CONICHE

Una **conica** è il luogo dei punti del piano le cui coordinate (x,y) soddisfano un'equazione del tipo:

$$(1) \quad \boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2} + \boxed{2a_{13}x + 2a_{23}y} + \boxed{a_{33}} = 0$$

con $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$. In forma matriciale

$$\boxed{\underline{x}^t B \underline{x}} + \boxed{2\underline{x}^t \underline{c}} + \boxed{d} = 0$$

dove

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \quad d = a_{33}.$$

ossia

$$(2) \quad (x,y) B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(x,y)\underline{c} + d = 0.$$

OSS: la alternativa, la (1) si può scrivere come

$$(x, y, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & \underline{c} \\ \hline \underline{c}^t & d \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che B e A sono simmetriche.

Esempi:

1) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (circonferenza)

2) $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (iperbole)

3) $x^2 - y = 0$ (parabola)

4) $x^2 - y^2 = 0$ ($x = \pm y$ due rette incidenti)

5) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (insieme vuoto $\emptyset$)

Classificazione delle coniche. Forma canonica

Per semplificare l'equazione (1) applichiamo due trasformazioni:

i) Trasformazione ortogonale (che diagonalizza B, cioè fa sparire il termine $2a_{12}xy$)

ii) Traslazione (per centrare opportunamente gli assi)

---

i) Siccome B è simmetrica, esiste una base ortonormale $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ fatta di autovettori di B:

$$\|\underline{u}_1\| = \|\underline{u}_2\| = 1, \quad \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0, \qquad B\underline{u}_1 = \lambda_1 \underline{u}_1, \quad B\underline{u}_2 = \lambda_2 \underline{u}_2.$$

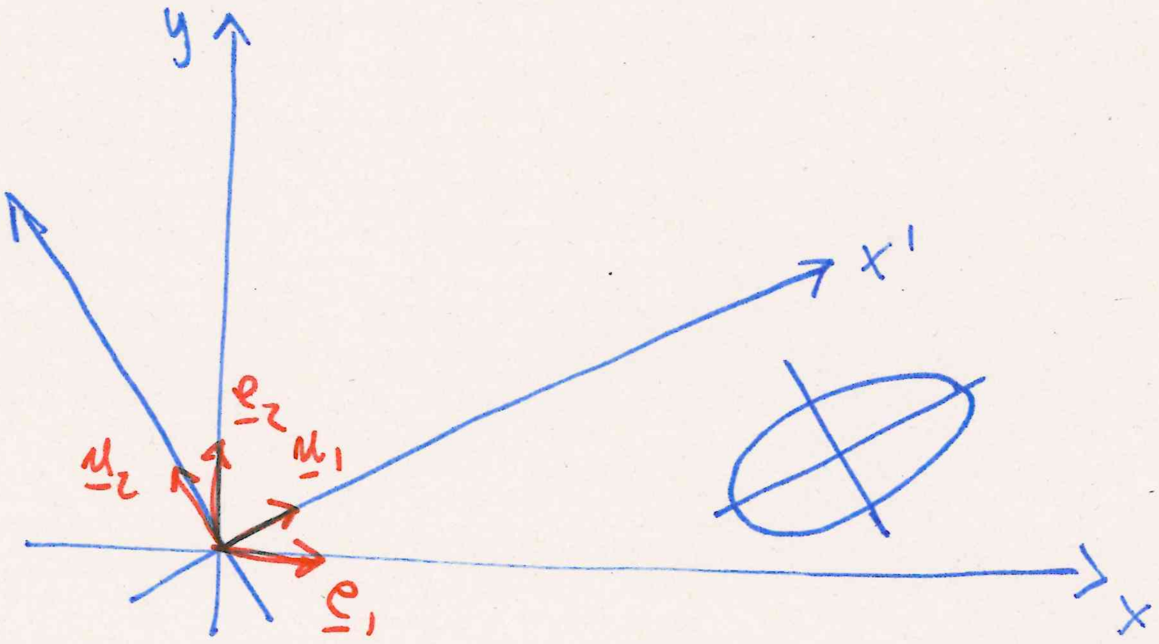
Quindi la matrice di cambiamento di base

$$M = (\underline{u}_1 | \underline{u}_2)$$

è ortogonale $(M^{-1} = M^t)$

Se (x', y') sono le coordinate relative alla nuova base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$, allora, (come sappiamo) il cambiamento di coordinate è dato da:

(3) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$



(caso $\det M = 1$
rotazione)

Abbiamo visto che (nella scorsa lezione) che dalla (3) segue:

$$(x, y) = (x', y') M^t$$

quindi l'equazione (2) della conica ~~diventa~~

$$(x,y)B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2(x,y)\underline{c}+d=0$$

diventa

$$(x',y')M^tBM\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+2(x',y')M^t\underline{c}+d=0$$

Inoltre

$$M^tBM=M^{-1}BM=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

Definendo $\underline{c}'=M^t\underline{c}$, cioè $\begin{pmatrix}c_1'\\c_2'\end{pmatrix}=M^t\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$,

allora la conica diventa:

$$(4)\quad \underbrace{\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2}_{\substack{\shortparallel\\ \text{diagonalizzazione della forma quadratica associata a } B.}}+2c_1'x'+2c_2'y'+d=0$$

ii) Una volta determinata la forma (4) cerchiamo una traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' + \alpha \\ y'' = y' + \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

in modo da eliminare, quando possibile, ulteriori termini.

Applicando la traslazione la (4) diventa:

(5) $\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + 2(c_1' - \lambda_1 \alpha) x'' + 2(c_2' - \lambda_2 \beta) y'' + d'' = 0$

dove $d'' = d + \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 - 2c_1' \alpha - 2c_2' \beta$.

Per procedere nell'analisi distinguiamo alcuni casi:

CASO I: $\det B \neq 0$

Siccome $\det B = \lambda_1 \lambda_2$, allora $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Scegliendo nella (5)

$\alpha = \frac{c_1'}{\lambda_1}$, $\beta = \frac{c_2'}{\lambda_2}$ cioè considerando la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{c_1'}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \frac{c_2'}{\lambda_2} \end{cases}$$

allora la conica assume la forma

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + d'' = 0$$

Per comodità scriviamo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$$

e consideriamo due ulteriori casi:

CASO I.1 : $d \neq 0$

Allora $\qquad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -d$

e dividendo per $-d$ $(\neq 0)$ si ottiene

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 = 1 ,$$

dove $a_1 = -\frac{\lambda_1}{d}$, $a_2 = -\frac{\lambda_2}{d}$

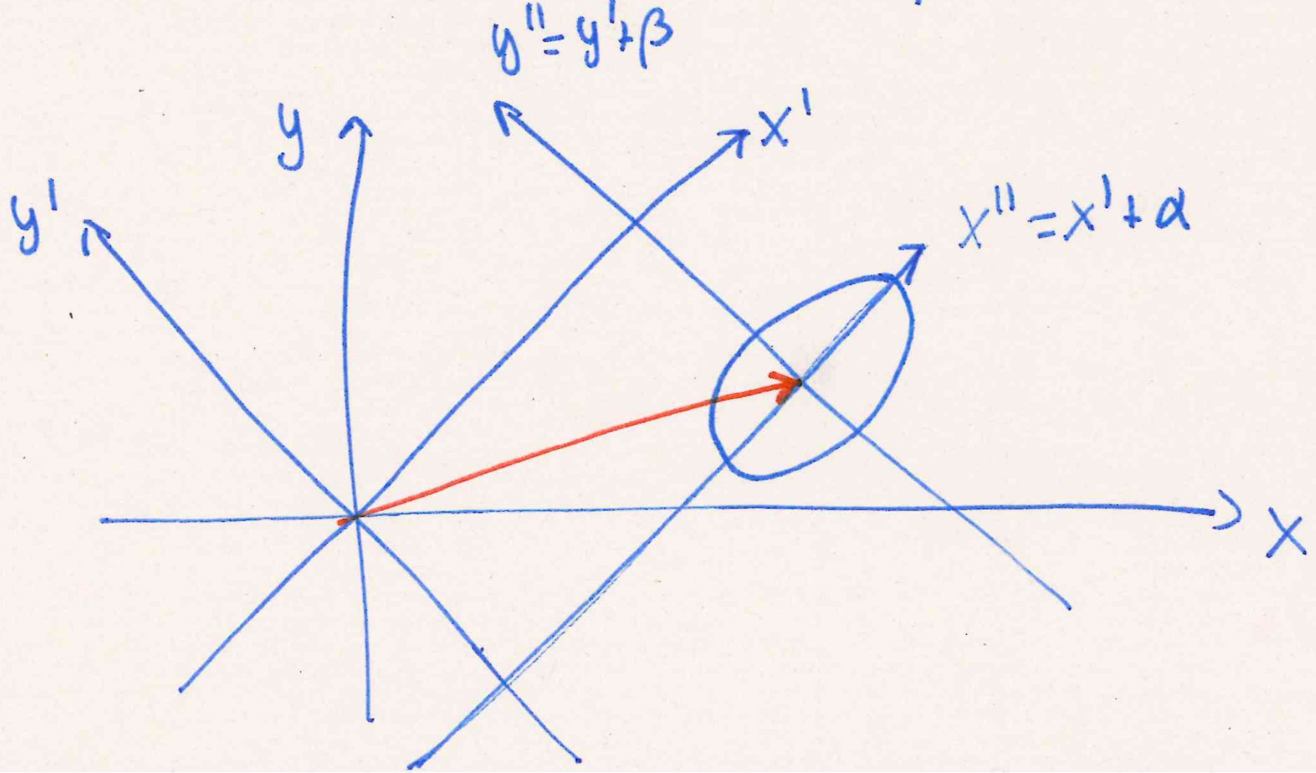
Quindi:

a_1	a_2	Conica	Forma canonica
+	+	Ellisse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
+	−	Iperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
−	−	$\emptyset$	$\frac{-x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

CASO I. 2 $\quad d = 0$

Abbiamo l'equazione $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$ e quindi due casi:

λ_1, λ_2	Conica	Forma canonica	Esempi:
segni uguali	un punto $\{(0,0)\}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$
segni opposti	due rette incidenti	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$x^2 - y^2 = 0$ $(x-y)(x+y) = 0$ $\Rightarrow x = \pm y$



CASO II: $\det B = 0$

Siccome $\det B = \lambda_1 \lambda_2$ allora un solo autovalore di B si annulla.

Possiamo sempre supporre che sia λ_2. Allora la (4) diventa

$$\lambda_1 (x')^2 + 2c'_1 x' + 2c'_2 y' + d = 0 .$$

Applicando la traslazione $x'' = x' + \frac{c'_1}{\lambda_1}$ l'eq. diventa

(6) $$\lambda_1 (x'')^2 + 2c'_2 y' + d'' = 0$$

Consideriamo due ulteriori casi:

Caso II. 1 $c'_2 \neq 0$

Applicando alla (6) la traslazione $y'' = y' + \frac{d''}{2c'_2}$ si ottiene

$$\lambda_1 (x'')^2 + 2c'_2 y'' = 0$$ ossia l'equazione di una parabola.

Caso II.2 $c_2' = 0$

l'eq. (6) si riduce a $\lambda_1 (x'')^2 + d'' = 0$ ossia $(x'')^2 + \frac{d''}{\lambda_1} = 0$

- Se $\frac{d''}{\lambda_1} < 0 \Rightarrow$ coppia di rette parallele distinte (e.g. $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$)
- Se $\frac{d''}{\lambda_1} = 0 \Rightarrow$ " " " " coincidenti ($x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ doppia)
- Se $\frac{d''}{\lambda_1} > 0 \Rightarrow \emptyset$ ($x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \emptyset$)

Centro di una conica

Come abbiamo visto nella classificazione precedente, in alcuni casi

data una conica

$$\underline{x}^t B \underline{x} + 2 \underline{x}^t \underline{c} + d = 0 \qquad (7)$$

esiste un $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ t.c. dopo la traslazione $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$ la (7) diventa

$$(\underline{x}')^t B \underline{x}' + d' = 0$$

Si dimostra [verifica] che tale $\underline{x}_0$ esiste se e solo se $\underline{x}_0$ soddisfa

$$\boxed{B \underline{x}_0 + \underline{c} = \underline{0}}$$

Tale punto (se esiste) si chiama centro di simmetria (o centro) della conica

Si hanno (ovviamente) tre casi:

- Sistema determinato ($\det B \neq 0$) $\Rightarrow$ esiste un unico centro di simmetria (coniche a centro)

- Sistema indeterminato $\Rightarrow$ esistono infiniti centri di simmetria

- Sistema impossibile $\Rightarrow$ non esistono centri di simmetria

Esercizio: Determinare (se esistono) i centri per ogni tipo di conica.

oss: Nel nuovo sistema di riferimento $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$ la conica è simmetrica rispetto a $\underline{x}' = \underline{0}$