VETTORI TRIDIMENSIONALI

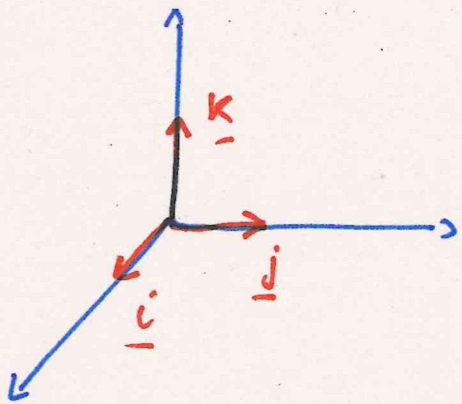
$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ (lo spazio tridimensionale)

I versori fondamentali di $\mathbb{R}^3$

$\underline{i} = (1, 0, 0)$

$\underline{j} = (0, 1, 0)$

$\underline{k} = (0, 0, 1)$



Possiamo scrivere $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \underline{i} + x_2 \underline{j} + x_3 \underline{k}$

Prodotto vettoriale (solo in $\mathbb{R}^3$)

Siano $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, si pone

$$\boxed{\underline{x} \wedge \underline{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \in \mathbb{R}^3}$$

Con un abuso di notazione, possiamo scrivere il prodotto vettoriale $\underline{x} \wedge \underline{y}$ come il determinante:

$$\underline{x} \wedge \underline{y} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Esempio: $\underline{x} = (1, 2, -1)$, $\underline{y} = (3, -1, 2)$

$$\underline{x} \wedge \underline{y} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\underline{i} - 5\underline{j} - 7\underline{k} = (3, -5, -7)$$

Si può dimostrare che:

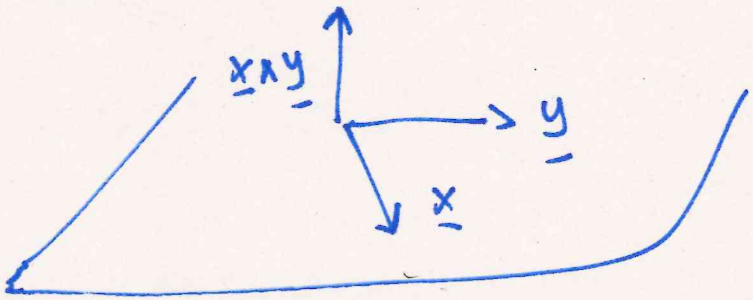
i) $\underline{x} \wedge \underline{y} = - \underline{y} \wedge \underline{x}$

ii) $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono paralleli $\iff$ $\underline{x} \wedge \underline{y} = \underline{0}$

iii) il vettore $\underline{x} \wedge \underline{y}$ è ortogonale sia a $\underline{x}$ che a $\underline{y}$ (e quindi, se $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono diversi da zero, si ha che $\underline{x} \wedge \underline{y}$ è ortogonale al piano formato da $\underline{x}$ e $\underline{y}$).

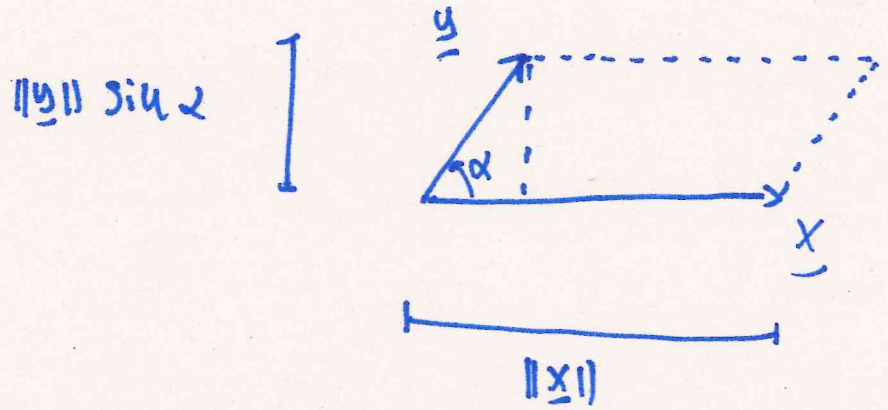
iv) $\|\underline{x} \wedge \underline{y}\| = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \sin\alpha$, dove α è l'angolo tra $\underline{x}$ e $\underline{y}$

v) Per quanto riguarda il verso di $\underline{x} \wedge \underline{y}$ vale la "regola della mano destra"



Esercizio: Verificare i), ii), iii).

OSS: Dalla iv) segue che $\|\underline{x} \wedge \underline{y}\|$ è l'area del parallelogramma formato da $\underline{x}$ e $\underline{y}$:



$$\text{Area} = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \sin\alpha = \|\underline{x} \wedge \underline{y}\|$$

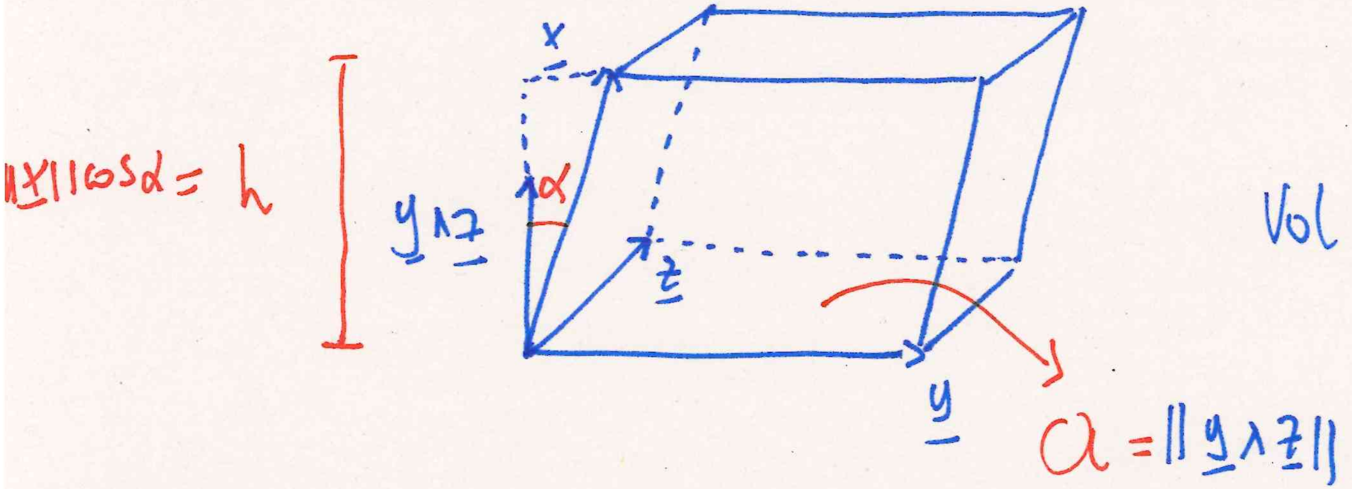
Prodotto misto: Se $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^3$ allora il loro prodotto misto è

$$\boxed{\underline{x} \cdot (\underline{y} \wedge \underline{z}) \in \mathbb{R}}$$

Si ha che

$$\underline{x} \cdot \underline{y} \wedge \underline{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

La quantità $|\underline{x}\cdot\underline{y}\wedge\underline{z}|$ rappresenta il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i tre vettori:



caso $\underline{x}\cdot\underline{y}\wedge\underline{z} \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol} = a\cdot h &= \|\underline{y}\wedge\underline{z}\|\cdot\|\underline{x}\|\cos\alpha \\
&= \underline{y}\wedge\underline{z}\cdot\underline{x} = \underline{x}\cdot\underline{y}\wedge\underline{z} \\
&= |\underline{x}\cdot\underline{y}\wedge\underline{z}|
\end{aligned}
$$

OSS: Si ha che $\underline{x}\cdot\underline{y}\wedge\underline{z} = 0 \iff$ i tre vettori appartengono ad uno stesso piano (si dice in tal caso che i vettori sono complanari).

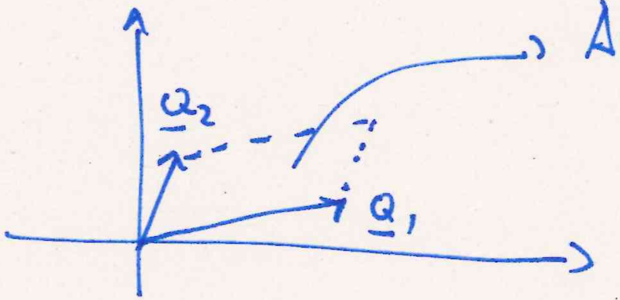
OSS: Data una matrice $A = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3)$ allora $|\det A|$ è il volume del parallelepipedo di spigoli $\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3 \in \mathbb{R}^3$

Infatti:

$$|\det A| = |\underline{a}^1 \cdot \underline{a}^2 \wedge \underline{a}^3| = \mathrm{Vol}.$$

Esercizio: Mostrare che per una matrice $A = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2)$, allora

$|\det A|$ è l'area del parallelogramma di lati $\underline{a}^1, \underline{a}^2$.



$\to$ Area $= \det \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \end{pmatrix}$

(Suggerimento: scrivere $\underline{a}^1 = (a_{11}, a_{12})$ come $\underline{x} = (a_{11}, a_{12}, 0) \in \mathbb{R}^3$

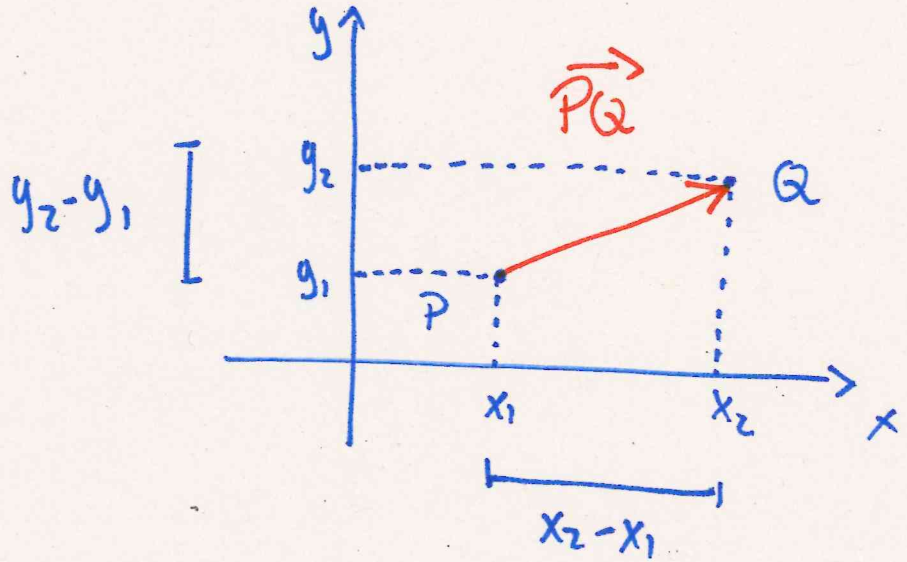
$\underline{a}^2 = (a_{21}, a_{22})$ " $\underline{y} = (a_{21}, a_{22}, 0) \in \mathbb{R}^3$

Calcolare $\underline{x} \wedge \underline{y}$ e usare il fatto che $\|\underline{x} \wedge \underline{y}\|$ è l'area del parallelogramma di lati $\underline{x}, \underline{y}$)

GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

Premessa (nel piano): se $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ sono due punti nel piano allora il vettore $\overrightarrow{PQ}$ è dato da

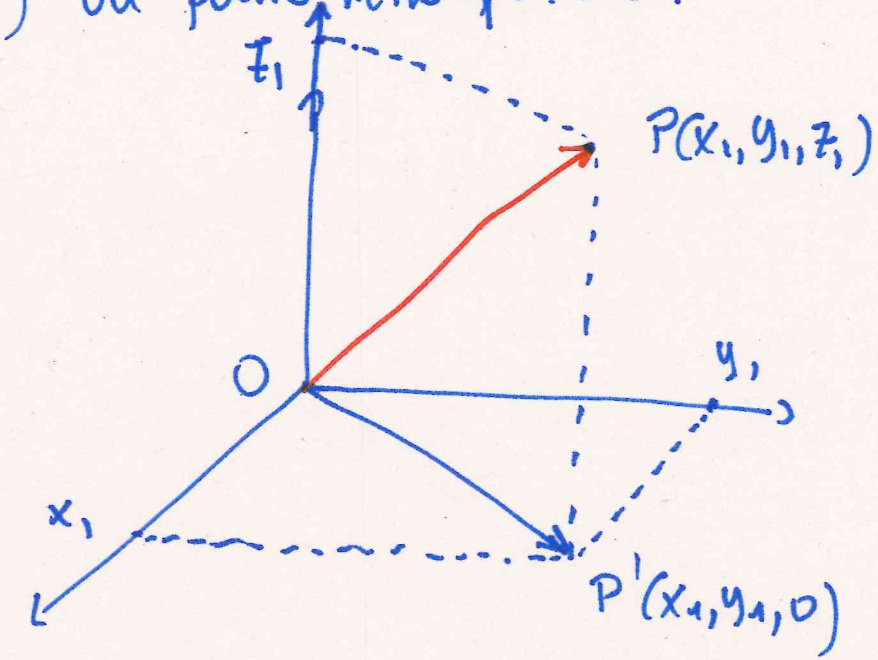
$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



La distanza tra i due punti è data da

$$\overline{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sia $P(x_1, y_1, z_1)$ un punto nello spazio:



Se $Q(x_2, y_2, z_2)$ allora

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$$

e quindi

$$\boxed{\overline{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}$$

Rette

Per determinare una retta nello spazio basta assegnare:

Ra) un punto della retta e un vettore (che rappresenta la direzione della retta)

oppure

Rb) due punti (distinti) della retta

oppure

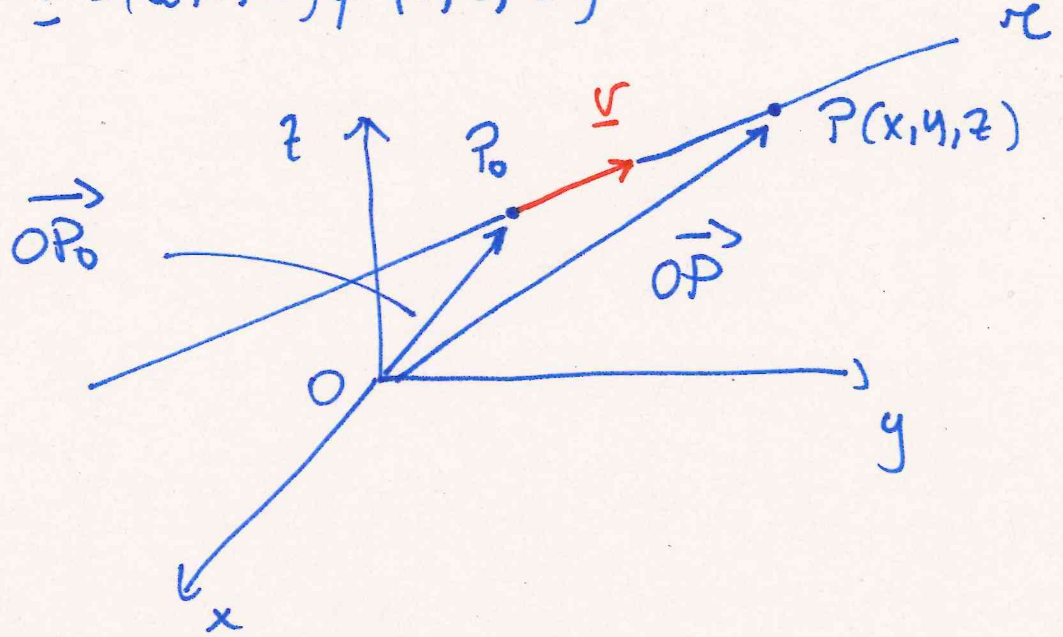
Rc) due piani contenenti la retta [dopo aver introdotto i piani]

oss: $\left.\begin{array}{l} Ra) \\ Rb) \end{array}\right\} \rightarrow$ equazioni parametriche della retta

Rc) $\rightarrow$ " cartesiane " "

R a) Retta r passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e parallela al vettore 8.10

$\underline{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} \qquad (\#)$$

$P \in r \iff \overrightarrow{P_0P}$ è parallelo a $\underline{v} \iff \exists\, t \in \mathbb{R}$ t.c. $\overrightarrow{P_0P} = t\underline{v}$

Abbiamo quindi l'equazione parametrica vettoriale di r (usando la #):

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\underline{v} \qquad t \in \mathbb{R}}$$

Poiché $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{OP_0}=(x_0,y_0,z_0)$, $t\underline{v}=(ta,tb,tc)$ otteniamo le **equazioni parametriche scalari** di r [8.11]

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a t \\ y = y_0 + b t \\ z = z_0 + c t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

Il vettore $\underline{v}=(a,b,c)$ si chiama **vettore direzionale della retta r**

oss: Se $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, allora

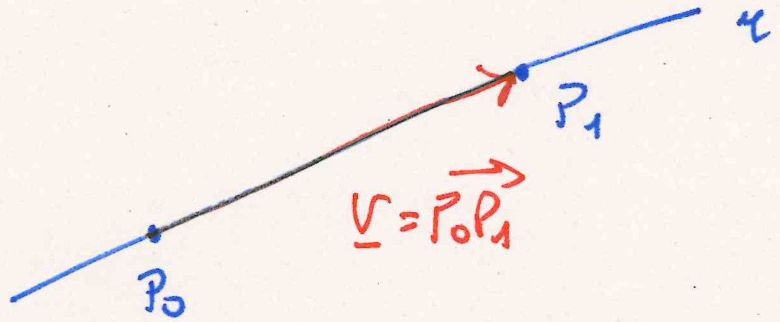
$$\frac{x-x_0}{a}=t \,, \quad \frac{y-y_0}{b}=t \,, \quad \frac{z-z_0}{c}=t$$

quindi otteniamo le **equazioni cartesiane di r:**

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b} \\ \dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c} \end{cases}$$

(vedremo che tali equazioni rappresentano la retta r come intersezione di due piani)

Rb) Retta passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $(P_0 \neq P_1)$ 8.12



La retta cercata è quella passante per P_0 e avente vettore direzionale

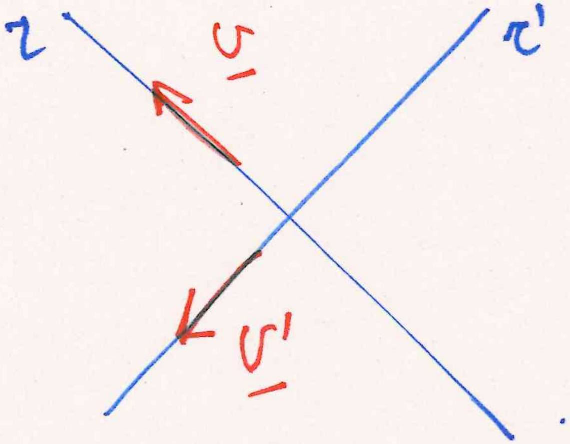
$$\underline{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \neq \underline{0} \quad \leftarrow P_0 \neq P_1$$

Quindi le equazioni parametriche scalari di r sono

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Rette ortogonali

Due rette sono ortogonali se lo sono i loro vettori direzionali



Quindi r e r' sono ortogonali

$$\Updownarrow$$

$\underline{v}$ e $\underline{v}'$ " "

$$\Updownarrow$$

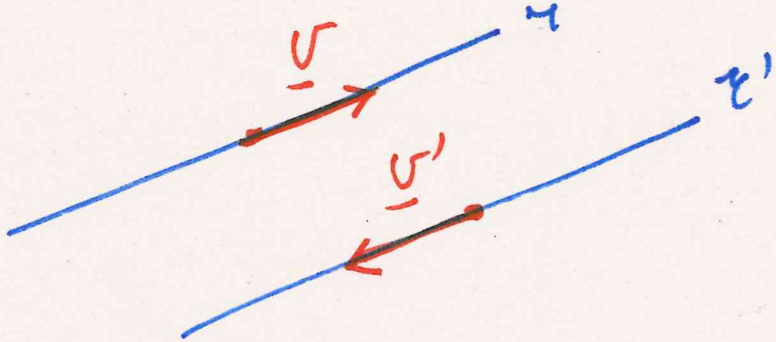
$$\underline{v} \cdot \underline{v}' = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

Rette parallele

Due rette sono parallele se lo sono i loro vettori direzionali:



$\underline{v} = (a, b, c)$

$\underline{v}' = (a', b', c')$

Quindi: r e r' sono parallele

$\Updownarrow$

$\underline{v}$ e $\underline{v}'$ sono paralleli

$\Updownarrow$

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{v}' = \lambda \underline{v}$

$\Updownarrow$

" " " " " $a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c$

$\Updownarrow$

$\underline{v}' \wedge \underline{v} = 0$