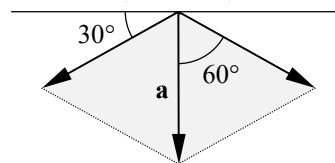


RAPPRESENTAZIONE E COMPOSIZIONE DI VETTORI

Aa1. Il vettore \mathbf{a} ha modulo $|\mathbf{a}| = 5$, è diretto come la verticale ed è scomposto secondo due direzioni, una formante un angolo di 30° con l'orizzontale e un'altra formante un angolo di 60° con la verticale. Le due componenti hanno modulo rispettivamente pari a
(A) 4.33, 2.5 (B) 4.33, 4.33 (C) 2.5, 2.5 (D) 2.5, 4.33 (E) 5, 5

SOLUZIONE. Si tracciano le due rette indicate per il punto di applicazione del vettore e le loro due parallele per il secondo estremo del vettore costruendo così un parallelogramma di cui \mathbf{a} è una diagonale. Il parallelogramma della figura, essendo diviso da \mathbf{a} in due triangoli equilateri, ha lati tutti uguali alla diagonale; i vettori in cui \mathbf{a} è scomposto hanno entrambi modulo pari a 5.

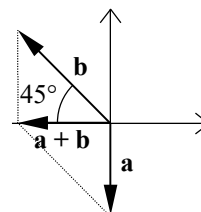


Aa2. Il modulo di un vettore diretto secondo la verticale discendente vale $|\mathbf{a}| = 5$. Si somma \mathbf{a} con un vettore \mathbf{b} formante un angolo di 45° con l'orizzontale. Se il vettore risultante $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ha componente verticale nulla, il modulo di \mathbf{b} vale

(A) 5 (B) 7.07 (C) 9.80 (D) 12.5
(E) 68.3

SOLUZIONE. Scomponendo \mathbf{b} lungo gli assi, si ha: $|\mathbf{b}| \cos(45^\circ) = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ e

$$|\mathbf{b}| \sin(45^\circ) = |\mathbf{a}|, \text{ da cui si ricava } |\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a}|}{\sin 45^\circ} = 7.07$$



Aa3. Due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} hanno modulo $|\mathbf{a}| = 5$ e $|\mathbf{b}| = 4$; se la loro somma ha modulo $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$ l'angolo β tra \mathbf{a} e \mathbf{b} è pari a

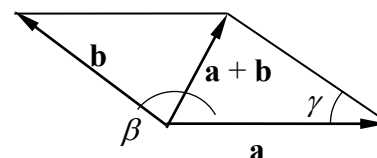
(A) 143.1° (B) 9.8° (C) 90° (D) 53.1° (E) 36.9°

SOLUZIONE. Si tratta di calcolare l'angolo β , supplementare di γ , che appartiene al triangolo di cui si conoscono i tre lati: $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ e $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$; tale angolo si può ricavare direttamente dalla relazione trigonometrica nota come il teorema di Carnot:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \gamma$$

Poiché $\gamma = 180^\circ - \beta$, $\cos \gamma = -\cos \beta$,

$$\text{si ricava } \cos \beta = \frac{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2}{2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{9 - 25 - 16}{40} = -0.8 \Rightarrow \beta = 143.1^\circ$$



È istruttivo risolvere il problema per via algebrica mediante le componenti dei vettori. Allineiamo il primo vettore lungo l'asse x : $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}$ e poniamo $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$. Le incognite sono le componenti cartesiane di \mathbf{b} che soddisfano alle relazioni

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{b}|^2 &= b_x^2 + b_y^2 = 16 \\ |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (5 + b_x)^2 + b_y^2 = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b_x^2 - (5 + b_x)^2 = -25 - 10b_x = 7$$

$$b_x = -\frac{32}{10} = -3.2$$

Poiché $b_x = b \cos \beta$, sostituendo si ha:

$$\cos \beta = \frac{b_x}{b} = \frac{-3.2}{4} = -0.8$$

da cui

$$\beta = \cos^{-1}(-0.8) = 143.1^\circ$$

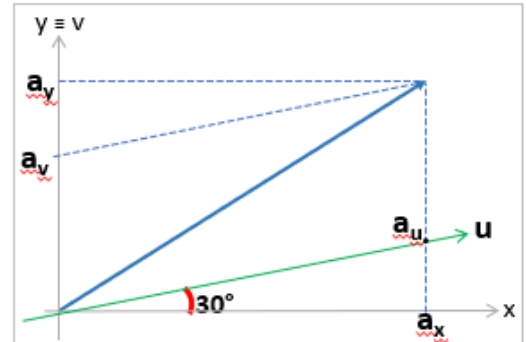
- Aa4.** Si scompone il vettore $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$ lungo due direzioni \mathbf{u} e \mathbf{v} che formano con l'asse x angoli $\vartheta = 30^\circ$ e $\varphi = 90^\circ$. Se $a_x = 3$, $a_y = 4$, la componente a_u vale
(A) 0.69 (B) 2.27 (C) **3.46** (D) 4.62 (E) 5

SOLUZIONE.

Considerati il riferimento ortogonale individuato dai versori \mathbf{i} e \mathbf{j} e il riferimento non ortogonale individuato da \mathbf{u} e \mathbf{v} , il vettore \mathbf{a} viene espresso nei due riferimenti come $\mathbf{a} = a_u \mathbf{u} + a_v \mathbf{v} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$.

Dalla figura si deduce che la relazione fra le componenti risulta:

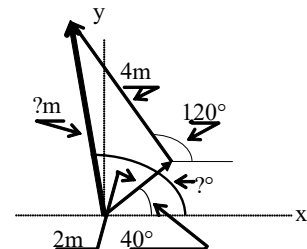
$$a_u = \frac{a_x}{\cos 30^\circ} = 3.46 \quad \text{e} \quad a_v = a_y - a_u \sin 30^\circ = 2.27$$



- Aa5.** Tra le seguenti affermazioni sono vere
(A) il coseno di un radiante è minore di $\cos 60^\circ$
(B) un angolo in radianti è il rapporto tra lunghezza di un arco di cerchio centrato al vertice compreso tra le due semirette e la lunghezza della circonferenza di pari raggio
(C) per angoli minori di 5° la differenza tra misura dell'angolo in radianti e seno dell'angolo è al più di qualche parte su diecimila*
(D) in un angolo giro vi sono 360 radianti
(E) un angolo di 90° corrisponde a 1.57 radianti*

- Aa6.** La risultante di uno spostamento di 2 m nella direzione che forma un angolo di 40° con l'asse x e un successivo spostamento di 4 m nella direzione che forma un angolo di 120° con l'asse x è di circa

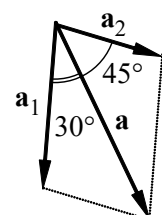
- (A) 5.2 m a 99° (B) 5.0m a $5^\circ 38'$ (C) 6.0m a 93°
(D) **4.77 m a 96°** (E) 6.1 m a 80°



- Aa7.** Un vettore $\mathbf{a} = 5\mathbf{j}$ è la risultante di due vettori \mathbf{b} , \mathbf{c} con $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j}$. Tra le seguenti affermazioni sono vere (segnare con una crocetta le affermazioni esatte)
(A) la componente c_x vale -3^*
(B) la componente c_y vale $+1^*$
(C) la somma dei moduli di \mathbf{b} e \mathbf{c} è maggiore del modulo di \mathbf{a}^*
(D) l'angolo formato tra \mathbf{c} e \mathbf{b} è pari a circa 53°
(E) l'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{c} è pari a circa 72°^*

- Aa8** Il vettore \mathbf{a} viene scomposto nei due vettori \mathbf{a}_1 ed \mathbf{a}_2 della figura. Se $|\mathbf{a}_1| = 3$ il modulo di \mathbf{a} vale circa

- (A) 2.60 (B) 3.00 (C) **4.10** (D) 4.50
(E) 5.00



Aa9. dato il vettore $\mathbf{A} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, determinare il vettore \mathbf{B} parallelo ad \mathbf{A} di lunghezza 10.

(A) $\mathbf{B} = 30\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 40\mathbf{k}$ 0.60 (B) $\mathbf{B} = -30\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}$

(C) $\mathbf{B} = -\frac{30}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{20}{\sqrt{29}}\mathbf{j} + \frac{40}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$ *

Aa10 Dimostrare che i vettori dati, se disposti punta-coda, formano un triangolo:

a) $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{C} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$;

b) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 1\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{C} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

Aa11. Ci si sposta di 20 m dall'origine di un sistema cartesiano in una direzione che forma un angolo antiorario di 210° con l'asse x . Le coordinate (x,y) del punto di arrivo sono (in metri)

(A) (17.3, -10) (B) (-12.5, 15) (C) (-1.5, 21.5) (D) (-17.3, -10) (E) (14.1, -14.1)

Aa12. Due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} hanno modulo $|\mathbf{a}| = 5$ e $|\mathbf{b}| = 4$; se la loro differenza ha modulo $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 3$ l'angolo formato tra \mathbf{a} e \mathbf{b} è pari a

(A) 143.1° (B) 36.9° (C) 90° (D) 53.1° (E) _____

Aa13. Si scompone il vettore $a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ lungo due assi \mathbf{u} e \mathbf{v} . La componente a_u lungo l'asse \mathbf{u} che forma un angolo di $+30^\circ$ con l'asse delle x vale $a_u = +3$; la componente a_v lungo il secondo asse \mathbf{v} , che forma un angolo di $+120^\circ$ con l'asse delle x , vale $a_v = +4$. La componente a_x vale

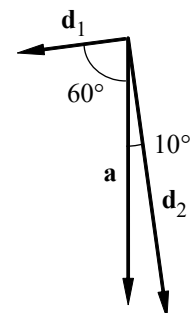
(A) 0.60 (B) 3.46 (C) 5 (D) 5.50 (E) 6.08

Aa14. Il vettore $\mathbf{a} = -5\mathbf{j}$ viene scomposto lungo le due direzioni \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 della figura.

Le componenti lungo \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 hanno modulo pari a circa

(A) 0.92; 4.61 (B) 4.00; 1.00 (C) 0.88; 4.77

(D) 1.00; 5.00 (E) 2; 4.92



PRODOTTO SCALARE E VETTORIALE

Ab1. Il prodotto scalare tra $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ è uguale a

(A) -110 (B) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ (C) $-|\mathbf{a}|^2$ (D) $|\mathbf{a}|^2$ (E) $|\mathbf{b}|^2$

SOLUZIONE. Il prodotto scalare, uguale alla somma dei prodotti delle componenti omologhe, è $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -5 \times 5 - 6 \times 6 - 7 \times 7 = -110$.

In questo caso particolare, in cui \mathbf{a} e \mathbf{b} hanno componenti uguali ed opposte, l'angolo formato dai vettori è di 180° e quindi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}|^2 = -|\mathbf{b}|^2$. Le soluzioni (A) e (C) sono entrambe accettabili

Ab2. L'angolo ϑ formato tra due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} con moduli dati da $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$ e prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10$ vale

(A) $27^\circ 15'$ (B) 30° (C) $33^\circ 33'$ (D) 45° (E) $56^\circ 26'$

SOLUZIONE. $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \vartheta = (4 \cdot 3) \cos \vartheta = 10 \Rightarrow \cos \vartheta = 0.8333 \Rightarrow \vartheta \approx 33^\circ 33'$

Ab3. L'angolo formato dai due vettori $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ vale, in valore assoluto

(A) $16^\circ 16'$ (B) $36^\circ 52'$ (C) $43^\circ 8'$ (D) $73^\circ 44'$ (E) 90°

SOLUZIONE. Basta osservare che $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ oppure, in modo equivalente, che $\frac{a_x}{a_y} = -\frac{b_y}{b_x}$, per dedurre che i vettori sono perpendicolari.

Ab4. Dati i tre vettori $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{j}$ il modulo del vettore $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ è pari a

- (A) 0 (B) 6 (C) 12 (D) 18 (E) 36

SOLUZIONE. Si ha $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 3\mathbf{i} \times (-12\mathbf{k}) = 36\mathbf{j}$ mentre $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = 0 \times \mathbf{c} = 0$. La risposta corretta è perciò (E). Questo esercizio dimostra che il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa.

Ab5. Il prodotto vettoriale di due vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} appartenenti al piano x,y è diretto nel verso dell'asse z e il suo modulo è $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 9$. Se $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$ e $|\mathbf{b}| = |b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}| = 5$, il valore assoluto della componente $|b_x|$ del vettore \mathbf{b} lungo x , vale

- (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5.2 (E) 8.5

SOLUZIONE Calcoliamo il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in forma analitica:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} = 3b_y \mathbf{k}. \text{ Quindi } 3|b_y| = 9 \Rightarrow |b_y| = 3$$

Tenendo presente la definizione del modulo del vettore \mathbf{b} , possiamo ricavare il valore della sua componente b_x lungo l'asse x : $b^2 = b_x^2 + b_y^2 \Rightarrow |b_x| = \sqrt{b^2 - b_y^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$

Ab6. L'angolo formato dai due vettori $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ vale, in valore assoluto

- (A) 16° 16' (B) 36° 52' (C) 43° 8' (D) 73° 44' (E) 90°

Ab7. Dati due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , tali per cui $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 7$ e $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 3$ il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ vale

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 10 (E) _____

Ab8. Dati due vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} con $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$ formanti tra loro un angolo $\alpha = 37^\circ$ con prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 20$, il modulo $|\mathbf{a}|$ vale

- (A) 7.08 (B) 7.91 (C) 9.36 (D) 10.62 (E) 13.24

Ab9. Dimostrare che i vettori $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 1.5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ e $\mathbf{C} = -3.5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, disposti punta-coda, sono i lati di un triangolo rettangolo.

Ab10. Dati i vettori $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -7\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$, determinare b_y affinché i due vettori risultino perpendicolari.

- (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 4.2 (E) 8.5

Ab11. Dati i vettori $\mathbf{A} = a_x\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - b_z\mathbf{k}$, determinare a_x e b_z affinché i due vettori risultino paralleli.

- (A) 3, -4 (B) -3, 4 (C) 2, 0.5 (D) -0.5, 2 (E) 4, -3

Ab12. Il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tra due vettori del piano xy , con $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$ vale $25\mathbf{k}$. Se \mathbf{b} è perpendicolare ad \mathbf{a} , le componenti cartesiane di \mathbf{b} valgono

- (A) 3, -4 (B) -3, 4 (C) 0, 5 (D) -4, 3 (E) 4, -3

Ab13. Il prodotto vettoriale di due vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} appartenenti al piano x,y è diretto nel verso dell'asse z (\mathbf{k}) e il suo modulo è $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 9$. Se $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$ e il modulo di $|\mathbf{b}| = |b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}| = 9$ il valore assoluto della componente $|b_x|$ del vettore \mathbf{b} lungo x , vale

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5.2 **(E) 8.5**

Ab14. Il modulo di **a** vale 6 mentre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 18$ e $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 24$. Tra le seguenti affermazioni è **falsa**

(A) **a** e **b** possono essere assunti nel piano del disegno con $\mathbf{a} = 6\mathbf{i}$ e $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$

(B) $|\mathbf{b}| < |\mathbf{a}|$

(C) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a}|$

(D) L'angolo formato tra **a** e **b** è acuto

(E) Il vettore **b** è completamente determinato *

Ab15. Dati i vettori $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 1\mathbf{i}$, determinare il vettore **C** di modulo 5 che sia complanare ad **A** e a **B**. Il problema ha una soluzione unica?