## PREMESSA 1 – Ripasso di calcolo matriciale

**Si consideri una matrice quadrata reale $A$ di dimensione $n \times n$.**

### Inversione di matrice

1) Il **determinante di una matrice quadrata** può essere calcolato applicando il **teorema di Laplace**

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_{ij} \quad con\ i\ qls$$

oppure, ugualmente

$$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}k_{ij} \quad con\ j\ qls$$

dove $a_{ij}$ è l'elemento di $A$ nella riga $i$-esima e nella colonna $j$-esima $A$ e $k_{ij}$ è il complemento algebrico dell'elemento $a_{ij}$. Nel primo caso si sceglie una riga qualsiasi per eseguire il calcolo ("sviluppo per riga"); nel secondo caso si sceglie una colonna qualsiasi ("sviluppo per colonna").

Il complemento algebrico $k_{ij}$ dell'elemento $a_{ij}$ è dato da

$$k_{ij} = (-1)^{i+j} detA^{-}$$

dove $A^{-}$ è la matrice quadrata di dimensione $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene cancellando la $i$-esima riga e la $j$-esima colonna della matrice $A$.

**Proprietà** – Il determinante di uno scalare è lo scalare stesso

**Proprietà** – Il determinante di una matrice $2 \times 2$ è la differenza tra il prodotto dei due elementi sulla diagonale principale e il prodotto dei due elementi sulla diagonale secondaria

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$detA = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2) Condizione necessaria e sufficiente perché $\boldsymbol{A}$ **sia invertibile**, cioè che esista $A^{-1}$ tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, con $I$ matrice identità di dimensione $n \times n$, è che essa sia non singolare, cioè $detA \neq 0$.

3) Si ha che

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} K$$

dove $K$ è la matrice dei complementi algebrici degli elementi della trasposta di $A$.

**Proprietà** – L'inversa di una matrice $2 \times 2$ si calcola moltiplicando l'inverso del determinante della matrice per la matrice che si ottiene scambiando di posto gli elementi sulla diagonale principale e cambiando di segno gli elementi sulla diagonale secondaria

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

**ESEMPIO**

***Calcolare il determinante della matrice***

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

Usando la prima riga si ha

$$detA = -2det\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 3(-1)det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 4 - 21 = -17$$

**ESEMPIO**

***Calcolare l'inversa della matrice***

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

Per prima cosa è necessario verificare che non sia singolare

$$detA = -det\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 2 - 7 = -5 \neq 0$$

Calcoliamo la trasposta di $A$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo i complementi algebrici degli elementi di $A^T$

$$k_{11} = (-1)^{1+1}det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -2$$

$$k_{12} = (-1)^{1+2}det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -3$$

$$k_{13} = (-1)^{1+3}det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$k_{21} = (-1)^{2+1}det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -7$$

$$k_{22} = (-1)^{2+2}det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -3$$

$$k_{23} = (-1)^{2+3}det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$k_{31} = (-1)^{3+1}det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$k_{32} = (-1)^{3+2}det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

$$k_{33} = (-1)^{3+3}det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1$$

Quindi

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -7 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ed infine

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} K = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -7 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

## Autovalori ed autovettori

4) Si definisce **polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$** il polinomio $\varphi(s)$ di grado $n$ nella variabile complessa $s$ che si ottiene calcolando

$$\varphi(s) = det(sI - A)$$

5) Si definisce **equazione caratteristica di $\boldsymbol{A}$** la seguente equazione nell'incognita complessa $s$, che si ottiene uguagliando a zero il polinomio caratteristico

$$det(sI - A) = 0$$

6) Si definiscono **autovalori di $\boldsymbol{A}$** le $n$ soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda_i$ con $i = 1, .., n$.

   **Proprietà** - Dal momento che la matrice $A$ è reale, gli autovalori sono reali o coppie di valori complessi coniugati.

   **Proprietà**

$$detA = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

7) Si definisce traccia della matrice $A$ la somma degli elementi sulla diagonale principale, cioè

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

   **Proprietà**

$$trA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

8) Si definisce **autovettore $\boldsymbol{v_i}$ associato all'autovalore $\boldsymbol{\lambda_i}$ della matrice $\boldsymbol{A}$** la soluzione dell'equazione

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

   **Proprietà** – Se gli autovalori $\lambda_i$ di $A$ sono reali e distinti allora gli autovettori $v_i$ ad essi associati sono linearmente indipendenti (condizione solo sufficiente). In questo caso, sia $M$ la matrice quadrata che si ottiene affiancando gli autovettori. Essa sarà invertibile, dal momento che gli autovettori sono linearmente indipendenti. Si ha che

$$\tilde{A} = M^{-1} A M$$

   dove $\tilde{A}$ è una matrice diagonale che ha gli stessi autovalori di $A$, detta anche la "diagonalizzata" di $A$.

**ESEMPIO**

**Calcolare gli autovettori $v_i$ associati agli autovalori $\lambda_i$ della matrice**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-4} \end{bmatrix}$$

Per calcolare gli autovalori si deve risolvere l'equazione $det(sI - A) = 0$.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = det(sI - A) = det \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} = (s+2)(s+4) - 3 = s^2 + 6s + 5$$

Risolvendo $s^2 + 6s + 5 = 0$ si ottengono gli autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -5$.

Per calcolare gli autovettori $v_i$ associati agli autovalori $\lambda_i$ bisogna risolvere le equazioni $Av_i = \lambda_i v_i$ con $i = 1,2$.

Sia $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$.

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\alpha + 3\beta = -\alpha \\ \alpha - 4\beta = -\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 3\beta \\ \alpha = 3\beta \end{cases}$$

Il sistema è (giustamente) indeterminato e possiamo scegliere a piacere la variabile $\beta$ e calcolare la variabile $\alpha$ corrispondente.

Scegliendo $\beta = 1$ si ha

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Similmente a prima, sia $v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_2 = -5$.

$$Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\alpha + 3\beta = -5\alpha \\ \alpha - 4\beta = -5\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = -\beta \end{cases}$$

Scegliendo $\beta = 1$ si ha

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dato che gli autovalori sono reali e distinti, gli autovettori devono essere linearmente indipendenti. Ciò può essere facilmente mostrato verificando che la matrice $M = [v_1 \quad v_2]$ è non singolare (cioè ha determinante diverso da 0).

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$detM = 3 + 1 = 4 \neq 0$$

Possiamo anche verificare che vale la proprietà $\tilde{A} = M^{-1}AM$ dove $\tilde{A}$ è la "diagonalizzata".

Quindi

$$M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = M^{-1}AM = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

**ESEMPIO**

***Calcolare gli autovettori della matrice***

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Per calcolare gli autovalori si deve risolvere l'equazione $det(sI - A) = 0$.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-3 & -2 & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = det(sI - A) = det\begin{bmatrix} s-3 & -2 & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s-1)det\begin{bmatrix} s-3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = (s-1)(s^2 - 3s + 2)$$
$$= (s-1)^2(s-2)$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 2 ed $\lambda_2 = 2$.

Per calcolare gli autovettori $v_i$ associati agli autovalori $\lambda_i$ bisogna risolvere le equazioni $Av_i = \lambda_i v_i$ con $i = 1{,}2$.

Sia $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ l'autovettore associato all'autovalore doppio $\lambda_1 = 1$.

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = \alpha \\ -\alpha = \beta \\ \gamma = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = -\beta \\ \gamma = \gamma \end{cases}$$

Il sistema è (giustamente) indeterminato e possiamo scegliere a piacere due coppie di valori $\beta, \gamma$ e calcolare la variabile $\alpha$ corrispondente.

Scegliendo $\beta = 1, \gamma = 0$ si ha

$$v_{11} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scegliendo $\beta = 0, \gamma = 1$ si ha

$$v_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In corrispondenza di questo autovalore doppio ho trovato due autovettori linearmente indipendenti. La molteplicità geometrica dell'autovalore è quindi uguale alla sua molteplicità algebrica.

Similmente a prima, sia $v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_2 = 2$.

$$Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 2\alpha \\ -\alpha = 2\beta \\ \gamma = 2\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \alpha = -2\beta \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Scegliendo $\beta = 1$ si ha

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso non ho autovalori distinti ma, calcolando gli autovettori ho ottenuto 3 autovettori linearmente indipendenti. Posso quindi costruire la matrice $M = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$ non singolare e quindi invertibile.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$detM = -1 \neq 0$$

Possiamo anche verificare che vale la proprietà $\tilde{A} = M^{-1}AM$ dove $\tilde{A}$ è la "diagonalizzata".

Quindi

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**ESEMPIO**

***Calcolare gli autovettori della matrice***

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Per calcolare gli autovalori si deve risolvere l'equazione $det(sI - A) = 0$.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-4 & 4 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = det(sI - A) = det \begin{bmatrix} s-4 & 4 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s(s-4) + 4 = s^2 - 4s + 4 = (s-2)^2$$

Si ha quindi un autovalore doppio $\lambda_1 = 2$.

Sia $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_1 = 2$.

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4\alpha - 4\beta = 2\alpha \\ \alpha = 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \alpha = 2\beta \end{cases}$$

Il sistema è indeterminato e possiamo scegliere a piacere la variabile $\beta$ e calcolare la variabile $\alpha$ corrispondente.

Scegliendo $\beta = 1$ si ha

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In questo caso troviamo un solo autovettore in corrispondenza di un autovalore doppio. Ciò significa che la molteplicità geometrica di questo autovalore è 1 ed è diversa dalla molteplicità algebrica che è 2. La matrice non è quindi diagonalizzabile.

## Altre proprietà delle matrici

1) Si consideri una matrice $n \times m$ i cui elementi sono funzioni reali del tempo $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & f_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

La **derivata rispetto al tempo della matrice $F(t)$** è una matrice con le stesse dimensioni ed i cui elementi sono le derivate rispetto al tempo degli elementi di $F(t)$ (supponendo derivabili gli elementi)

$$\dot{F}(t) = \begin{bmatrix} \dot{f}_{11}(t) & \cdots & \dot{f}_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{f}_{n1}(t) & \cdots & \dot{f}_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

con $\dot{f}_{ij}(t) = \frac{df_{ij}(t)}{dt}$.

Similmente l'**integrale della matrice $F(t)$** è una matrice con le stesse dimensioni ed i cui elementi sono gli integrali degli elementi di $F(t)$ (supponendo integrabili gli elementi)

$$\int_0^t F(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^t f_{11}(\tau)d\tau & \cdots & \int_0^t f_{1m}(\tau)d\tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^t f_{n1}(\tau)d\tau & \cdots & \int_0^t f_{nm}(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

dove $\tau$ indica la variabile di integrazione.

**ESEMPIO**

***Sia***

$$\boldsymbol{F(t)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{5e^{2t}} \\ \boldsymbol{t^2 + 2} \\ \boldsymbol{sin(t)} \end{bmatrix}$$

***Calcolare $\dot{F}(t)$ e $\int_0^t F(\tau)d\tau$***

Il risultato è immediato

$$\dot{F}(t) = \begin{bmatrix} 10e^{2t} \\ 2t \\ cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t F(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \left[\frac{5}{2}e^{2\tau}\right]_0^t \\ \left[\frac{1}{3}\tau^3 + 2\tau\right]_0^t \\ [-cos(\tau)]_0^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{3}t^3 + 2t \\ 1 - cos(t) \end{bmatrix}$$

2) Si consideri un vettore di dimensione $n$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si consideri anche una funzione vettoriale del vettore $\mathbf{x}$ di dimensione $m$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

La derivata di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ rispetto a $\mathbf{x}$ (**derivata di un vettore rispetto a un vettore**) è una matrice $m \times n$ sulla cui $i$-esima riga compaiono le derivate della componente $f_i$ rispetto a tutte le componenti di $\mathbf{x}$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Questa matrice ha $m$ righe ed $n$ colonne.

**ESEMPIO**

***Si consideri il vettore $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e la funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^2 \\ sin(x_1) \\ x_1e^{x_2} \end{bmatrix}$.***

***Calcolare la derivata di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ rispetto ad $\mathbf{x}$.***

La matrice $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ avrà tante righe quante sono le componenti di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e tante colonne quante sono le componenti di $\mathbf{x}$, rispetto a cui le componenti di $\mathbf{f}$ andranno derivate.

Quindi

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2x_2 \\ cos(x_1) & 0 \\ e^{x_2} & x_1e^{x_2} \end{bmatrix}$$

## PREMESSA 2 – Calcolo della soluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Questa è un'introduzione a degli strumenti di calcolo per gli studenti informatici che non hanno ancora affrontato il tema nella sede preposta ed adeguata (i corsi di Matematica).

Un'equazione differenziale è un'equazione funzionale, cioè un'equazione in cui l'incognita è una funzione, in cui l'incognita compare anche con le proprie derivate.

Nell'ambito di questo corso, inizialmente, considereremo sempre funzioni reali del tempo $t \in \mathbb{R}$, per esempio $x(t)$. Quindi, parlando di derivate, intendiamo sempre la derivazione rispetto all'unica variabile indipendente, il tempo.

**Esempio 1**

Un esempio di semplice equazione differenziale è la seguente

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

Essa è un'equazione differenziale del primo ordine, perché l'incognita compare al più con la propria derivata prima.

Una possibile soluzione è $x(t) = e^t$. Infatti $\dot{x}(t) = e^t = x(t)$.

Però anche $x(t) = 2e^t$ è una soluzione. Infatti $\dot{x}(t) = 2e^t = x(t)$.

E' facile intuire che la soluzione è una famiglia di funzioni,

$$x(t) = Ce^t$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Se desidero trovare una specifica soluzione all'interno di questa famiglia, devo imporre una condizione caratterizzante quella specifica soluzione. Per esempio, posso imporre il suo valore in un certo istante di tempo, per esempio a $t = 0$. Imponendo $x(0) = x_0$ potrò calcolare uno specifico valore di $C$ ed ottenere quell'unica soluzione che al tempo $t = 0$ vale $x_0$.

Per esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione. Infatti, la soluzione generale è, come visto, $x(t) = Ce^t$. Imponendo la condizione $x(0) = 3$ si ha $x(0) = Ce^0 = 3$ da cui si ha $C = 3$.

Quindi la soluzione del problema di questo esempio è $x(t) = 3e^t$.

**Esempio 2**

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 0$$

è un esempio di equazione differenziale del secondo ordine, poiché l'incognita $y(t)$ compare al più con la derivata seconda.

Non è immediato trovare una possibile soluzione e tanto meno una famiglia di possibili soluzioni.

Però è possibile, nei casi considerati nell'ambito di questo corso, ricondurre un'equazione differenziale del secondo ordine ad un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine.

Basta definire

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

ed è possibile scrivere

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

che deriva direttamente dalle definizioni date.

Inoltre, osservando che

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t)$$

si può riscrivere l'equazione di partenza come

$$\dot{x}_2(t) + x_2(t) + x_1(t) = 0$$

Quindi si può scrivere

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

che è appunto un sistema di due equazioni del primo ordine.

Inoltre, similmente all'esempio precedente, per scegliere una soluzione all'interno della famiglia di soluzioni che risolvono il sistema di equazioni, devo imporre una condizione per ciascuna incognita.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

è un problema che ammette una ed una soluzione che per comodità raggruppo in vettore

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, t \geq 0$$

**Esempio 3**

Se portando a sinistra del segno uguale tutti i termini contenenti l'incognita e le sue derivate, a destra dell'uguale resta 0, allora l'equazione si dice **omogenea**.

Per esempio

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

si può scrivere

$$\dot{x}(t) - x(t) = 0$$

e quindi è un'equazione omogenea.

Similmente

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 0$$

è un'equazione omogenea.

Invece

$$\dot{x}(t) - 2x(t) = e^t$$

$$\dot{x}(t) + x(t) = sin(2t)$$

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 3y(t) = 2t$$

sono equazioni non omogenee per la presenza di una funzione del tempo $t$ a destra dell'uguale, una volta trasferiti a sinistra tutti i termini contenenti l'incognita e le sue derivate.

**Soluzione di equazioni differenziali lineari del primo ordine**

La più generale forma di un'equazione differenziale lineare del primo ordine nell'incognita $x(t)$ è la seguente

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + u(t)$$

Per questa equazione esiste una soluzione analitica:

$$x(t) = e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}\left(\int_0^t u(\tau)e^{-\int_0^\tau a(\eta)d\eta}d\tau + C\right)$$

Ovviamente questa espressione rappresenta una famiglia di soluzioni ed imponendo una condizione su $x(t)$ si potrà ottenere una particolare soluzione.

In realtà questo problema è più di quel che ci serve. A noi interessano, nell'ambito di questo corso, equazioni differenziali lineari del primo ordine a **coefficienti costanti**, cioè

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{a}x(t) + u(t)$$

Quindi, se $a(t) = a$ costante, si ha che

$$\int_0^t a(\tau)d\tau = \int_0^t a d\tau = at$$

Quindi la precedente soluzione diventa

$$x(t) = e^{at}\left(\int_0^t u(\tau)e^{-a\tau}d\tau + C\right)$$

Se imponiamo una condizione iniziale, $x(0) = x_0$ avremo

$$x(0) = e^0\left(\int_0^0 u(\tau)e^{-a\tau}d\tau + C\right) = x_0$$

cioè

$$C = x_0$$

Quindi la soluzione particolare, ottenuta imponendo la condizione $x(0) = x_0$ è

$$x(t) = e^{at}\left(\int_0^t u(\tau)e^{-a\tau}d\tau + x_0\right) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

Concludendo, il problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione data da

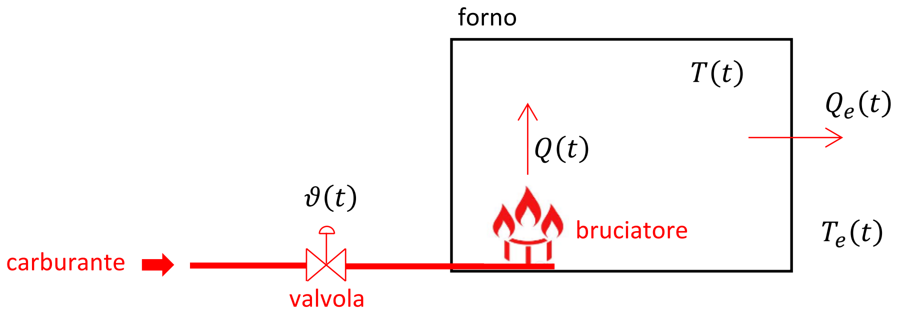
$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

Tale problema, vedremo, è generalizzabile a sistemi di equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti.

# Esempi di modellistica di sistemi dinamici

## Modello di un forno

Si consideri un forno, schematizzato nella seguente figura.




Un bruciatore, alimentato mediante una valvola, immette calore nel forno. Agendo sull'apertura della valvola mediante la variabile $\vartheta(t)$, si modula la quantità di calore $Q(t)$ immessa nel forno. In particolare, si ha che

$$Q(t) = \alpha\vartheta(t)$$

dove $\alpha > 0$ è una costante reale.

Introducendo calore nel forno se ne modifica la temperatura $T(t)$.

Il forno non è perfettamente isolato e disperde una parte $Q_e(t)$ del proprio calore nell'ambiente esterno che si trova ad una temperatura $T_e(t)$, sempre inferiore alla temperatura del forno. Supponiamo che lo scambio di calore con l'esterno sia regolato da questa equazione

$$Q_e(t) = k\big(T(t) - T_e(t)\big)$$

dove $k > 0$ è una costante reale.

Per avere un modello di questo sistema, possiamo scrivere un'**equazione di conservazione dell'energia interna**.

L'energia interna del forno è

$$U(t) = cT(t)$$

dove $c$ è la sua capacità termica.

Quindi la variazione dell'energia interna è data dalla differenza tra il calore entrante $Q(t)$ ed il calore uscente $Q_e(t)$.

$$\frac{dU(t)}{dt} = Q(t) - Q_e(t)$$

Sostituendo le espressioni precedenti si ha

$$c\frac{dT(t)}{dt} = \alpha\vartheta(t) - k\big(T(t) - T_e(t)\big)$$

che possiamo scrivere

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{k}{c}T(t) = \frac{\alpha}{c}\vartheta(t) + \frac{k}{c}T_e(t)$$

- ✓ $T(t)$ è la variabile di stato $x(t)$ (ed anche l'uscita $y(t)$ del sistema, la variabile controllata)
- ✓ $\vartheta(t)$ è un ingresso $u_1(t)$ ed in particolare è l'azione di controllo
- ✓ $T_e(t)$ è un ingresso $u_2(t)$ ed in particolare un disturbo (e quindi, volendo, potremmo chiamarlo $d(t)$).

Sostituendo si ha

$$\dot{x}(t) = -\frac{k}{c}x(t) + \frac{\alpha}{c}u_1(t) + \frac{k}{c}u_2(t)$$

Si ha quindi che

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\mathbf{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

dove

$$A = -\frac{k}{c}$$

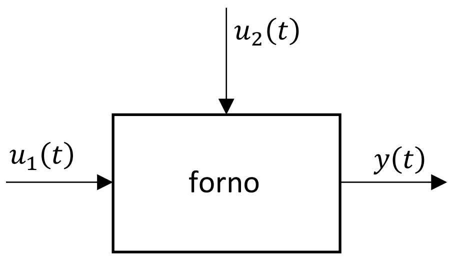
$$B = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{c} & \frac{k}{c} \end{bmatrix}$$

$$C = 1$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con

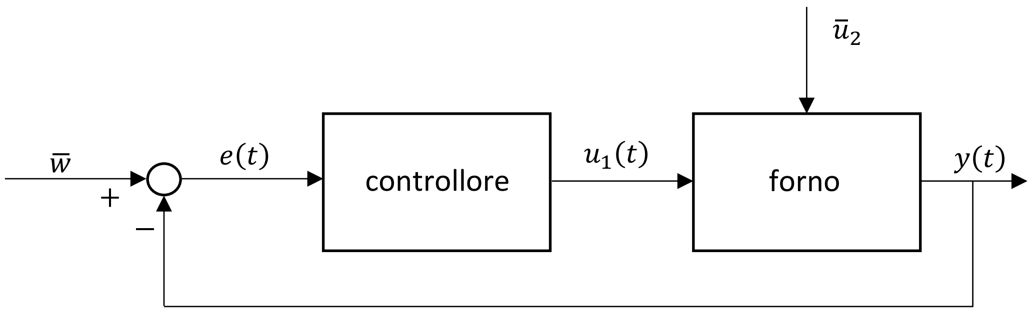
$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$



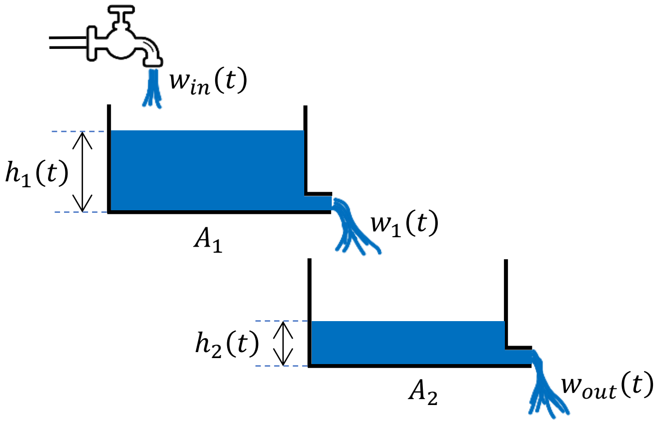

Si osservi che si tratta di un sistema lineare tempo invariante, del primo ordine, MISO (con 2 ingressi ed un'uscita), strettamente proprio.

Si può definire un (ovvio) obiettivo di controllo. Mantenere costante la temperatura $y(t)$ del forno ad un valore assegnato $\overline{w}$ costante, agendo sull'apertura della valvola del carburante $u_1(t)$ ed a fronte di una temperatura esterna $\overline{u}_2$ costante non nota.

Tale obiettivo di controllo può essere perseguito mediante una strategia in anello chiuso.




**Modello di serbatoi in cascata**




Scriviamo due equazioni di conservazione del volume, una per ciascun serbatoio.

*Serbatoio 1*

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = w_{in}(t) - w_1(t)$$

*Serbatoio 2*

$$A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = w_1(t) - w_{out}(t)$$

Supponiamo che la portata in uscita dai serbatoi sia proporzionale alla radice quadrata del livello di liquido contenuto, cioè

*Serbatoio 1*

$$w_1(t) = \alpha_1 \sqrt{h_1(t)}$$

*Serbatoio 2*

$$w_{out}(t) = \alpha_2 \sqrt{h_2(t)}$$

Questo sistema ha due variabili di stato, i due livelli nei serbatoi, e un ingresso (azione di controllo), la portata in ingresso nel primo serbatoio.

Per l'uscita possiamo fare diverse scelte, a seconda di quello che è il nostro obiettivo di controllo. Per esempio, possiamo scegliere come variabile di uscita (variabile controllata) la portata in uscita dal secondo serbatoio, oppure, per esempio, il volume di liquido totale contenuto nei due serbatoi o anche separatamente entrambi i livelli nei due serbatoi.

Quindi lo stato è

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

L'ingresso è

$$u(t) = w_{in}(t)$$

L'uscita, nel primo caso è

$$y(t) = w_{out}(t) = \alpha_2\sqrt{h_2(t)} = \alpha_2\sqrt{x_2(t)}$$

Nel secondo caso

$$y(t) = A_1 h_1(t) + A_2 h_2(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)$$

Nel terzo caso

$$\mathbf{y}(t) \equiv \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Possiamo scrivere quindi le equazioni di stato

$$\begin{cases} A_1\dot{x}_1(t) = u(t) - \alpha_1\sqrt{x_1(t)} \\ A_2\dot{x}_2(t) = \alpha_1\sqrt{x_1(t)} - \alpha_2\sqrt{x_2(t)} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{\alpha_1}{A_1}\sqrt{x_1(t)} + \dfrac{1}{A_1}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{\alpha_1}{A_2}\sqrt{x_1(t)} - \dfrac{\alpha_2}{A_2}\sqrt{x_2(t)} \end{cases}$$

A queste equazioni di stato possiamo associare, come visto prima, diverse variabili di uscita (variabili controllate):

Nel primo caso il sistema è il seguente

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{\alpha_1}{A_1}\sqrt{x_1(t)} + \dfrac{1}{A_1}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{\alpha_1}{A_2}\sqrt{x_1(t)} - \dfrac{\alpha_2}{A_2}\sqrt{x_2(t)} \\ y(t) = \alpha_2\sqrt{x_2(t)} \end{cases}$$

Nel secondo caso

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{\alpha_1}{A_1}\sqrt{x_1(t)} + \dfrac{1}{A_1}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{\alpha_1}{A_2}\sqrt{x_1(t)} - \dfrac{\alpha_2}{A_2}\sqrt{x_2(t)} \\ y(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) \end{cases}$$

In entrambi i casi si tratta di un sistema non lineare, tempo invariante, del secondo ordine, strettamente proprio e SISO.

Nel terzo caso

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{\alpha_1}{A_1}\sqrt{x_1(t)} + \dfrac{1}{A_1}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{\alpha_1}{A_2}\sqrt{x_1(t)} - \dfrac{\alpha_2}{A_2}\sqrt{x_2(t)} \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

In questo caso si tratta di un sistema non lineare, tempo invariante, del secondo ordine, strettamente proprio e SIMO, perchè l'uscita non è scalare.

In tutti e tre i casi il problema di controllo si può descrivere con il seguente schema a blocchi (avendo cura di ricordare che nel terzo caso l'uscita è vettoriale)