APPLICAZIONI LINEARI

Def: Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è detta <u>applicazione lineare</u> se

a) $f(\underline{x}+\underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}) \qquad \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

b) $f(\lambda \underline{x}) = \lambda f(\underline{x}) \qquad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

OSS: Combinando la a) e la b) segue che se f è lineare allora

$$f(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_m \underline{v}_m) = \lambda_1 f(\underline{v}_1) + \lambda_2 f(\underline{v}_2) + \dots + \lambda_m f(\underline{v}_m)$$

In forma più compatta:

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\underline{v}_i)$$

Esempi:

i) le uniche $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineari sono $f(x) = \alpha x$, $x \in \mathbb{R}$, α fissato

ii) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}$ è lineare [verifica]

iii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, soddisfa b) ma non è lineare. [verifica]

Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, cioè $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i$,

dove $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora:

$$f(\underline{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i\right) \underset{\text{linearità}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{f(\underline{e}_i)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{\left(f(\underline{e}_1) \,|\, f(\underline{e}_2) \,|\, \dots \,|\, f(\underline{e}_n)\right)}_{\in Mat(m,n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definisco $A = \left(f(\underline{e}_1) \,|\, \dots \,|\, f(\underline{e}_n)\right) \in Mat(m,n)$ da cui segue

$$\boxed{f(\underline{x}) = A\underline{x} \qquad \text{oppure} \qquad f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \qquad (1)$$

- Abbiamo mostrato che <u>ogni</u> applicazione lineare è della forma (1)
- Diremo che A è la <u>matrice associata</u> a f (nella base canonica)

Quindi (fissata la base canonica) ad ogni applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è associata una matrice $A \in Mat(m,n)$.

Viceversa data $A \in Mat(m,n)$ definiamo la funzione

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La funzione $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è detta applicazione lineare associata alla matrice A

Esplicitamente:

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

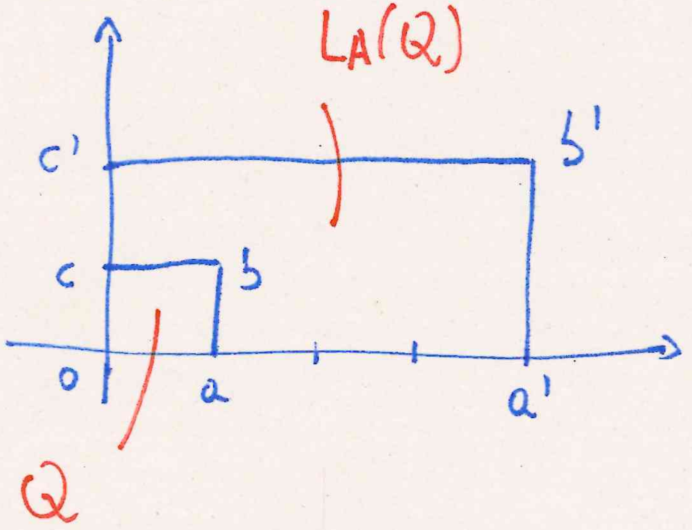
Esempi:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in Mat(2,3)$ – Allora $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$L_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ii) Alcuni esempi $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

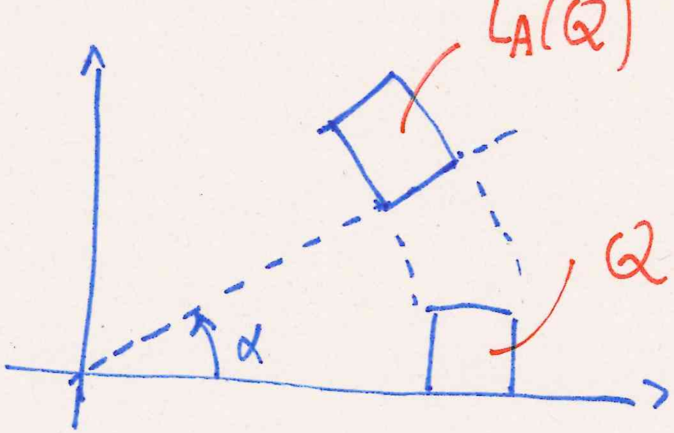
a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad L_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \end{pmatrix}$



- Dilatazione di coeff. 4 lungo x
- " " " 2 " y

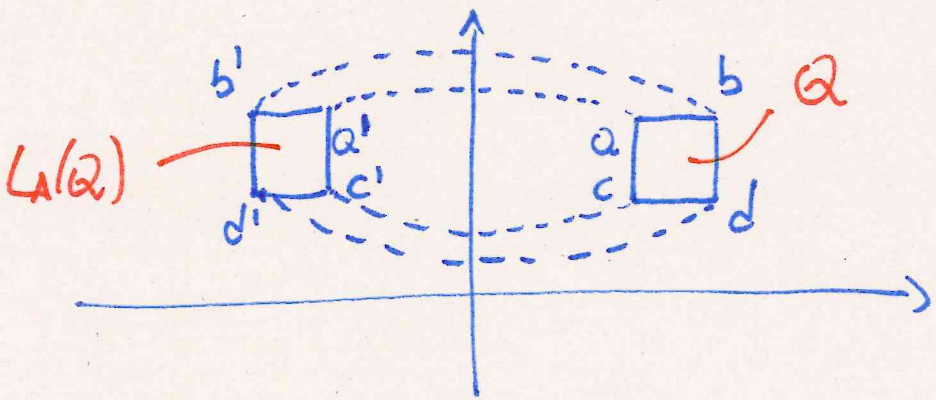
b) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato

$$L_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, x - \sin\alpha\, y \\ \sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y \end{pmatrix}$$



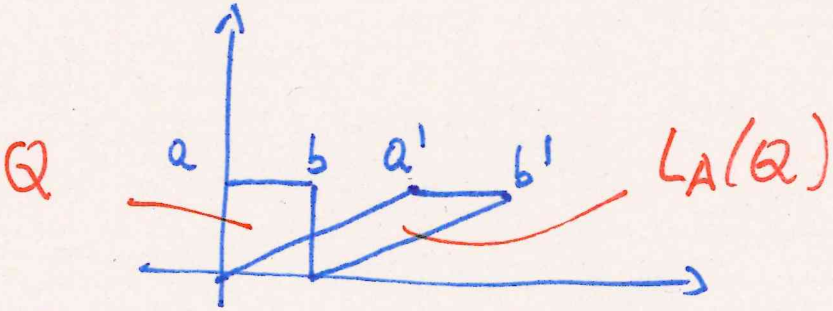
Rotazione antioraria di angolo α attorno all'origine.

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$



Riflessione rispetto all'asse y.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad L_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix}$



Esercizio: Mostrare che negli esempi precedenti vale la relazione:

$$\mathrm{vol}(L_A(Q)) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}(Q)$$

oss: Siano $A \in Mat(m,n)$, $B \in Mat(n,p)$

e $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ le corrispondenti applicazioni.

Allora

$$\boxed{L_A \circ L_B = L_{AB}}$$

ossia

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[r, "L_B"] \arrow[rr, bend right, "L_{AB}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$$L_A(L_B(\underline{x})) = L_{AB}(\underline{x})$$

oss: Nel caso particolare in cui $p = m = n$ e in cui $A \in Mat(n)$ è invertibile, allora prendendo $B = A^{-1}$ si ha che $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una funzione invertibile, e $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[rr, bend right, "L_{AA^{-1}} = L_I"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_{A^{-1}}"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Nucleo e immagine delle applicazioni lineari

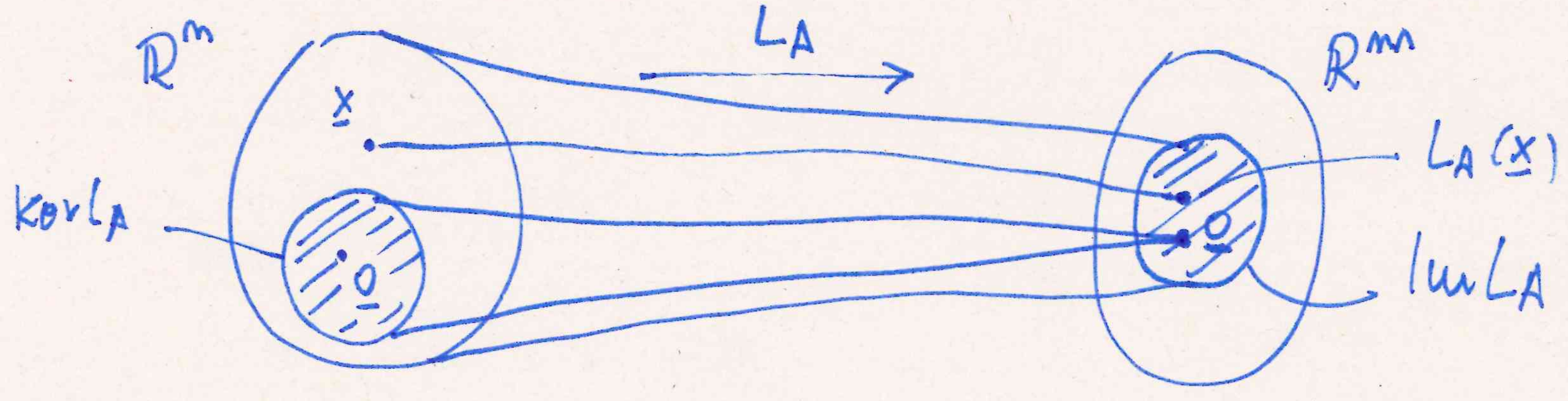
Siano $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$ e $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare associata ad A

- L'**immagine** di L_A è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ (cioè dello spazio di arrivo)

$$\boxed{\mathrm{Im}\, L_A = \{ L_A(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^n \} = \{ A\underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^n \} \subset \mathbb{R}^m}$$

- Il nucleo di L_A è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ (cioè dello spazio di partenza)

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, L_A = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A(\underline{x}) = \underline{0} \} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0} \} \subset \mathbb{R}^n}$$



Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,3)$. Allora $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è

$$L_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quindi

- $\mathrm{Im}\, L_A = \mathbb{R}^2$
- $\mathrm{Ker}\, L_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$

Osserviamo che in questo esempio:

- $\mathrm{Im}\, L_A$ è sottospazio 2-dim di $\mathbb{R}^2$
- $\mathrm{Ker}\, L_A$ " " 1-dim di $\mathbb{R}^3$
- $\dim(\mathrm{Im}\, L_A) = 2 = \mathrm{car} A$
- $\dim(\mathrm{Ker}\, L_A) + \dim(\mathrm{Im}\, L_A) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Teorema: Sia $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A \in Mat(m,n)$. Allora

i) $\operatorname{Ker} L_A$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

ii) $\operatorname{Im} L_A$ " " " " $\mathbb{R}^m$

iii) $\dim(\operatorname{Im} L_A) = \operatorname{car} A$

iv) Vale la formula delle dimensioni

dim. spazio di partenza = numero colonne di A

$$\boxed{\dim(\operatorname{Ker} L_A) + \dim(\operatorname{Im} L_A) = n}$$

Esercizio: Si consideri $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con A data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In ognuno dei casi:

La nozione di nucleo di un'applicazione lineare può essere utile per stabilire se un insieme $V \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio. Facciamo un esempio.

Esempio: $V = \{(x,y,z,w) \mid 2y+3z+4w=0,\ 2x+3z=0,\ -4x+6y+3z+12w=0\} \subset \mathbb{R}^4$.

V è sottospazio?

$$(x,y,z,w) \in V \iff \begin{cases} 2y+3z+4w=0 \\ 2x+3z=0 \\ -4x+6y+3z+12w=0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{0}}$$

$\iff A\underline{x} = \underline{0} \iff L_A(\underline{x}) = \underline{0} \iff \underline{x} \in \operatorname{Ker} L_A$, dove

$$L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad L_A(\underline{x}) = A\underline{x}$$

è l'applicazione lineare associata ad A. Quindi $V = \operatorname{Ker} L_A$ e quindi

$V \subset \mathbb{R}^4$ è sottospazio (perché il nucleo di un'applicazione lineare è sottospazio).

Esercizio: Verificare che nell'esempio precedente si ha:

a) $\dim(\operatorname{Ker} L_A) = 2$, $\dim(\operatorname{Im} L_A) = 2$

b) $\operatorname{Ker} L_A = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$

$\operatorname{Im} L_A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$