_L \overline{E}_G \cdot d\overline{l} \qquad \text{(f.e.m.)}$$

vale:

$$e + \oint_L \overline{E}_S \cdot d\overline{l} = 0$$

$$e = -\oint_L \overline{E}_R \cdot d\overline{l} = -\oint_L \rho \overline{J} \cdot d\overline{l} = -\oint_L \rho \frac{I}{A(l)} dl = RI$$

dove R è la resistenza dell'intero circuito e il verso di percorrenza della corrente è lo stesso che si è usato per l'integrale di circuitazione.
La corrente che circola in un circuito è pari alla fem totale generata nel circuito stesso diviso per la resistenza totale del circuito.
Tornando a vedere le cose su un singolo tratto, l'integrale tra due punti del campo elettrostatico può essere anche diverso da 0; quindi indicando:

$$e_{AB} = \int_B^A \bar{E}_G \cdot d\bar{l} \quad \text{(fem generata su quel tratto di circuito)}$$

vale quindi in generale:

$$V_A - V_B + e_{AB} = R_{AB} \cdot I_{AB}$$

(la corrente è convenzionalmente positiva se fluisce da A verso B).

1.11.2 - I principi di Kirchhoff

Se si considera una rete elettrica, di essa si possono individuare: i nodi, i rami, le maglie.
Per primi si definiscono i rami: un ramo o lato è un tubo del flusso della densità di corrente, nel quale si possa ritenere che la corrente sia uguale in ogni sezione. In particolare un singolo circuito può essere considerato come composto da un solo ramo.
Di conseguenza si definiscono i nodi: un nodo è un punto in cui convergono tre o più rami. Come sopra, il singolo circuito a rigore non possiede nodi.
Infine si definiscono le maglie: per maglia si intende qualunque percorso chiuso che, partendo da un nodo, ritorni al nodo stesso percorrendo diversi rami della rete, senza però mai percorrere un ramo più di una sola volta.
In regime stazionario, si consideri una superficie chiusa che contenga uno e un solo nodo. Vale:

$$\oiint_S \bar{J} \cdot \bar{n}\, dS = 0$$

ma il flusso totale della densità di corrente altro non è che la somma delle correnti che dal nodo escono attraverso i vari rami che al nodo afferiscono.
In dicando con K il nodo in questione, vale quindi:

$$\sum_{j \in k} i_{kj} = 0$$

dove con il simbolo di appartenenza a K dell'indice di sommatoria si indicano i nodi collegati al nodo K.
Questa relazione è enunciata dalla legge (o principio) di Kirchhoff ai nodi:
in regime stazionario, la somma algebrica delle correnti entranti (o uscenti) da un nodo (da una superficie chiusa) è nulla.
Se si considera invece una maglia, composta da N rami tra i nodi 1, 2, ..., N, per ogni ramo i tra il nodo I e il nodo I+1 può essere scritta la relazione:

$$V_I - V_{I+1} + e = R_i \cdot I_i$$

Scrivendo questa relazione per tutti i rami, e tornando al punto di partenza:

$$
\begin{aligned}
&V_1 - V_2 + e_1 = R_1 \cdot I_1 \\
&V_2 - V_3 + e_2 = R_2 \cdot I_2 \\
&\ldots\ldots \\
&V_{N-1} - V_{\overline{N}} + e_{N-1} = R_{N-1} \cdot I_{N-1} \\
&V_N - V_1 + e_N = R_N \cdot I_N
\end{aligned}
$$

si nota che sommando membro a membro le varie equazioni le varie V_i si cancellano a vicenda: si ritrova cioè il principio di conservazione del potenziale: vale allora che:

$$\sum_{i \in maglia} e_i = \sum_{i \in maglia} R_i \cdot I_i$$

Questa relazione è enunciata dalla legge (o principio) di Kirchhoff alle maglie.
In regime stazionario, la somma delle fem generate in una maglia è pari alla somma delle cadute di tensione ohmiche sui rami della maglia stessa.
Per quanto riguarda le convenzioni occorre fissare un verso di percorrenza della maglia; ciò fatto: nel primo membro dell'equazione precedente considerare positive le fem concordi e negative quelle discordi a tale verso, nel secondo membro considerare positive le correnti concordi e negative quelle discordi a tale verso.
I principi di Kirchhoff permettono, data una rete elettrica, di calcolare le correnti in ogni ramo e le tensioni in ogni lato (d.d.p. tra ogni coppia di nodi) una volta note le fem generate e i valori delle resistenze di ogni lato, cioè di risolvere o trovare lo stato della rete. Questo sarà l'argomento del capitolo 2 di queste dispense.

1.12 - Elettrodinamica quasi stazionaria

Anche questo argomento saràtrattato diffusamente in una successiva parte delle dispense; si forniscono qui solo i principi fondamentali.

1.12.1 - Effetto induttivo

Per prima cosa occorre descrivere le conseguenze della legge di Faraday-Henry.
Per esempio, sia dato un circuito composto da una sola spira. Se l'area sottesa da questa spira è attraversata da un campo magnetico variabile nel tempo, vale che:

$$\oint_L \overline{E} \cdot d\overline{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(L)} \overline{B} \cdot u_n dS$$

si presenta cioè un campo elettrico non conservativo lungo la spira stessa, o meglio, si misura una differenza di potenziale tra il punto di partenza e il punto di arrivo della spira, anche se questi coincidono. Si dice che esiste una tensione indotta; questo effetto prende anche il nome di induzione elettromagnetica.
Tale differenza di potenziale può sussistere se la spira è composta di materiale isolante; se invece il materiale è conduttore e la spira è chiusa su se stessa subito si verificherebbe l'insorgere di una corrente elettrica. Tale corrente in parte farebbe uso del campo elettrico forzante (con la corrente insorgerebbe qualcosa di equivalente ad un campo elettrico di origine ohmica che si oppone al primo), in parte generebbe nella spira un flusso che varia nel tempo in maniera opposta al primo, causando così una riduzione dell'induzione elettromagnetica.

Si consideri (altro esempio) un ramo di una rete elettrica. Se questo ramo ad un certo punto descrive una spira, la corrente che fluisce sul ramo stesso genera un campo e quindi un flusso magnetico. Il flusso è proporzionale alla corrente. Se la corrente è costante, il flusso non varia nel tempo, e quindi non esiste tensione indotta. Se invece la corrente per esempio tende ad aumentare, la variazione di flusso produrrà una tensione indotta che si oppone al verso della corrente; se la corrente tende a diminuire, la tensione si presenterà concorde alla corrente, tendente quindi a sostenerla. Esiste cioè una costante L, detta induttanza, per cui:

$$\upsilon(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Questo effetto è detto effetto induttivo.

1.12.2 - Effetto capacitivo

Si tratta del fenomeno di accumulo di cariche in certe parti del circuito, già visto nel paragrafo dedicato all'elettrostatica. Va però rilevato che se, facendo riferimento ad un condensatore, sulle lastre si presenta accumulo di carica, il sistema nel suo insieme rimane neutro; se visto come elemento circuitale, vale sempre che la corrente entrante (verso una lastra) è pari a quella uscente (dall'altra lastra).
Per qualunque condensatore va notato che , essendo:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

dove q è la carica depositata

$$i = C\frac{d\upsilon}{dt}$$

dove υ è la differenza di potenziale tra la lastra positiva e quella negativa; oppure:

$$\upsilon = \upsilon_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t i \cdot dt$$

Un paragone molto efficace per il condensatore è quello con la vasca o il lago: un flusso d'acqua entrante nella vasca rappresenta la corrente elettrica entrante, il livello dell'acqua indica la tensione elettrica, la quantità totale di acqua presente corrisponde alla carica elettrica. Più entra acqua e più il livello cresce; e se il livello varia vuol dire che dell'acqua è entrata o uscita. La capacità è legata alla superficie del bacino: se questa è grande, occorre molta acqua per variare il livello, oppure si può dire che il bacino può accumulare molta acqua senza alzarsi troppo di livello.

Se questi fenomeni (l'effetto induttivo e l'effetto capacitivo) sono localizzati in parti definite e limitate del circuito, le leggi di Kirchhoff potranno essere riscritte quasi allo stesso modo, alle condizioni che:
- nei nodi non si presentano effetti capacitivi
- le tensioni generate nei lati tengono conto dell'induzione di campi magnetici esterni
- al secondo membro le c.d.t. ohmiche vengono completate con le c.d.t. su altri componenti, schematizzabili come induttori e condensatori, per i quali la tensione va calcolata non solo come funzione lineare della corrente, ma anche della sua derivata o del suo integrale nel tempo.

In queste condizioni si può parlare di regime quasi stazionario, ed applicare ancora, con queste modifiche, le equazioni di Kirchhoff.
Se invece per esempio si considera anche il flusso che attraversa l'intera maglia, oppure il fatto che ci possono essere dispersioni di corrente per effetto capacitivo attraverso l'isolamento dei conduttori, il regime non può essere considerato quasi-stazionario, a meno che non si riesca a modellare tali fenomeni concatenando i loro effetti in singole parti della rete elettrica.

File: franchino - d:\proj\unibg\elett\dispense\CAP01.DOC
Stampato: gg/03/aa 21.50
Ver/Rev: drf,fin,tmp,old/0.2