COMBINAZIONI LINEARI. INDIPENDENZA LINEARE.

Definizione: dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ la combinazione lineare

di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ è il vettore

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$$

Esempi:

1) (caso $k=1$): se $\underline{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ allora $\lambda_1 \underline{v}_1$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$

con coefficiente λ_1.

2) (caso $k=2$): la combinazione lineare di $\underline{v}_1 = (3,2,-1)$ e $\underline{v}_2 = (1,0,1)$

con coefficienti $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ è

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \frac{1}{2}(3,2,-1) + \frac{3}{2}(1,0,1) = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) = (3,1,1)$$

[$(3,1,1)$ è combinazione lineare di $(3,2,-1)$ e $(1,0,1)$]

OSS: Chiaramente, per ogni $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^m$ si ha

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0 \implies \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

Definizione: I vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^m$ si dicono lineamente indipendenti se vale l'implicazione

$$\boxed{\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0} \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0}$$

Altrimenti si dice che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ sono lineamente dipendenti

Esempi:

10.3

1) $\underline{v}_1 = (1,-2,0)$, $\underline{v}_2 = (3,0,1)$. $[n=3, k=2]$. Sono lin. indip.?

Cerco $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1(1,-2,0) + \lambda_2(3,0,1) = (0,0,0)$.

$\Rightarrow (\lambda_1, -2\lambda_1, 0) + (3\lambda_2, 0, \lambda_2) = (0,0,0) \Rightarrow (\lambda_1 + 3\lambda_2, -2\lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2 \text{ lin. indip.}$$

2) $\underline{v}_1 = (1,-2,3)$, $\underline{v}_2 = (-2,4,-6)$. Sono lin. indip.?

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1(1,-2,3) + \lambda_2(-2,4,-6) = (0,0,0)$.

$\Rightarrow (\lambda_1, -2\lambda_1, 3\lambda_1) + (-2\lambda_2, 4\lambda_2, -6\lambda_2) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1 - 2\lambda_2, -2\lambda_1 + 4\lambda_2, 3\lambda_1 - 6\lambda_2) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 2\lambda_2$$

10.4

Il sistema ha infinite soluzioni, della forma $(2\lambda_2, \lambda_2)$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

una soluzione è $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ (ovvio), ma ad esempio anche

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, infatti

$$2(1,-2,3) + 1(-2,4,-6) = (0,0,0)$$

cioè

$$2\,\underline{v}_1 + 1 \cdot \underline{v}_2 = \underline{0}$$

Quindi $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono lin. dip.

3) $\underline{v}_1 = (2,0,6)$, $\underline{v}_2 = (0,1,0)$, $\underline{v}_3 = (-1,0,-3)$ $[n=3, k=3]$ 10.5

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1(2,0,6) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(-1,0,-3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (2\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2, 6\lambda_1 - 3\lambda_3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 6\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_3 = 2\lambda_1 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Infinite soluzioni, della forma $(\lambda_1, 0, 2\lambda_1)$ $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dip. Ad esempio per $\lambda_1 = 1$

$$\underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3 = \underline{0}$$

4) $\underline{v}_1 = (1,0)$, $\underline{v}_2 = (0,2)$, $\underline{v}_3 = (1,1)$

$\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono lin. indip. $\quad \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\underline{v}_1$ e $\underline{v}_3$ " " " $\quad \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 0$

$\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ " " " $\quad \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{0} \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Esercizio.

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dip. :

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (0,2) + \lambda_3 (1,1) = (0,0)$$

$$\cancel{\Rightarrow (\lambda_1 + 3\lambda_3, \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0,0)}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1, 0) + (0, 2\lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_3 = -2\lambda_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ \lambda_3 = -2\lambda_2 \end{cases}$$

infinite soluzioni $\Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ lin. dip.

Ad es: $(\lambda_2 = 1)$ $\quad 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3 = \underline{0}$

Per $k = 1, 2, 3$ la situazione è descritta dalla seguente Tabella:

	lin. indip.	lin. dip.
$\underline{v}_1 \in \mathbb{R}^n$	non nullo	nullo
$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^n$	non paralleli	paralleli
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^n$	non complanari	complanari

Infatti:

$\underline{k=1}$) $\underline{v}_1$ lin. dip. $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ esiste $\lambda_1 \neq 0$ t.c. $\lambda_1 \underline{v}_1 = \underline{0} \Longleftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{0}$

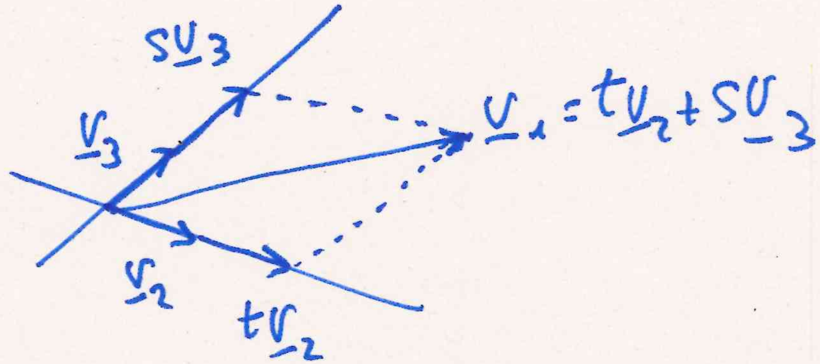
$\underline{k=2}$) $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ lin. dip. $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ esistono $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ tali che $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \underline{0}$

Sia ad esempio $\lambda_1 \neq 0$, allora $\underline{v}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \underline{v}_2 \Rightarrow \underline{v}_1 \parallel \underline{v}_2$

$k=3$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ lin dip. $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ esistono $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ tali che

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$. Sia $\lambda_1 \neq 0$, allora

$$\underline{v}_1 = \underbrace{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}_{t} \underline{v}_2 \underbrace{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}_{s} \underline{v}_3 = t\underline{v}_2 + s\underline{v}_3$$



$\underline{v}_1$ appartiene al piano che contiene

$\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ $\Rightarrow$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono complanari.

Proposizione:

i) I vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sono lin. dip. $\Longleftrightarrow$ (almeno) uno di essi è combinazione lineare degli altri $k-1$

ii) Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. indip. e sia $\underline{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$

Allora $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}$ sono lin. dip. $\Longleftrightarrow$ $\underline{v}_{k+1}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$

iii) Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono lin. indip. allora $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}$ sono lin. indip.

Dim:

i) "$\Longrightarrow$" sappiamo che $\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli.

Supponiamo ad esempio $\lambda_1 \neq 0$.

Allora
$$\underline{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\underline{v}_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\underline{v}_k$$

cioè $\underline{v}_1$ è comb. lin. di $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$.

"$\Leftarrow$" Supponiamo che $\underline{v}_1$ sia comb. lin. di $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$

$$\underline{v}_1 = \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k$$

Allora
$$\underset{\substack{\ne\\0}}{(-1)}\underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono lin. dip.

ii) Esercizio

iii) "

$\square$

Indipendenza lineare di vettori e caratteristica di una matrice. 10.11

Teorema: Sia A una matrice qualsiasi, Allora:

$\text{car}\, A$ = massimo numero di righe. lin. indip. di A

= " " " colonne " " " A

Corollario:

1) Se $k > n$ allora $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ~~sono~~ sono lin. dip.

2) Se $k \leq n$ allora $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sono lin. indip. $\Longleftrightarrow$

la matrice $\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_k \end{pmatrix} \in \text{Mat}(k,n)$ ha caratteristica k.

3) In particolare, se $k = n$ allora $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^n$ sono lin. indip. $\Longleftrightarrow$

la matrice $\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n)$ ha caratteristica $n \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{pmatrix} \neq 0$.

Esercizio: dimostrare il corollario.

OSS: le operazioni su righe / colonne che lasciano invariata la caratteristica di una matrice (si veda "Proprietà della caratteristica", lezione 7) non cambiano il numero di righe / colonne linearmente indipendenti.

Esempi:

1) I vettori $\underline{v}_1 = (1,0)$, $\underline{v}_2 = (0,2)$, $\underline{v}_3 = (1,1)$ di $\mathbb{R}^2$ sono lin. dip.

In fatti, la matrice

$$\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(3,2) \qquad \text{ha caratteristica} \leq 2$$

$\Rightarrow$ il massimo numero di righe lin. indip. è ≤ 2

2) Siano $\underline{v}_1=(0,2,3,4)$, $\underline{v}_2=(2,0,3,0)$, $\underline{v}_3=(-4,6,3,12)$ 10.13

Allora

$$A=\begin{pmatrix}\underline{v}_1\\ \underline{v}_2\\ \underline{v}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\2&0&3&0\\-4&6&3&12\end{pmatrix}$$

- $\operatorname{car} A=2$ (visto nella lez. 7) $\longrightarrow$ massimo numero di righe lin. indip. è 2.

$\Longrightarrow$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dip.

- Inoltre, siccome ~~è~~ $\operatorname{car} A=2$, posso trovare 2 righe lin. ~~dip.~~ indip. e la terza sarà una loro combinazione lineare.

Ad es: $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. indip. (perché non paralleli) e

$$(*)\qquad \underline{v}_3=3\underline{v}_1-2\underline{v}_2$$

- Si noti che dalla $(*)$ si ottiene $3\underline{v}_1-2\underline{v}_2-\underline{v}_3=\underline{0}$ ($\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ lin. dip)

3) $\underline{v}_1 = (0,2,-4)$, $\underline{v}_2 = (2,0,6)$, $\underline{v}_3 = (3,3,3)$, $\underline{v}_4 = (4,0,12)$ 10.14

$$A = \left(\underline{v}_1^t \mid \underline{v}_2^t \mid \underline{v}_3^t \mid \underline{v}_4^t \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

- $\operatorname{car} A \leq 3 \Rightarrow$ max numero colonne lin. indip $\leq 3 \Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ lin. dip.

- ma $\operatorname{car} A = 2 \Rightarrow$ " " " " " $= 2$

$\Rightarrow$ posso trovare 2 colonne lin. indip. (es: $\underline{v}_1, \underline{v}_2$) e le altre saranno comb. lin. (e.g. $\underline{v}_3 = \frac{3}{2}\underline{v}_1 + \frac{3}{2}\underline{v}_2$, $\underline{v}_4 = 0\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2$)

4) Siano $\pi : ax+by+cz=0$ e $\pi' : a'x+b'y+c'z=0$ due piani passanti per l'origine.

Vettori normali $\underline{n}=(a,b,c)$, $\underline{n}'=(a',b',c')$.

Considero $\pi \cap \pi'$:

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{n} \\ \underline{n}' \end{pmatrix}$.

Se $\operatorname{car} A = 2 \Rightarrow \underline{n}, \underline{n}'$ lin. indip. $\Rightarrow \underline{n}, \underline{n}'$ non paralleli $\Rightarrow \pi \cap \pi'$ è una retta.

Se $\operatorname{car} A = 1 \Rightarrow \underline{n}, \underline{n}'$ lin. dip. $\Rightarrow \underline{n} \parallel \underline{n}' \Rightarrow \pi$ e π' sono paralleli.

Siccome entrambi passano per $\underline{O}$, allora $\pi = \pi' \Rightarrow \pi \cap \pi' = \pi$ è un piano.