Cinematica del punto materiale

Il punto materiale è un'astrazione matematica perché non ha dimensioni (non esiste). Il sistema di riferimento è un sistema cartesiano ortogonale e su di esso si descrivono i cambiamenti dell'oggetto che stiamo osservando. Sul sistema di riferimento si utilizzano chilogrammi, metri e secondi come unità di misura.

Se si hanno più sistemi di riferimento, ogni misura effettuata su un evento deve essere autonoma dal sistema di riferimento.

un sistema di riferimento è l'insieme di 4 numeri: 3 coordinate e 1 tempo. Il tempo è una quarta variabile perché viviamo in un mondo 3+1 dimensionale. Il tempo assume solo valori positivi e si sposta sempre in avanti. Una volta fissato il sistema di riferimento si può misurare cosa accade sui vari assi e creare una corrispondenza rispetto al tempo. **La fisica non è una scienza esatta come la chimica perché non ha bisogno di applicazioni**. La fisica è un insieme di approssimazioni.

Se si ottengono abbastanza dati relativi ad un evento si possono ottenere delle rappresentazioni dell'evento usando i grafici.

Per calcolare la **velocità media** di un punto è il rapporto tra lo spazio percorso su un opportuno intervallo di tempo:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{x_2(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **quiete** si ha quando la velocità media è 0:

$$V_m = \frac{cost - cost}{t_2 - t_1} = 0$$

Per la velocità istantanea sul piano si usa:

$$V_i = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = x'(t)$$

Il rapporto di due differenziali è **Leibnitz**:

$$\frac{dx}{dt}$$

Esempio costruire prima la media poi la istantanea dove $x(t) = (t^2 + 5)[m]$:

$$
\begin{aligned}
V_m &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \\
&= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{t^2 + 5 - (t^2 + 5)}{t_2 - t_1} \\
&\text{si semplifica il 5 e si scompone} \\
&= \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{(t_2 - t_1) * (t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} \\
&\text{si semplifica il numeratore } t_2 - t_1 \text{ con il denominatore} \\
&= t_2 - t_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_i &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
&= \frac{dx}{dt} \\
&= 2t_1 + \Delta t \\
&= 2t_1
\end{aligned}
$$

Ma si può fare lo stesso percorso partendo dalla velocità? Si, usando l'**accelerazione**

Si parte calcolando l'accelerazione media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$[a] = \frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[L/T]}{[T]} a = m/sec^2$$

Per calcolare l'accelerazione istantanea:

$$a_i = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = v'(t)$$

Per calcolare lo spazio si usa la derivata seconda, non si può fare direttamente la seconda perché bisogna conoscere la prima:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = \ddot{x}(t) = x''(t)$$

Un oggetto che ha velocità costante avrà anche accelerazione nulla, se la $a_i = 0$ allora l'oggetto avrà moto rettilineo uniforme.

Per descrivere i movimenti tridimensionali bisogna introdurre i vettori. Un vettore è composto da 3 proprietà:

- Intensità $\rightarrow$ sempre positiva
- Verso
- Direzione

Ci sono 2 operazioni con i vettori:

- Somma $\vec{v_1} + \vec{v_2} \rightarrow$ geometricamente si usa la regola del parallelogramma
- Moltiplicazione per uno scalare $\rightarrow$ lo scalare non ha dimensione.
  - $k > 1$ il vettore di partenza verrà dilatato.
  - $0 < k < 1$ il vettore si accorcia.
  - $k < 0$ il verso del vettore è opposto

Lo spazio vettoriale è una delle qualità matematiche più importanti dove si può utilizzare la linearizzazzione.

I versori sono vettori di lunghezza unitaria. Per ricavare un versore da un vettore:

$$\vec{v}_u = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Nelle tre dita si ha che $\vec{i} = x = (1,0,0)$, $\vec{j} = y = (0,1,0)$, $\vec{u} = z = (0,0,1)$

Un vettore mediano xy è la composizione di due vettori ortogonali con modulo uguale.

Accelerazione

$$\begin{cases} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} = \frac{d^x}{dt^2} \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{j} = \frac{d^x}{dt^2} \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{k} = \frac{d^x}{dt^2} \end{cases}$$

Esempio:

$$\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + exp(t)\vec{j}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{u}$ non si usano per calcolare il modulo perché sono versori

La derivata di e^t = e^t

1. $|\vec{r}| = \sqrt{t^6 + e^{2t}}$
2. $\dot{\vec{r}}(t) = 3t^2\vec{i} + e^t\vec{j}$
3. $|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{9t^4 + e^{2t}}$
4. $\ddot{\vec{r}}(t) = 6t\vec{i} + e^t$
5. $|\ddot{\vec{r}}| = \sqrt{36t^2 + e^{2t}}$

Esempio 2:

$$\vec{r}(t) = t^7\vec{i} + ln(t)\vec{j} + t^{-4}\vec{k}$$

in questo esercizio non si può considerare lo zero perché $ln(t)\vec{j}$ e t^{-4} non sono definiti in 0

1. $|\vec{r}| = \sqrt{t^{14}+}$
2. $\dot{\vec{r}}(t) = 7t^6\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{i} - 4t^{-5}\vec{k}$

Esempio 3:

$$\vec{r}(t) = at^2\vec{i} + bt^{-3}\vec{j}$$

$|\vec{r}| = \sqrt{a^2t^4 + b^2t^{-6}}$

$\dot{\vec{r}}(t) = 2at\vec{i} - 3bt^{-4} \rightarrow$ vettore velocità

$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{4a^2t^2 + 9b^2t^{-8}}$

$\ddot{\vec{r}}(t) = 2a\vec{i} + 12bt^{-5} \rightarrow$ vettore accelerazione

$|\ddot{\vec{r}}| = \sqrt{4a^2 + 144b^2t^{-10}}$

Nota la velocità istantanea per ricavare lo spazio percorso in un certo intervallo di tempo bisogna usare l'integrale definito:

$$\int_{t_0}^{t^1} v(t)dt = \int_{x_0}^{x^1} dx = \int_{x_0}^{x^1} 1dx = \Delta x$$

$$\Delta x = x(t_1) - x(t_0) = x_1 - x_0$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t^1} v(t)dt$$

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = v_m \Delta t = \Delta x$$

$$\Delta x = v_m \Delta t = \int_{t_0}^{t^1} v(t)dt$$

Se t_1 è generico e diventa t:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

Si cambia t con t' perché l'estremo di integrazione non può avere lo stesso simbolo della variabile. Anche se si fa sta roba il risultato non cambia.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} vdt' = x_0 + v\int_{t_0}^{t} 1dt'$$

Esempio $v(t) = t^2$:

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} at'^2 dt'$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} at'^2 dt'$$

$$x(t) = x(t_0) + a\int_{t_0}^{t} t'^2 dt'$$

$$x(t) = x(t_0) + a\left[\frac{t'^3}{3}\right]_{t_0}^{t}$$

$$x(t) = x(t_0) + a\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3}\right)_{t_0}^{t}$$