Angelo Baggini - Franco Bua
Università degli Studi di Bergamo - Facoltà di ingegneria - Corso di Elettrotecnica
Ethan Frome

ver. 1.0

3

Rappresentazione e analisi dei circuiti magnetici

3.1 - Il circuito magnetico

Si consideri una superficie S, di forma qualunque, e su di essa un'area A attraversata da campo magnetico; si consideri quindi in particolare il tubo di flusso del vettore induzione magnetica che interessa questa area. Per la solenoidalità del vettore induzione, tale tubo di flusso descriverà nello spazio un tragitto più o meno lungo, ma prima o poi dovrà richiudersi su se stesso, tornando alla superficie di partenza, filetto per filetto negli stessi punti di incidenza. Questo tubo di flusso chiuso prende il nome di circuito magnetico.
Perché un circuito magnetico esista (con valori di campo e induzione diversi da zero), occorre che la superficie delimitata dalla linea chiusa che esso percorre sia attraversata da corrente elettrica.
In ogni punto del circuito, i vettori campo e induzione saranno sempre coincidenti per quanto riguarda direzione e verso, ma differenti per quanto riguarda il modulo.
E' importante capire cosa succede ad una linea di forza del campo magnetico se questa attraversa la superficie di separazione tra due materiali aventi permeabilità magnetica relativa differente (μ_{r2} e μ_{r1} rispettivamente). In questo caso, dei due vettori campo e induzione, quello che conserva lo stesso valore nel passaggio è il vettore induzione. Se per esempio il passaggio avviene nel punto l_0 di una linea di forza, vale:

$$\overline{B}(l_0^{+}) = \overline{B}(l_0^{-})$$

$$\mu_0\mu_{r2}\overline{H}(l_0^{+}) = \mu_0\mu_{r1}\overline{H}(l_0^{-})$$

$$\overline{H}(l_0^{+}) = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\overline{H}(l_0^{-})$$

La legge di Gauss, che esprime la solenoidalità dell'induzione magnetica, va quindi presentata nella sua forma con il vettore induzione.
Il modulo del vettore campo presenta quindi una discontinuità nel passaggio (a meno che non si abbiano uguali permeabilità). In particolare, va notato che se la permeabilità magnetica aumenta, il campo diminuisce.

In tutto il percorso il valore del flusso del vettore induzione sarà costante. Lungo il circuito la sezione potrà restringersi e allargarsi, e di conseguenza l'induzione sarà rispettivamente più grande o più piccola. Si consideri, per ogni posizione λ del circuito, l'area della superficie normale, punto per punto, al campo magnetico, e la permeabilità magnetica relativa del materiale attraversato:

$$B(\ell) = \frac{\Phi_B}{A(\ell)}$$

e quindi:

$$H(\ell) = \frac{B(\ell)}{\mu_0 \mu_r(\ell)} = \frac{\Phi_B}{\mu_0 \mu_r(\ell) A(\ell)}$$

L'integrale di circuitazione (campo e induzione sono espressi in modulo perché già considerati paralleli alla linea di circuitazione) è pari alla corrente che attraversa il circuito:

$$I = \oint_L H(\ell) \cdot d\ell = \oint_L \frac{\Phi_B}{\mu_0 \mu_r(\ell) A(\ell)} d\ell = \Phi_B \oint_L \frac{d\ell}{\mu_0 \mu_r(\ell) A(\ell)}$$

L'integrale al secondo membro è alquanto simile all'integrale che esprime la resistenza di un circuito elettrico con la differenza che al posto della resistività appare il reciproco della permeabilità. Il valore di tale integrale esprime l'opposizione che il circuito magnetico oppone al passaggio del flusso; il suo valore è quindi pari al rapporto tra corrente e flusso stesso. Allora per analogia con quanto si fa per i circuiti elettrici, tale integrale prende il nome di riluttanza, e può essere calcolato anche per un solo tratto del circuito magnetico:

$$\Re_{ab} = \int_A^B \frac{d\ell}{\mu_0 \mu_r(\ell) A(\ell)}$$

Vale quindi:

$$I = \Re \Phi_B$$

indicando la riluttanza dell'intero circuito: queste ultime due relazioni possono essere sintetizzate nella legge di Hopkinson, che prevede chi "in un mezzo lineare il flusso dell'induzione magnetica è proporzionale alla corrente concatenata dal circuito stesso, secondo una costante di proporzionalità che dipende dalla permeabilità magnetica del mezzo e dalla sua geometria".
Il reciproco della riluttanza prende il nome di permeanza:

$$\Lambda = \frac{1}{\Re}$$

3.2 - Analogia tra circuito elettrico e magnetico

Come fatto per i circuiti elettrici, si possono definire allo stesso modo i concetti di rete, ramo (porzione di circuito percorsa dallo stesso flusso), nodo (punto di convergenza tra più rami), maglia (successione di rami a formare un percorso chiuso).
Si possono quindi stabilire queste corrispondenze:

Circuito elettrico	Circuito magnetico
corrente	flusso magnetico
densità di corrente	vettore induzione magnetica
resistenza	riluttanza
fem, E	fmm, M

dove si è introdotto, per analogia, il concetto di forza magnetomotrice, fmm, indicata con M. Essa è pari alla corrente totale I che attraversa la superficie delimitata dalla linea di circuitazione. Spesso lo stesso conduttore attraversa più di una volta la superficie, percorrendo delle spire; quindi la forza magnetomotrice è pari alla corrente per il numero di attraversamenti, cioè per il numero di spire N:

$$M = N \cdot I$$

Essendo il vettore induzione solenoidale come la densità di corrente, vale anche per i circuiti magnetici il principio di Kirchhoff ai nodi; a partire dalla legge di Ampère-Maxwell, anziché da quella di Faraday-Henry, si dimostra anche la validità del principio di Kirchhoff alle maglie.
Vale quindi:

$$\sum_{j \in i} \Phi_{Bji} = 0$$

$$\sum_{R} R_k \Phi_{Bk} = M = N \cdot I$$

Si possono allora utilizzare anche i circuiti (reti) magnetici i metodi di soluzione visti per i circuiti elettrici.
Esiste però una differenza, non irrilevante in termini pratici.
Nei circuiti elettrici, di fatto, i singoli rami sono generalmente ben definiti, perché sono appositamente costruiti con materiale conduttore, generalmente di sezione regolare; esternamente ai conduttori in pratica non esiste corrente, perché i rivestimenti e l'aria sono isolanti.
Non esistono invece materiali conduttori magnetici, cioè fortemente permeabili, e materiali isolanti magnetici, cioè pochissimo permeabili: per quasi tutti i materiali la permeabilità relativa è pressoché unitaria. Quindi il flusso magnetico non ha percorsi obbligati, ma solitamente si diffonde in un'ampia regione di spazio circostante la sua sorgente rendendo molto più difficile la modellazione circuitale.
L'unica eccezione a questo comportamento si presenta in presenza di corpi materiali composti di ferro. Il ferro è l'unico materiale ad elevata permeabilità magnetica, con un valore relativo pari ad alcune centinaia o anche migliaia. In presenza di un percorso in ferro, il flusso magnetico sceglie preferibilmente questa strada, che può quindi essere considerata un circuito magnetico vero e proprio. Se si considera lo stesso percorso appena fuori dal ferro, il valore dell'induzione si presenterà centinaia o migliaia di volte inferiore; tuttavia le linee di forza esterne al ferro possono allargarsi su sezioni molto ampie, avendo tutto lo spazio circostante a disposizione, così accade che il flusso esterno non è del tutto trascurabile rispetto a quello nel ferro. In pratica i due percorsi corrispondono (analogia con i circuiti elettrici) a due riluttanze (resistenze) poste in parallelo, sotto la stessa fmm (fem): la prima sezione limitata ma con elevata permeabilità (bassa resistività), la seconda con scarsa

permeabilità (grande resistività) ma sezione molto grande. Insomma, un circuito magnetico presenta sempre dei flussi parassiti, detti flussi dispersi, che rendono meno agevole un calcolo corretto.
Nei circuiti in ferro possono presentarsi dei brevi tratti in aria (o altro materiale con permeabilità relativa unitaria). Per esempio, il circuito può non essere tutto in un unico blocco, esistere, quindi, nelle giunzioni, brevi interstizi; oppure volutamente è stato costruito con delle con delle distanze in aria: ciascuno di questi tratti in aria si chiama traferro, e può presentare una riluttanza non indifferente, paragonabile a quella del tratto in ferro. Se per esempio la permeabilità relativa del ferro è pari a 1000, un tratto in aria di un millimetro ha la stessa riluttanza di un tratto in ferro lungo un metro: infatti, per rami di forma regolare, vale:

$$\Re = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\ell}{A}$$

quindi la lunghezza mille volte maggiore del tratto in ferro è compensata dal valore mille volte maggiore della permeabilità relativa.
Un circuito magnetico ben definibile anche senza parti in ferro è quello generato da un solenoide percorso da corrente: un solenoide è una sequenza di spire di conduttore, disposto quindi in forma di elica che si avvolge lungo un asse.
Se la lunghezza del solenoide è sufficientemente più grande del suo diametro, il campo magnetico può essere considerato uniforme all'interno del solenoide, con le linee di forza parallele all'asse dell'elica; ad una estremità le linee di forza usciranno, allargandosi a loro piacimento, per poi tornare e restringersi per rientrare dall'altra estremità. si può allora considerare il circuito magnetico come composto da due riluttanze in serie: la prima corrisponde al tratto interno, di forma regolare; la seconda per il tratto esterno. Quest'ultima viene considerata trascurabile perché la sua sezione, benché non uniforme, sarà molto grande. Allora:

$$\Phi_B = \frac{NI}{\Re} = \mu_0 \mu_r \frac{NIA}{\ell} = \mu_0 \mu_r AnI$$

dove:

$$n = \frac{N}{\ell}$$

Quindi:

$$B = \frac{\Phi_B}{A} \mu_0 \mu_r nI$$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = nI$$

Il valore del campo e dell'induzione sono proporzionali solo alla corrente e al numero di spire per unità di lunghezza.

3.3 - Induzione elettromagnetica

La variazione nel tempo dell'induzione magnetica e del suo flusso provoca l'insorgere di tensione elettrica. Infatti in presenza di tali variazioni il campo elettrico non è più rotazionale e quindi il suo integrale di circuitazione lungo la linea chiusa risulta diverso da zero. La legge di Faraday-Henry descrive in maniera rigorosa questo fenomeno:

$$\oint_L -\overline{E} \cdot d\overline{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(L)} -\overline{B} \cdot \overline{\mu} dS = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Si consideri allora una spira di conduttore, avvolta attorno ad un ramo di un circuito magnetico, dal suo estremo iniziale A al suo estremo finale B, in modo da descrivere un giro completo. Si supponga che l'avvolgimento vada da A a B nel verso di rotazione di una vite destrorsa che avanzi nello stesso verso in cui il flusso magnetico è considerato positivo in quel ramo: allora, in caso di variazione del flusso, la tensione che si crea ai capi A e B della spira vale:

$$\upsilon_{BA} = \int_B^A -\overline{E} \cdot d\overline{\ell} = \oint_L \overline{E} \cdot d\overline{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Utilizzando per la spira la convenzione degli utilizzatori, interessa conoscere la tensione tra il morsetto in cui entra la corrente e quello da cui esce:

$$\upsilon_{AB} = -\upsilon_{BA} = +\frac{d\Phi_B}{dt}$$

In particolare, si consideri un circuito magnetico composto da una sola maglia magnetica, e dove l'unica fmm sia data dalla spira stessa. Per le convenzioni stabilite, una corrente positiva produce un flusso positivo:

$$\Phi_B = \frac{i_{AB}}{\Re}$$

dove si utilizza la riluttanza dell'intero circuito magnetico. Quindi:

$$\upsilon_{AB} = \frac{1}{\Re} \frac{di_{AB}}{dt}$$

Si noti che anche se la spira fosse avvolta nel verso opposto, e quindi la corrente da A a B circuitasse in senso antiorario, si sarebbe ottenuta la stessa equazione, perché tale situazione sarebbe perfettamente simmetrica: infatti una corrente positiva con tali convenzioni genera un flusso orientato nel verso opposto rispetto al caso precedente; basta quindi cambiare il verso convenzionale positivo per il flusso, e il verso di rotazione torna ad essere quello orario, quindi si può ripetere il ragionamento identicamente.
Notiamo allora che il bipolo elettrico di estremi A e B, che interagisce con il circuito magnetico, presenta una caratteristica particolare: nel caso la corrente tenda ad aumentare, il bipolo "reagisce" opponendo tensione all'ingresso della corrente (tensione positiva utilizzando la convenzione degli utilizzatori); nel caso la corrente tenda a diminuire, il bipolo "reagisce" presentando la tensione concorde alla corrente (tensione negativa): Si può quindi dire che tale bipolo tende a conservare il valore di corrente sull'ultimo valore che gli è stato imposto.

Tale bipolo prende il nome di induttore, o auto induttore, dato che il circuito magnetico induce tensione sullo stesso circuito elettrico che ha generato la fmm.
Quello visto in questo esempio è il caso più semplice di auto induzione. Una maggiore complessità può essere introdotta considerando il caso in cui vi siano più spire (in serie). Allora il flusso aumenta in proporzione al numero di spire:

$$\Phi_B = \frac{M}{\Re} = \frac{Ni_{AB}}{\Re}$$

e indicando semplicemente con i la corrente da A a B e con e le tensione su una singola spira:

$$e = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{N}{\Re}\frac{di_{AB}}{dt}$$

ed infine la tensione totale υ tra A e B:

$$\upsilon = Ne = \frac{N^2}{\Re}\frac{di}{dt}$$

Come si può notare, la tensione è aumentata secondo il quadrato del numero di spire. Spesso, in presenza di spire, si parla anche di flusso concatenato, pari al flusso di ogni spira moltiplicato per il numero totale delle spire:

$$\Psi_B = N\Phi_B$$

Il termine L tale che:

$$\upsilon = L\frac{di}{dt}$$

e quindi:

$$L = \frac{\Psi_i}{i_i}$$

quando $i_j = 0$ per ogni $j \neq i$

e che in questo caso vale:

$$L = \frac{N^2}{\Re}$$

prende il nome di induttanza in generale, auto induttanza in particolare in questo caso, dove la tensione è indotta sullo stesso avvolgimento elettrico dove scorre la corrente che genera il flusso magnetico.

L'unità di misura dell'induttanza è l'henry, simbolo H. Dall'analisi dimensionale dell'espressione:

$$[V] = [H]\cdot[A / s] \Rightarrow [H] = [\Omega \cdot s]$$

Va notato che la ddp che si presenta ai capi di un induttore reale non dipenderà solo dall'induttanza, ma esisterà comunque un termine resistivo, di modo che:

$$\upsilon = Ri + L\frac{di}{dt}$$

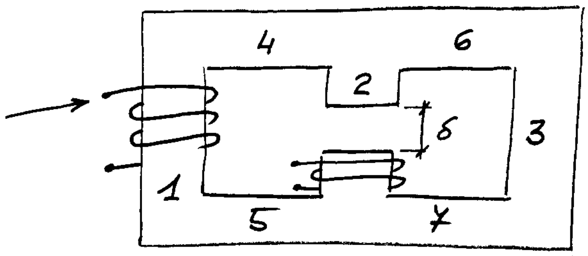
tuttavia spesso si preferisce vedere separatamente i due effetti modellando l'induttore reale come la serie di due bipoli ideali, uno puramente resistivo (solo R) e uno puramente induttivo (solo L). Ovviamente il punto di separazione tra i due bipoli è un punto virtuale, nel senso che nel componente reale effetto resistivo ed effetto induttivo si presentano nella stessa proporzione in ciascun tratto infinitesimo del circuito.
Frequentemente, comunque, il termine resistivo è trascurabile.
Attraverso i circuiti magnetici è possibile indurre tensione anche su circuiti elettrici diversi da quelli che generano la fmm: basta che anche questi siano avvolti intorno a tronchi in cui scorre tutto o una parte del flusso magnetico generato: si parla in tal caso di mutuo induttore.
Si consideri un circuito magnetico intorno al quale siano presenti due avvolgimenti, che verranno indicati come 1 e 2 rispettivamente. I due avvolgimenti possono essere posti sullo stesso ramo o su due rami distinti del circuito magnetico. Si avrà allora che il flusso che concatena l'avvolgimento 1 non sarà generato solo dalla corrente nell'avvolgimento stesso, ma in generale anche dalla corrente nell'avvolgimento 2, perché il flusso da questa prodotto circolerà almeno in parte in ogni ramo del circuito magnetico, quindi anche nel ramo intorno a cui è posto l'avvolgimento 1. Così pure il flusso nell'avvolgimento 2 dipenderà dalle correnti negli avvolgimenti 1 e 2: il discorso può essere generalizzato a un numero generico di avvolgimenti.
Questo è l'effetto di mutua induzione; il parametro che lo descrive è la mutua induttanza:

$$M_{ij} = \frac{\Psi_i}{i_j} \quad \text{quando } i_i = 0,\ \ i_k = 0 \ \text{ per ogni } k \neq i, j$$

che si misura in henry, come le auto induttanze.
Quindi in generale per un sistema con più avvolgimenti vale :

$$\upsilon_1 = R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt} + \ldots + M_{1N}\frac{di_N}{dt}$$
$$\upsilon_2 = R_{21} i_{21} + M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} + \ldots + M_{2N}\frac{di_N}{dt}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\upsilon_N = R_N i_N + M_{N1}\frac{di_1}{dt} + M_{N2}\frac{di_2}{dt} + \ldots + L_N\frac{di_N}{dt}$$

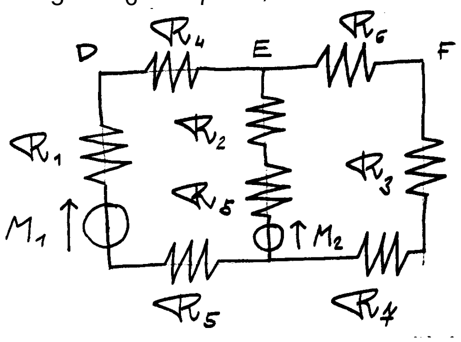
Per chiarire meglio la situazione si consideri il seguente esempio:



di cui sono dati i parametri geometrici e magnetici e i numeri di spire:

$$A_1 = A_3 = 0{,}20 \text{ m}^2 \quad A_2 = 0{,}25 \text{ m}^2 \quad N_1 = 50 \quad N_2 = 60$$

$$A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 0{,}25 \text{ m}^2$$



$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 1{,}0 \text{ m} \qquad \delta = 1 \text{ mm}$$

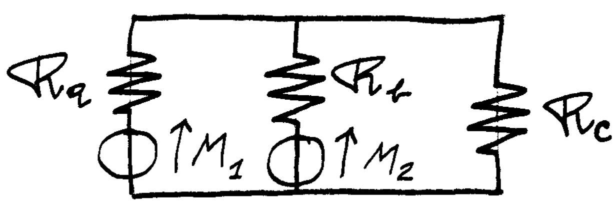
$$\ell_4 = \ell_5 = \ell_6 = \ell_7 = 0{,}5 \text{ m} \quad \mu_r = 1000$$

Gli avvolgimenti elettrici sono posti sui rami 1 e 2, con versi di avvolgimento e di ingresso della corrente tali da produrre, con correnti positive, fmm orientate come da figura.
Si possono calcolare le riluttanze dei singoli rami, e quindi modellare il circuito magnetico mediante un equivalente elettrico, secondo l'analogia già introdotta:

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_3 = 4000 \text{ H}^{-1}$$
$$\mathfrak{R}_2 = 3200 \text{ H}^{-1} \quad \mathfrak{R}_\delta = 3200 \text{ H}^{-1}$$
$$\mathfrak{R}_4 = \mathfrak{R}_5 = \mathfrak{R}_6 = \mathfrak{R}_7 = 1600 \text{ H}^{-1}$$

si trascurano eventuali flussi di dispersione (in aria) e le relative riluttanze si suppongono quindi di valore ∞.

Come si può notare la rete presenta in realtà due soli nodi, indicati come B ed E, tra i quali vi sono tre rami in parallelo:



$\Re_a = \Re_4 = \Re_1 = \Re_{57} = 7200\ H^{-1}$

$\Re_b = \Re_2 = \Re_3 = 6400\ H^{-1}$

$\Re_c = \Re_6 = \Re_1 = \Re_7 = 7200\ H^{-1}$

Si supponga di poter procedere con la sovrapposizione degli effetti (in realtà i materiali magnetici presentano spesso un comportamento non lineare).
Con tali valori il generatore di fmm 1, sul ramo a, vede tutta la rete come una riluttanza pari a:

$$\Re_{(a)} = \Re_a + \Re_b \Updownarrow \Re_c = 7200 + \frac{7200 \cdot 6400}{7200 + 6400} \cong 10600\ H^{-1}$$

e così pure il generatore di fmm 2, sul ramo b, "vede" tutta la rete come:

$$\Re_{(b)} = \Re_b + \Re_a \Updownarrow \Re_c = 6400 + \frac{7200 \cdot 7200}{7200 + 7200} \cong 10000\ H^{-1}$$

Si possono quindi indicare subito i valori delle auto induttanze per i due avvolgimenti, considerando per ciascuna che sia acceso il proprio generatore di fmm e spento (un cto cto) l'altro:

$$L_{11} = N_1^2 \frac{1}{\Re_{(a)}} = \frac{2500}{10600} = 0{,}236\ H$$

$$L_{22} = N_2^2 \frac{1}{\Re_{(b)}} = \frac{3600}{10000} = 0{,}360\ H$$

Oltre all'effetto auto induttivo, va considerato che il flusso generato da ogni avvolgimento concatena almeno in parte anche l'altro; quindi, se tale flusso è variabile nel tempo, genererà tensione nell'altro avvolgimento.
In questo caso il flusso generato dal generatore di fmm 1 (con il generatore 2 spento) si ripartirà nei due rami b e c in proporzione al reciproco delle rispettive riluttanze, in maniera tale da presentare la stessa caduta di tensione (analogia elettrica per i circuiti magnetici) sui due rami. Si tratta quindi di un partitore di flusso, l'analogo magnetico di un partitore di corrente.

$$\Phi_1 = -\Phi_{b1} - \Phi_{c1}$$

$$\Phi_{b1} \cdot \Re_b = -\Phi_{c1} \cdot \Re_c$$

dove si utilizza il segno negativo perché, se il flusso generato è positivo nel ramo a, sarà orientato negativamente nei rami b e c. Quindi vale:

$$\Phi_{b1} = -\ \frac{\Re_c}{\Re_b + \Re_c} \Phi_1$$

e poiché:

$$\Phi_1 = \frac{N_1 i_1}{\Re_{(a)}}$$

si ha:

$$M_{21} = -\frac{\Re_c}{\Re_b + \Re_c} N_1 N_2 \frac{1}{\Re_{(a)}} = \frac{7200}{13600} \cdot 50 \cdot 60 \frac{1}{10600} = -0{,}15 \text{ H}$$

Mentre le auto induttanze sono sempre positive, le mutue induttanze sono positive o negative a seconda dei reciproci orientamenti coinvolti. In questo caso, percorrendo una maglia che comprendesse entrambi i rami con avvolgimenti elettrici, i due avvolgimenti presentavano versi disaccordi, da cui il segno negativo.
Il procedimento ora seguito va ripetuto per calcolare la mutua induttanza M_{12}, che esprime il rapporto tra il valore del flusso concatenato dall'avvolgimento 1 e la corrente che lo genera, nell'avvolgimento 2. Si trova quindi:

$$M_{12} = -\frac{\Re_c}{\Re_a + \Re_c} N_1 N_2 \frac{1}{\Re_{(b)}} = \frac{7200}{14400} \cdot 60 \cdot 50 \frac{1}{10000} = -0{,}15 \text{ H}$$

Si nota che: $M_{12} = M_{21}$.
Non si tratta di una coincidenza numerica. Esplicitando il valore delle riluttanze $\Re_{(a)}$ e $\Re_{(b)}$ si potrebbe notare che l'eguaglianza è anche in termini simbolici, quindi valida per qualunque valore dei parametri e per qualsiasi situazione.

3.4 - L'energia nel campo magnetico

E' poi stato messo in evidenza che per mantenere la corrente in un circuito è necessario spendere energia. L'energia necessaria nell'unità di tempo (in altre parole, la potenza) è VI. Relativamente ad un qualsiasi tratto di circuito è possibile scrivere:

$$V = RI + L\frac{dI}{dt}$$

Moltiplicando questa equazione per I, si ottiene:

$$VI = RI^2 + LI\frac{dI}{dt}$$

Il termine RI^2 rappresenta potenza spesa per muovere gli elettroni attraverso il reticolo cristallino del conduttore e trasferirla agli ioni costituenti il reticolo. Interpretiamo quindi l'ultimo termine nell'equazione precedente come l'energia necessaria per unità di tempo (potenza) per istituire la corrente e creare il campo magnetico associato. Quindi la rapidità di aumento dell'energia magnetica è:

$$\frac{dEm}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

L'energia magnetica necessaria per incrementare la corrente da zero al valore I è pertanto:

$$E_m = \int_0^E dE_m = \int_0^I LIdI = E_m = \int_0^E dE_m = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

L'energia magnetica E_m può anche essere calcolata usando l'espressione:

$$E_m = \frac{1}{2\mu}\int B^2 dn \quad E_m = \frac{1}{2\mu}\int B^2 d\upsilon$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume nel quale il campo magnetico è diverso da zero e $d\upsilon$ è l'elemento di volume.
Possiamo interpretare tale espressione dicendo che l'energia spesa per stabilire la corrente è stata immagazzinata nello spazio circostante, per effetto del campo magnetico.

Un'analisi approfondita, che qui non sarà data, mostra però che i risultati sono del tutto generali.

3.5 - Azioni meccaniche

E' già stato messo in evidenza che la forza di Lorentz comporta interazioni di tipo meccanico in presenza di campi magnetici e correnti.
Un altro tipico effetto meccanico è la forza di attrazione e di repulsione tra le varie parti di un circuito magnetico, e in particolare in prossimità dei traferri. Se si ha un circuito magnetico con diverse parti in ferro, non unite saldamente le une alle altre o a un altro vincolo, le forze che si creano fra queste parti provocherà il loro spostamento. Un metodo rigoroso ma al tempo stesso semplice per calcolare queste forze si basa su un principio energetico. Se le distanze variano, anche di un termine infinitesimale (o, se si preferisce un approccio Lagrangiano, di uno spostamento virtuale), cambiano i valori delle riluttanze, e quindi delle induttanze, e di conseguenza l'energia accumulata dal campo magnetico.
In assenza di altre sorgenti di potenza (si supponga per esempio che il flusso non cambi, e quindi non si manifesti tensione indotta, in modo che i circuiti elettrici non scambino energia con quelli magnetici), la variazione di energia accumulata sarà pari al lavoro infinitesimale, o virtuale, svolto dalla forza esterna per effettuare lo spostamento. La forza di origine magnetica tra le varie parti del circuito è quindi uguale e contraria a tale forza esterna.
Un caso molto semplice è quello del circuito magnetico composto da una sola maglia, la quale però non è composta di un blocco unico in ferro, ma di due parti separate da due uguali traferri.
I traferri sono di lunghezza variabile. E' proprio in corrispondenza di essi che si svilupperà una forza (che si vedrà essere attrattiva) tra le due parti in ferro.
Si supponga di poter considerare uguali le aree nel ferro e in aria (nell'ipotesi che i traferri siano piccoli, il flusso nei passaggi in aria non si allarga in maniera significativa).
L'energia magnetica può essere calcolata con l'integrale di volume:

$$E_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o \mu_{Fe}} A \cdot l_{Fe} + \frac{1}{2}\frac{B^2}{2\mu_o} A \cdot 2l_{aria}$$

Un aumento del traferro a parità di flusso e quindi di induzione, comporta una variazione di energia:

$$\delta E_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{2\mu_o} A \cdot 2\delta l_{aria}$$

quindi la forza agente deve valere:

$$F_a = \frac{\delta B^2}{\delta l_{aria}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o} A \cdot 2$$

l'espressione è positiva, quindi questa forza, che è quella che dall'esterno compie il lavoro, è orientata come lo spostamento deve quindi essere diretta ad allontanare le due parti. Tale forza magnetica sarà ripartita in parti uguali sui traferri; quindi su ciascun traferro vale:

$$F_B = \frac{F_a}{2} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o} A$$

il segno negativo indica che è attrattiva. Si noti che la forza è indipendente dal segno (cioè dall'orientamento) dell'induzione, dato che questa appare elevata al quadrato.
Il principio così descritto è quello su cui si basano gli elettromagneti, diffusi in svariate applicazioni, con portate di ogni ordine di grandezza: per esempio potentissimi nelle industrie, dove sono usati sui carri-ponte per sollevare rottami ferrosi (anche parecchie tonnellate), oppure di medie potenze negli interruttori automatici (a seconda delle dimensioni di questi) e nei relè, oppure agenti con forze minime nelle piccole suonerie domestiche. Si noti che il termine di permettività del vuoto al denominatore rende notevole il valore della forza anche con induzioni e superfici abbastanza piccole.

3.6 - Materiali ferromagnetici

Una prima rilevante particolarità è il problema della non linearità del comportamento magnetico: vale a dire, il valore di permeabilità relativa non è indipendente dal valore del campo, o dell'induzione.
Si consideri il grafico che riporta il valore dell'induzione in funzione del valore del campo.
La linea che si ottiene, o la funzione che essa rappresenta, prende il nome di caratteristica di magnetizzazione. Tale caratteristica presenta generalmente un andamento simmetrico rispetto all'origine, il che significa che non esiste un verso privilegiato per il flusso magnetico tranne che in alcuni casi particolari.
La caratteristica presenta un andamento con buona approssimazione rettilineo solo nell'intorno dell'origine, fino ad un dato valore (positivo o negativo, la curva è simmetrica) di induzione. Oltre tale punto (spesso indicato come ginocchio della caratteristica), allontanandosi dall'origine, la caratteristica inizia a piegare, diminuendo la sua inclinazione.
Il fenomeno evidenziato da tale andamento prende il nome di saturazione magnetica e il punto dove inizia (il ginocchio) prende il nome di punto di saturazione. In realtà il fenomeno non inizia bruscamente, ma con gradualità. Valori tipici di inizio della saturazione sono intorno a 0.8÷1.2 T a seconda del materiale.
La caratteristica di magnetizzazione da lì in poi torna ad avere un andamento rettilineo, ma il coefficiente angolare è molto più piccolo di quello del tratto iniziale, non saturo (1000÷2000 volte inferiore).
Ponendo il grafico invece il valore della permeabilità relativa, si ottiene fino al punto di saturazione un valore pressoché costante (segmento di retta parallela all'asse delle ascisse) e poi valori via via decrescenti, ma sempre con continuità. Per valori molto elevati di campo si arriva fino ad un valore limite di permeabilità relativa unitario: sono completamente scomparsi gli effetti ferromagnetici, e il materiale si comporta come l'aria o il vuoto.
In realtà nemmeno il primo tratto della caratteristica è perfettamente lineare, ma solitamente presenta un andamento leggermente meno ripido all'inizio, per poi arrivare alla massima pendenza e quindi decadere nel tratto saturo. Il valore della permeabilità iniziale, che poi

cresce sensibilmente (anche raddoppiato) ma nell'arco di una variazione limitata di induzione (0.1÷0.3 T), rimane abbastanza costante fino a 0.8÷1.0 T e infine quindi scende oltre tali valori. La non-linearità del tratto iniziale è comunque, nella maggior parte della applicazioni pratiche, meno rilevante o trascurabile.
Il fenomeno della saturazione ha invece conseguenze molto rilevanti. Non va infatti dimenticato che il valore del campo H, è rigorosamente proporzionale al valore della fmm, cioè della corrente che circola negli avvolgimenti; mentre il valore della tensione indotta è rigorosamente proporzionale alla derivata del flusso e quindi dell'induzione magnetica B. La saturazione pertanto produce, nell'andamento nel tempo della tensione o della corrente, delle distorsioni rispetto al comportamento lineare. Nella maggior parte delle applicazioni pratiche si utilizzano tensione e correnti con andamento nel tempo di tipo sinusoidale, perché occorrono funzioni variabili nel tempo per ottenere variazioni di flusso e quindi tensioni indotte, le funzioni seno e coseno sono: periodiche (si torna sempre al valore di partenza), molto regolari (sono continue e derivabili infinite volte) e la derivata di una funzione sinusoidale è ancora una funzione sinusoidale, sfasata di 90°.
Si consideri per esempio un semplice circuito magnetico, composto di un solo percorso magnetico di lunghezza l e sezione costante A. Intorno ad esso si abbia un avvolgimento con N spire percorse da una corrente i, ai cui morsetti si misuri una tensione e. Essendo costante la sezione lungo tutto il percorso, a parità di corrente si presenterà lo stesso valore di campo in ogni punto del circuito magnetico:

$$H = \frac{Ni}{l}$$

mentre la tensione ai morsetti vale:

$$\nu = NA\frac{dB}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

Si supponga di alimentare il circuito elettrico con un generatore ideale di corrente, che imponga una corrente sinusoidale:

$$i(t) = I_M \cdot \mathrm{sen}(\omega t)$$

Si ha quindi:

$$H(t) = \frac{N}{l} I_M \cdot \mathrm{sen}(\omega t) = H_M \cdot \mathrm{sen}(\omega t)$$

$$B(t) = \mu_0\mu_r \cdot H(t) = \mu_0\mu_r \cdot H_M \cdot \mathrm{sen}(\omega t)$$

In condizioni di linearità, anche l'induzione sarebbe perfettamente sinusoidale, ma per effetto della saturazione la permeabilità relativa non è costante, ma decresce al crescere di H e B, cosicché i valori più elevati (positivi o negativi) della sinusoide vengono ridotti, ottenendo una sinusoide appiattita nelle sommità. La derivazione di siffatta funzione, anziché portare a:

$$\nu(t) = NA\frac{dB}{dt} = NAB_M\omega \cdot \cos(\omega t) = \omega L I_M \cdot \cos(\omega t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$$

che sarebbe una funzione perfettamente sinusoidale, porta ad una funzione sicuramente deformata. In particolare:

- i valori massimi di tensione corrispondono alle derivate del flusso in prossimità del passaggio per lo zero, dove quindi B è piccolo, quindi non si ha saturazione; i valori massimi di tensione non sono quindi influenzati dalla saturazione;
- i valori di flusso in corrispondenza della zona deformata sono valori appiattiti, quindi con derivata ridotta rispetto alla condizione normale; pertanto, dopo i massimi e una prima discesa regolare, le tensioni si avvicinano allo zero più rapidamente e più lentamente riprendono a salire.

Si supponga invece di alimentare il circuito elettrico con un generatore ideale di tensione, che eroghi una tensione con andamento sinusoidale del tipo:

$$e(t) = E_M \cdot \cos(\omega t)$$

Nel circuito dovrà allora passare una corrente tale da generare un flusso che per induzione produca una tensione ai morsetti pari alla fem applicata. Pertanto dovrà essere:

$$N\frac{d\Phi(t)}{dt} = v(t) \Rightarrow \Phi(t) = \frac{1}{N}\int v(t)dt = \frac{V_M}{\omega N}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$B(t) = \frac{V_M}{\omega NA}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$H(t) = \frac{B(t)}{\mu_0\mu_r} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\frac{V_M}{\omega NA}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

In condizioni di linearità anche il campo sarebbe una sinusoide perfetta. Ma il valore della permeabilità relativa non è costante, ma decresce al crescere di H e di B, cosicché in corrispondenza dei massimi della sinusoide di H i suoi valori vengono amplificati. La situazione è invece quella prevista nelle zone della sinusoide dove i valori di H sono piccoli. La corrente segue lo stesso andamento, in modo da presentare un massimo più grande (anche di molte volte se la saturazione è rilevante) di quello che si otterrebbe in condizioni lineari. Insomma, poiché la permeabilità è diminuita, occorre molta più corrente per ottenere lo stesso flusso di induzione.

Si noti che la non linearità, cioè permeabilità relativa non costante, significa anche induttanze non costanti:

$$L = \frac{N^2}{\Re} = N^2 / \int_L \frac{dl}{\mu_0\mu_r A}$$

per esempio per un semplice oggetto cilindrico:

$$L = \mu_0\mu_r \frac{A}{l} = N^2$$

l'induttanza dipende dall'induzione e decresce al crescere di questa.

Una seconda particolarità dei materiali ferromagnetici è il fenomeno dell'isteresi.

Si supponga di aver portato il materiale ad un certo valore di induzione, per esempio positivo (ma se fosse negativo il fenomeno sarebbe lo stesso, solo con i segni opposti), percorrendo la curva di magnetizzazione. A questo punto diminuendo il valore del campo magnetico anche l'induzione diminuisce, ma seguendo una strada differente da quella della caratteristica di magnetizzazione. In particolare si nota che quando il campo è tornato al valore zero, l'induzione conserva ancora un valore che prende il nome di magnetizzazione

residua, dello stesso segno dell'induzione iniziale. Per far tornare a zero il valore dell'induzione, occorre quindi raggiungere valori negativi di campo. La strada percorsa può essere rappresentata come una curva molto simile alla caratteristica di magnetizzazione, ma che partendo dallo stesso punto torna indietro rimanendo un poco sopra (come valori di induzione) alla caratteristica originaria.
Se si scende ad un valore negativo di induzione, pari in modulo a quello positivo di partenza e poi si vuole tornare indietro, stavolta il percorso sarà sotto alla caratteristica passante per l'origine, evidenziando quindi un valore residuo di magnetizzazione uguale e contrario a quello rimasto provenendo da un valore di induzione positiva.
Tornando fino al punto positivo di partenza si è descritto allora un intero ciclo, detto appunto ciclo di isteresi, composto da due percorsi simmetrici rispetto all'origine. La figura così ottenuta delimita quindi un'area la cui superficie è con buona approssimazione proporzionale al quadrato dell'induzione massima. I due vertici della figura si trovano sulla caratteristica di magnetizzazione originaria, detta caratteristica di prima magnetizzazione, perché il materiale segue tale curva solo la prima volta che viene magnetizzato, o quando viene magnetizzato a partire da una condizione priva di magnetizzazioni residue.
L'isteresi è un fenomeno dissipativo. Si ricorda che l'energia associata al campo magnetico per unità di volume vale:

$$e_B = \frac{dE_B}{dV} = \frac{1}{2} HB$$

Una variazione del campo e dell'induzione produce una variazione dell'energia:

$$de_B = \frac{1}{2}(HdB + BdH)$$

ma:

$$BdH = HdB$$

e quindi:

$$de_B = HdB$$

la potenza (per unità di volume) necessaria per variare il campo magnetico:

$$p_B = \frac{de_B}{dt} = H\frac{dB}{dt} \qquad (1)$$

Questa formulazione è ben raccordabile con l'espressione della potenza elettrica:

$$p_E = iv$$

il campo magnetico infatti è strettamente proporzionale alla corrente e la variazione dell'induzione è strettamente proporzionale alla tensione. Integrando la (1) su un intero volume infatti si introdurrà un'area (induzione per area=flusso) e una lunghezza (campo per lunghezza=fmm=corrente).
Considerando allora la figura del ciclo di isteresi, la si può ridisegnare scambiando tra loro gli assi cartesiani. Allora si nota che l'area della figura è data proprio dall'integrale, non di volume ma lungo un intero ciclo della (1). Quindi l'area della figura (utilizzando come unità di misura i Tesla e le ampere spire su metro) è pari esattamente all'energia per unità di volume necessaria a compiere un intero ciclo di isteresi.

Se allora in un circuito ferromagnetico si creano campo e induzione alimentando degli avvolgimenti elettrici con correnti o tensioni alternate, si ha per ogni istante di tempo una energia fornita al materiale (e da questo dissipata in calore) proporzionale:

- al numero di cicli in quell'unità di tempo
- al quadrato dell'induzione massima
- al volume del materiale.

Generalmente si preferisce ragionare in base alla massa G e non al volume (le due grandezze sono proporzionali) per cui la potenza dissipata per isteresi vale:

$$P_{di} = k_i \cdot B_M^{\mu} \cdot f \cdot G$$

dove f è la frequenza (in hertz) dei cicli e la costante, che è diversa per ogni materiale ferromagnetico, è detta cifra di perdita per isteresi e μ è il coefficiente di Steinmetz (1-2).
La terza particolarità dei materiali ferromagnetici è il fenomeno delle correnti parassite.
Tale fenomeno si presenta solo in presenza del flusso variabile nel tempo.
Se si considera nel materiale una qualunque sezione (un piano perpendicolare all'induzione) e su di essa qualunque linea chiusa, si sa che l'integrale di circuitazione del campo elettrico è pari alla variazione del flusso nell'area racchiusa da quella linea. Si presentano cioè delle tensioni indotte non solo sugli avvolgimenti esterni, ma anche in ogni circuito virtuale che si consideri internamente. Il concetto può lasciare perplessi perché non esistono circuiti ben definiti. Qui la trattazione si farebbe complessa, per cui non entriamo in ulteriori dettagli. Di fatto il fenomeno si esplica mediante la circolazione di correnti parassite all'interno del ferro, diffuse in tutto il corpo metallico, secondo percorsi di tipo circolare. Il flusso generato da queste correnti è pure variabile e la sua variazione tende ad opporsi alla variazione del flusso principale, in modo che un avvolgimento esterno percepisce una variazione di flusso in qualche misura minore di quella teoricamente prevista. Generalmente tali correnti parassite sono limitate dalla resistività del materiale, quindi abbastanza piccole. Inoltre, con andamenti sinusoidali del flusso, essendo tali correnti limitate resistivamente ed essendo proporzionali, istante per istante, alla variazione del flusso, sono in fase con la variazione, quindi in quadratura (sfasate di 90°) con il flusso; il contro-flusso che esse generano è quindi piccolo e in quadratura rispetto al flusso principale, che quindi non subisce modificazione troppo sensibile.
Rimane invece sensibile il problema della potenza dissipata per effetto Joule, fenomeno sempre presente quando circolano correnti. Queste correnti sono dovute alla tensione creata dalla variazione di flusso, quindi, ragionando in termini di proporzionalità:

$$i \; i \propto \frac{\upsilon}{r}$$

$$\upsilon \propto \omega \cdot \Phi \propto f \cdot B$$

$$p \propto ri^2 \propto r\frac{\upsilon^2}{r^2} \propto \frac{f^2 B^2}{r}$$

Cioè: la potenza dissipata per unità di volume, o di peso, è proporzionale al quadrato del valore efficace dell'induzione, al quadrato della frequenza, ed inversamente proporzionale alla resistenza-resistività del materiale, perché questa limita le correnti parassite. Per sfruttare questo fenomeno si introducono nelle leghe ferromagnetiche percentuali di materiali che siano cattivi conduttori elettrici.
Inoltre si utilizzano i materiali non sotto forma di corpi massicci, ma di lamierini, con le superfici laterali parallele alla direzione del flusso. Tra un lamierino e l'altro (spessore 0.25÷ 1,0 mm) un sottile strato di vernice funge da isolante, tagliando i circuiti elettrici e

costringendo le correnti a tragitti molto brevi, su anelli molto piccoli. La vernice riduce un poco l'area utile del ferro, quindi occorrerà tenere presente questo fatto nel calcolo di riluttanze e induttanze mediante un coefficiente di riduzione dell'area della sezione.
La potenza dissipata per correnti parassite vale allora:

$$P_{dcp} = k_{cp} \cdot B^2 \cdot f^2 \cdot G$$

dove la costante, detta cifra di perdita per correnti parassite, dipende dal materiale.
In totale le perdite nei materiali ferromagnetici:

$$P_d = P_{di} + P_{dcp} = k_i \cdot B_M^{\mu} \cdot f \cdot G + k_{cp} \cdot B^2 \cdot f^2 \cdot G = B_M^2 \cdot G \cdot (k_i \cdot f + k_{cp} \cdot f^2)$$

Spesso si usa una formulazione sintetica, approssimata ma valida nelle applicazioni pratiche per una gamma di frequenze:

$$P_d = k \cdot G \cdot B_M^2 \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^{\alpha} \qquad 1.2 < \alpha < 1.8$$

dove la costante prende il nome generico di cifra di perdita e dipende, come l'esponente α dal materiale. La frequenza di riferimento è solitamente di 50 o di 60 Hz (frequenza nominale).
In pratica la cifra di perdita esprime la potenza dissipata con una induzione di 1 T, alla frequenza nominale, per ogni kilogrammo di materiale.

File: EW/LN/CB - d:\proj\unibg\elett\\dispense\CAP03.DOC
Stampato: gg/03/aa 22.19
Ver/Rev: drf,fin,tmp,old/0.8