BASE E DIMENSIONE DI UN SOTTOSPAZIO

Def: Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Una base di V è un insieme $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ di vettori di V che

a) generano V, ossia $V = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \rangle$, ossia ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$, ossia

$$\forall \underline{v} \in V \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{v}_i$$

b) sono linearmente indipendenti.

Def: una base $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ si dice ortonormale se

$$\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \quad (\underline{v}_i \text{ è ortogonale a } \underline{v}_j) \\ 1 & \text{se } i = j \quad (\underline{v}_i \text{ è un versore}) \end{cases}$$

Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ una sua base.

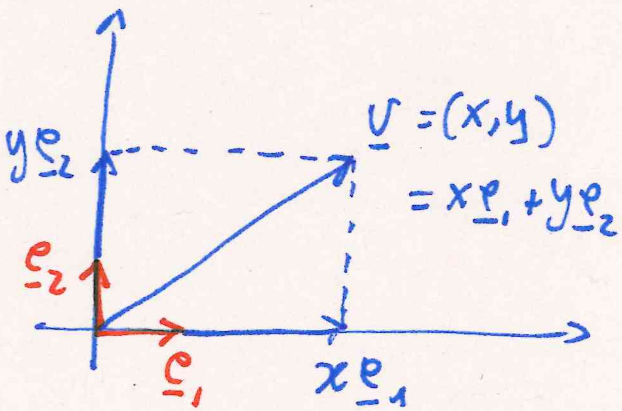
Si dimostra allora che ogni altra base di V ha k elementi.

Definizione: La dimensione $\dim V$ di un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ è il numero di elementi di una (qualunque) sua base. Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è una base di V allora $\dim V = k$. Se $V = \{\underline{0}\}$ si pone $\dim V = 0$.

Esempi:

1) $V = \mathbb{R}^2$ (visto come sottospazio banale di $\mathbb{R}^2$)

Siano $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$. Allora:



a) Se $\underline{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ allora $\underline{v} = x\,\underline{e}_1 + y\,\underline{e}_2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$

b) $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ sono lin. indip. (perché non paralleli)

- Quindi $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ è una base (ortonormale) di $V = \mathbb{R}^2$, e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

- $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ è detta <u>base canonica</u> di $\mathbb{R}^2$.

- Più in generale, se $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ non sono paralleli, allora $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ (in generale non ortonormale)

Ad esempio, $\{\underline{u}_1 = (0,2),\ \underline{u}_2 = (1,1)\}$ è base di $\mathbb{R}^2$ [verifica]

ii) Se $V = \mathbb{R}^n$ (visto come sottospazio banale di $\mathbb{R}^n$) allora i versori fondamentali di $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i, \ \dots \ \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base ~~di $\mathbb{R}^n$~~ ortonormale di $\mathbb{R}^n$, detta <u>base canonica</u> di $\mathbb{R}^n$.

Più in generale, n vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$. In particolare, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

iii) Sia $V = \{(x,y) \mid 2x+3y=0\}$. Abbiamo visto che V è sottospazio.

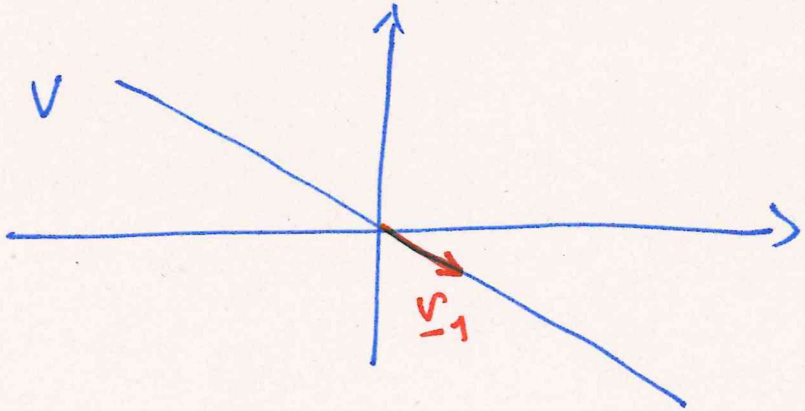
Base? Dimensione? Si ha:

$$V = \{(x,y) \mid y = -\frac{2}{3}x\} = \{(x, -\frac{2}{3}x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -\frac{2}{3}) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (1, -\frac{2}{3}) \rangle = \langle \underline{v}_1 \rangle \quad \text{con } \underline{v}_1 = (1, -\frac{2}{3})$$

Quindi:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ V = \langle \underline{v}_1 \rangle \\ \cdot\ \underline{v}_1 \text{ lin. indip. (perché } \neq \underline{0}) \end{array}\right\} \Rightarrow \{\underline{v}_1\} \text{ è una base di } V \Longrightarrow \dim V = 1.$$



$\forall \underline{v} \in V \ \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\underline{v} = \lambda \underline{v}_1$

oss: $\{(3,-2)\}$ è un'altra base di V [verifica]

iv) Sottospazi di $\mathbb{R}^2$

$V = \begin{cases} \{\underline{0}\} = \{(0,0)\} & \dim V = 0 \\ \text{rette per l'origine} & \dim V = 1 \\ \mathbb{R}^2 & \dim V = 2 \end{cases}$

Sottospazi non banali di $\mathbb{R}^3$

$V = \begin{cases} \text{rette per l'origine} & \dim V = 1 \\ \text{piani per l'origine} & \dim V = 2 \end{cases}$

v) Sia $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle \subset \mathbb{R}^3$, $\underline{v}_1 = (1,1,1)$, $\underline{v}_2 = (1,0,3)$

V è sottospazio perché è il sottospazio generato da $\underline{v}_1, \underline{v}_2$.

Inoltre, abbiamo visto (lez. prec.) che

(*) $$\cancel{V = \{(x,y) \in \mathbb{R}}\ V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0 \}$$

quindi V è un piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine ($\Rightarrow$ sottospazio).

Base? Dimensione? Due modi:

I) a) $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ generano V
   b) $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. indip.
$\Rightarrow \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di V $\Rightarrow \dim V = 2$.

II) $V = \{(x,y,z) \mid z = -2x + 3y\} = \{(x, y, -2x+3y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,0,-2x) + (0,y,3y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,-2) + y(0,1,3) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \nearrow$

$= \langle (1,0,-2),(0,1,3) \rangle = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$

dove $\underline{w}_1 = (1,0,-2)$, $\underline{w}_2 = (0,1,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \underline{w}_1, \underline{w}_2 \text{ generano } V \\ \text{b) } \underline{w}_1, \underline{w}_2 \text{ sono lin. indip.} \end{array}\right\} \Rightarrow \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\} \text{ è base di } V \Rightarrow \dim V = 2.$$

oss: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ e $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ sono due basi diverse di V. Si noti che

$$\underline{v}_1 = \underline{w}_1 + \underline{w}_2, \quad \underline{v}_2 = \underline{w}_2$$

vi) Siano $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

e sia $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ Base di V? dim V?

- $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ generano V (per definizione)
- $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ <u>non</u> sono lin. indip. (perché sono 4 vettori in $\mathbb{R}^3$)

Cerchiamo una base di V: la matrice

$$A = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3 | \underline{v}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2 $\Rightarrow$ max num. di colonne lin. indip. è 2.

Ad esempio, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono lin. indip. (non è l'unica scelta, posso scegliere anche $\underline{v}_1, \underline{v}_3$, oppure $\underline{v}_3, \underline{v}_4$ }. La scelta $\underline{v}_2, \underline{v}_4$ non va

bene perché $\underline{v}_4 = 2\underline{v}_1 \Rightarrow$ lin. dip.).

Scelgo $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$. $\Rightarrow$ $\underline{v}_3$ e $\underline{v}_4$ sono comb. lin. di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ [verificare]

e quindi

$$V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$$

Si ha

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ generano V / sono lin. indip. $\Rightarrow$ $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è base di V $\Rightarrow$ $\dim V = 2$.

Proposizione: Sia V un sottospazio vettoriale, $\dim V = k$, e sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ una base di V. Allora:

1) per ogni $\underline{v} \in V$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k \qquad (*)$$

2) gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ che soddisfano $(*)$ sono univocamente determinati.

Dim: 1) Esercizio

2) Per dimostrare l'unicità dei coefficienti nella $(*)$ supponiamo di poter scrivere $\underline{v} \in V$ in due modi: come $(*)$ e come

$$\underline{v} = \lambda'_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda'_k \underline{v}_k \qquad (\text{per qualche } \lambda'_1, \dots, \lambda'_k \in \mathbb{R})$$

Allora

$$\underline{0} = (\lambda_1 - \lambda'_1)\underline{v}_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda'_k)\underline{v}_k$$

Siccome $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono lin. indip. allora necessariamente

$$\lambda_i - \lambda'_i = 0 \quad i=1, \dots, k \quad \Rightarrow \quad \lambda'_i = \lambda_i \quad i=1, \dots, k$$

cioè la scomposizione di $\underline{v}$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ è unica $\square$

Es: $V = \mathbb{R}^2$, allora $\{\underline{e}_1 = (1,0), \underline{e}_2 = (0,1)\}$ è base (canonica) di V.

Per la proposizione, ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ si scrive in maniera unica come comb. lin. di $\underline{e}_1, \underline{e}_2$. Infatti:

$$\underline{v} = (x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\,\underline{e}_1 + y\,\underline{e}_2$$

Inoltre, anche $\{\underline{v}_1 = (1,-1), \underline{v}_2 = (1,1)\}$ è base di $V = \mathbb{R}^2$ [fare verifica].

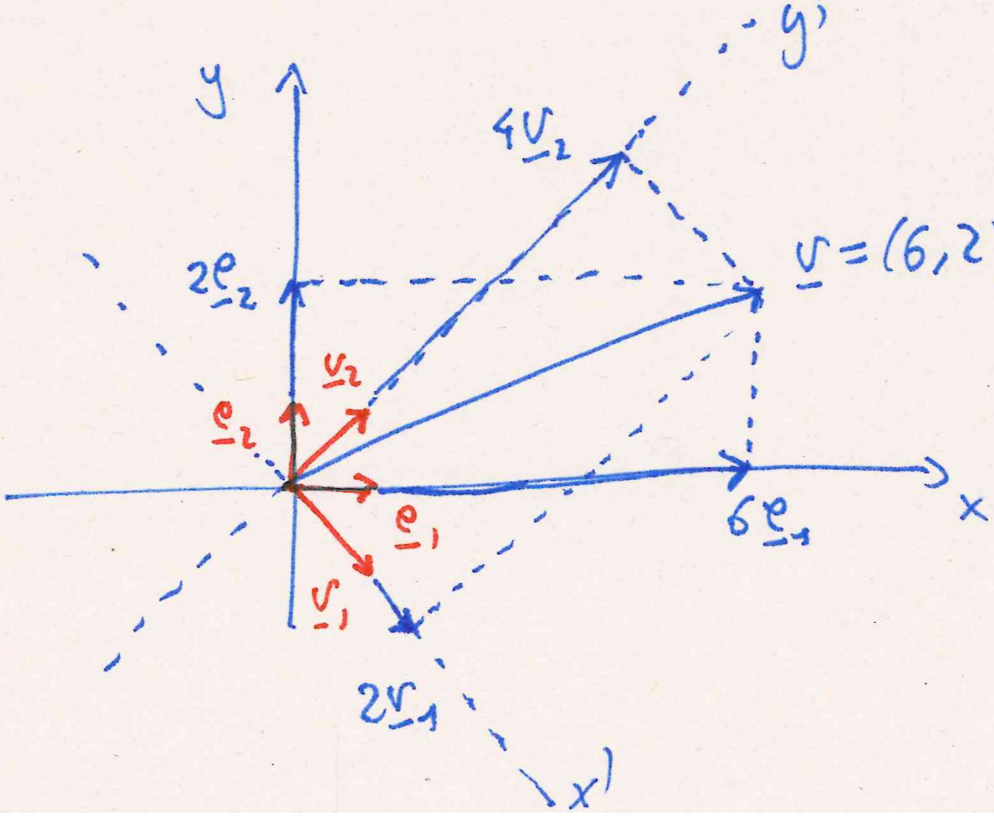
Per la proposizione, ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ si scrive in maniera unica come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$:

Se $\underline{v} \in \mathbb{R}^2 \quad \exists\, x', y' \in \mathbb{R}$ t.c. $\underline{v} = x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2$

Se $\underline{v} = (x,y)$ allora cerco x', y' t.c. $(x,y) = x'(1,-1) + y'(1,1)$

$$\Rightarrow (x,y) = (x'+y', -x'+y') \Rightarrow \begin{cases} x'+y' = x \\ -x'+y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x-y}{2} \\ y' = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{v} = \underbrace{\frac{x-y}{2}}_{x'}\underline{v}_1 + \underbrace{\frac{x+y}{2}}_{y'}\underline{v}_2$$

Ad esempio:



$$\underline{v} = (6,2) = 6\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$$
$$= 2\underline{v}_1 + 4\underline{v}_2$$

$x = 6 \qquad x' = \dfrac{6-2}{2} = 2$

$y = 2 \qquad y' = \dfrac{6+2}{2} = 4$