Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 2$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Punto 1: Calcolare gli stati di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso $u(k) = \bar{u} = 1$ e al variare di α.

Denotiamo lo stato di equilibrio come $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$, dall'equazione di stato abbiamo:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A\bar{x} + B\bar{u} \\ (I - A)\,\bar{x} &= B\bar{u} \end{aligned}$$

Calcoliamo il determinante della matrice $I - A$:

$$\begin{aligned} \det(I - A) &= \det \begin{bmatrix} 1-\alpha & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 - \alpha + 1 \\ &= 2 - \alpha \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi:

- Caso $\alpha \neq 2$, la matrice $I - A$ è non singolare e di conseguenza il sistema di equazioni $(I - A)\,\bar{x} = B\bar{u}$ ha un'unica soluzione (ovvero il sistema dinamico ha un unico equilibrio) pari a :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (I - A)^{-1} B\bar{u} \\ &= \frac{1}{2-\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2-\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ -2+\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Caso $\alpha = 2$, la matrice $I - A$ è singolare e di conseguenza il sistema di equazioni $(I - A)\,\bar{x} = B\bar{u}$ può avere infinite o nessuna soluzione. Esplicitiamo il sistema:

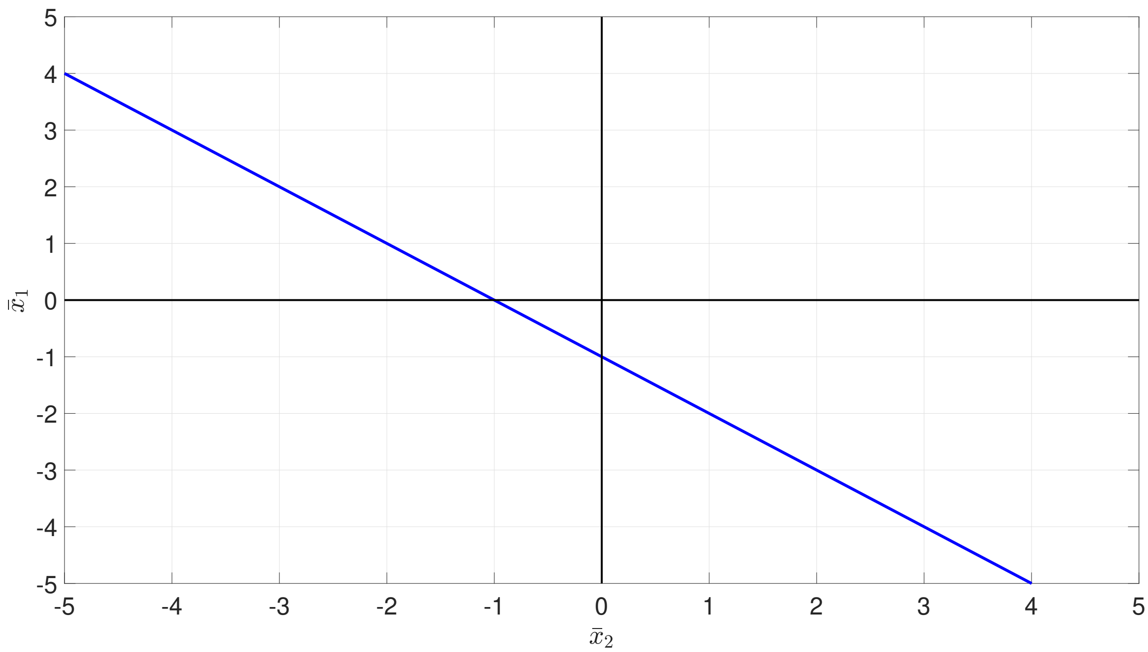
$$\begin{aligned} (I - A)\,\bar{x} &= B\bar{u} \\ \begin{bmatrix} 1-\alpha & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = -1 \end{cases}$$

Il sistema è indeterminato ed ha quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -\bar{x}_2 - 1 \\ \bar{x}_2 \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

E' anche possibile rappresentare graficamente gli stati di equilibrio nello spazio di stato, cioè il piano $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$:



Punto 2: Determinare la funzione di trasferimento del sistema e valutarne poli, zeri, tipo e guadagno per $\alpha = -1$.

$$\begin{aligned} G(z) &= C\,(zI - A)^{-1}\,B + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-\alpha & -1 \\ 1 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & -1 \\ 1 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \\ &= \frac{1}{z\,(z+1)+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 1 \\ -1 & z+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \\ &= \frac{1}{z^2+z+1} \begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \\ &= \frac{z-1}{z^2+z+1} + 2 \\ &= \frac{z-1+2z^2+2z+2}{z^2+z+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2z^2 + 3z + 1}{z^2 + z + 1}$$

I poli della funzione di trasferimento sono le radici del denominatore:

$$\begin{aligned}
&z^2 + z + 1 = 0 \\
&\Delta = \sqrt{1-4} = j\sqrt{3} \\
&p_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Mentre gli zeri sono le radici del numeratore:

$$\begin{aligned}
2z^2 + 3z + 1 &= 0 \\
2\left(z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}\right) &= 0 \\
(z+1)\left(z + \frac{1}{2}\right) &= 0 \\
z_1 &= -1 \\
z_2 &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Il tipo g della funzione di trasferimento di un sistema dinamico a tempo discreto è pari alla differenza tra il numero di poli in $+1$ ed il numero di zeri in $+1$. In questo caso abbiamo $g = 0$.
Siccome il tipo di $G(z)$ è pari a 0, possiamo calcolarne il guadagno come:

$$\begin{aligned}
\mu &= G(1) \\
&= \frac{2+3+1}{1+1+1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Punto 1: Discutere la stabilità del sistema al variare di α.

La matrice A è triangolare, i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale:

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = \alpha$$

Possiamo dedurre che non esiste α tale per cui il sistema risultante è asintoticamente stabile siccome è presente un autovalore λ_1 con modulo unitario. Valutiamo i tre casi possibili per λ_2:

- Caso $|\alpha| < 1$, il sistema è stabile (semplicemente);
- Caso $|\alpha| > 1$, il sistema è instabile;
- Caso $|\alpha| = 1$, per valutare se il sistema è stabile (semplicemente) o instabile senza calcolare molteplicità algebrica e geometrica dei rispettivi autovalori possiamo valutare il movimento libero del sistema. In particolare, se il movimento libero (di tutti gli stati) fosse limitato per qualsiasi stato iniziale $x(0)$, il sistema sarebbe stabile (semplicemente). Viceversa, se così non fosse, allora il sistema sarebbe instabile. Esplicitiamo gli stati del sistema:

  $$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + \alpha x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

  Siccome siamo interessati solo al movimento libero, consideriamo $u(k) = 0$ ed esplicitiamo lo stato iniziale del sistema:

  $$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ &= \begin{bmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  Dalla prima equazione di stato otteniamo:

  $$x_1(k) = x_{1_0}$$

  ovvero il movimento libero del primo stato è limitato (e costante).
  Verfichiamo se anche il movimento libero del secondo stato è limitato. Esplicitiamo la seconda equazione di stato rispetto a x_0:

  $$\begin{aligned} x_2(k+1) &= x_1(k) + \alpha x_2(k) \\ &= x_{1_0} + \alpha x_2(k) \end{aligned}$$

  Consideriamo due sotto-casi:

– Sotto-caso $\alpha = +1$, l'equazione di stato diventa:

$$x_2(k+1) = x_{1_0} + x_2(k)$$

Valutiamone il comportamento iterandola a partire da $k = 0$:

$$\begin{aligned}
x_2(0) &= x_{2_0} \\
x_2(1) &= x_{1_0} + x_2(0) \\
&= x_{1_0} + x_{2_0} \\
x_2(2) &= x_{1_0} + x_2(1) \\
&= x_{1_0} + x_{1_0} + x_{2_0} \\
&= 2x_{1_0} + x_{2_0} \\
&\vdots \\
x_2(k+1) &= (k+1)x_{1_0} + x_{2_0}
\end{aligned}$$

Possiamo notare che il movimento libero del secondo stato diverge $\forall x_{1_0} \neq 0$. Di conseguenza, il sistema dinamico a tempo discreto è instabile.

– Sotto-caso $\alpha = -1$, l'equazione di stato diventa:

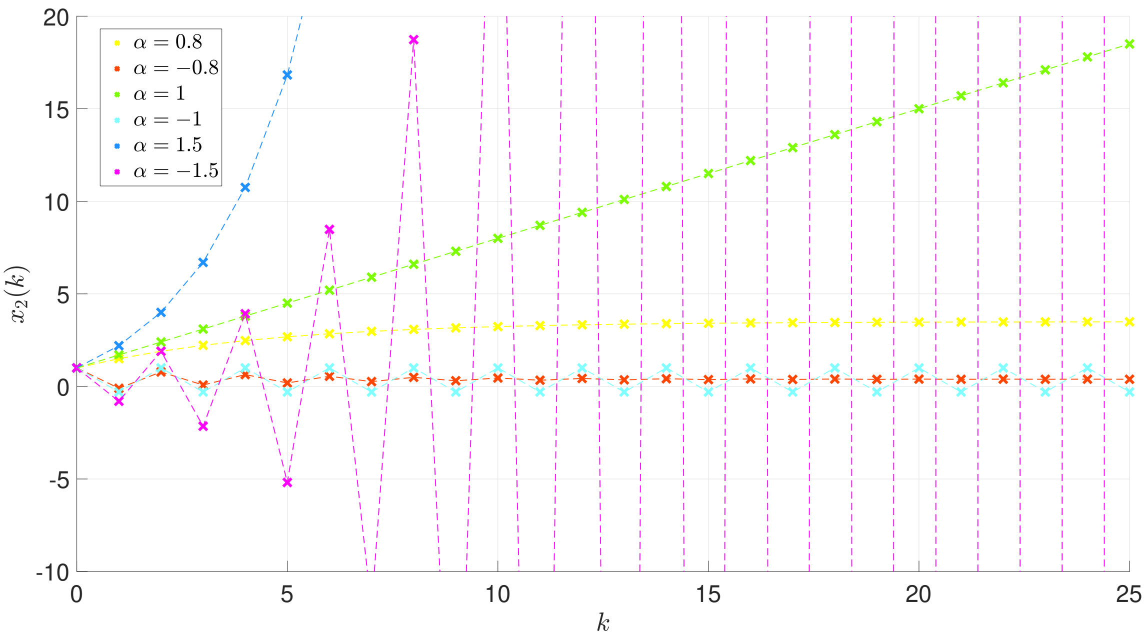
$$x_2(k+1) = x_{1_0} - x_2(k)$$

Valutiamone il comportamento iterandola a partire da $k = 0$:

$$\begin{aligned}
x_2(0) &= x_{2_0} \\
x_2(1) &= x_{1_0} - x_2(0) \\
&= x_{1_0} - x_{2_0} \\
x_2(2) &= x_{1_0} - x_2(1) \\
&= x_{1_0} - x_{1_0} + x_{2_0} \\
&= x_{2_0} \\
x_2(3) &= x_{1_0} - x_2(2) \\
&= x_{1_0} - x_{2_0} \\
&\vdots \\
x_2(k+1) &= \begin{cases} x_{2_0} & \text{per } k \text{ dispari} \\ x_{1_0} - x_{2_0} & \text{per } k \text{ pari} \end{cases}
\end{aligned}$$

Possiamo notare che il movimento libero del secondo stato è limitato $\forall x_{1_0}, x_{2_0}$. Di conseguenza, il sistema dinamico a tempo discreto è stabile (semplicemente).

Nel seguito si riportano alcuni esempi di movimenti liberi dello stato $x_2(k)$ per diversi valori di α e stato iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1 \end{bmatrix}$:


$\alpha = 0.8$
$\alpha = -0.8$
$\alpha = 1$
$\alpha = -1$
$\alpha = 1.5$
$\alpha = -1.5$
$x_2(k)$
k
20
15
10
5
0
-5
-10
0
5
10
15
20
25

Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto LTI SISO con ingresso $u(k)$ ed uscita $y(k)$ descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{z-0.5}{(z-1)(z+0.5)}$$

Punto 1: Determinare l'espressione analitica della risposta all'impulso del sistema.

Sappiamo che la trasformata Zeta di $u(k) = \text{imp}(k)$ è:

$$U(z) = 1$$

Da cui, la risposta all'impulso nel dominio delle trasformate è pari a:

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z)U(z) \\ &= G(z) \\ &= \frac{z-0.5}{(z-1)(z+0.5)} \end{aligned}$$

Per ricavare la sua espressione analitica nel dominio del tempo applichiamo lo sviluppo di Heaviside. Per i sistemi a tempo discreto, il metodo si applica a $\frac{Y(z)}{z}$ anzichè $Y(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z-0.5}{z(z-1)(z+0.5)} \\ &= \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} + \frac{\gamma}{z+0.5} \\ \frac{z-0.5}{z(z-1)(z+0.5)} &= \frac{\alpha(z-1)(z+0.5) + \beta z(z+0.5) + \gamma z(z-1)}{z(z-1)(z+0.5)} \\ \frac{z-0.5}{z(z-1)(z+0.5)} &= \frac{\alpha z^2 - 0.5\alpha z - 0.5\alpha + \beta z^2 + 0.5\beta z + \gamma z^2 - \gamma z}{z(z-1)(z+0.5)} \\ \frac{z-0.5}{z(z-1)(z+0.5)} &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma) z^2 + (-0.5\alpha + 0.5\beta - \gamma) z - 0.5\alpha}{z(z-1)(z+0.5)} \end{aligned}$$

Ponendo a sistema:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 & (a) \\ -0.5\alpha + 0.5\beta - \gamma = 1 & (b) \\ -0.5\alpha = -0.5 & (c) \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 & (a) \\ 0.5\alpha + 1.5\beta = 1 & (a)+(b) \\ \alpha = 1 & (c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 & (a) \\ \beta = \frac{1}{3} & (a)+(b) \\ \alpha = 1 & (c) \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = -\frac{4}{3} & (a) \\ \beta = \frac{1}{3} & (a)+(b) \\ \alpha = 1 & (c) \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{3}\frac{1}{z-1} - \frac{4}{3}\frac{1}{z+0.5} \\ Y(z) &= 1 + \frac{1}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{4}{3}\frac{z}{z+0.5} \end{aligned}$$

Calcolando l'antitrasformata di ciascun termine otteniamo:

$$y(k) = \text{imp}(k) + \frac{1}{3}\text{sca}(k) - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \text{sca}(k)$$

Punto 2: Calcolare i primi quattro campioni $y(0), y(1), y(2), y(3)$ della risposta all'impulso del sistema.

Abbiamo tre modi per calcolare i campioni della risposta all'impulso:

1. sfruttando l'espressione analitica ricavata al punto precedente,
2. ricavando l'equazione ricorsiva di $Y(z)$,
3. utilizzando il metodo della lunga divisione.

Espressione analitica
Iteriamo l'equazione $y(k) = \text{imp}(k) + \frac{1}{3}\text{sca}(k) - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \text{sca}(k)$:

k	$y(k)$
0	$y(0) = \text{imp}(0) + \frac{1}{3}\text{sca}(0) - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^0 \text{sca}(0) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = 0$
1	$y(1) = \text{imp}(1) + \frac{1}{3}\text{sca}(1) - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^1 \text{sca}(1) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$
2	$y(2) = \text{imp}(2) + \frac{1}{3}\text{sca}(2) - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \text{sca}(2) = 0 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = 0$
3	$y(3) = \text{imp}(3) + \frac{1}{3}\text{sca}(3) - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \text{sca}(3) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

Equazione ricorsiva
Calcoliamo l'equazione ricorsiva di $Y(z)$ (valida per qualsiasi ingresso):

$$\begin{aligned}
Y(z) &= G(z)U(z) \\
Y(z) &= \frac{z - 0.5}{(z-1)(z+0.5)}U(z) \\
(z-1)(z+0.5)Y(z) &= (z-0.5)U(z) \\
z^2Y(z) - 0.5zY(z) - 0.5Y(z) &= zU(z) - 0.5U(z) \\
&\downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
y(k+2) - 0.5y(k+1) - 0.5y(k) &= u(k+1) - 0.5u(k)
\end{aligned}$$

Traslando all'indietro di due passi otteniamo:

$$y(k) = \frac{1}{2}y(k-1) + \frac{1}{2}y(k-2) + u(k-1) - \frac{1}{2}u(k-2)$$

Possiamo ottenere i campioni in questione iterando l'espressione appena ottenuta per $u(k) = \text{imp}(k)$ e considerando $y(k) = 0, u(k) = 0$ per $k < 0$:

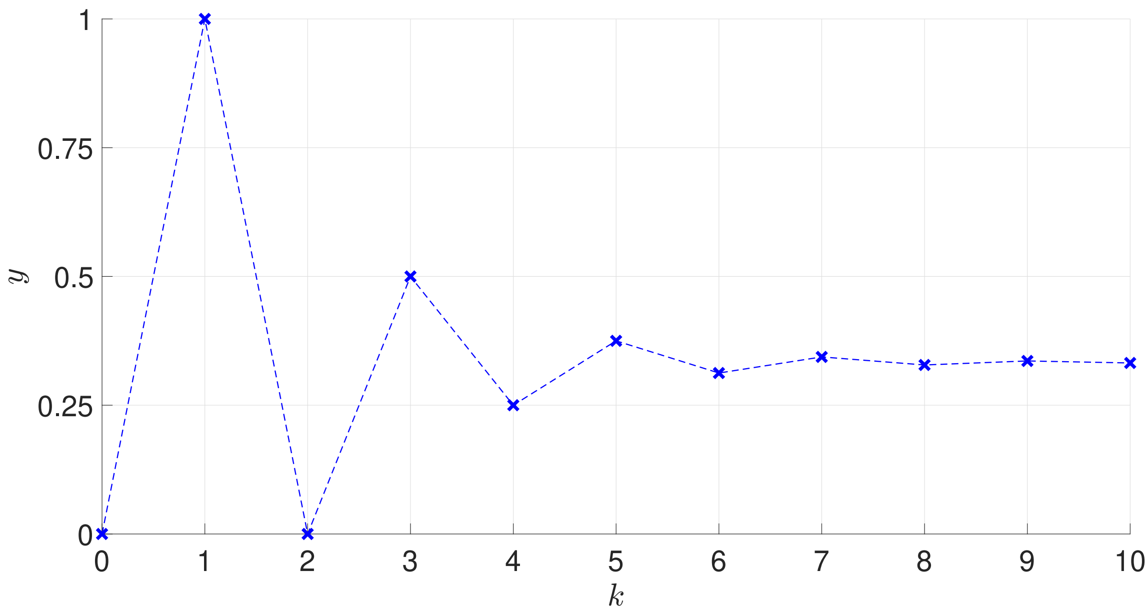
k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	$y(0) = \frac{1}{2}y(-1) + \frac{1}{2}y(-2) + u(-1) - \frac{1}{2}u(-2) = 0$
1	0	$y(1) = \frac{1}{2}y(0) + \frac{1}{2}y(-1) + u(0) - \frac{1}{2}u(-1) = 1$
2	0	$y(2) = \frac{1}{2}y(1) + \frac{1}{2}y(0) + u(1) - \frac{1}{2}u(0) = \frac{1}{2} + 0 + 0 - \frac{1}{2} = 0$
3	0	$y(3) = \frac{1}{2}y(2) + \frac{1}{2}y(1) + u(2) - \frac{1}{2}u(1) = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2}$

Lunga divisione
Eseguiamo quattro "colpi" di lunga divisione per $Y(z) = \frac{z-0.5}{(z-1)(z+0.5)} = \frac{z-0.5}{z^2-0.5z-0.5}$:

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
z & -\frac{1}{2} & & & z^2 & -\frac{1}{2}z & -\frac{1}{2} \\ \cline{5-7}
-z & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}z^{-1} & & z^{-1} & +0 & +\frac{1}{2}z^{-3} \\ \cline{1-4}
 & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
/ & 0 & +\frac{1}{2}z^{-1} & & y(1) & y(2) & y(3) \\
 & +0 & +0 & +0 & & & \\ \cline{1-4}
 & / & \frac{1}{2}z^{-1} & & & &
\end{array}
$$

In realtà, è stato sufficiente eseguire solo tre "colpi" di lunga divisione poichè, essendo il grado del numeratore inferiore al grado del denominatore (sistema strettamente proprio), abbiamo $y(0) = 0$. I restanti campioni si possono ricavare direttamente dal quoziente: $y(1) = 1, y(2) = 0$ e $y(3) = \frac{1}{2}$.

Giustamente, tutti e tre i metodi restituiscono lo stesso risultato.
Si riporta infine la risposta all'impulso:


1
0.75
0.5
0.25
0
y
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k

Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto LTI SISO con ingresso $u(k)$ ed uscita $y(k)$ descritto dalla seguente equazione ricorsiva:

$$y(k) = -\frac{1}{2}y(k-1) + \alpha y(k-2) + \frac{1}{4}u(k-1)$$

dove $\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Punto 1: Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

Calcoliamo la funzione di trasferimento $G(z)$ del sistema dinamico applicando la trasformata Zeta all'equazione ricorsiva, ricordando che $\mathcal{Z}\left[y(k-r)\right] = z^{-r}Y(z)$:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= -\frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + \alpha z^{-2}Y(z) + \frac{1}{4}z^{-1}U(z) \\
Y(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \alpha z^{-2}Y(z) &= \frac{1}{4}z^{-1}U(z) \\
\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \alpha z^{-2}\right)Y(z) &= \frac{1}{4}z^{-1}U(z) \\
G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \alpha z^{-2}} \\
G(z) &= \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{z^{-2}\left(z^2 + \frac{1}{2}z - \alpha\right)} \\
G(z) &= \frac{\frac{1}{4}z}{z^2 + \frac{1}{2}z - \alpha}
\end{aligned}$$

Punto 2: Determinare per quali valori di $\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è asintoticamente stabile.

Valutiamo i poli di $G(z)$:

$$\begin{aligned}
z^2 + \frac{1}{2}z - \alpha &= 0 \\
\Delta &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\alpha} \\
&= \sqrt{\frac{1 + 16\alpha}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16\alpha} \\
p_{1,2} &= \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16\alpha}}{2} \\
&= -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1 + 16\alpha}
\end{aligned}$$

Un sistema dinamico a tempo discreto è asintoticamente stabile se e solo se i suoi poli hanno modulo inferiore a 1, ovvero $|p_{1,2}| < 1$.
Dal testo dell'esercizio abbiamo che $\alpha \geq 0$ da cui $1 + 16\alpha > 0$ e quindi $G(z)$ ha due poli reali. Di conseguenza, essendo $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, per avere asintotica stabilità dobbiamo avere:

$$\begin{aligned}
|p_1| < 1 \rightarrow -1 < p_1 < +1 \\
|p_2| < 1 \rightarrow -1 < p_2 < +1
\end{aligned}$$

Ponendo a sistema otteniamo:

$$\begin{cases} -1 < -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+16\alpha} < +1 \\ -1 < -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{1+16\alpha} < +1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4 < -1 + \sqrt{1+16\alpha} < +4 \\ -4 < -1 - \sqrt{1+16\alpha} < +4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 < \sqrt{1+16\alpha} < +5 \\ -3 < -\sqrt{1+16\alpha} < +5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 < \sqrt{1+16\alpha} < +5 \\ -5 < \sqrt{1+16\alpha} < +3 \end{cases}$$

Consideriamo solo l'intervallo più stringente per $\sqrt{1+16\alpha}$:

$$-3 < \sqrt{1+16\alpha} < +3$$

Essendo $\alpha \geq 0$ e quindi $\sqrt{1+16\alpha} \geq 1$, possiamo restringere l'intervallo a:

$$\begin{aligned} &1 \leq \sqrt{1+16\alpha} < 3 \\ &1 \leq 1+16\alpha < 9 \\ &0 \leq 16\alpha < 8 \\ &0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Di conseguenza, il sistema dinamico è asintoticamente stabile per $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

Esercizio 5

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto LTI SISO con ingresso $u(k)$ ed uscita $y(k)$ descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{1}{z - 0.5}$$

Punto 1: Scrivere l'equazione ricorsiva che descrive il il legame ingresso/uscita nel dominio del tempo.

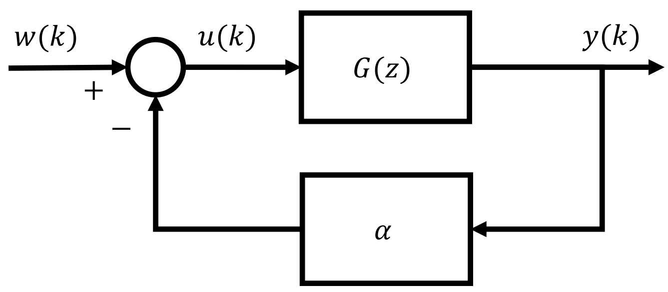
$$\begin{aligned} G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{1}{z-0.5} \\ Y(z) &= \frac{1}{z-0.5}U(z) \\ (z-0.5)\,Y(z) &= U(z) \\ zY(z) - 0.5Y(z) &= U(z) \\ &\downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(k+1) - 0.5y(k) &= u(k) \end{aligned}$$

Traslando all'indietro di un passo e considerando $y(k) = 0$ per $k < 0$ otteniamo:

$$y(k) = 0.5y(k-1) + u(k-1)$$

Punto 2: Utilizzando la legge di controllo $u(k) = -\alpha y(k) + w(k)$, dove $w(k)$ è la variabile di riferimento e $\alpha \in \mathbb{R}$, dire, se è possibile, fare in modo che il sistema in anello chiuso con ingresso $w(k)$ ed uscita $y(k)$ sia un sistema FIR. In caso sia possibile, calcolare il valore di α per cui ciò accade.

Lo schema di controllo che si ottiene applicando la legge proposta è:



Sfruttando l'equazione ricorsiva ricavata al punto precedente:

$$\begin{aligned}
y(k) &= 0.5y(k-1) + u(k-1) \\
y(k) &= 0.5y(k-1) - \alpha y(k-1) + w(k-1) \\
y(k) - 0.5y(k-1) + \alpha y(k-1) &= w(k-1) \\
&\downarrow \mathcal{Z} \\
Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) + \alpha z^{-1}Y(z) &= z^{-1}W(z) \\
\left(1 - 0.5z^{-1} + \alpha z^{-1}\right) Y(z) &= z^{-1}W(z) \\
F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{z^{-1}}{1 + (\alpha - 0.5)\, z^{-1}} \\
F(z) &= \frac{1}{z + (\alpha - 0.5)}
\end{aligned}$$

Un sistema FIR (Finite Impulse Response) è un sistema a dinamico a tempo discreto con tutti i poli in $z = 0$. La funzione di trasferimento nel caso generale è:

$$H(z) = \frac{\beta_n z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + ... + \beta_1 z + \beta_0}{z^n}$$

dove n è l'ordine del sistema. Nel nostro caso, possiamo osservare che per $\alpha = 0.5$ otteniamo il sistema FIR:

$$F(z) = \frac{1}{z}$$

con $\beta_0 = 1$, $\beta_i = 0$ per $i \neq 0$ ed $n = 1$.

Punto 3: Per α ricavato al punto precedente, calcolare tutti i campioni $y(k), k \geq 0$ della risposta all'impulso del sistema.

Il calcolo dei campioni della risposta di un sistema FIR ad ingressi caratteristici è immediato. Per quanto riguarda la risposta all'impulso abbiamo:

$$y(k) = \beta_{n-k}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \beta_1 = 0 \\
y(1) &= \beta_0 = 1 \\
y(2) &= \beta_{-1} = 0 \\
&\vdots \\
y(k) &= \beta_{n-k} = 0 \quad \text{per } k > 1
\end{aligned}$$

Si noti bene che la risposta all'impulso di un sistema FIR converge al valore di regime (che è sempre pari a 0) in n passi.
Dei risultati analoghi si ottengono considerando l'equazione ricorsiva di $F(z) = \frac{1}{z}$ (che è un semplice ritardo puro di un passo)

$$y(k) = w(k-1)$$

con ingresso $w(k) = \text{imp}(k)$.

Punto 4: Per α ricavato al Punto 2, calcolare tutti i campioni $y(k), k \geq 0$ della risposta allo scalino unitario del sistema.

E' possibile ricavare immediatamente i campioni della risposta allo scalino unitario di un sistema FIR applicando la formula:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} \beta_{n-i}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \beta_1 = 0 \\
y(1) &= \beta_1 + \beta_0 = 1 \\
y(2) &= \beta_1 + \beta_0 + \beta_{-1} = 1 \\
&\vdots \\
y(k) &= \sum_{i=0}^{k} \beta_{n-i} = 1
\end{aligned}$$

Similmente a quanto accadeva per la risposta all'impulso, la risposta allo scalino unitario di un sistema FIR converge al valore di regime (che è pari al guadagno statico $\mu = F(1) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i$) in n passi.
Alternativamente, i vari campioni potevano essere ricavati a partire dall'equazione ricorsiva $y(k) = w(k-1)$, considerando $w(k) = \text{sca}(k)$.

Esercizio 6

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{1+s}e^{-s\tau}$$

Punto 1: Per $\tau = 0$, si calcoli la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto che si ottiene mediante discretizzazione con trasformazione di Tustin e con tempo di campionamento T_s generico.

Per $\tau = 0$, la funzione di trasferimento del sistema a tempo continuo è:

$$G(s) = \frac{10}{1+s}$$

Applichiamo la trasformazione di Tustin $s \to \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$ per discretizzare il sistema in questione:

$$\begin{aligned}
G^*(z) &= \frac{10}{1+\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}} \\
&= \frac{10}{\frac{(z+1)+\frac{2}{T_s}(z-1)}{z+1}} \\
&= \frac{10z+10}{\left(1+\frac{2}{T_s}\right)z+\left(1-\frac{2}{T_s}\right)}
\end{aligned}$$

Punto 2: Valutare la stabilità del sistema discreto ottenuto al Punto 1.

Il sistema a tempo continuo $G(s)$ presenta un polo in $p_1 = -1$ ed è quindi asintoticamente stabile.
Nel caso della trasformazione di Tustin, vi è corrispondenza tra la regione di asintotica stabilità a tempo continuo $S : \mathrm{Re}(p_i) < 0$ e quella a tempo discreto $Z : |p_i^*| < 1$ (dove p_i sono i poli a tempo continuo e p_i^* sono i corrispondenti poli a tempo discreto). Di conseguenza, essendo $G(s)$ asintoticamente stabile, allora anche $G^*(z)$ lo è.
Possiamo verificarlo analiticamente calcolando i poli di $G^*(z)$:

$$\left(1+\frac{2}{T_s}\right)z+\left(1-\frac{2}{T_s}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\frac{1-\frac{2}{T_s}}{1+\frac{2}{T_s}} \\
&= \frac{\frac{2}{T_s}-1}{1+\frac{2}{T_s}} \\
&= \frac{2-T_s}{T_s+2}
\end{aligned}$$

Essendo $T_s > 0$, certamente $|2-T_s| < |T_s+2|$ e quindi:

$$\left|\frac{2-T_s}{T_s+2}\right| < 1$$

ovvero il sistema a tempo discreto è asintoticamente stabile.

Punto 3: Per $\tau = 1sec$, si calcoli la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto che si ottiene mediante discretizzazione con trasformazione di Tustin e con tempo di campionamento $T_s = 0.5sec$.

Per $\tau = 1$, la funzione di trasferimento del sistema a tempo continuo è:

$$G(s) = \frac{10}{1+s}e^{-s}$$

Possiamo osservare che il ritardo di $G(s)$ è pari esattamente a due passi di campionamento, cioè $\tau = 2T_s$. Di conseguenza, nel discretizzare la funzione di trasferimento, dobbiamo considerare anche tale ritardo introducendo un fattore z^{-2}:

$$\begin{aligned} G^*(z) &= \frac{10z+10}{\left(1+\frac{2}{T_s}\right)z + \left(1-\frac{2}{T_s}\right)}z^{-2} \\ &= \frac{10z+10}{\left(1+\frac{2}{0.5}\right)z + \left(1-\frac{2}{0.5}\right)}z^{-2} \\ &= \frac{10z+10}{5z-3}z^{-2} \\ &= \frac{10z+10}{5z^3-3z^2} \end{aligned}$$

Punto 4: Scrivere l'equazione ricorsiva del sistema a tempo discreto ottenuto al Punto 3.

$$\begin{gathered} G^*(z) = \frac{Y^*(z)}{U^*(z)} = \frac{10z+10}{5z^3-3z^2} \\ \left(5z^3-3z^2\right)Y^*(z) = (10z+10)\,U^*(z) \\ 5z^3Y^*(z) - 3z^2Y^*(z) = 10zU^*(z) + 10U^*(z) \\ \downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ 5y^*(k+3) - 3y^*(k+2) = 10u^*(k+1) + 10u^*(k) \end{gathered}$$

Traslando all'indietro di tre passi ed assumendo $y^*(k) = 0, u^*(k) = 0$ per $k < 0$ otteniamo:

$$y^*(k) = \frac{3}{5}y^*(k-1) + 2u^*(k-2) + 2u^*(k-3)$$

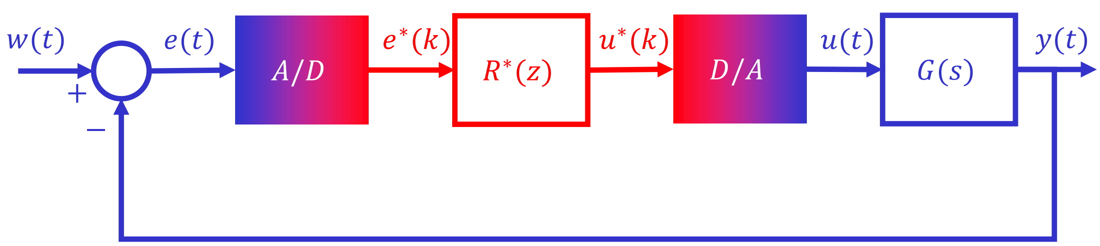
Esercizio 7

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

Punto 1: Si progetti un controllore PI digitale con $\omega_c = 10\frac{rad}{sec}$ utilizzando lo schema di progettazione a campionamento dell'errore e adottando un metodo di discretizzazione appropriato. Si scelga inoltre un tempo di campionamento T_s adeguato.

Lo schema di progettazione a campionamento dell'errore è:



Progettiamo il controllore digitale mediante discretizzazione di un adeguato regolatore a tempo continuo. La struttura del controllore proposta (regolatore PI) è:

$$R(s) = K_I \frac{1+sT_I}{s}$$

La funzione di trasferimento d'anello è:

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) \\ &= K_I \frac{1+sT_I}{s} \frac{1}{1+s} \end{aligned}$$

Cancellando il polo di $G(s)$ con lo zero del regolatore, ovvero ponendo $T_I = 1$, otteniamo:

$$L(s) = \frac{K_I}{s}$$

E' possibile ricavare analiticamente la pulsazione critica ω_c:

$$|L(j\omega_c)| = 1$$

$$\left|\frac{K_I}{j\omega_c}\right| = 1$$
$$\omega_c = K_I$$

Di conseguenza, scegliendo $K_I = 10$ otteniamo la pulsazione critica desiderata. Il regolatore ottenuto è quindi:

$$R(s) = 10\frac{1+s}{s}$$

Discretizziamo il regolatore utilizzando un metodo di integrazione appropriato, ad esempio Eulero all'indietro $s \to \frac{1}{T_s}\frac{z-1}{z}$:

$$\begin{aligned}
R^*(z) &= 10\frac{1+\frac{1}{T_s}\frac{z-1}{z}}{\frac{1}{T_s}\frac{z-1}{z}} \\
&= 10T_s\frac{z+\frac{1}{T_s}z-\frac{1}{T_s}}{z-1} \\
&= 10T_s\frac{\frac{1}{T_s}\left(T_sz+z-1\right)}{z-1} \\
&= 10\frac{\left(T_s+1\right)z-1}{z-1}
\end{aligned}$$

Per la scelta del tempo di campionamento da adottare, possiamo fare le seguenti considerazioni:

- dobbiamo rispettare il teorema di campionamento per avere una corretta ricostruzione del segnale a tempo continuo a partire dai suoi campioni. Definiamo la pulsazione di Nyquist come:

  $$\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$$

  dove $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ (pulsazione di campionamento). Dal teorema del campionamento, per avere ricostruzione perfetta del segnale, è necessario che

  $$\omega_N > \omega_{max}$$

  dove ω_{max} è la pulsazione massima del segnale campionato. Nel caso di sistemi in anello chiuso, si considera come pulsazione massima dei relativi segnali la pulsazione critica, ovvero $\omega_{max} = \omega_c$. Di conseguenza, la condizione diventa:

  $$\begin{gathered}
  \omega_N > \omega_c \\
  \downarrow \\
  \omega_s > 2\omega_c
  \end{gathered}$$

  In genere, è consigliato rispettare questa disuguaglianza con un po' di margine.

- Spesso, risulta inopportuno scegliere tempi di campionamento eccessivamente bassi (rispetto alle dinamiche di interesse) per evitare dei costi elevati per i dispositivi elettronici quali i convertitori A/D e D/A.

Una buona regola empirica per la scelta della pulsazione di campionamento ω_s è:

$$\alpha\omega_c \leq \omega_s \leq 10\alpha\omega_c, \quad \alpha = 5 \div 10$$

Scegliendo ad esempio $\alpha = 5$ otteniamo:

$$50\frac{rad}{sec} \leq \omega_s \leq 500\frac{rad}{sec}$$

Una possibile pulsazione di campionamento è $\omega_s = 100\pi \frac{rad}{sec}$, da cui:

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{2\pi}{\omega_s} \\ &= \frac{2\pi}{100\pi} \\ &= 2 \cdot 10^{-2} sec \end{aligned}$$

Approfondimento: Una volta scelta la forma del controllore ed aver applicato un metodo di discretizzazione, è necessario "trasformare" la funzione di trasferimento così ottenuta in linee di codice implementabili in un qualsiasi linguaggio di programmazione. Consideriamo ad esempio un controllore PI generico (a tempo continuo):

$$R(s) = K_I \frac{1 + sT_I}{s}$$

Spesso, nell'implementazione di regolatori PID, risulta opportuno distinguere le tre azioni (proporzionale, integrale e derivativa). Di conseguenza, conviene considerare la seguente funzione di trasferimento equivalente:

$$R(s) = K_P + \frac{K_I}{s}, \quad K_P = K_I T_I$$

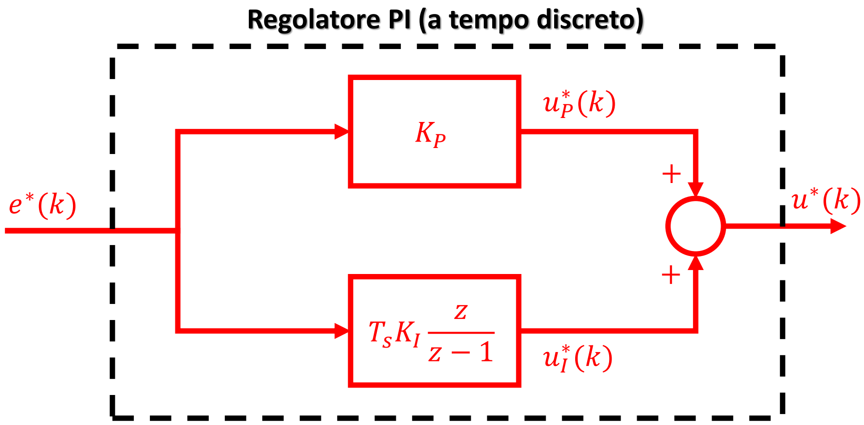
Effettuiamo una discretizzazione adottando il metodo di Eulero all'indietro $s \to \frac{1}{T_s}\frac{z-1}{z}$:

$$\begin{aligned} R^*(z) &= K_P + \frac{K_I}{\frac{1}{T_s}\frac{z-1}{z}} \\ &= \underbrace{K_P}_{\text{Parte proporzionale}} + \underbrace{T_s K_I \frac{z}{z-1}}_{\text{Parte integrale}} \end{aligned}$$

Distinguiamo l'azione proporzionale $u_P^*(k)$ e quella integrale $u_I^*(k)$:

$$\begin{aligned} U_P^*(z) &= K_P E^*(z) \\ U_I^*(z) &= T_s K_I \frac{z}{z-1} E^*(z) \\ U^*(z) &= U_P^*(z) + U_I^*(z) \end{aligned}$$

dove $e^*(k)$ è l'errore in ingresso al controllore.
Lo schema a blocchi corripondente è (PI in forma parallela):



Le istruzioni di codice di un regolatore PI sono semplicemente le equazioni ricorsive delle espressioni di cui sopra:

$$
\begin{aligned}
u_P^*(k) &= K_P e^*(k) \\
u_I^*(k) &= u_I^*(k-1) + T_s K_I e^*(k) \\
u^*(k) &= u_P^*(k) + u_I^*(k)
\end{aligned}
$$