ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 9x_2(t) - 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \qquad\qquad -3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \qquad\qquad + 2u(t) \end{cases}$$

1. Calcolare gli autovalori della matrice di stato e valutare la stabilità del sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La matrice A è triangolare, quindi i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale, ovvero

$$\begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -3 \end{cases}$$

Entrambi gli autovalori sono reali e negativi e quindi il sistema è asintoticamente stabile.

2. Determinare stato ed uscita di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso $\boldsymbol{u(t) = \bar{u} = 1}$.

La matrice A è non singolare, infatti $detA = 3 \neq 0$.

Quindi il sistema ammette uno ed un solo stato di equilibrio in corrispondenza di un ingresso costante, dato dall'espressione

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 15 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

cioè, $\bar{x}_1 = -5$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{3}$.

L'uscita di equilibrio vale

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 2 = -5 + 2 = -3$$

Il guadagno statico del sistema è $\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{-3}{1} = -3$. Si noti che questo risultato è (ovviamente) in accordo con l'espressione

$$\mu = -CA^{-1}B + D = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 = -3$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. Determinare lo stato di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso $\boldsymbol{u(t) = \bar{u} = 0}$

La matrice A è singolare, infatti $detA = 0$.

Quindi il sistema ammette o infiniti stati di equilibrio oppure nessuno stato di equilibrio. Per scoprirlo è necessario risolvere il sistema

$$A\bar{x} = -B\bar{u}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 = 0 \\ -2\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

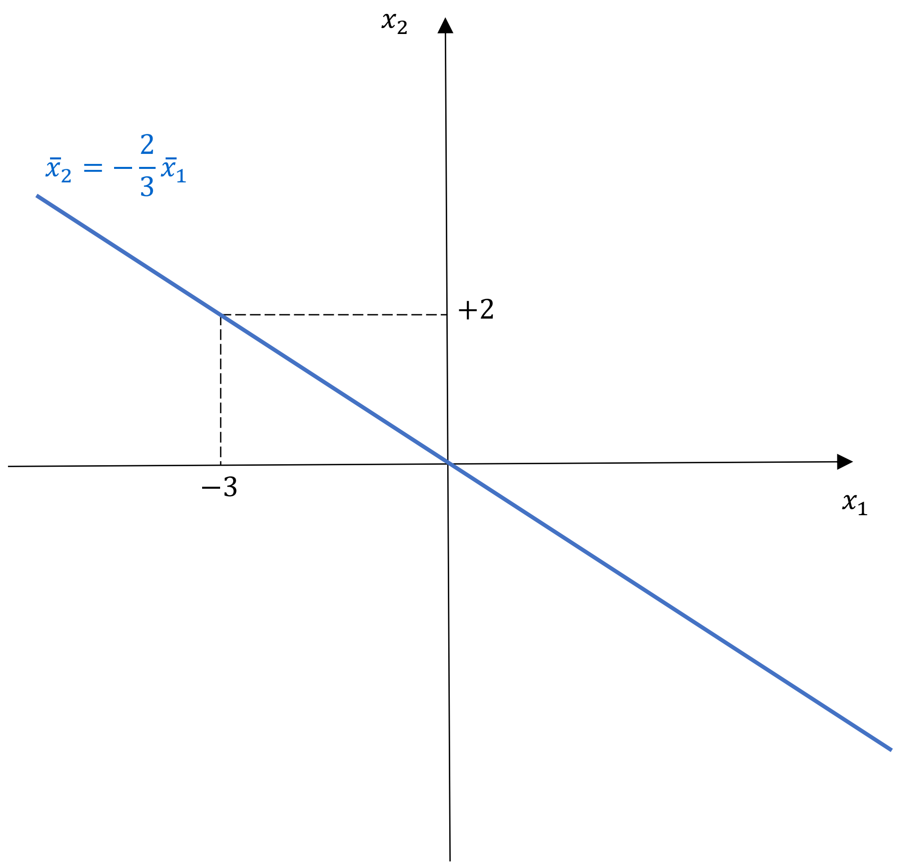
Si ha quindi

$$\begin{cases} \bar{x}_1 \quad qualsiasi \\ \bar{x}_2 = -\frac{2}{3}\bar{x}_1 \end{cases}$$

Il sistema ha quindi infiniti stati di equilibrio in corrispondenza di ingresso costante nullo.

Si osservi che, essendo la matrice A singolare, non è possibile calcolare il guadagno statico del sistema.

E' anche possibile rappresentare graficamente gli stati di equilibrio nello spazio di stato, il piano $x_1 - x_2$



2. Determinare lo stato di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso $\boldsymbol{u(t)=\bar{u}\neq 0}$.

Come detto, la matrice A è singolare. Devo quindi risolvere il sistema

$$A\bar{x}=-B\bar{u}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\bar{u}$$

$$\begin{cases}-2\bar{x}_1-3\bar{x}_2=-\bar{u}\\ -2\bar{x}_1-3\bar{x}_2=0\end{cases}$$

Queste due equazioni non possono essere vere simultaneamente se $\bar{u}\neq 0$ e quindi il sistema non ammette alcuna soluzione, cioè è impossibile.

Il sistema quindi non ammette nessuno stato di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso $u(t)=\bar{u}\neq 0$.

3. Valutare la stabilità del sistema

Calcolo gli autovalori della matrice A.

$$det(sI-A)=det\begin{bmatrix}s+2 & 3\\ 2 & s+3\end{bmatrix}=(s+2)(s+3)-6=s^2+5s+6-6=s^2+5s=s(s+5)$$

Quindi

$$\begin{cases}s_1=0\\ s_2=-5\end{cases}$$

La matrice A ha un singolo autovalore nullo ed un secondo autovalore reale negativo e quindi il sistema è semplicemente stabile.

Si osservi che, dal momento che la matrice A è singolare, era lecito aspettarsi che avesse un autovalore nullo.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1. Calcolare il movimento libero dello stato a partire dalla condizione iniziale $\boldsymbol{x(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Il movimento libero dello stato è dato dalla seguente espressione

$$x_l(t) = e^{At}x(0)$$

La matrice di stato è $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ed è quindi diagonale.

Quindi $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$ da cui si ha

$$x_l(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

cioè $x_{1l}(t) = e^{-t}$ e $x_{2l}(t) = e^{-2t}$.

2. Calcolare il movimento forzato dello stato in corrispondenza dell'ingresso $\boldsymbol{u(t) = e^t}$.

Il movimento forzato dello stato è dato dalla seguente espressione

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)d\tau$$

Dal momento che la matrice di stato è diagonale si ha che

$$e^{A(t-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$x_f(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\tau} d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} e^{\tau} d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-t+2\tau} \\ e^{-2t+3\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-t} e^{2\tau} d\tau \\ \int_0^t e^{-2t} e^{3\tau} d\tau \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau \\ e^{-2t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \left[\frac{1}{2} e^{2\tau}\right]_0^t \\ e^{-2t} \left[\frac{1}{3} e^{3\tau}\right]_0^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{-t}(e^{2t} - 1) \\ \frac{1}{3} e^{-2t}(e^{3t} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) \\ \frac{1}{3}(e^{t} - e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

cioè $x_{1f}(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ e $x_{2f}(t) = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 1]$, $D = 0$

1. Determinare lo stato di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$

La matrice A è singolare, infatti $detA = 0$.

Quindi il sistema ammette o infiniti stati di equilibrio oppure nessuno stato di equilibrio. Per scoprirlo è necessario risolvere il sistema

$$A\bar{x} = -B\bar{u}$$

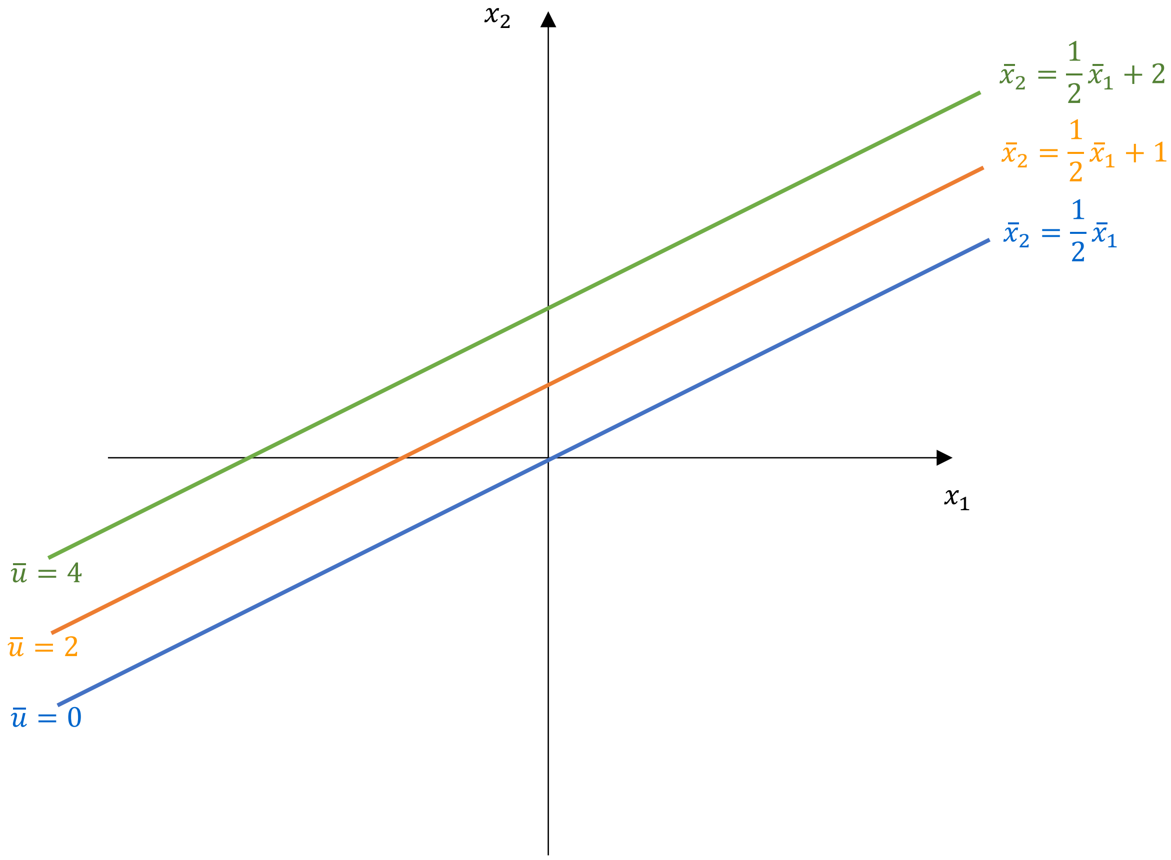
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$$

$$\begin{cases} indeterminata \\ \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 = -\bar{u} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} \bar{x}_1 \quad qualsiasi \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{u}) \end{cases}$$

Il sistema ha quindi infiniti stati di equilibrio in corrispondenza di ingresso costante qualsiasi. E' anche possibile rappresentare graficamente gli stati di equilibrio nello spazio di stato, il piano $x_1 - x_2$. Per ogni valore di $\bar{u}$ si ha una retta con coefficiente angolare $\frac{1}{2}$



Si osservi infine che, essendo la matrice A singolare, non è possibile calcolare il guadagno statico del sistema.

2. Calcolare il movimento libero dello stato a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si osservi che, dal momento che desidero solo il movimento libero dello stato, posso scrivere le equazioni di stato del sistema imponendo $u(t) = 0$, cioè

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

E' possibile integrare facilmente la prima equazione

$$\int_0^t \dot{x}_1(\tau)d\tau = 0$$

$$[x_1(\tau)]_0^t = 0$$

$$x_1(t) - x_1(0) = 0$$

e quindi infine

$$x_1(t) = x_1(0)$$

Essendo $x_1(0) = 1$ si ha che

$$x_{1l}(t) = 1\,, \qquad per\ t \geq 0$$

Questo è il movimento libero della prima componente dello stato.

Per calcolare il movimento libero della seconda componente, sostituiamo questo risultato nella seconda equazione di stato (sempre con $u(t) = 0$), ottenendo

$$\dot{x}_2(t) = 1 - 2x_2(t)$$

che è una semplice equazione differenziale.

Si osservi che, ai fini della sua integrazione, essa può essere interpretata alla luce della teoria dei sistemi.

Infatti, ponendo $x_2(t) = z(t)$ si può scrivere

$$\dot{z}(t) = -2z(t) + w(t)$$

con $w(t) = \overline{w} = 1$ e con $z(0) = 1$.

Cioè, abbiamo un sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO del primo ordine con variabile di stato $z(t)$ a cui è applicato l'ingresso $w(t) = \overline{w} = 1$ a partire dalla condizione iniziale $z(0) = 1$. Per calcolare la soluzione dell'equazione differenziale è quindi sufficiente usare l'espressione per il calcolo del movimento dello stato

$$z(t) = e^{At}z(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau$$

con $A = -2$ e $B = 1$. Quindi

$$z(t) = e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}d\tau = e^{-2t} + e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau = e^{-2t} + e^{-2t}\frac{1}{2}[e^{2\tau}]_0^t = e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}(e^{2t} - 1)$$
$$= e^{-2t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

Quindi, ritornando al problema originale, si ha che il movimento libero dello stato è dato da

$$\begin{cases} x_{1l}(t) = 1 \\ x_{2l}(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alternativamente si poteva utilizzare la definizione. Il movimento libero dello stato è dato dalla seguente espressione

$$x_l(t) = e^{At}x(0)$$

Sappiamo calcolare e^{At} solo in alcuni casi. In particolare, in questo caso, la matrice A ha due autovalori reali e distinti e quindi è diagonalizzabile. In questo caso, vale la seguente relazione

$$e^{At} = Me^{\tilde{A}t}M^{-1}$$

dove M è la matrice che si ottiene affiancando gli autovettori. Essa è certamente invertibile dal momento che ha rango massimo essendo i due autovettori linearmente indipendenti poiché relativi ad autovalori reali e distinti. La matrice $\tilde{A}$ è la "diagonalizzata" della matrice A, ovvero una matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A e per essa, essendo diagonale, è molto semplice calcolare l'esponenziale di matrice.

Calcoliamo quindi gli autovettori $v_{1,2}$ corrispondenti ai due autovalori $s_{1,2}$.

a) $s_1 = 0$

$$Av_1 = s_1 v_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} indeterminata \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta \ qualsiasi \end{cases}$$

per cui

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) $s_2 = -2$

$$Av_2 = s_2 v_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = -2\alpha \\ \alpha - 2\beta = -2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \ qualsiasi \end{cases}$$

per cui

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice M che si ottiene affiancando gli autovettori, è

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

da cui

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Quindi, in conclusione,

$$e^{At} = Me^{\tilde{A}t}M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 - e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Il movimento libero dello stato è quindi

$$x_l(t) = e^{At}x(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 - e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 - e^{-2t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si osservi che, coerentemente con il fatto che il sistema è semplicemente stabile, il movimento libero dello stato è limitato per $t \to \infty$ ma non tende a zero. Infatti

$$x_l(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} \xrightarrow[t\to\infty]{} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3. Valutare la stabilità del sistema

La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ è triangolare e quindi gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

La matrice A ha un solo autovalore nullo ed un altro reale negativo e quindi il sistema è semplicemente stabile.

Si osservi che, dal momento che la matrice A è singolare, era lecito aspettarsi che avesse un autovalore nullo.

ESERCIZIO 5

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \beta\big(x_1(t) + x_2(t)\big) - \alpha x_2(t) + \beta u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1. Dire per quali valori di $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ il sistema ha stato di equilibrio $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$ in corrispondenza dell'ingresso costante $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{2}$.

Per prima cosa riscriviamo la seconda equazione di stato in modo da avere la forma normale dei sistemi LTI

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \beta x_1(t) + (\beta - \alpha) x_2(t) + \beta u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

All'equilibrio si ha che

$$\begin{cases} 0 = \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2 \\ 0 = \beta \bar{x}_1 + (\beta - \alpha)\bar{x}_2 + \beta \bar{u} \end{cases}$$

Da cui si ottiene, per $\bar{u} = 2$, $\bar{x}_1 = 2$ e $\bar{x}_2 = 4$

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 0 \\ 2\beta + 4(\beta - \alpha) + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 0 \\ -4\alpha + 8\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \alpha = 2\beta \end{cases}$$

Quindi la soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta \ qualsiasi \end{cases}$$

Quindi, per qualsiasi valore di β e per il corrispondente valore di $\alpha = 2\beta$, il sistema ammette lo stato di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 2$.

2. In corrispondenza della condizione trovata al punto precedente, dire per quali valori di $\boldsymbol{\beta}$ il sistema è

a) Semplicemente stabile

b) Asintoticamente stabile

In corrispondenza di $\alpha = 2\beta$ la matrice di stato è $A = \begin{bmatrix} 2\beta & -\beta \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$. Calcoliamo il suo polinomio caratteristico.

$$det(sI - A) = det \begin{bmatrix} s - 2\beta & \beta \\ -\beta & s + \beta \end{bmatrix} = (s - 2\beta)(s + \beta) + \beta^2 = s^2 - \beta s - \beta^2$$

a) Sappiamo che la condizione (solo sufficiente!) perché un sistema LTI sia semplicemente stabile è che abbia un solo autovalore nullo e tutti gli altri a parte reale negativa. Questa condizione non è verificata per nessun valore di β. In particolare, per $\beta = 0$ il polinomio caratteristico di A è $\varphi(s) = s^2$ e quindi la matrice A ha due autovalori nulli, condizione che non sappiamo discutere.

   Osserviamo però che in corrispondenza di $\beta = 0$ (e sempre con $\alpha = 2\beta$) il sistema è descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = 0 \end{cases}$$

Quindi, in corrispondenza di una condizione iniziale qualsiasi $x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$ il movimento (libero) dello stato sarà

$$\begin{cases} x_{1l}(t) = x_{10} \\ x_{2l}(t) = x_{20} \end{cases}$$

cioè costante e quindi limitato. Il sistema è quindi semplicemente stabile.

b) Essendo il polinomio caratteristico $\varphi(s) = s^2 - \beta s - \beta^2$ un polinomio di secondo grado, condizione necessaria e sufficiente perché esso abbia radici a parte reale strettamente negativa è che abbia tutti i coefficienti concordi e non nulli, condizione che non può mai verificarsi per nessun valore di β. Quindi il sistema non è asintoticamente stabile per nessun valore di β.

ESERCIZIO 6

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) - 6x_2(t) - 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 5x_1(t) - 10x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

1. Valutare la stabilità del sistema

Calcoliamo gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$

$$det(sI - A) = det \begin{bmatrix} s-3 & 6 \\ -5 & s+10 \end{bmatrix} = (s-3)(s+10) + 30 = s^2 + 7s - 30 + 30 = s(s+7)$$

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -7 \end{cases}$$

La matrice A ha un solo autovalore nullo ed un altro reale negativo e quindi il sistema è semplicemente stabile.

2. Calcolare il movimento libero dello stato a partire dalla condizione iniziale $\boldsymbol{x(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Il movimento libero dello stato è dato dalla seguente espressione

$$x_l(t) = e^{At}x(0)$$

Sappiamo calcolare e^{At} solo in alcuni casi. In particolare, in questo caso, la matrice A ha due autovalori reali e distinti e quindi è diagonalizzabile. In questo caso, vale la seguente relazione

$$e^{At} = Me^{\tilde{A}t}M^{-1}$$

dove M è la matrice che si ottiene affiancando gli autovettori. Essa è certamente invertibile dal momento che ha rango massimo essendo i due autovettori linearmente indipendenti poiché relativi ad autovalori reali e distinti. La matrice $\tilde{A}$ è la "diagonalizzata" della matrice A, ovvero una matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A e per essa, essendo diagonale, è molto semplice calcolare l'esponenziale di matrice.

Calcoliamo quindi gli autovettori $v_{1,2}$ corrispondenti ai due autovalori $s_{1,2}$.

c) $s_1 = 0$

$$Av_1 = s_1 v_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3\alpha - 6\beta = 0 \\ 5\alpha - 10\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(\alpha - 2\beta) = 0 \\ 5(\alpha - 2\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta \ qualsiasi \end{cases}$$

per cui

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) $s_2 = -7$

$$Av_2 = s_2 v_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\alpha - 6\beta = -7\alpha \\ 5\alpha - 10\beta = -7\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\alpha - 6\beta = 0 \\ 5\alpha - 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3}{5}\beta \\ \beta \ qualsiasi \end{cases}$$

per cui

$$v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La matrice M che si ottiene affiancando gli autovettori, è

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi

$$M^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

da cui

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-7t} \end{bmatrix}$$

Quindi, in conclusione,

$$e^{At} = Me^{\tilde{A}t}M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-7t} \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -e^{-7t} & 2e^{-7t} \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 10 - 3e^{-7t} & -6 + 6e^{-7t} \\ 5 - 5e^{-7t} & -3 + 10e^{-7t} \end{bmatrix}$$

Il movimento libero dello stato è quindi

$$x_l(t) = e^{At}x(0) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 10 - 3e^{-7t} & -6 + 6e^{-7t} \\ 5 - 5e^{-7t} & -3 + 10e^{-7t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 10 - 3e^{-7t} - 6 + 6e^{-7t} \\ 5 - 5e^{-7t} - 3 + 10e^{-7t} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 + 3e^{-7t} \\ 2 + 5e^{-7t} \end{bmatrix}$$

Si osservi che, coerentemente con il fatto che il sistema è semplicemente stabile, il movimento libero dello stato è limitato per $t \to \infty$ ma non tende a zero. Infatti

$$x_l(t) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 + 3e^{-7t} \\ 2 + 5e^{-7t} \end{bmatrix} \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Dire se può esistere qualche valore costante dell'ingresso tale per cui l'uscita di equilibrio risulti nulla

Dal momento che $detA = 0$ per analizzare l'equilibrio del sistema in corrispondenza di un generico ingresso costante $\bar{u}$, bisogna risolvere il sistema

$$A\bar{x} = -B\bar{u}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}$$

$$\begin{cases} 3\bar{x}_1 - 6\bar{x}_2 = 2\bar{u} \\ 5\bar{x}_1 - 10\bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 3(\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2) = 2\bar{u} \\ 5(\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2) = 0 \end{cases}$$

Per $\bar{u} \neq 0$ il sistema di due equazioni non ammette alcuna soluzione, cioè è impossibile, e quindi il sistema dinamico non ammette alcun equilibrio.

Per $\bar{u} = 0$ il sistema di due equazioni ammette infinite soluzioni date da

$$\begin{cases} \bar{x}_1 \; qualsiasi \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{2}\bar{x}_1 \end{cases}$$

L’uscita di equilibrio sarà quindi

$$\bar{y} = \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - 2\frac{1}{2}\bar{x}_1 = 0$$

cioè sarà sempre nulla in corrispondenza di ingresso costante nullo.

ESERCIZIO 7

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo non lineare tempo-invariante SISO descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2(t) + x_1^2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $\boldsymbol{u(t) = \bar{u} = 2}$.

Il sistema è non lineare. Per calcolare gli equilibri si pongono a zero le derivate delle variabili di stato

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1^2\bar{u} \\ 0 = \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 + \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + 2\bar{x}_1^2 \\ 0 = \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 + 2 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases}$$

La prima equazione è $2\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 = 0$ da cui $\bar{x}_1(2\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = 0$ e si ha quindi $\bar{x}_1 = 0$ oppure $\bar{x}_2 = -2\bar{x}_1$.

Sostituendo $\bar{x}_1 = 0$ nella seconda equazione si ha

$$equilibrio\ A: \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{y} = 1 \end{cases}$$

Sostituendo $\bar{x}_2 = -2\bar{x}_1$ nella seconda equazione si ha

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = -2\bar{x}_1 \\ 0 = \bar{x}_1 + 4\bar{x}_1 + 2 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases}$$

da cui

$$equilibrio\ B: \begin{cases} \bar{x}_1 = -\dfrac{2}{5} \\ \bar{x}_2 = \dfrac{4}{5} \\ \bar{y} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Essendo il sistema non lineare, è lecito ottenere due equilibri distinti in corrispondenza di un singolo valore costante dell'ingresso.

2. Linearizzare il sistema in corrispondenza dell'equilibrio caratterizzato dalla prima componente dello stato negativa.

Si tratta dell'equilibrio B.

Il sistema linearizzato è un sistema lineare tempo invariante con ingresso $\delta u(t)$, uscita $\delta y(t)$ e nelle variabili di stato $\delta x(t)$, le cosiddette piccole variazioni intorno all'equilibrio considerato $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$.

Esso ha la seguente espressione

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) \cong A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) \cong C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

Nel caso in esame, un sistema del secondo ordine SISO, si ha che

$$A = f_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 + 2\bar{x}_1\bar{u} & \bar{x}_1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = f_u(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{25} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione di uscita è già lineare.

3. Valutare la stabilità dell'equilibrio di cui al punto precedente

Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice $A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$det(sI - A) = det\begin{bmatrix} s + \dfrac{4}{5} & \dfrac{2}{5} \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = \left(s + \frac{4}{5}\right)(s+2) + \frac{2}{5} = s^2 + \frac{14}{5}s + \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = s^2 + \frac{14}{5}s + 2$$

I coefficienti del polinomio caratteristico sono concordi in segno e non nulli e quindi gli autovalori saranno a parte reale negativa. Questa è una condizione sufficiente perché l'equilibrio del sistema non lineare sia asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 8

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo non lineare tempo-invariante SISO descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) \end{cases}$$

1. Determinare per quali valori dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ il sistema ammette almeno uno stato di equilibrio.

Il sistema è non lineare e quindi per calcolare gli equilibri si pone a zero la derivata della variabile di stato

$$0 = -\bar{x} + \bar{x}^2 + \bar{u}$$

Si ha quindi

$$\bar{x}^2 - \bar{x} + \bar{u} = 0$$

da cui

$$\bar{x}_{A,B} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2}$$

Dal momento che le variabili di stato possono assumere solo valori reali, questo sistema ammette equilibri solo per

$$1 - 4\bar{u} \geq 0$$

cioè per

$$\bar{u} \leq \frac{1}{4}$$

2. Sia $\bar{u} = -2$. Determinare lo stato di equilibrio del sistema e valutarne la stabilità.

Sfruttando quanto calcolato al punto precedente, gli equilibri sono

$$\bar{x}_{A,B} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \bar{x}_A = -1 \\ \bar{x}_B = 2 \end{cases}$$

Per valutare la stabilità degli equilibri è necessario calcolare la matrice A del sistema linearizzato intorno a ciascuno dei due equilibri.

Calcoliamo quindi $A = f_x(\bar{x}, \bar{u})$ che nel caso in esame è uno scalare, essendo il sistema del primo ordine

$$A = f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \right|_{\bar{x},\bar{u}} = -1 + 2\bar{x}$$

Quindi nel caso dell'equilibrio A si ha

$$A_{\mathrm{A}} = -3$$

e quindi questo equilibrio del sistema non lineare è asintoticamente stabile.

Nel caso dell'equilibrio B si ha

$$A_{\mathrm{B}} = +3$$

e quindi questo equilibrio del sistema non lineare è instabile.