Forma esponenziale dei numeri complessi

Se $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ definiamo l'esponenziale di $\lambda + i\theta \in \mathbb{C}$ come

$$\boxed{e^{\lambda+i\theta} = e^{\lambda}(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

- Per $\theta = 0$ (ossia se $\lambda + i\theta = \lambda \in \mathbb{R}$) abbiamo che

$$e^{\lambda+i0} = e^{\lambda}(\underbrace{\cos 0}_{1} + i \underbrace{\sin 0}_{0}) = e^{\lambda} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Quindi la nuova definizione coincide con la vecchia per numeri reali.

- Per $\lambda = 0$ abbiamo invece la formula di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{(E)}$$

ossia $\operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \cos\theta$, $\operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \sin\theta$

Scrivendo $z \in \mathbb{C}$ in forma trigonometrica ed utilizzando (E) abbiamo che

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

ossia otteniamo la forma esponenziale

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$$

Proposizione: Per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si ha

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Dimostrazione: Sia $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Allora

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right) =$$

$$= e^{x_1} e^{x_2}\left(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right) \underset{\text{de Moivre}}{=} \left[e^{x_1}(\cos(y_1) + i\sin(y_1))\right]\cdot\left[e^{x_2}(\cos(y_2) + i\sin(y_1))\right]$$

$$= e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$\square$

OSS: Le formule di de Moivre si possono vedere come una conseguenza della proposizione appena dimostrata. Infatti:

- $\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

- $z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n (e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

Esempio: ~~[illegible]~~

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + i\,2\cos\theta\sin\theta$$

separando parte reale e parte immaginaria si ha $\begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta \end{cases}$

Esercizio: Calcolare $\cos(3\theta)$ e $\sin(3\theta)$

~~Esercizio: Mostrare che~~

Esercizio: Mostrare che

a) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$, b) $e^{\bar z} = \overline{e^{z}}$, c) $|e^{i\theta}| = 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

Radici n-esime in $\mathbb{C}$

Definizione: Siano $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Si dice che $z \in \mathbb{C}$ è una radice n-esima (complessa) di $w \in \mathbb{C}$ se

$$\boxed{z^n = w .}$$

Esempio: Sia $w = -8$ e $n = 3$. Siccome $z = 1 + \sqrt{3}i$ soddisfa $(1+\sqrt{3}i)^3 = -8$

allora $1+\sqrt{3}i$ è una radice terza di -8.

Abbiamo visto che anche -2 e $1-\sqrt{3}i$ sono radici terze di -8.

Si dimostra che non ce ne sono altre.

Teorema: Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ e sia $m \geq 1$. Esistono allora m radici m-esime complesse distinte $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$ di w.

Se $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, esse sono date da

$$z_k = \sqrt[m]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{m}\right)\right] \qquad k = 0, \dots, m-1$$

ossia

$$\boxed{z_k = \sqrt[m]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{m}} \qquad k = 0, 1, \dots, m-1.}$$

In altre parole, per $k = 0, \dots, m-1$

$$|z_k| = \sqrt[m]{r} \qquad \arg(z_k) = \frac{\arg(w) + 2k\pi}{m} = \frac{\arg(w)}{m} + \frac{2k\pi}{m}$$

Dimostrazione: Dato $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ bisogna risolvere l'equazione $z^m = w$.

Siano $w = re^{i\varphi}$ (noto) e $z = \rho e^{i\theta}$ (incognita)

Siccome $z^m = (\rho e^{i\theta})^m = \rho^m e^{im\theta}$ quindi $z^m = w$ diventa

$$\rho^m e^{im\theta} = r e^{i\varphi}$$

Ciò equivale a

$$\begin{cases} \rho^m = r \\ m\theta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[m]{r} \\ \theta_k = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{m}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

È facile dimostrare [esercizio] che si ottengono radici distinte solo per

$k = 0, 1, \dots, m-1$ $\square$

Oss: Le radici m-esime di $w = r e^{i\varphi}$ $(r > 0)$ formano i vertici di un poligono regolare di m lati, inscritto nella circonferenza che ha centro 0 e raggio $\sqrt[m]{|w|} = \sqrt[m]{r}$.

Esempio: determinare le radici terze di -8.

Risolvere $z^3 = -8$

Forma esponenziale: $\begin{cases} z = \rho e^{i\theta} \\ -8 = 8e^{i\pi} \end{cases}$ $\Rightarrow z^3 = \rho^3 e^{i3\theta}$ (verificare)

$$\Rightarrow z^3 = -8 \iff \rho^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\pi} \iff \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta_k = \dfrac{\pi + 2k\pi}{3} \end{cases} k \in \mathbb{Z} \qquad \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta_k = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

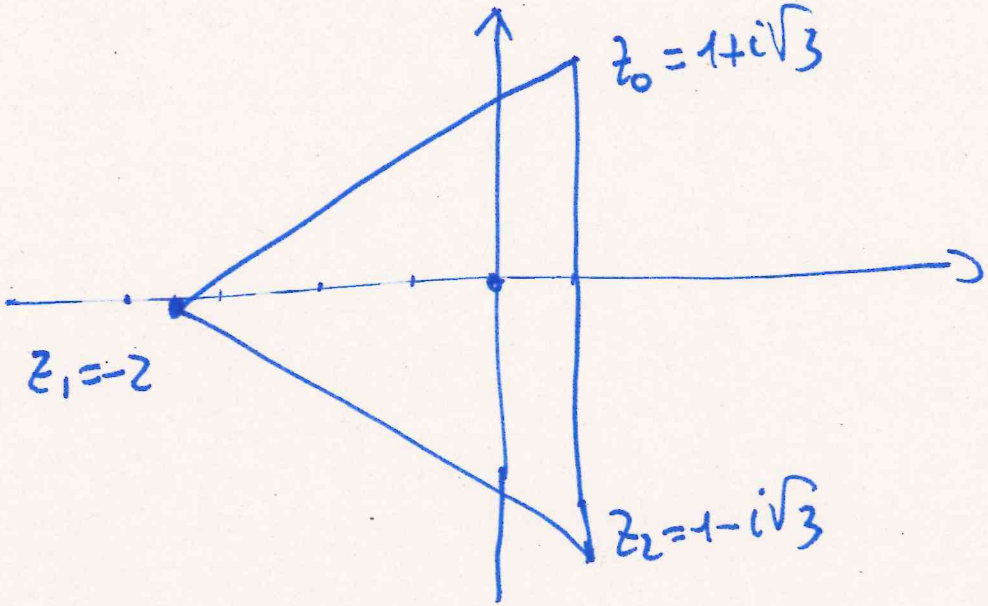
$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{3}, \quad \theta_3 = \frac{\pi + 6\pi}{3} = \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{=\theta_0} + 2\pi$$

Tre soluzioni distinte:

$$z_0 = \rho e^{i\theta_0} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$$

$$z_1 = \rho e^{i\theta_1} = 2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$$ (3.8

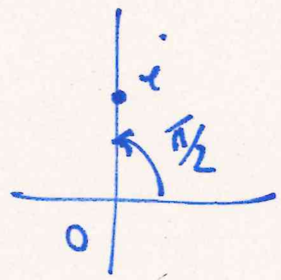
$$z_2 = \rho e^{i\theta_2} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$



Esercizio: determinare le radici ottave di 16 e disegnarle sul piano di Gauss.

Esempio: $z^2 = i$

Forma esponenziale: $\begin{cases} z = \rho e^{i\theta} \\ i = e^{i\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$ (verifica)



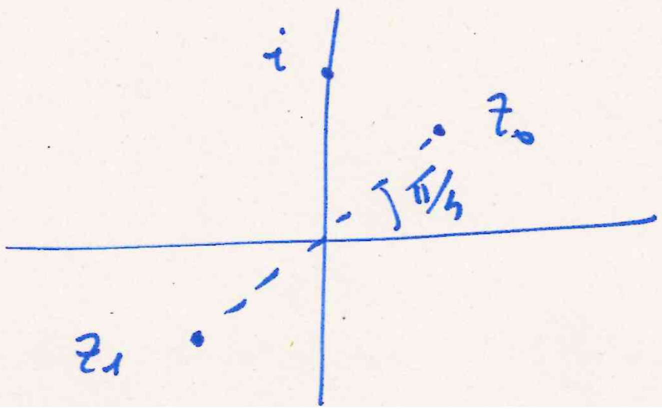
$$z^2 = i \iff \rho^2 e^{i2\theta} = e^{i\pi/2} \iff \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k = 0, 1 \end{cases}$$

verifica

Due soluzioni: $z_0 = 1 \cdot e^{i\theta_0} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$z_1 = 1 \cdot e^{i\theta_1} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = e^{i\pi/4} \cdot e^{i\pi} = -e^{i\pi/4} = -z_0$



Esempio: $z^2 = 3+4i$. Cerco le radici quadrate di $3+4i$

$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$

Scrivo $3+4i = re^{i\varphi}$. Allora (verifica): $r = 5$ $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{3}{5} \\ \sin\varphi = \frac{4}{5} \end{cases}$ non è un angolo noto.

Per determinare le radici quadrate di un numero complesso esiste un metodo alternativo. Vediamo come funziona nell'esempio sopra.

Esempio: Per risolvere $z^2 = 3+4i$, scriviamo $z = x+iy$ (cioè in forma algebrica)

Allora $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,i$ e $x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i$ se e solo se

$$(*) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Per semplificare la risoluzione di $(*)$ conviene osservare che

$z^2 = 3+4i \implies |z^2| = |3+4i| \implies |z|^2 = \underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{5} \implies x^2+y^2 = 5$

Quindi il sistema (*) è equivalente a

$$(**)\begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2xy = 4 \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2 \\ xy = 2 \\ y^2 = 1 \longrightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

Attenzione! le soluzioni di (**) non sono 4, ma solo le due che soddisfano

$xy = 2$ cioè $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

Le radici quadrate di $w = 3+4i$ sono $z_0 = 2+i$ e $z_1 = -2-i$ [verifica]