Diagonalizzabilità delle matrici simmetriche.

Ricordo: A simmetrica se $A^t = A$.

Vedremo che: A simmetrica $\Rightarrow$ A diagonalizzabile.

Sarà utile la seguente:

Definizione: Una matrice $M \in Mat(n,n)$ si dice ortogonale se

$$\boxed{M M^t = I}$$

ossia se è invertibile e $M^{-1} = M^t$

oss: M ortogonale $\Rightarrow$ $\det M = \pm 1$ [verifica]. Inoltre si verifica che se M è ortogonale e

- $\det M = 1$ $\Rightarrow$ M è una rotazione (in $\mathbb{R}^n$). es: $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

- $\det M = -1 \Rightarrow M$ è ~~co~~ la composizione di una rotazione e una riflessione.

es: $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\text{rotazione}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{riflessione asse } x}$

Proposizione: Una matrice è ortogonale $\Longleftrightarrow$ le sue righe (colonne) formano una base ortonormale.

Dim: esercizio.

Teorema: Sia $A \in Mat(n,n)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) A è simmetrica

ii) esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ fatta di autovettori di A.

iii) A è ortodiagonalizzabile, ossia esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM = M^tAM$ sia diagonale.

Dim:

i) $\Rightarrow$ ii) (solo nel caso $n=2$)

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, allora $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$,

e $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$.

Due casi:

. Se $\Delta = 0$ allora $(a-c)^2 = 0$ e $b^2 = 0 \Rightarrow a = c$, $b = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = a$ è un autovalore doppio, e gli autovettori di A sono tutti i vettori di $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$

Quindi ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ è fatta di autovettori di A.

· Se $\Delta > 0$ allora gli autovalori λ_1, λ_2 di A sono reali e distinti.

~~Sistema~~ ($\Rightarrow A$ diagonalizzabile)

Siano $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ autovettori relativi rispettivamente a λ_1 e λ_2:

$$A\underline{u}_1 = \lambda_1 \underline{u}_1 \qquad \text{e} \qquad A\underline{u}_2 = \lambda_2 \underline{u}_2$$

Mostriamo che $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0$. Siccome A è simmetrica, allora

$$\underline{u}_1 \cdot (A\underline{u}_2) = (A\underline{u}_1) \cdot \underline{u}_2 \qquad \text{[verifica]}$$

Allora:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{u}_1 \cdot (A\underline{u}_2) = \underline{u}_1 \cdot (\lambda_2 \underline{u}_2) = \lambda_2 \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 \\ &\qquad \parallel \\ &(A\underline{u}_1) \cdot \underline{u}_2 = (\lambda_1 \underline{u}_1) \cdot \underline{u}_2 = \lambda_1 \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = \lambda_2 \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0$$

Posso sempre prendere $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ versori $(\|\underline{u}_1\| = \|\underline{u}_2\| = 1)$

$\Rightarrow \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Supponiamo che esista una base ortonormale $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$

fatta di autovettori di A. Siccome la base è ortonormale, allora la matrice

$M = (\underline{u}_1 | \dots | \underline{u}_n)$ è ortogonale, e siccome è una base di autovettori di A,

allora M diagonalizza A:

$$M^{-1}AM = \Lambda$$

con $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dove λ_i autovalori di A

$(A\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i)$.

[oss: siccome $M^{-1} = M^t$ allora $M^{-1}AM = M^tAM$]

iii) $\Rightarrow$ i) [esercizio]

FORME QUADRATICHE

Sia $A \in Mat(n,n)$ una matrice simmetrica, cioè $A^t = A$.

La forma quadratica (f.q.) associata ad A è la funzione

$$q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{x} \longmapsto \underline{x}^t A \underline{x} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esplicitamente, se $A = (a_{ij})$:

$$q_A(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + \dots + x_n \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

(polinomio omogeneo di 2° grado nelle variabili $x_1, \dots, x_n$)

Esempi:

0) Se $n=1$ allora $A=(a)$ $\underline{x}=(x)$ $\Rightarrow q_A(\underline{x}) = a x^2$.

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ allora $q_A(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

$$= x_1(4x_1 - 3x_2) + x_2(-3x_1 + 2x_2)$$

$$= 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3/2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ allora $q_A(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 3x_1x_3$

oss: Se $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una forma quadratica, allora $q_A(\underline{0}) = 0$

Def: Una f.q. q_A (o la corrispondente matrice A) si dice

- **definita positiva**: se $q_A(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$
- **definita negativa**: se $q_A(\underline{x}) < 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$
- **semidefinita positiva**: se $q_A(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ed $\exists\ \underline{x}_0 \neq \underline{0}$ t.c. $q_A(\underline{x}_0) = 0$
- **semidefinita negativa** se $q_A(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ed $\exists\ \underline{x}_0 \neq \underline{0}$ t.c. $q_A(\underline{x}_0) = 0$
- **indefinita** se esistono $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q_A(\underline{x}_1) > 0$ e $q_A(\underline{x}_2) < 0$.

Esercizio: Determinare il segno (cioè il tipo) delle forme quadratiche associate a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia q_A la f.q. associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Per determinare il segno di q_A è utile considerare le "sottomatrici di nord-ovest"

$$A_1 = (a_{11}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = A$$

Teorema:

i) q_A è definita positiva $\Longleftrightarrow \det A_k > 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$

ii) q_A è " negativa $\Longleftrightarrow (-1)^k \det A_k > 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$

Teorema: la f.q. $q_A(x_1,x_2) = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$ associata a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ è

i) def. pos. $\iff a > 0,\ \det A > 0$

ii) def. neg. $\iff a < 0,\ \det A > 0$

iii) indefinita $\iff \det A < 0$

iv) semidefinita (pos. o neg.) se $\det A = 0$.

Esempi:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = -1 < 0 \implies A$ è indefinita

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5/2 \\ 5/2 & -8 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \det A = 7/4 > 0 \\ a_{11} = -1 < 0 \end{array}\right\} \implies A$ è def. neg.

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l} A_1 = (5) \implies \det A_1 = 5 > 0 \\ A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \det A_2 = 15 > 0 \\ A_3 = A \implies \det A_3 = 12 > 0 \end{array}\right\} \implies A$ def. pos.

Segno di una f.q. e autovalori

Sia $q_A(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x}$ con $A \in Mat(n,n)$ e simmetrica.

Ricordiamo che esiste una base ortonormale $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ fatta di autovettori di A:

$$\boxed{\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}, \qquad A\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}}$$

Sia $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora

$$M = (\underline{u}_1 | \dots | \underline{u}_n) \in Mat(n,n)$$

è la matrice di cambiamento di base da $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ a $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$.

Siccome $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ è una base ortonormale, M è ortogonale.

Se $\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \underline{u}_i$ allora il cambiamento di coordinate è

dato da:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad (0)$$

Proposizione: Il cambiamento di coordinate (0) diagonalizza la f.q. q_A,

nel senso che
$$q_A(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2$$

dove i λ_i sono gli autovalori di A.

Dim: Dalla (0) segue che
$$(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t = \left(M \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}^t M^t = (x'_1 \dots, x'_n) \overset{M^t}{\overset{\parallel}{M^{-1}}}$$

Allora

$$q_A(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x'_1, \dots, x'_n) \underbrace{M^{-1} A M}_{= \Lambda} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (x'_1, \dots, x'_n) \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}^{\Lambda} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2$$

$\square$

Teorema: la f. q. q_A associata ad A è

a) def. pos. (neg.) $\Longleftrightarrow$ tutti gli autovalori di A sono positivi (neg.)

b) semidef. pos. (neg.) $\Longleftrightarrow$ " " " " A " ≥ 0 (≤ 0) ed almeno uno nullo.

c) indefinito $\Longleftrightarrow$ A ha almeno un autovalore >0 ed uno <0.

Dim [idea] usare $q_A(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2$

oss: Per calcolare il segno di una f.q. è quindi sufficiente conoscere il segno degli autovalori.