DIAGONALIZZAZIONE. AUTOVETTORI E AUTOVALORI

Abbiamo visto nella lezione precedente che se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad S = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(matrice diagonale)}$$

Domanda: data $A \in Mat(n,n)$ è sempre possibile trovare $S \in Mat(n,n)$ tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale?

Risposta: no, non sempre.

Def: una matrice $A \in Mat(n,n)$ si dice diagonalizzabile se esiste una matrice invertibile $S \in Mat(n,n)$ tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale.

Esempi:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile, con $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Una matrice diagonale è (ovviamente) diagonalizzabile, basta prendere $S = I$:

$$S^{-1}AS = I^{-1}AI = IAI = IA = A \quad \text{diagonale.}$$

c) Vedremo che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non sono diagonalizzabili.

Autovalori e autovettori di una matrice (quadrata)

Riprendiamo l'esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad S = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Data A come trovare la matrice S che la diagonalizza?

In altre parole, come trovare $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$? Osserviamo che:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \iff AS = S\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \iff A(\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff (A\underline{v}_1 | A\underline{v}_2) = (4\underline{v}_1 | 2\underline{v}_2) \iff \begin{array}{l} A\underline{v}_1 = 4\underline{v}_1 \\ A\underline{v}_2 = 2\underline{v}_2 \end{array} \quad (*)$$

Esiste quindi un legame tra la proprietà $(*)$ dei vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e il fatto che A sia diagonalizzabile.

Def: Sia $A \in Mat(n,n)$. Un vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ è un **autovettore** di A se

$$\boxed{\underline{u} \neq \underline{0} \quad \text{e} \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } A\underline{u} = \lambda \underline{u}}$$

In tal caso, lo scalare λ è detto **autovalore** di A (relativo a $\underline{u}$)

Esempi:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Dalla (*) sappiamo che:

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore $\lambda_1 = 4$

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ " " " A " " $\lambda_2 = 2$

Mostriamolo direttamente:

$$A\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\underline{v}_1$$

$$A\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\underline{v}_2$$

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Allora:

$$A\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\,\underline{e}_1$$

$$A\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,\underline{e}_2$$

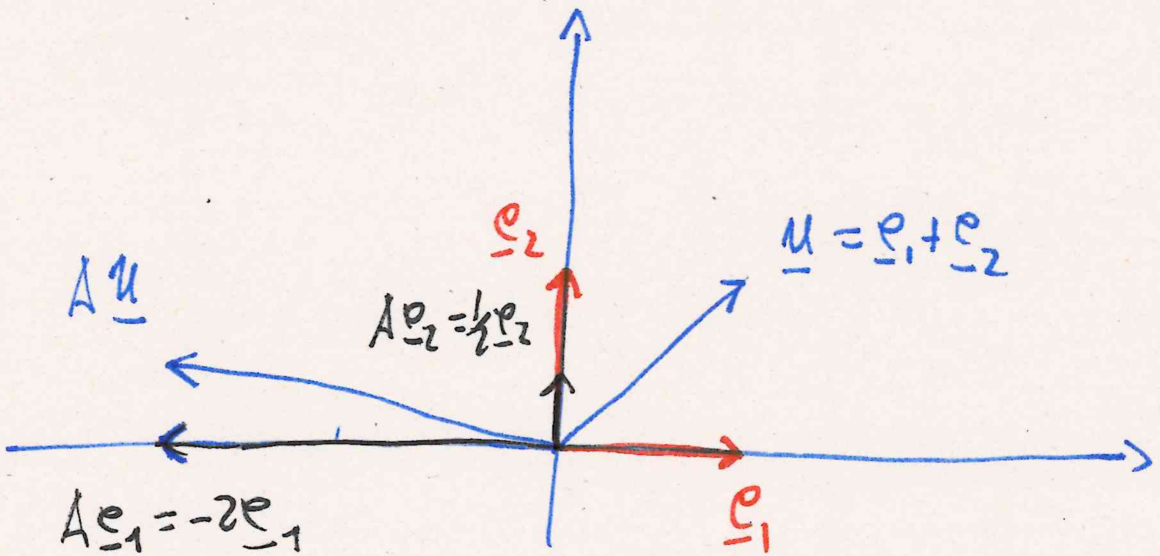
cioè

$\underline{e}_1$ è autovettore di A con autovalore -2

$\underline{e}_2$ " " " A " " $1/2$

Invece, ad esempio, $\underline{u} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è autovettore di A:

$$A\underline{u} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$



Come determinare gli autovettori e autovalori di una matrice $A \in Mat(n,n)$?

Data A, cerchiamo $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ $(\underline{u} \neq \underline{0})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$A\underline{u} = \lambda \underline{u}$$

cioè

$$A\underline{u} - \lambda I \underline{u} = \underline{0}$$

cioè

$$(A - \lambda I)\underline{u} = \underline{0} \qquad (\#)$$

Fissiamo λ, allora (#) ~~diven~~ è un sistema lineare omogeneo $n \times n$.

Due casi:

i) se λ è tale che $\det(A-\lambda I) \neq 0$ allora il sistema (#) è determinato, e l'unica soluzione è $\underline{u} = \underline{0}$. Ma sto cercando $\underline{u} \neq \underline{0}$, quindi in questo caso non trovo autovettori.

ii) se λ è tale che $\det(A-\lambda I) = 0$ allora (#) ammette soluzioni $\underline{u}$ non banali (sistema indeterminato).

Quindi, se λ è autovalore di A, allora necessariamente la situazione è quella del caso ii), cioè

$$\boxed{\det(A-\lambda I) = 0} \qquad (\#\#)$$

- La quantità $\det(A-\lambda I)$ è un polinomio in λ, detto polinomio caratteristico di A

- L'equazione (##) è detta equazione caratteristica.

Gli autovalori di A sono le soluzioni reali dell'equazione caratteristica, cioè le radici reali del polinomio caratteristico $\det(A-\lambda I)$

- Se $A \in Mat(n,n)$ allora il polinomio caratteristico ha grado n.

Quindi $A \in Mat(n,n)$ ha al massimo n autovalori.

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sono autovalori di A allora

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdot \ldots \cdot(\lambda_n-\lambda) \qquad (*)$$

Oss:

a) Ponendo $\lambda = 0$ nella (*) si ottiene $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$,

cioè $\det A$ è il prodotto degli autovalori di A.

b) Se λ_j è un autovalore di A, gli autovettori ad esso corrispondenti sono

i vettori $\underline{u} \neq \underline{0}$ tali che $A\underline{u} = \lambda_j \underline{u}$, ossia

$$(A - \lambda_j I)\underline{u} = \underline{0} \qquad \text{(sist. omogeneo)}$$

Tale sistema ha soluzioni non banali perché $\det(A - \lambda_j I) = 0$

(sistema indeterminato).

Esempi: Determinare autovalori e autovettori delle seguenti matrici:

i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$.

Gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 3$ sono i vettori $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tali che

$(A-3I)\underline{u}_1 = \underline{0}$ ossia $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad x \neq 0$

Gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 1$ sono i vettori $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tali che

$(A-1\cdot I)\underline{u}_2 = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x+y=0 \Rightarrow y = -2x$

$$\Rightarrow \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} \quad x \neq 0.$$

ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(B - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Il polinomio caratteristico non ha radici reali $\Rightarrow$ B non ha autovalori

$\Rightarrow$ B non ha autovettori.

oss: L'applicazione lineare $L_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una rotazione di angolo $\pi/2$

iii) $\cancel{\det}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(C - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$\Rightarrow$ c'è un solo autovalore (doppio) $\lambda_1 = 1$.

Gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 1$ sono $\underline{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tali che

$$(C - 1 \cdot I)\underline{u} = \underline{0} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad x \neq 0 .$$

Il legame tra diagonalizzabilità e autovalori/autovettori di una matrice è descritto nel seguente:

Teorema: Una matrice $A \in Mat(n,n)$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ fatta di autovettori di A, cioè esistono $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c.

i) $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$

ii) $A\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i \quad i = 1, \dots, n$

In tal caso si ha $S^{-1}AS = \Lambda$, dove

$$S = (\underline{u}_1 | \dots | \underline{u}_n) \quad , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dim: Sia $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A, e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i corrispondenti autovalori. Allora:

$$A\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\Updownarrow$$

$$(A\underline{u}_1 | \dots | A\underline{u}_n) = (\lambda_1 \underline{u}_1 | \dots | \lambda_n \underline{u}_n)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{A(\underline{u}_1 | \dots | \underline{u}_n)}_{\overset{\shortparallel}{S}} = \underbrace{(\underline{u}_1 | \dots | \underline{u}_n)}_{\overset{\shortparallel}{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{\Lambda}}$$

$$\Updownarrow$$

$$AS = S\Lambda$$

$$\Updownarrow \longrightarrow \left(S \text{ invertibile perché } \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \text{ base di } \mathbb{R}^n \right)$$

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

$$\Updownarrow$$

A è diagonalizzabile

$\square$

Esempi:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile: $\forall x \neq 0$ $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}$ sono autovettori

Se scelgo (ad. es.) $x = 1$ $\Rightarrow$ $\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$ formata

da autovettori di A $\Rightarrow$ $S = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile, perché non ha (tutti) autovalori reali.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile: gli ~~autovalori~~ autovettori sono tutti della forma $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ $x \neq 0$, $\Rightarrow$ non esiste una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di C.

d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ [esercizio]