Calcoliamo il determinante utilizzando le proprietà viste nella scorsa lezione.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 8 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 8 & 14 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{linearità } R_3}{=} 2\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{R_2-3R_1}{=} -2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_3-4R_1}{=} -2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 0$$

due righe uguali

oppure

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 8 & 14 & 2 \end{pmatrix} \overset{C_3+C_1}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 14 & 10 \end{pmatrix} \overset{C_2-2C_1}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 10 \end{pmatrix} \overset{C_3+5C_2}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Oss: In generale, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 0 \qquad \det B = 0 \qquad\qquad \det(A+B) = 1$

$\rightarrow \underbrace{\det A}_{0} + \underbrace{\det B}_{0} \neq \det(A+B) = 1$

Teorema di Binet: Se $A, B \in \mathrm{Mat}(n)$, allora

$$\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$$

Esercizio: verificare il Teorema di Binet nel caso

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrici invertibili

Def: Una matrice $A \in \mathrm{Mat}(n)$ è detta <u>invertibile</u> se esiste un'altra matrice (denotata A^{-1}) tale che

$$\boxed{AA^{-1} = I_n}$$

Se A è invertibile allora A^{-1} è detta <u>matrice inversa</u> di A

Esempio: Vedremo che

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ è invertibile, con inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ [verifica]

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile.

Si noti che $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Supponiamo che A sia invertibile. Allora A^{-1} esiste e

$$\det(AA^{-1}) = \begin{cases} \det(I_n) = 1 \\ \underset{(\text{Binet})}{=} \det(A)\cdot\det(A^{-1}) \end{cases} \Longrightarrow \det(A)\cdot\det(A^{-1}) = 1,$$

da cui segue:

- $\det(A) \neq 0$
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Viceversa, se $\det(A) \neq 0$ (si dimostra che) A è invertibile e la sua inversa è data da:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$$

dove A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}.

Riassumendo, si ha

$$\boxed{A \text{ è invertibile} \iff \det A \neq 0}$$

Proposizione: Se A e B sono invertibili allora AB è invertibile e

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Dimostrazione: esercizio.

Esempi:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 2 \neq 0 \implies A$ invertibile.

Calcolo A^{-1} in due modi:

- $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^t$, $\quad A_{11} = 3$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$

[fare verifica]

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Cerco $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c = 1 \\ 2b+d = 0 \\ 4a+3c = 0 \\ 4b+3d = 1 \end{cases} \quad \text{----} \quad \begin{cases} a = 3/2 \\ b = -1/2 \\ c = -2 \\ d = +1 \end{cases}$$

[verifica]

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = 0$ $\Rightarrow$ A non e' invertibile.

Esercizio: mostrare che il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non ammette soluzioni.

CARATTERISTICA DI UNA MATRICE

Definizione: una **sottomatrice** di $A \in Mat(m,n)$ è una matrice che si ottiene da A eliminando p righe (con $0 \leq p \leq m-1$) e q colonne (con $0 \leq q \leq m-1$)

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

allora $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (7) sono sottomatrici di A.

Per introdurre il concetto di caratteristica di una matrice, consideriamo il seguente

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha:

- $\det A \neq 0$
- $\det B = 0$, ma la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(2,2)$ ha $\det \neq 0$
- $\det C = 0$, ogni sottomatrice 2×2 di C ha $\det = 0$, ma la sottomatrice $(1) \in Mat(1,1)$ ha $\det \neq 0$
- $\det O = 0$ e ogni sottomatrice di O ha $\det = 0$

Introduciamo ora il concetto di caratteristica di una matrice $A \in Mat(m,n)$ (non necessariamente quadrata)

Definizione: la caratteristica (oppure rango) di una matrice A è il massimo ordine delle sottomatrici quadrate di A con determinante diverso da zero. Essa si indica con $\mathrm{car}A$ (oppure $\mathrm{rk}A$)

Quindi: $\mathrm{car}A = r$ se

- esiste una sottomatrice quadrata $B \in Mat(r,r)$ di A con $\det B \neq 0$
- ogni altra sottomatrice quadrata di ordine $r' > r$ ha $\det = 0$.

Esempi:

1) Dall'esempio precedente: $\text{car} A = 3$, $\text{car} B = 2$, $\text{car} C = 1$

$\text{car}\, 0 = 0$ $\quad (\text{car} A = 0 \iff A = 0)$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ certamente $\text{car} A \geq 1$ (perchè $A \neq 0$)

Inoltre $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{car} A = 1$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $\text{car} A \geq 1$ e $\text{car} A \leq 2$
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{car} A = 2$ (massima)

4) $$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & 4 \\ 3 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -4 & 6 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 12 \end{matrix} \end{pmatrix} \in Mat(3,4)$$

Certamente car $A \geq 1$, e car $A \leq 3$

Inoltre, esiste una sottomatrice 2×2 con det $\neq 0$, ad esempio:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \,. \quad \Rightarrow \text{car } A \geq 2$$

Consideriamo tutte le sottomatrici quadrate di A di ordine 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Si verifica [farlo] che hanno tutte determinante $= 0$.

Quindi car $A = 2$

Si possono calcolare meno determinanti, grazie alla

Proposizione (metodo di Kronecker):

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\text{car} A = r$ è che esista una sottomatrice quadrata di A di ordine r tale che:

1) il suo determinante sia $\neq 0$.

2) i determinanti delle sottomatrici quadrate di ordine $r+1$ che la contengono siano tutti nulli.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

*) Selezioniamo la sottomatrice di ordine 2 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e verifichiamo:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ (quindi $\operatorname{car} A \geq 2$)

2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 0$

Grazie alla proposizione, possiamo concludere $\operatorname{car} A = 2$

Dalle proprietà del determinante otteniamo le

Proprietà della caratteristica

La caratteristica di una matrice non cambia se:

i) si toglie una riga di zeri

ii) si scambiano due righe

iii) si moltiplica una riga per uno scalare non nullo

iv) si aggiunge ad una riga un multiplo di un'altra riga.

Lo stesso vale per le colonne.

[Esercizio: verificare i), ii), iii) iv)]

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{car}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} \operatorname{car}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}C_1}{=} \operatorname{car}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3+2R_1}{=} \operatorname{car}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \overset{R_3-3R_2}{=} \operatorname{car}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Tolgo } R_3}{=} \operatorname{car}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$