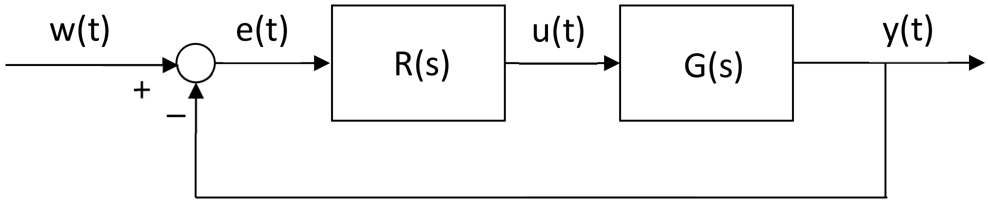
ESERCIZIO 1

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi



con $G(s) = \frac{50}{(1+2s)^2(1+0.1s)}$ **e con** $R(s) = \mu_R \frac{1+s\tau}{1+0.1\tau s}$

Tarare il controllore (cioè scegliere i valori dei parametri μ_R e τ) in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e abbia le seguenti proprietà:

a) $|e(\infty)| \leq 0.2$ **quando** $w(t) = sca(t)$
b) $\omega_C \geq 1 \frac{rad}{s}$
c) $\varphi_m > 50°$

PROGETTO STATICO

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello, tenendo conto che, essendo il controllore a struttura già assegnata, non avremo tutta la solita libertà di scelta.

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \mu_R \frac{1+s\tau}{1+s0.1\tau}\frac{50}{(1+2s)^2(1+0.1s)}$$
$$= 50\mu_R \frac{1+s\tau}{1+s0.1\tau}\frac{1}{(1+2s)^2(1+0.1s)}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 50\mu_R$.

Il tipo della funzione d'anello è $g = 0$ e non potrà essere modificato.

In questo caso si ha:

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty)|$$

Dalla tabellina (prima riga, prima colonna) si ha

$$|e_w(\infty)| = \frac{1}{1+50\mu_R}$$

Quindi

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty)| = \frac{1}{1+50\mu_R} \leq 0.2$$

$$0.2 + 10\mu_R \geq 1$$

$$\mu_R \geq 0.08$$

Scegliamo:

$$\mu_R = 0.1$$

Quindi:

$$R_1(s) = \mu_R = 0.1$$

PROGETTO DINAMICO

La funzione di trasferimento d'anello è ora

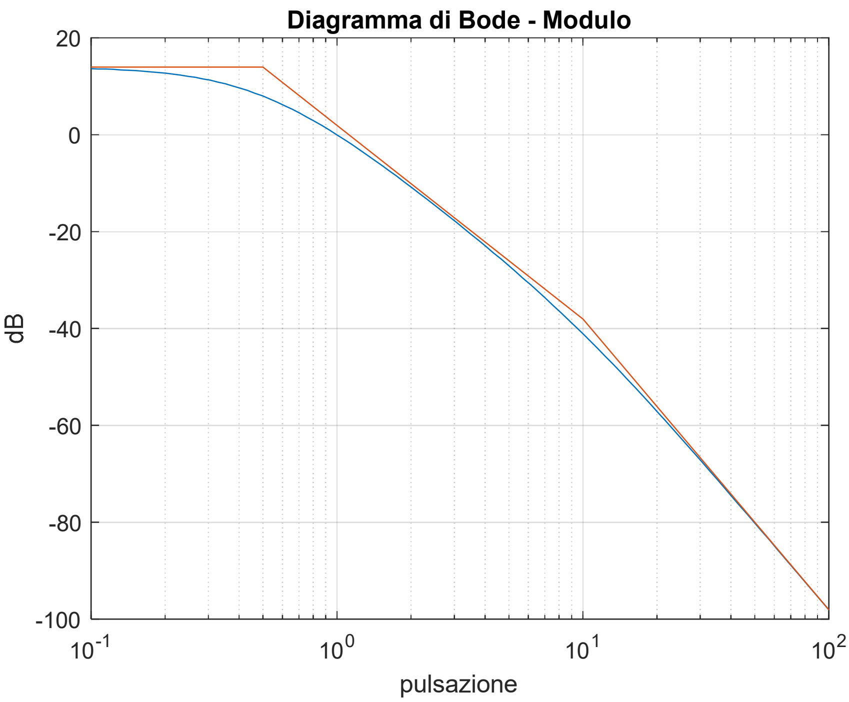
$$L(s) = R(s)G(s) = 50\mu_R \frac{1+s\tau}{1+s0.1\tau} \frac{1}{(1+2s)^2(1+0.1s)} = 5 \frac{1+s\tau}{1+s0.1\tau} \frac{1}{(1+2s)^2(1+0.1s)}$$

Primo tentativo $\tau = 0$ **da cui** $R_2(s) = 1$

Si ha quindi

$$L'(s) = \frac{5}{(1+2s)^2(1+0.1s)}$$

Tracciamo il diagramma di Bode di $|L'(j\omega)|$



Si ha $\omega_C \cong 1.1\ rad/s$

Si calcola ora la fase critica

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -2arctg(2.2) - arctg(0.11) = -131°.2 - 6°.1 = -137°.3$$

Infine, si calcola il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 137°.3 = 42°.7$$

Non rispetta le specifiche.

Il primo tentativo soddisfa il primo vincolo ma non il secondo, quindi procediamo con un altro tentativo.

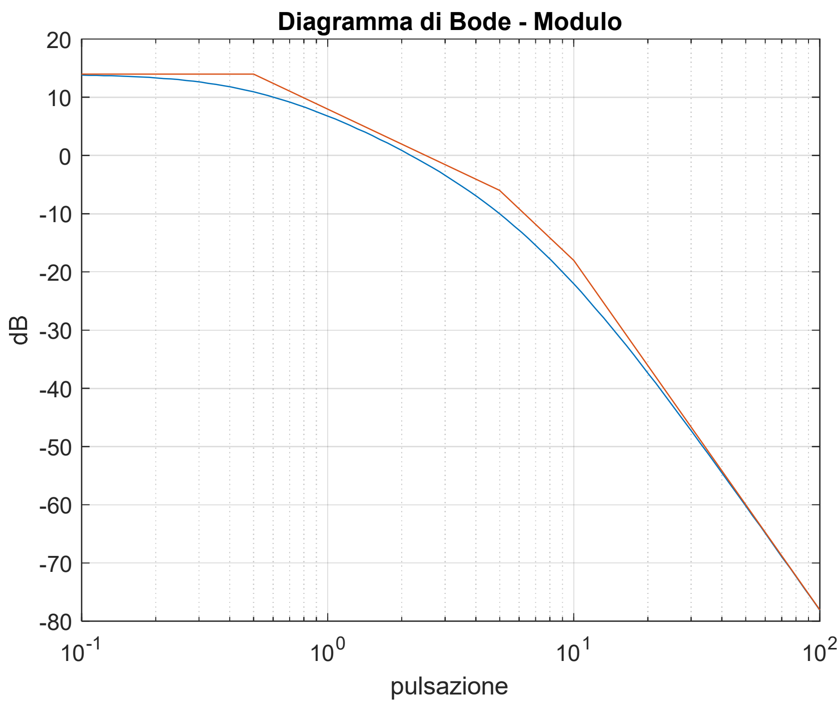
Secondo tentativo $\tau = 2$ **da cui** $R_2(s) = \frac{1+2s}{1+0.2s}$

Posizioniamo lo zero del regolatore in modo da cancellare uno dei due poli "lenti" (dominanti) del sistema sotto controllo. Il regolatore aggiunge anche un polo a frequenza più alta.

Si ha quindi

$$L''(s) = 5\frac{1+2s}{1+0.2s}\frac{1}{(1+2s)^2(1+0.1s)} = \frac{5}{(1+2s)(1+0.1s)(1+0.2s)}$$

Tracciamo il diagramma di Bode di $|L''(j\omega)|$



Si ha $\omega_C \cong 2.5\, rad/s$

Si calcola ora la fase critica

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -arctg(5) - arctg(0.25) - arctg(0.5) = -78°.7 - 14°.0 - 26°.6 = -119°.3$$

Infine, si calcola il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 119°.3 = 60°.7$$

Sono rispettate entrambe le specifiche. Il regolatore è quindi:

$$R(s) = 0.1\frac{1+2s}{1+0.2s}$$

Osservazione finale

Durante il progetto avremmo potuto essere tentati da questa scelta.

$$\mu_R = 0.2$$

Quindi:

$$R_1(s) = \mu_R = 0.2$$

Con questa scelta il guadagno d'anello è un numero "tondo". Infatti, $\mu = 50\mu_R = 10$. Si osservi che però questa scelta è molto più elevata dal minimo valore possibile ($0.2 >> 0.08$).

Proviamo comunque a portare avanti il progetto con questa scelta.

PROGETTO DINAMICO

La funzione di trasferimento d'anello è ora

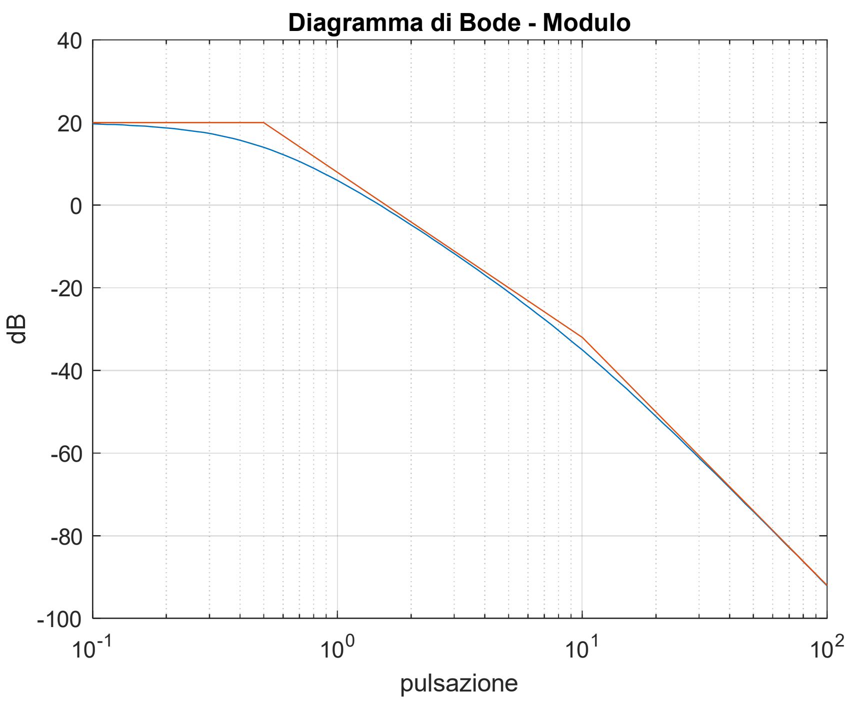
$$L(s) = R(s)G(s) = 50\mu_R \frac{1+s\tau}{1+s0.1\tau}\frac{1}{(1+2s)^2(1+0.1s)} = 10\frac{1+s\tau}{1+s0.1\tau}\frac{1}{(1+2s)^2(1+0.1s)}$$

Primo tentativo $\tau = 0$ **da cui** $R_2(s) = 1$

Si ha quindi

$$L'(s) = \frac{10}{(1+2s)^2(1+0.1s)}$$

Tracciamo il diagramma di Bode di $|L'(j\omega)|$



Si ha $\omega_C \cong 1.6\ rad/s$

Si calcola ora la fase critica

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -2arctg(3.2) - arctg(0.16) = -145°.3 - 9°.1 = -154°.4$$

Infine, si calcola il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 154°.4 = 25°.6$$

Non rispetta le specifiche.

Il primo tentativo soddisfa il primo vincolo ma non il secondo, quindi procediamo con un altro tentativo.

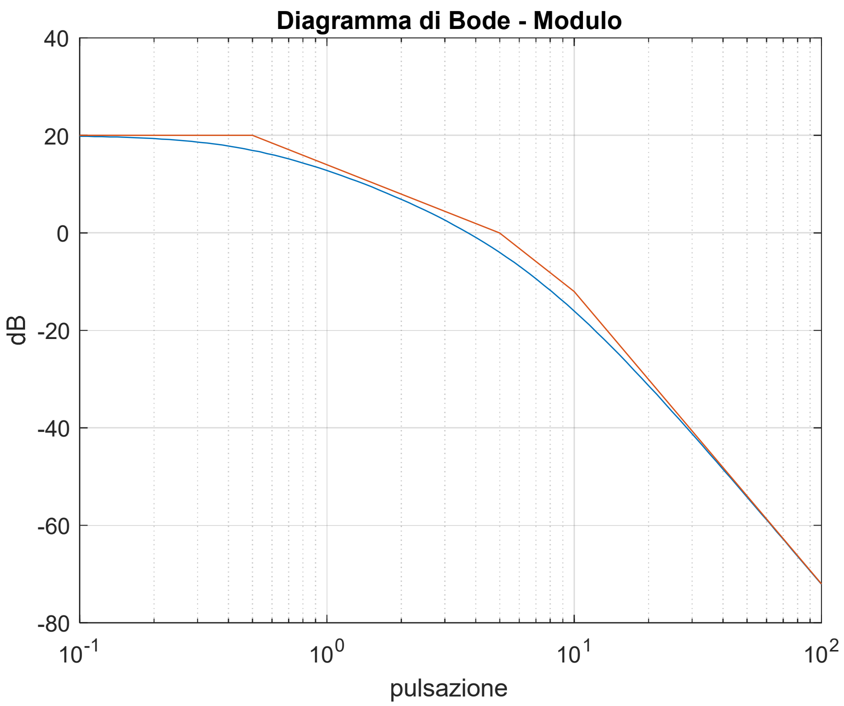
Secondo tentativo $\tau = 2$ **da cui** $R_2(s) = \frac{1+2s}{1+0.2s}$

Posizioniamo lo zero del regolatore in modo da cancellare uno dei due poli "lenti" (dominanti) del sistema sotto controllo.

Si ha quindi

$$L''(s) = 10\frac{1+2s}{1+0.2s}\frac{1}{(1+2s)^2(1+0.1s)} = \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)(1+0.2s)}$$

Tracciamo il diagramma di Bode di $|L''(j\omega)|$



Si ha $\omega_C \cong 5\ rad/s$

Si calcola ora la fase critica

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -arctg(10) - arctg(0.5) - arctg(1) = -84°.3 - 26°.6 - 45° = -155°.9$$

Infine, si calcola il margine di fase

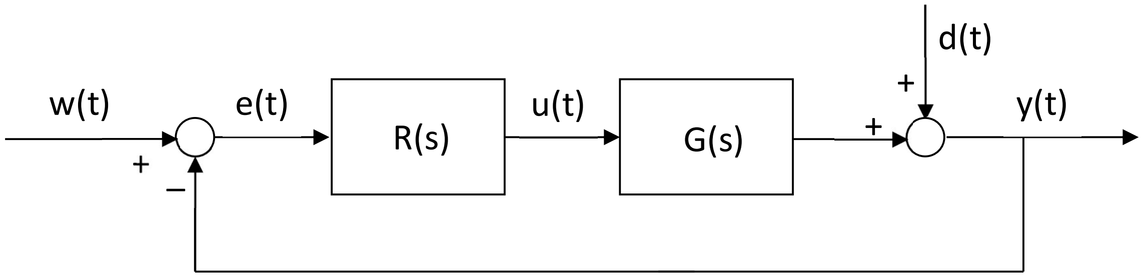
$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 155°.9 = 24°.1$$

Si osservi che la situazione è peggiorata. Rispettiamo la specifica sulla pulsazione critica con un margine molto ampio senza miglioramenti sul margine di fase.

Da questa situazione, visto che il controllore ha struttura assegnata, non c’è via d’uscita. Il guadagno d’anello è troppo alto.

ESERCIZIO 2

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi



con $\boldsymbol{G(s) = \frac{120}{(1+5s)^2(1+s)}}$

Progettare un controllore PI in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e abbia le seguenti proprietà:

a) $\boldsymbol{|e(\infty)| \leq 0.2}$ **quando** $\boldsymbol{w(t) = sca(t)}$ **e** $\boldsymbol{d(t) = 0.1ram(t)}$

b) $\boldsymbol{\omega_C \geq 0.1 \frac{rad}{s}}$

c) $\boldsymbol{\varphi_m \geq 10°}$

Un controllore ad azione Proporzionale ed Integrale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$R(s) = k_P + k_I \frac{1}{s} = k_P \left(1 + \frac{k_I}{k_P}\frac{1}{s}\right) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_I}\frac{1}{s}\right) = k_P \left(\frac{1 + sT_I}{sT_I}\right) = \frac{k_P}{T_I}\frac{1 + sT_I}{s} = k_I \frac{1 + sT_I}{s}$$

Esso ha quindi:

- guadagno k_I
- un polo nell'origine (tipo $g = 1$)
- uno zero reale con costante di tempo T_I

PROGETTO STATICO

Spesso, quando si ha un controllore con un integratore, come in questo caso, il progetto statico non è necessario. Infatti, la presenza di un integratore nella funzione di anello garantisce errore nullo a transitorio esaurito a fronte di variazioni a scalino del riferimento o del disturbo sulla linea di andata.

In questo particolare caso però, il disturbo sulla linea di andata ha andamento a rampa e quindi l'integratore garantisce errore finito ma non nullo e l'entità dell'errore a transitorio esaurito dipende dal valore del guadagno del controllore che si sceglierà.

Procediamo quindi con il progetto statico.

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello, tenendo conto che il controllore è a struttura già assegnata.

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{k_I}{s}(1 + sT_I)\frac{120}{(1 + 5s)^2(1 + s)} = \frac{120k_I}{s}\frac{1 + sT_I}{(1 + 5s)^2(1 + s)}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 120k_I$.

Il tipo della funzione d'anello è $g = 1$ e non potrà essere modificato.

Si applica la disuguaglianza "caso pessimo":

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

I singoli contributi valgono (vedi tabellina):

$$e_w(\infty) = 0$$

$$|e_d(\infty)| = \frac{0.1}{120k_I}$$

Quindi

$$|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| = \frac{0.1}{120k_I} \leq 0.2$$

$$k_I \geq \frac{1}{240} = 0.0041\bar{6}$$

Scegliamo:

$$k_I = 0.005 = \frac{1}{200}$$

PROGETTO DINAMICO

La funzione di trasferimento d'anello è ora

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{0.6}{s}\frac{1 + sT_I}{(1+5s)^2(1+s)}$$

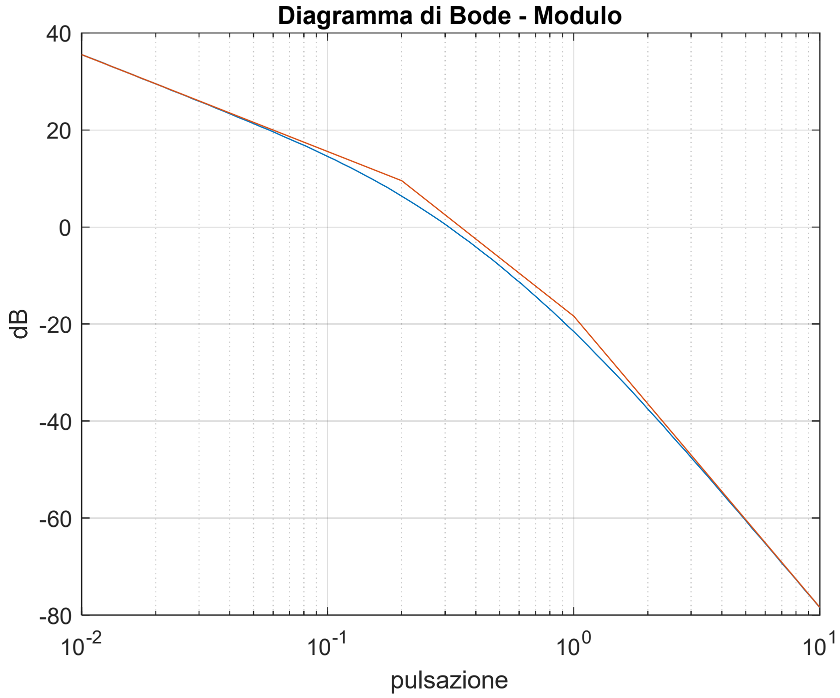
Primo tentativo $T_I = 5$ **da cui** $R_2(s) = 1 + 5s$

Utilizzo lo zero del controllore per cancellare uno dei due poli "lenti" (poli dominanti) del sistema sotto controllo.

Si ha quindi

$$L'(s) = \frac{0.6}{s(1+5s)(1+s)}$$

Tracciamo il diagramma di Bode di $|L'(j\omega)|$



Si ha $\omega_C \cong 0.35\ rad/s$

Si calcola ora la fase critica

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -90° - arctg(1.75) - arctg(0.35) = -90° - 60°.2 - 19°.3 = -169°.5$$

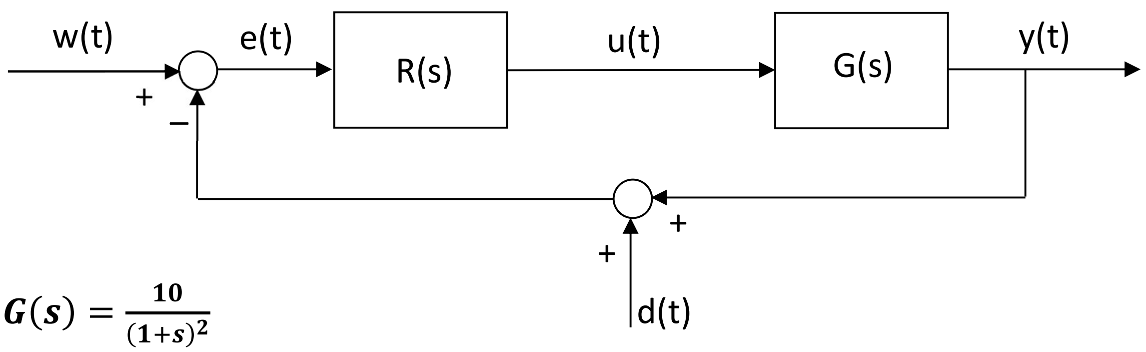
Infine, si calcola il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 169°.5 = 10°.5$$

Il controllore rispetta entrambe le specifiche. Il controllore progettato è quindi un controllore PI con $k_I = 0.005$ e con $T_I = 5$ ovvero con $k_P = k_I T_I = 0.025$.

ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi



con $G(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$

Progettare il controllore $R(s)$ **in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e abbia le seguenti proprietà:**

a) $|e(\infty)| \leq 0.5$ **quando** $w(t) = sca(t)$ **e** $d(t) = 0.1sca(t)$
b) $\omega_C \geq 1\frac{rad}{s}$
c) $\varphi_m \geq 45°$

PROGETTO STATICO

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello.

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{10}{(1+s)^2} = \frac{10\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{1}{(1+s)^2}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 10\mu_R$

Il tipo della funzione d'anello è $g = r$

Si applica la disuguaglianza "caso pessimo":

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

Si osservi che il disturbo si trova sulla linea di retroazione e quindi, per valutare l'entità dell'errore a regime dovuto al disturbo, non potremo fare riferimento alla tabellina ma dovremo calcolarne il valore applicando il teorema del valore finale ricordando che la funzione di trasferimento dal disturbo sulla linea di retroazione all'errore è la funzione di sensitività complementare $F(s)$.

I singoli contributi valgono quindi:

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{1}{1+10\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = \lim_{s\to 0} sF(s)\frac{0.1}{s} = 0.1\lim_{s\to 0} F(s)$$

Per valutare questo secondo contributo dovremmo calcolare la funzione di trasferimento di sensitività complementare. Però, al fine di calcolare $e_d(\infty)$ ci serve solo $\lim_{s\to 0} F(s)$.

Ricordando che

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

e che

$$L(s) = \frac{10\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{1}{(1 + s)^2}$$

si ha che:

per $r = 0$

$$L(s) = 10\mu_R \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{1}{(1 + s)^2}$$

$$\lim_{s \to 0} L(s) = L(0) = 10\mu_R$$

da cui si ottiene

$$\lim_{s \to 0} F(s) = \lim_{s \to 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{10\mu_R}{1 + 10\mu_R}$$

per $r > 0$

$$L(s) = \frac{10\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{1}{(1 + s)^2}$$

da cui si ottiene

$$\lim_{s \to 0} F(s) = \lim_{s \to 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{10\mu_R}{s^r}}{1 + \frac{10\mu_R}{s^r}} = \lim_{s \to 0} \frac{10\mu_R}{s^r + 10\mu_R} = 1$$

Quindi si ha che

$$|e_d(\infty)| = \lim_{s \to 0} sF(s) \frac{0.1}{s} = 0.1 \lim_{s \to 0} F(s) = \begin{cases} \dfrac{\mu_R}{1 + 10\mu_R} & r = 0 \\ 0.1 & r > 0 \end{cases}$$

Questo risultato non è per nulla sorprendente e sarebbe anche stato possibile evitare i calcoli.

Scegliendo $r = 0$

$$|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| = \frac{1}{1 + 10\mu_R} + \frac{\mu_R}{1 + 10\mu_R} \leq 0.5$$

$$\mu_R \geq \frac{1}{8} = 0.125$$

Scegliamo:

$$\mu_R = 0.2$$

$$r = 0$$

Quindi:

$$R_1(s) = 0.2$$

PROGETTO DINAMICO

La funzione di trasferimento d'anello è ora

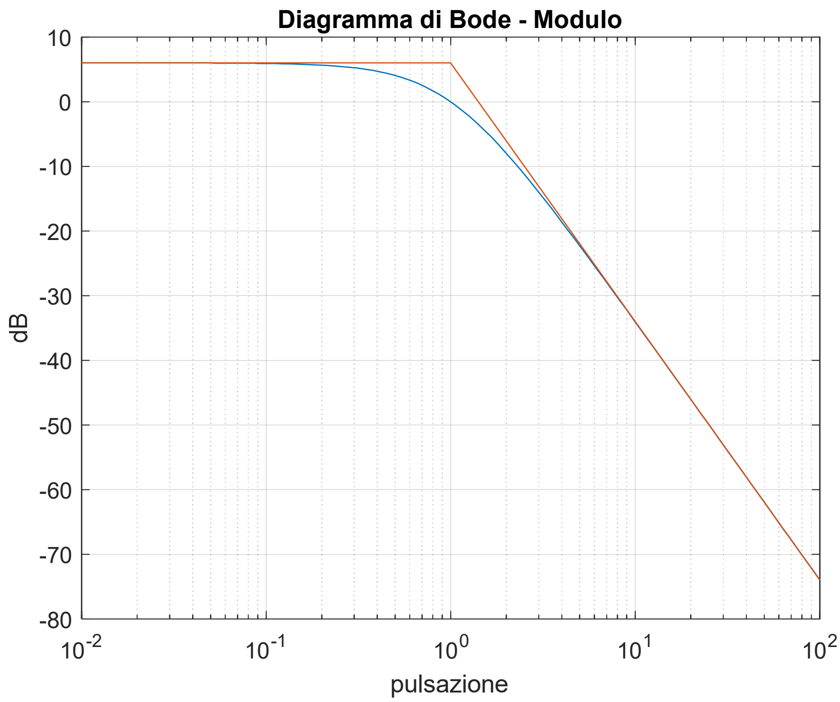
$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = 0.2R_2(s)\frac{10}{(1+s)^2} = 2R_2(s)\frac{1}{(1+s)^2}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$

Si ha quindi

$$L'(s) = \frac{2}{(1+s)^2}$$

Tracciamo il diagramma di Bode di $|L'(j\omega)|$



Si ha $\omega_C \cong 1.5\ rad/s$

Si calcola ora la fase critica

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -2arctg(1.5) = -112°.6$$

Infine, si calcola il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 112°.6 = 67°.4$$

Le specifiche sono rispettate. Il controllore progettato è quindi:

$$R(s) = 0.2$$

Osservazione conclusiva

Al termine del progetto statico era possibile fare una scelta diversa, cioè: $r = 1$, lasciando la scelta di μ_R al progetto dinamico. Quindi

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

Proviamo a procedere nel progetto con questa scelta

PROGETTO DINAMICO

La funzione di trasferimento d'anello è ora

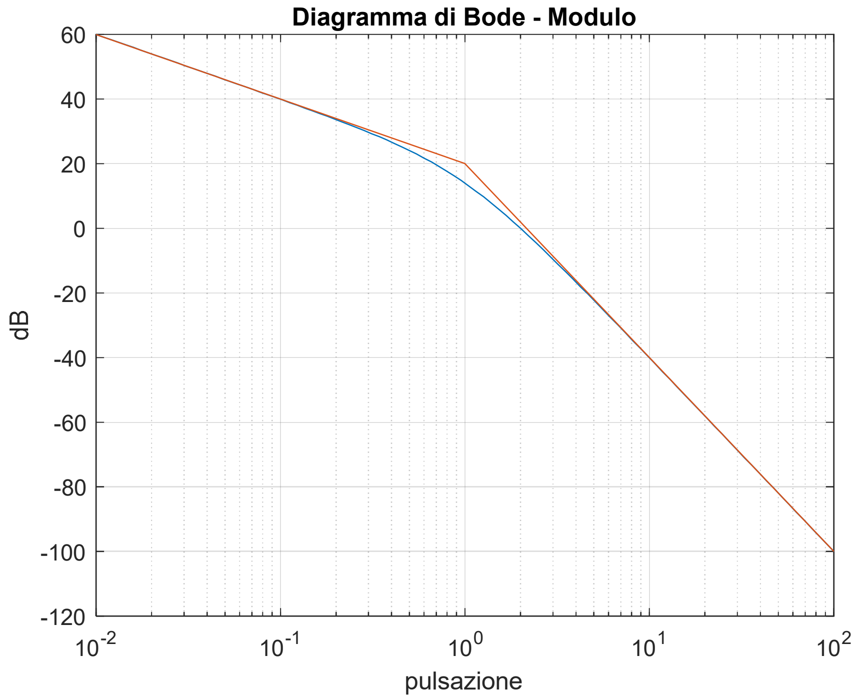
$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s}R_2(s)\frac{10}{(1+s)^2} = 10\mu_R R_2(s)\frac{1}{s(1+s)^2}$$

Primo tentativo $\mu_R = 1$ **e** $R_2(s) = 1$

Si ha quindi

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$$

Tracciamo il diagramma di Bode di $|L'(j\omega)|$



Si ha $\omega_C \cong 2\ rad/s$

Si calcola ora la fase critica

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -90° - 2arctg(2) = -90° - 126°.8 = -216°.8$$

Infine, si calcola il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 216°.8 = -36°.8$$

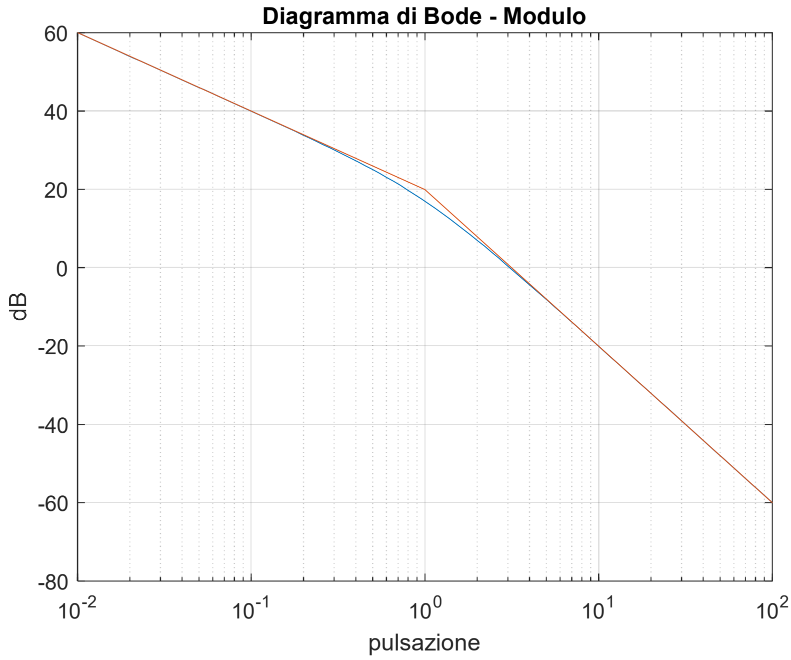
Il margine di fase è negativo ed il sistema retroazionato, per il criterio di Bode, non è asintoticamente stabile.

Secondo tentativo $\mu_R = 1$ **e** $R_2(s) = 1 + s$

Introduciamo nel regolatore uno zero in -1 per semplificare uno dei poli dominanti del sistema. Si ha quindi

$$L''(s) = \frac{10}{(1+s)s}$$

Tracciamo il diagramma di Bode di $|L''(j\omega)|$



Si ha $\omega_C \cong 3\,rad/s$

Si calcola ora la fase critica

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -90° - arctg(3) = -90° - 71°.6 = -161°.6$$

Infine, si calcola il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 161°.6 = 18°.4$$

La specifica sul margine di fase non è rispettata.

Possiamo provare ad agire su μ_R. Infatti, dal diagramma di Bode di $|L''(j\omega)|$ si nota che scegliendo $\mu_R = 0.1$ si abbassa il diagramma del modulo di 20 dB intersecando l'asse a 0 dB in $\omega_C \cong 1\,rad/s$. Così facendo la fase critica sarà

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -90° - arctg(1) = -90° - 45° = -135°$$

con margine di fase

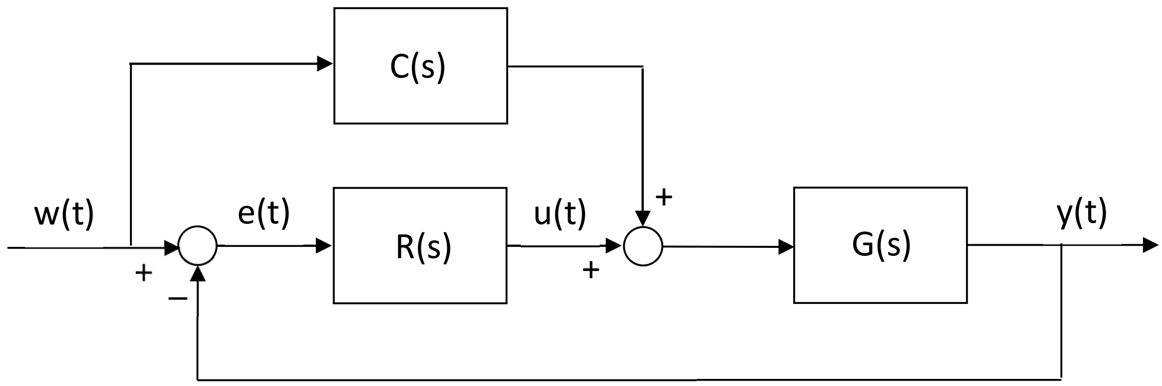
$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 135° = 45°$$

Cosi' facendo le specifiche sono rispettate ed il regolatore progettato è

$$R(s) = \frac{0.1}{s}(1+s)$$

ESERCIZIO 4

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi



dove

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s)^2} \quad con \quad 10 \leq \mu \leq 30$$

$$R(s) = \frac{1+s\tau}{1+sT}$$

Sia inizialmente $C(s) = 0$.

4.1 Tarare il controllore (cioè scegliere i valori dei parametri T e τ) in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e abbia le seguenti proprietà:

a) $\omega_C \geq 5 \frac{rad}{s}$
b) $\varphi_m \geq 80°$

4.2 Sia ora

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s)^2} e^{-sk}$$

Assumendo i valori dei parametri T e τ calcolati al punto precedente, dire come cambiano la pulsazione critica ω_C ed il margine di fase φ_m in funzione del ritardo k.

4.3 Sia ora

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s)^2} e^{-0.01s}$$

Sempre con i valori dei parametri T e τ calcolati al punto 4.1, calcolare (anche approssimativamente) per quali valori di μ (sempre nell'intervallo $10 \leq \mu \leq 30$) sono ancora garantite le specifiche di cui al punto 4.1.

4.4 Sia ora

$$G(s) = \frac{20}{(1+s)^2} e^{-0.02s}$$

Sempre con i valori dei parametri T e τ calcolati al punto 4.1, determinare $C(s)$ in modo tale che l'errore a transitorio esaurito in corrispondenza di $w(t) = sca(t)$ sia nullo

4.1

Innanzitutto, si osservi che non ci sono specifiche statiche. Coerentemente, la forma del controllore non contiene integratori e non consente di variarne il guadagno (che è sempre unitario).

Quello che possiamo fare con un controllore come quello assegnato è cancellare un polo del sistema con il suo zero (quindi ponendo $\tau = 1$) ed aggiungere un polo in alta frequenza scegliendo un valore piccolo della costante di tempo T. Per esempio, dal momento che la specifica richiede che $\omega_C \geq 5\frac{rad}{s}$, potremmo scegliere di inserire il polo una decade dopo, cioè alla pulsazione $\omega = 50\ \frac{rad}{s}$ che corrisponde a $T = 0.02$.

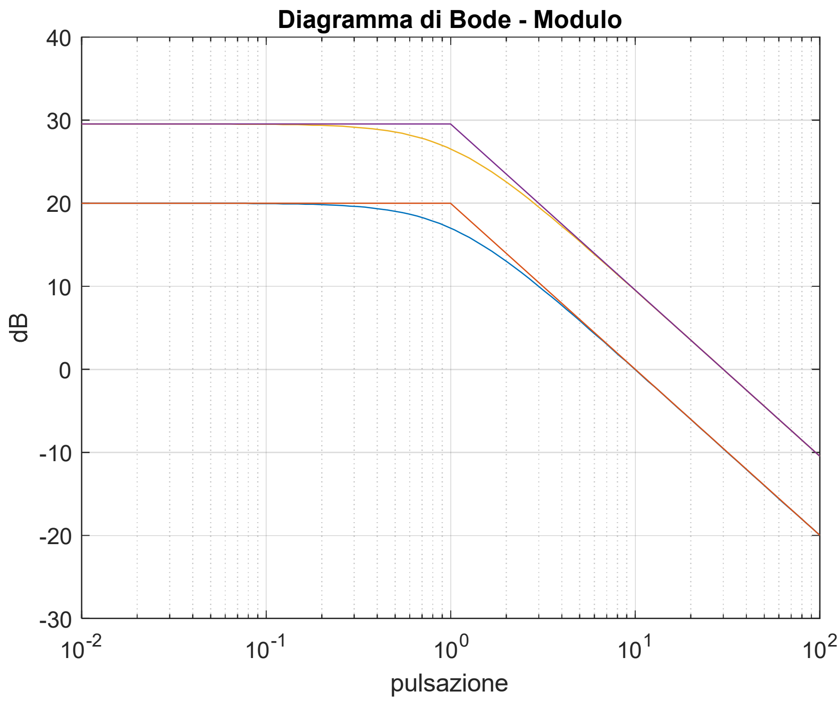
Si ha quindi che

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{1+s}{1+sT}\frac{\mu}{(1+s)^2} = \frac{\mu}{(1+sT)(1+s)} \quad con \quad 10 \leq \mu \leq 30$$

Al fine di determinare la pulsazione critica ω_C, il polo $1 + sT$ è ininfluente. Infatti, qualunque valore sceglieremo lo posizioneremo in alta frequenza, oltre la ω_C. Quindi, è sufficiente tracciare i seguenti diagrammi di Bode del modulo

$$|L^{10}(j\omega)| \quad per \quad L^{10}(s) = \frac{10}{1+s}$$

$$|L^{30}(j\omega)| \quad per \quad L^{30}(s) = \frac{30}{1+s}$$



Si ha quindi che per $10 \leq \mu \leq 30$

$$10\frac{rad}{s} \lesssim \omega_C \lesssim 30\frac{rad}{s}$$

Quindi, scegliendo $\tau = 1$ e T piccolo (tale da fare cadere il polo del regolatore a pulsazioni superiori alla ω_C) la specifica sulla pulsazione critica è sempre rispettata per tutti i valori di μ tali che $10 \leq \mu \leq 30$.

Si calcola ora la fase critica. Ovviamente il caso pessimo è $\omega_C = 30\frac{rad}{s}$: pulsazione critica più alta da cui fase critica più alta in modulo e quindi margine di fase minore. Calcoliamo comunque il margine di fase ad entrambi gli estremi dell'intervallo.

Per $\mu = 10$ si ha $\omega_C = 10\frac{rad}{s}$ quindi

$$\varphi_C^{10} = \measuredangle L(j\omega_C) = -arctg(10) - arctg(10T) = -84°.3 - arctg(10T)$$

Per rispettare la specifica $\varphi_m \geq 80°$ deve essere $\varphi_C \geq -100°$ cioè

$$-84°.3 - arctg(10T) \geq -100°$$

$$arctg(10T) \leq 15°.7$$

$$T \leq 0.028$$

che corrisponde ad avere il polo in alta frequenza con pulsazione $\omega \geq 35.6\frac{rad}{s}$

Analogamente per $\mu = 30$ si ha $\omega_C = 30\frac{rad}{s}$ quindi

$$\varphi_C^{30} = \measuredangle L(j\omega_C) = -arctg(30) - arctg(30T) = -88°.1 - arctg(30T)$$

Per rispettare la specifica $\varphi_m \geq 80°$ deve essere $\varphi_C \geq -100°$ cioè

$$-88°.1 - arctg(30T) \geq -100°$$

$$arctg(30T) \leq 11°.9$$

$$T \leq 0.007$$

che corrisponde ad avere il polo con pulsazione $\omega \geq 142.4\frac{rad}{s}$.

Come previsto, è quest'ultimo il caso pessimo e quindi, scegliendo $T = 0.005$, il polo in alta frequenza sarà in $\omega = 200\frac{rad}{s}$ e le specifiche saranno rispettate per tutti i valori di μ tali che $10 \leq \mu \leq 30$:

$$\boldsymbol{R(s) = \frac{1+s}{1+0.005s}}$$

Con questi valori, nel caso $\mu = 10$, con $\omega_C = 10\frac{rad}{s}$ si ha

$$\varphi_C^{10} = \measuredangle L(j\omega_C) = -arctg(10) - arctg(0.05) = -84°.3 - 2°.9 = -87°.2$$

da cui il margine di fase

$$\varphi_m^{10} = 180° - |\varphi_C| = 180° - 87°.2 = 92°.8$$

Analogamente, nel caso $\mu = 30$, con $\omega_C = 30\frac{rad}{s}$ si ha

$$\varphi_C^{30} = \measuredangle L(j\omega_C) = -arctg(30) - arctg(0.15) = -88°.1 - 8°.5 = -96°.6$$

da cui il margine di fase

$$\varphi_m^{30} = 180° - |\varphi_C| = 180° - 96°.6 = 83°.4$$

4.2

Se fosse

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s)^2} e^{-sk}$$

si avrebbe, con $\tau = 1$ e $T = 0.005$

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{\mu}{(1+0.005s)(1+s)} e^{-sk} \quad con \quad 10 \leq \mu \leq 30$$

I valori di pulsazione critica non cambiano perché un ritardo nell'anello non modifica il modulo della risposta in frequenza.

Quindi, per $\mu = 10$ si ha ancora $\omega_C = 10\frac{rad}{s}$ e per $\mu = 30$ si ha ancora $\omega_C = 30\frac{rad}{s}$.

La fase critica diminuisce (aumenta in modulo) del valore $\varphi_C^* = -\omega_C k \frac{180°}{\pi}$.

Nel caso $\mu = 10$ con $\omega_C = 10\frac{rad}{s}$

$$\varphi_C^{*10} = -10k\frac{180°}{\pi} \cong -573°k$$

Nel caso $\mu = 30$ con $\omega_C = 30\frac{rad}{s}$

$$\varphi_C^{*30} = -30k\frac{180°}{\pi} \cong -1719°k$$

Il caso pessimo è quello in corrispondenza di $\mu = 30$, con $\omega_C = 30\frac{rad}{s}$, con rispettivo margine di fase $\varphi_m^{30} = 83°.4$ per $G(s) = \frac{30}{(1+s)^2}$. Si ha che:

- per $1719°k \leq 3°.4$, cioè per
  $$k \leq 0.001978\, sec$$
  le specifiche sono ancora rispettate, cioè il sistema ha 80° di margine di fase.
- per $1719°k \leq 83°.4$, cioè per
  $$k \leq 0.04852\, sec$$
  il sistema retroazionato resta asintoticamente stabile, cioè ha margine di fase maggiore di 0°.

4.3

Se fosse

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s)^2} e^{-0.01s}$$

si avrebbe, con $\tau = 1$ e $T = 0.005$

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{\mu}{(1+0.005s)(1+s)} e^{-0.01} \quad con \quad 10 \leq \mu \leq 30$$

I valori di pulsazione critica non cambiano perché un ritardo nell'anello non modifica il modulo della risposta in frequenza.

Quindi, per $\mu = 10$ si ha ancora $\omega_C = 10\frac{rad}{s}$ e per $\mu = 30$ si ha ancora $\omega_C = 30\frac{rad}{s}$.

La fase critica diminuisce (aumenta in modulo) del valore $\varphi_C^* = -0.01\omega_C \frac{180°}{\pi}$.

Nel caso $\mu = 10$ con $\omega_C = 10 \frac{rad}{s}$

$$\varphi_C^{*10} = -0.1 \frac{180°}{\pi} \cong -5°.7$$

Nel caso $\mu = 30$ con $\omega_C = 30 \frac{rad}{s}$

$$\varphi_C^{*30} = -0.3 \frac{180°}{\pi} \cong -17.2°$$

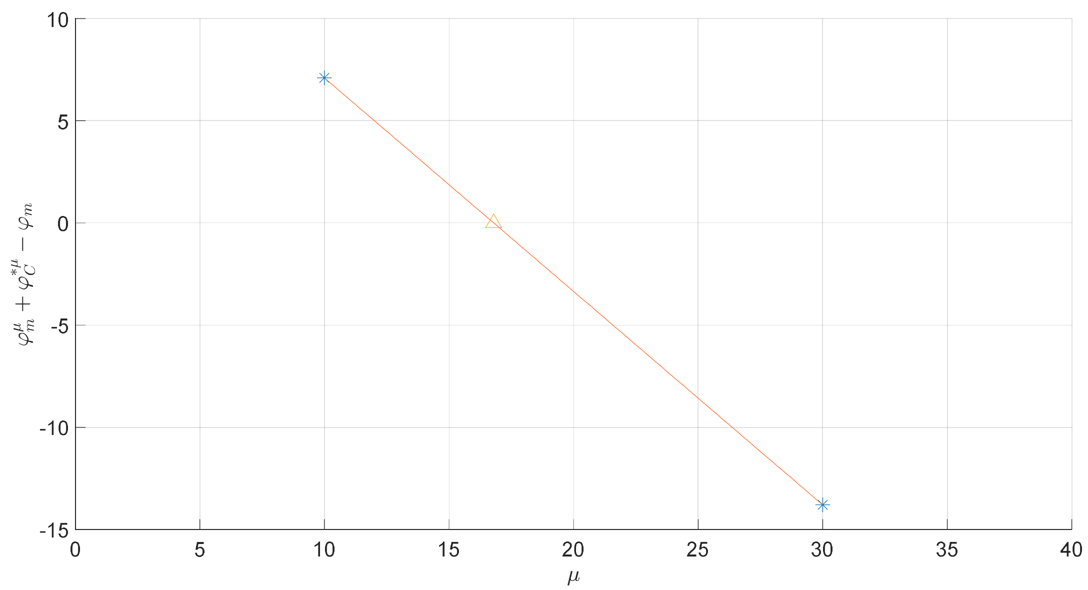
Quindi, per $\mu = 10$ il ritardo introduce un ulteriore sfasamento di $-5°.7$ con un margine di fase rispetto alle specifiche di $\varphi_m^{10} - \bar{\varphi}_m = 92°.8 - 80° = 12°.8$ (dove $\bar{\varphi}_m$ rappresenta appunto il margine di fase richiesto dalle specifiche). Le specifiche sono quindi rispettate per $\mu = 10$ anche con il ritardo aggiuntivo.

Al contrario, per $\mu = 30$ il ritardo introduce un ulteriore sfasamento di $-17°.2$ con un margine di fase rispetto alle specifiche di soli $\varphi_m^{30} - \bar{\varphi}_m = 83°.4 - 80° = 3°.4$. Le specifiche non sono quindi più rispettate per $\mu = 30$ a causa del ritardo aggiuntivo.

Ipotizzando una relazione lineare (non lo è certamente, ma le variazioni angolari sono piccole), possiamo supporre che all'aumentare del guadagno dal valore $\mu = 10$ al valore $\mu = 30$ il margine di fase rispetto alle specifiche (con sfasamento dovuto al ritardo incluso) passi (linearmente) dal valore $(\varphi_m^{10} - \bar{\varphi}_m) + \varphi_C^{*10} = 12°.8 - 5°.7 = 7°.1$ al valore $(\varphi_m^{30} - \bar{\varphi}_m) + \varphi_C^{*30} = 3°.4 - 17°.2 = -13°.8$.

La relazione è

$$\varphi_m^{\mu} + \varphi_C^{*\mu} - \bar{\varphi}_m \approx -1.045\mu + 17.55$$



Il valore di μ in corrispondenza del quale si annulla il margine rispetto alle specifiche è

$$\mu \cong 16.79$$

4.4

Dal momento che ci è richiesto di valutare una prestazione statica (a transitorio esaurito) il ritardo non ha influenza se non sull'asintotica stabilità del sistema retroazionato.

In particolare con

$$G(s) = \frac{20}{(1+s)^2} e^{-0.02s}$$

si avrebbe, con $\tau = 1$ e $T = 0.005$

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{20}{(1+0.005s)(1+s)} e^{-0.02s}$$

La pulsazione critica vale $\omega_C = 20\frac{rad}{s}$ e quindi la fase critica vale

$$\varphi_C = \measuredangle L(j\omega_C) = -arctg(20) - arctg(0.1) - 20 \cdot 0.02 \cdot \frac{180°}{\pi} = -87°.1 - 5°.7 - 22°.9 = -115°.7$$

da cui il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_C| = 180° - 115°.7 = 64°.3$$

Il sistema retroazionato è quindi asintoticamente stabile. Questa è una condizione necessaria per poter applicare con successo il compensatore che agisce in anello aperto.

La funzione di trasferimento dal riferimento $w(t)$ all'errore $e(t)$ è

$$\tilde{S}(s) = \frac{1 - C(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Quindi

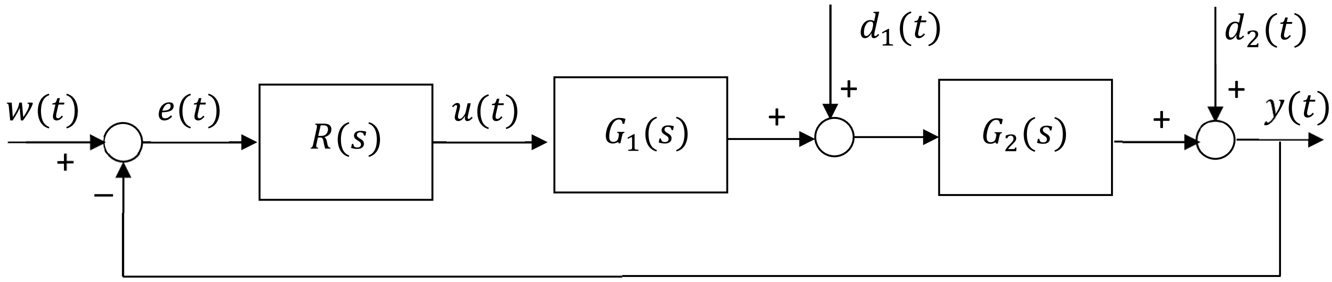
$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\tilde{S}(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \tilde{S}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1 - C(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1 - 20C(s)}{1 + 20}$$

Una possibile scelta per $C(s)$ è $C(s) = 0.05$. Con questo valore si ottiene

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1 - 20 \cdot 0.05}{1 + 20} = 0$$

ESERCIZIO 5

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi



con $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ **e** $G_2(s) = \frac{10}{s+1}$

Progettare il controllore $R(s)$ **in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e abbia le seguenti proprietà:**

a) $|e(\infty)| \leq 0.1$ **quando:**
  - $w(t) = ram(t)$
  - $d_1(t) = \pm 0.1 ram(t)$
  - $d_2(t) = sin(\bar{\omega} t)$ **con** $\bar{\omega} \leq 0.1\, rad/s$

b) $\omega_C \geq 1 \frac{rad}{s}$

c) $\varphi_m > 30°$

PROGETTO STATICO

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello:

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) \\ &= R_1(s)R_2(s)G_1(s)G_2(s) \\ &= \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{1}{s+1}\frac{10}{s+1} \\ &= \frac{10\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{1}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 10\mu_R$.

Il tipo della funzione d'anello è $g = r$.

Il contributo all'errore del riferimento $w(t) = \text{ram}(t)$ (vedi tabellina) vale:

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{1}{10\mu_R} & r = 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

Per calcolare il contributo all'errore del disturbo di carico $d_1(t) = \pm 0.1\text{ram}(t)$ bisogna calcolare la funzione di trasferimento da $d_1(t)$ all'errore $e(t)$:

$$\frac{E(s)}{D_1(s)} = \frac{-G_2(s)}{1+L(s)} = -G_2(s)S(s)$$

Quindi, applicando il teorema del valore finale, si può calcolare il contributo all'errore a transitorio esaurito:

$$e_{d_1}(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \left(-G_2(s)S(s)\right)D_1(s) = -\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{10}{s+1} \cdot \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{\pm 0.1}{s^2} =$$

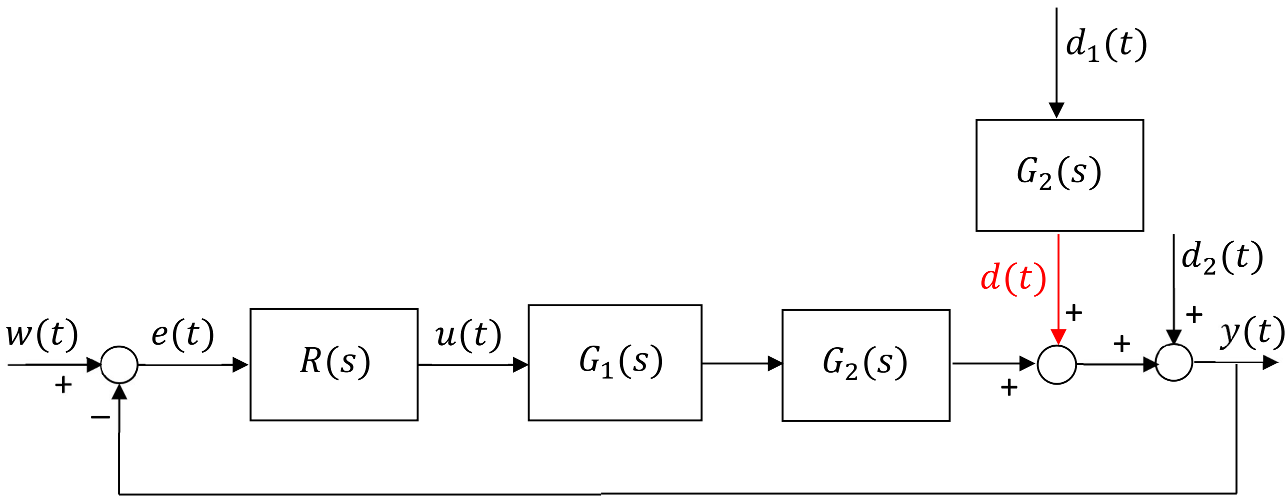
Nel limite per $s \to 0$, $L(s) = \frac{10\mu_R}{s^r}$

$$= -\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{10}{s+1} \cdot \frac{1}{1+10\frac{\mu_R}{s^r}} \cdot \frac{\pm 0.1}{s^2} == \mp\lim_{s\to 0} \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s^r}{s^r + 10\mu_R} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$= \mp\lim_{s\to 0} \frac{s^{r-1}}{(s^r + 10\mu_R)(s+1)} = \begin{cases} \mp\frac{1}{10\mu_R} & r = 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

Nota bene

Si poteva evitare questo calcolo osservando che il disturbo di carico $d_1(t)$ può essere spostato nell'abituale posizione del disturbo sulla linea di andata a patto di filtrarlo con la funzione di trasferimento $G_2(s)$.



Essendo $d_1(t) = \pm 0.1 ram(t)$ ed essendo $\lim_{s\to 0} G_2(s) = 10$ (il suo guadagno), si ha che, ai fini del calcolo dell'errore a regine, $d(t) = 10 \cdot (\pm 0.1 ram(t))$, cioè un normale disturbo sulla linea di andata a rampa con pendenza ± 1. Quindi, guardando la seconda colonna della tabellina, essendo il guadagno d'anello $\mu = 10\mu_R$ si ha la stessa conclusione di prima

$$|e_{d_1}(\infty)| = \begin{cases} \frac{1}{10\mu_R} & r = 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

Quindi, per rispettare le specifiche è indispensabile scegliere $r = 1$.

Per quanto riguarda $d_2(t) = \sin(\bar{\omega}t)$ $\left(\bar{\omega} \le 0.1\frac{rad}{sec}\right)$, applichiamo il teorema della risposta in frequenza. A regime avremo:

$$e_{d_2}(t) = |-S(j\bar{\omega})| \sin\left(\bar{\omega}\mathrm{t} + \measuredangle(-S(j\bar{\omega})\right)$$

Siamo interessati solo all'ampiezza della sinusoide e sappiamo che, approssimativamente:

$$|-S(j\bar{\omega})| \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\bar{\omega})|} & \text{per } \bar{\omega} < \omega_c \\ 1 & \text{per } \bar{\omega} > \omega_c \end{cases}$$

Data la specifica sulla pulsazione critica, il disturbo $d_2(t)$ risulterà certamente in banda di controllo e di conseguenza consideriamo solo il primo caso ($\bar{\omega} < \omega_c$).

Si applica la disuguaglianza "caso pessimo":

$$|e(\infty)| = \left|e_w(\infty) + e_{d_1}(\infty) + e_{d_2}(\infty)\right| \leq |e_w(\infty)| + \left|e_{d_1}(\infty)\right| + \left|e_{d_2}(t)\right|$$

dove $\left|e_{d_2}(t)\right|$ indica l'errore sinusoidale di regime dovuto al disturbo sinusoidale $d_2(t)$.

Per semplicità (è una scelta arbitraria, ma non ci sono altri criteri), partizioniamo l'errore di regime nel seguente modo per rispettare il vincolo complessivo $|e(\infty)| \leq 0.1$:

$$\begin{cases} |e_w(\infty)| + \left|e_{d_1}(\infty)\right| \leq 0.05 \\ \left|e_{d_2}(t)\right| \leq 0.05 \qquad \text{a regime} \end{cases}$$

Avendo scelto $r = 1$, la prima disuguaglianza risulta:

$$\begin{aligned} |e_w(\infty)| + \left|e_{d_1}(\infty)\right| &\leq 0.05 \\ \frac{1}{10\mu_R} + \frac{1}{10\mu_R} &\leq 0.05 \\ \frac{1}{5\mu_R} &\leq 0.05 \\ \mu_R &\geq 4 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo vincolo, abbiamo:

$$\begin{aligned} \left|e_{d_2}(t)\right| &\leq 0.05 \\ \frac{1}{|L(j\bar{\omega})|} &\leq 0.05 \\ |L(j\bar{\omega})| &\geq \frac{1}{0.05} \end{aligned}$$

Otteniamo quindi un vincolo sul modulo della funzione di trasferimento d'anello (una "zona proibita" per il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$), ovvero:

$$\begin{aligned} |L(j\omega)| &\geq \frac{1}{0.05} \quad per\ \omega \leq 0.1\frac{rad}{sec} \\ |L(j\omega)|_{dB} &\geq 26dB \quad per\ \omega \leq 0.1\frac{rad}{sec} \end{aligned}$$

Scegliamo quindi:

$$\mu_R = 6$$

$$r = 1$$

Quindi:

$$R_1(s) = \frac{6}{s}$$

con il vincolo che $|L(j\omega)|_{dB} \geq 26\ dB$ per $\omega \leq 0.1\frac{rad}{sec}$.

PROGETTO DINAMICO

La funzione di trasferimento d'anello è

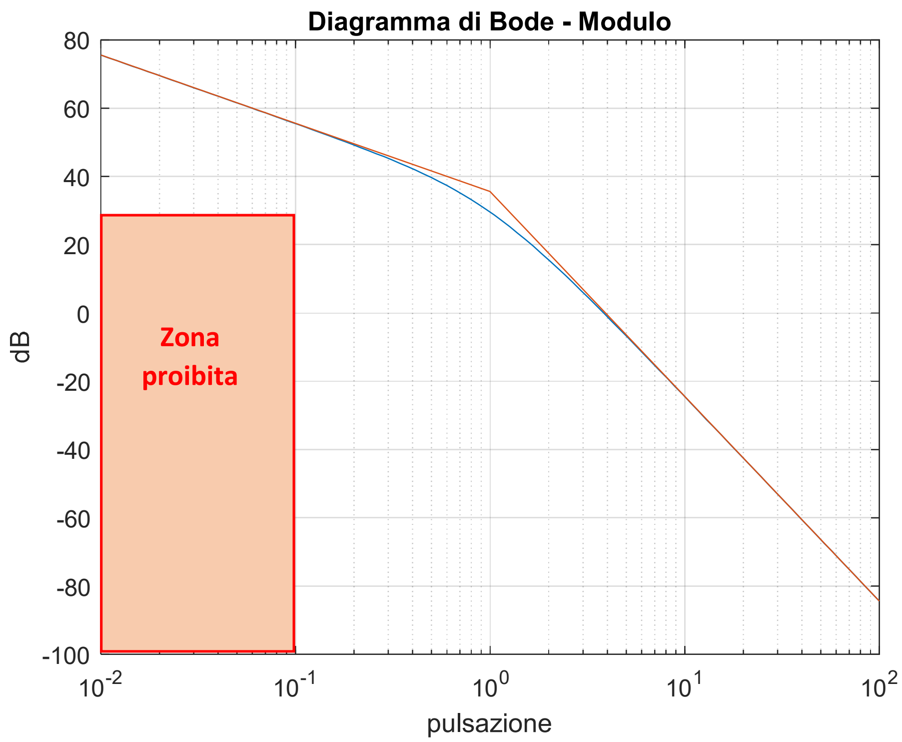
$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) \\ &= R_1(s)R_2(s)G_1(s)G_2(s) \\ &= \frac{6}{s}R_2(s)\frac{10}{(s+1)^2} \\ &= R_2(s)\frac{60}{s(s+1)^2} \end{aligned}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$

Si ha quindi:

$$L'(s) = \frac{60}{s(s+1)^2}$$

il cui diagramma di Bode del modulo è:



Si ha $\omega_c \cong 4\frac{rad}{sec}$

Si calcola ora la fase critica:

$$\varphi_c = \measuredangle L'(j\omega_c) = -90° - 2arctg(4) = -90° - 152° = -242°$$

Infine, si calcola il margine di fase:

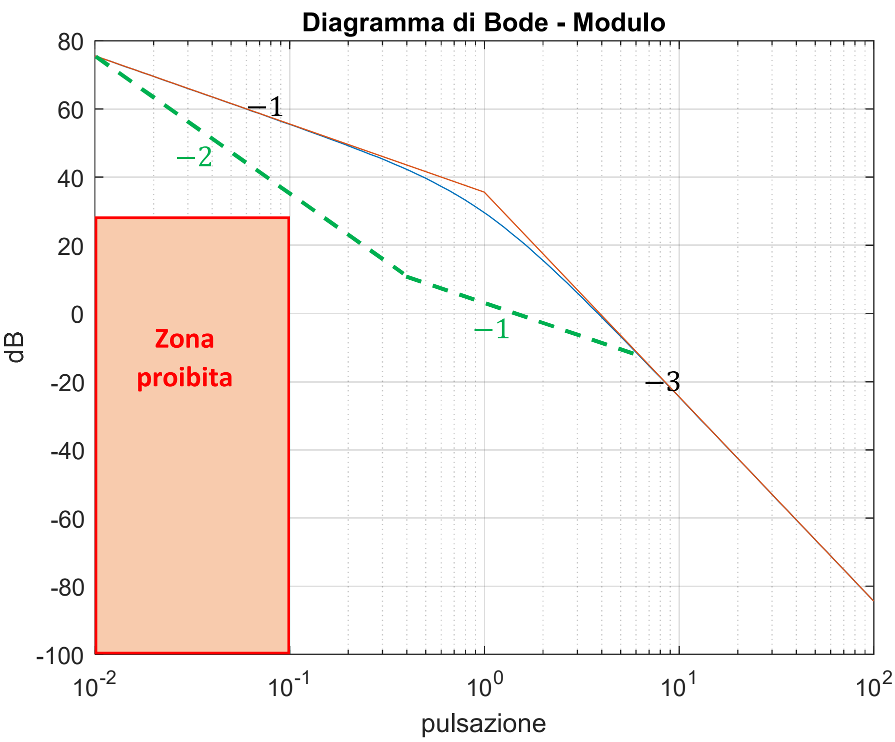
$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 180° - 242° = -62°$$

Non rispetta le specifiche. Il primo tentativo soddisfa il primo vincolo ma non il secondo, quindi procediamo con un altro tentativo.

Secondo tentativo

Dal primo tentativo, $|L'(j\omega)|$ interseca l'asse a $0dB$ con pendenza -3 ($-60\frac{dB}{decade}$). Dobbiamo costruire $|L''(j\omega)|$ in modo tale che tagli l'asse a $0dB$ con pendenza -1 ($-20\frac{dB}{decade}$), rispettando il vincolo sulla pulsazione critica ($\omega_c \geq 1\frac{rad}{sec}$) ed evitando la "zona proibita". Ciò si può ottenere:

- aumentando la pendenza iniziale del diagramma di Bode del modulo da -1 a -2 aggiungendo un polo, per esempio, in $\omega = 0.01\ \frac{rad}{sec}$. Ciò consentirà di "avvicinarci" più rapidamente all'asse a $0\ dB$ per avere pulsazione critica il più possibile vicino alla specifica.
- abbassando la pendenza a -1 una volta superata la "zona proibita" ed abbastanza vicini all'asse a $0\ dB$, ponendo uno zero, per esempio, in $\omega = 0.4\ \frac{rad}{sec}$ e cancellando i poli di $G(s)$ in $\omega = 1\ \frac{rad}{sec}$, in modo da mantenere la pendenza di $-20\frac{dB}{decade}$ all'intersezione con l'asse a $0dB$;
- raccordando infine il diagramma $|L''(j\omega)|$ con il diagramma $|L'(j\omega)|$ in alta frequenza mediante l'introduzione in $L''(s)$ di due poli in posizione opportuna che si può dedurre dal grafico essere in $\omega = 6\ \frac{rad}{sec}$

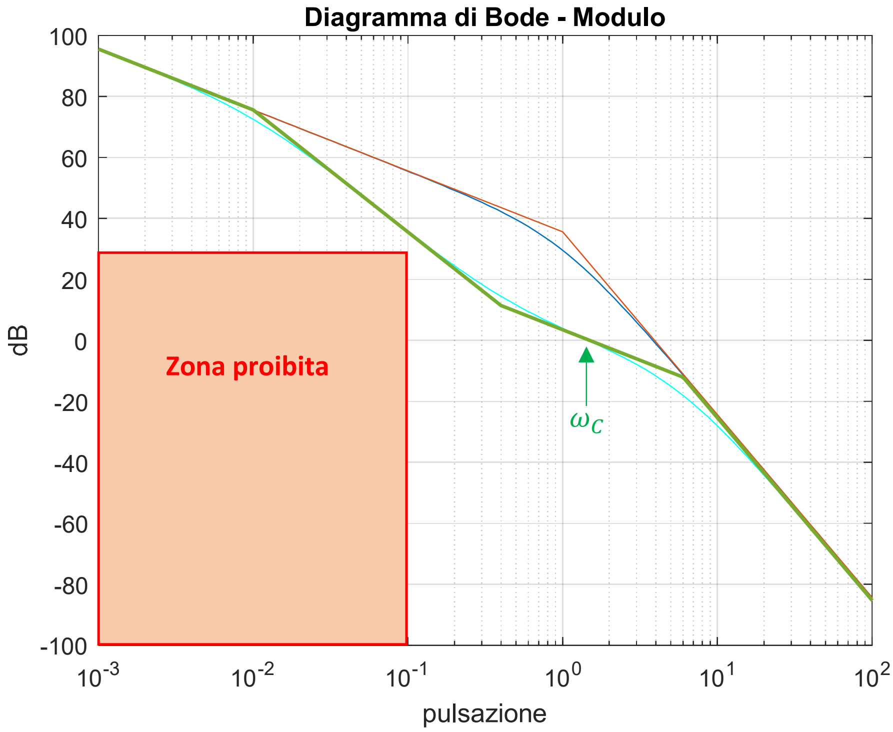


Quindi, osservando il grafico, la funzione di trasferimento d'anello desiderata è

$$L''(s) = \frac{60(1+2.5s)}{s(1+100s)(1+0.1667s)^2}$$

Quindi

$$R_2(s) = \frac{(1+s)^2(1+2.5s)}{(1+100s)(1+0.1667s)^2}$$



Si osservi che la pulsazione critica vale

$$\omega_C \cong 1.5\, rad/s$$

Si calcola ora la fase critica:

$$\varphi_c = \measuredangle L''(j\omega_c) = arctg(1.5 \cdot 2.5) - 90° - arctg(1.5 \cdot 100) - 2arctg(1.5 \cdot 0.167) =$$

$$= 75°.1 - 90° - 89°.6 - 28°.0 = -132°.5$$

Infine, si calcola il margine di fase:

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 180° - 132°.5 = 47°.5$$

Quindi il controllore progettato è:

$$\boldsymbol{R(s) = 6\frac{(1+s)^2(1+2.5s)}{s(1+100s)(1+0.1667s)^2}}$$