OSS: (Inverso e quoziente in $\mathbb{C}$)

i) Se $z \neq 0$ allora esiste $\frac{1}{z}$ (che si denota anche z^{-1}) e si ha

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

In particolare, se $z = a + ib$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}\,\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i$$

ii) (Esercizio) Mostrare che se $z = a+ib$ e $w = c+id \neq 0$ allora

$$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ca+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

ES: Sia $z = 1+\sqrt{3}\,i$

$$|z| = \begin{cases} \sqrt{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \sqrt{1 - \cancel{\sqrt{3}i} + \cancel{\sqrt{3}i} - 3i^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1}{1+\sqrt{3}i}\,\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1-\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

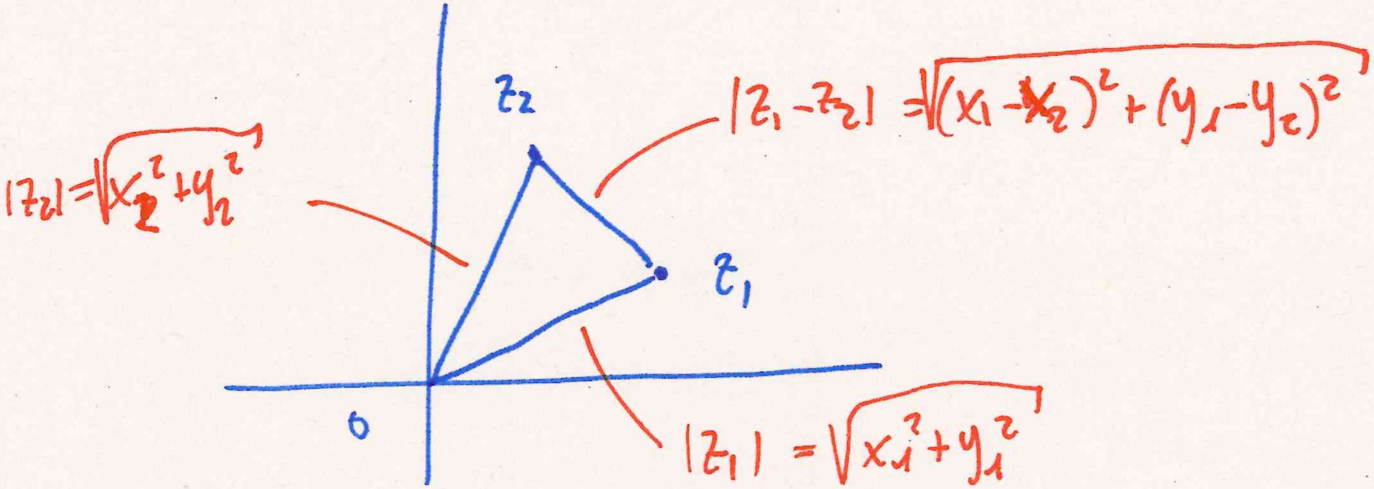
(Esercizio: verificare che $z \cdot \frac{1}{z} = 1$)

OSS: Abbiamo visto che $|z|$ è la distanza tra z e l'origine 0.

In maniera simile, se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ allora $|z_1 - z_2|$ è la distanza tra z_1 e z_2.

Infatti, se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \implies |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

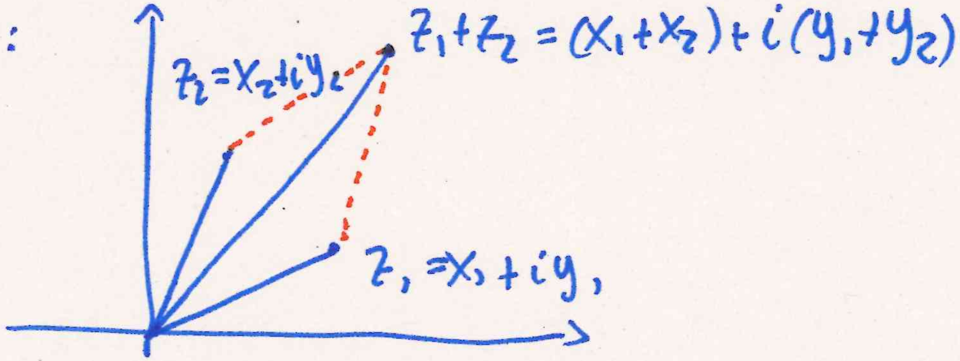


Esercizio: Dati $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$, mostrare che

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = 2\sqrt{3}$$

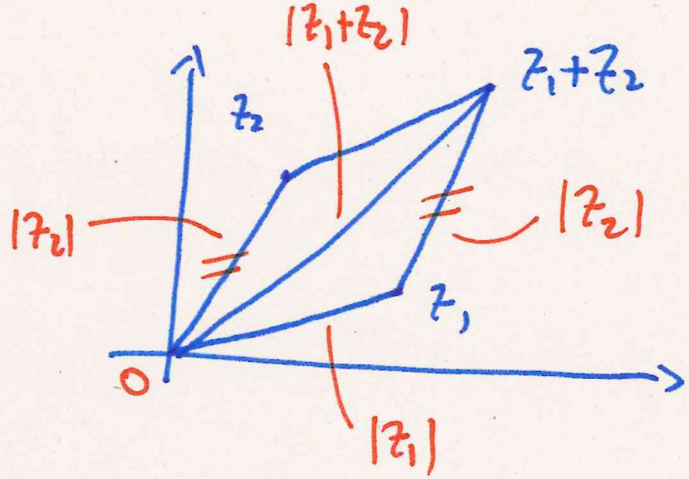
Significato geometrico della somma in $\mathbb{C}$

La somma $z_1 + z_2$ si costruisce con la regola del parallelogramma, come per la somma di vettori. Infatti:



una conseguenza importante: disuguaglianza triangolare

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



Attenzione! Le disuguaglianze tra numeri complessi non hanno senso.

Ad esempio, la scrittura "$i>0$" non ha senso

Se $i>0 \Rightarrow i\cdot i > i\cdot 0 \Rightarrow i^2>0 \Rightarrow -1>0$ NO

Se $i=0 \Rightarrow i\cdot i = i\cdot 0 \Rightarrow i^2=0 \Rightarrow -1=0$ NO

Se $i<0 \Rightarrow -i>0 \Rightarrow (-i)(-i)>(-i)\cdot 0 \Rightarrow i^2>0 \Rightarrow -1>0$ NO

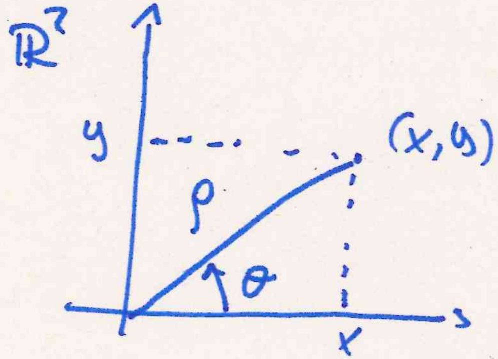
Es: $z\in\mathbb{C}$: $|z|<1$ ha senso, perché è una disuguaglianza tra i numeri reali $|z|\in\mathbb{R}$ e $1\in\mathbb{R}$

Forma trigonometrica dei numeri complessi:

Finora abbiamo considerato la cosiddetta forma algebrica di un numero complesso, ossia

$$z = x + iy$$

Introduciamo ora una seconda rappresentazione di z, legata alle coordinate polari di $\mathbb{R}^2$. Ricordiamo come sono definite:



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

Formule inverse: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

Ora se $z=x+iy$, sostituendo $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ si ha

$$z=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta$$

e quindi otteniamo la <u>forma trigonometrica</u>

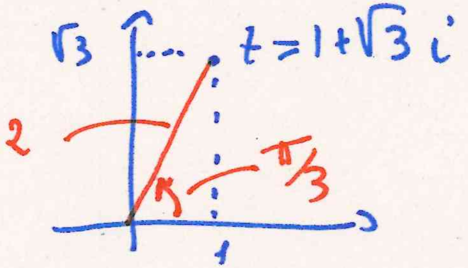
$$\boxed{z=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)}$$

dove $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ e $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{Re(z)}{|z|}\\ \sin\theta=\dfrac{Im(z)}{|z|}\end{cases}$

L'angolo θ viene detto <u>argomento</u> di z e viene indicato con $\arg(z)$.

Es: $z=1+\sqrt{3}\,i$. Abbiamo visto che $|z|=2$.

Forma polare: $\rho=|z|=2$, $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Longrightarrow \arg z=\theta=\dfrac{\pi}{3}$



$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

OSS: • Abbiamo visto che l'interpretazione geometrica della somma di due numeri complessi è descritta dalla regola del parallelogramma.

• Per dare un'interpretazione geometrica al prodotto di due numeri complessi è più conveniente utilizzare la forma trigonometrica.

Formule di de Moivre

Teorema:

a) Se $z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ e $z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$ sono scritti in forma trigonometrica, allora

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))} \quad (1)$$

e, se $z_2 \neq 0$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))} \quad (2)$$

In altre parole

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

b) Se $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ è scritto in forma trigonometrica, e $m = 0, 1, 2, \dots$, allora

$$\boxed{z^m = \rho^m \left(\cos(m\theta) + i \sin(m\theta)\right)} \qquad (3)$$

In altre parole

$$|z^m| = |z|^m, \qquad \arg(z^m) = m \arg(z)$$

Dimostrazione:

a) Per quanto riguarda la (1)

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= \rho_1\rho_2\Big(\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2}_{\overset{\shortparallel}{\cos(\theta_1+\theta_2)}} + i\big(\underbrace{\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2}_{\overset{\shortparallel}{\sin(\theta_1+\theta_2)}}\big)\Big)$$

$$= \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

[Esercizio: dimostrare la (2)]

b) Usando ripetutamente la (1) abbiamo che, se

$$z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad k = 1, \dots, n$$

allora

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_n \left[\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i \sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)\right]$$

Segue che se $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ allora

$$z^n = \rho^n \left[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\right]$$

$\square$

~~Esercizio~~ Esempio: Siano $z = 1+\sqrt{3}\,i$ e $w = 1+i$.

Calcolare z^3 e w^8.

- $z = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (visto prima)

Allora per de Moivre

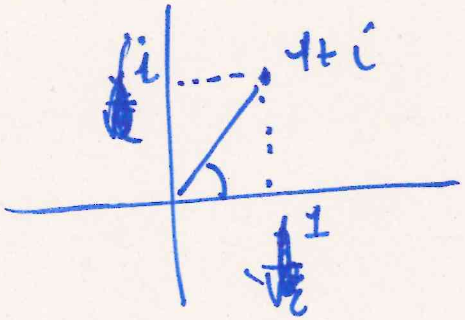
$$z^3 = 2^3\left(\cos\left(3\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right)\right) = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8(-1+0\cdot i) = -8$$

• $w = 1+i$. Calcolo w^8 in forma algebrica

$$w^8 = (1+i)^8 = \left(\left((1+i)^2\right)^2\right)^2$$ [Completare come esercizio]

Calcolo w^8 in forma trigonometrica

$w = 1+i \qquad |w| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \arg z = \theta = \dfrac{\pi}{4}$



allora $w = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$w^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\left(8\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\frac{\pi}{4}\right)\right) = 16\left(\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + i\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\right) = 16$$

Abbiamo quindi mostrato che $w = 1+i$ è una radice ottava di 16

Ce ne sono altre due, reali, date da $\pm\sqrt{2}$. Inoltre, ce ne sono altre 5, complesse non reali: (in tutto sono 8) 2.12

Esercizio: Trovare tutte le radici ottave di 16 e disegnarle sul piano di Gauss.

Interpretazione geometrica del prodotto in $\mathbb{C}$

Fissiamo $w \in \mathbb{C}$ e consideriamo la trasformazione del piano

$$z \longmapsto wz$$

Dalla 1ª formula di de Moivre otteniamo che

$$|wz| = \underbrace{|w|}_{\text{coefficiente di dilatazione, fissato}} \cdot |z|$$

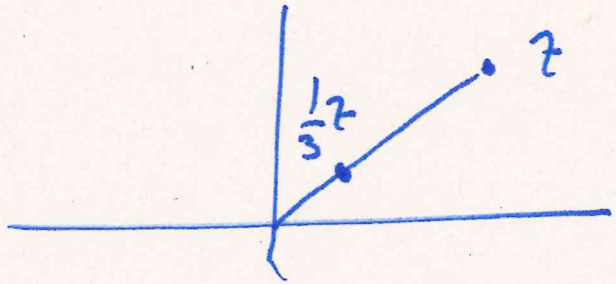
$$\arg(wz) = \underbrace{\arg(w)}_{\text{angolo, fissato}} + \arg(z)$$

Quindi, la trasformazione $z \mapsto wz$ è una <u>rotazione</u>, di angolo $\arg(w)$ attorno all'origine (in senso antiorario), composta con una dilatazione di coefficiente $|w|$.

Esempi:

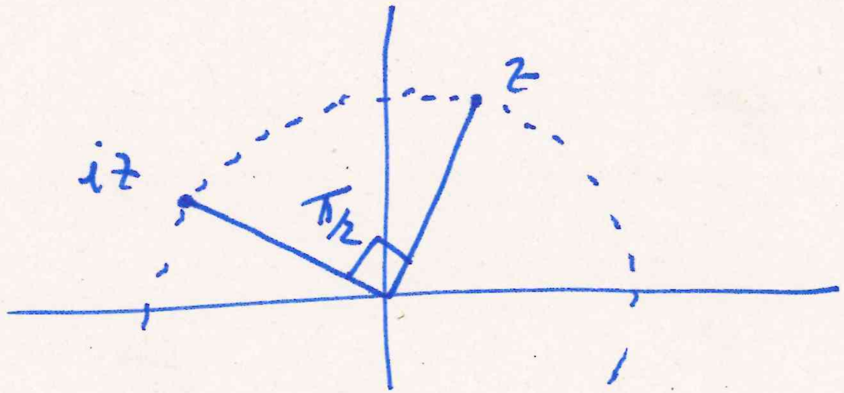
1) $z \to \frac{1}{3} z$. Si ha $w = \frac{1}{3}$ $|w| = \frac{1}{3}$, $\arg(w) = 0$

Abbiamo quindi una dilatazione di coefficiente $\frac{1}{3}$ (non c'è rotazione)



2) $z \mapsto iz$. Sia $w = i$. $|w| = 1$ $\arg(w) = \frac{\pi}{2}$

Rotazione attorno all'origine di angolo $\frac{\pi}{2}$ (non c'è dilatazione)



3) $z \longmapsto (1+\sqrt{3}\,i)z$. Si ha $w = 1+\sqrt{3}\,i$ $\quad |w| = 2$, $\arg(w) = \frac{\pi}{3}$

Quindi la trasformazione si ottiene componendo la rotazione di $\frac{\pi}{3}$ attorno all'origine con la dilatazione di coefficiente 2.