閉区間上の連続関数が上界を持つことの証明

田尻翔平

2024 年 5 月 7 日

この間の数学ラボにおける発表の際に, 選択公理無しで証明できると田尻が言っていた定理についてですが, あの場で行った説明だと不都合があることに気づきましたので, 改めて正しい証明の流れを説明します. 選択公理無しで証明できるということに変わりはありません.

まず, 示したい定理は以下の通りでした.

定理 0.1. $a, b \in \mathbb{R}$ とする. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続関数であるとする. このとき, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall x \in [a, b](f(x) < M)$ である.

この定理は感覚的にはさほど自明じゃないことにも気をつけてください. 例えば長いサインカーブを考えて, 周期を指数関数的に狭めていき, 振幅を指数関数的に強めていくような関数を考えると, 区間の長さのわりに上界はとんでもなく大きい連続関数が作れます. それこそ関数の一部を見ると上界が無いかのように錯覚する人もいるかもしれません.

話を戻しまして, 示したい定理の前に, 次の事実を認めましょう.

補題 0.2. $a, b \in \mathbb{R}$ とする. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続関数であるとする. $M \in \mathbb{N}$ と $x \in [a, b]$ が存在して, $M < f(x)$ が成立しているとする. このとき, ある $y \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ について $M < f(y)$ である.

x がもともと有理数ならそれでよし, x が無理数だった場合は, そこに十分近い有理数 y で $f(x)$ と値がそこまで違わない $f(y)$ を返すものがある, ということです. 関数の連続性から言えることです. (証明略)

それでは本題の証明を始めます.

定理*0.1*の証明. $a, b \in \mathbb{R}$ とする. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続関数であるとする. 示したいことに反して, $\forall M \in \mathbb{N} \exists x \in [a, b](f(x) \geq M)$ だったと仮定する. このとき, $\forall M \in \mathbb{N} \exists x \in [a, b](f(x) > M)$ でもあることに注意しよう. (証明略)

次に使うことの準備のために, $\mathbb{Q}$ は可算であるので, $\mathbb{Q}$ の整列順序を一つとり, $\leq_{\mathbb{Q}}$ とおくことにする. つまり, 数列 $\mathbb{Q} = \langle z_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ とみなそうということである. (こういうことができることについては証明略) $\leq_{\mathbb{Q}}$ は $\forall m, n \in \mathbb{N}(m \leq n \longleftrightarrow z_m \leq_{\mathbb{Q}} z_n)$ という条件を満たしていて, それによって定義されると考えてもよい.

話を戻す. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $Q_n = \{q \in [a, b] \cap \mathbb{Q} : f(q) > n\}$ とおく. 仮定と補題0.2により, $\forall n \in \mathbb{N}(Q_n \neq \emptyset)$ である. このとき, 一般には $\prod_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ が空でないことを言うためには選択公理が必要となるが, 今回については不要である. 各 Q_n には $\leq_{\mathbb{Q}}$ の意味で最小になる元が存在しているため, それを使って選択をすればよいからである.

具体的な話を続ける．$\forall n \in \mathbb{N}(Q_n \neq \emptyset)$ であるので，各 $n \in \mathbb{N}$ について，Q_n の $\leq_{\mathbb{Q}}$ における最小元を $g(n)$ とすることで関数 $g : \mathbb{N} \longrightarrow [a,b] \cap \mathbb{Q}$ を定める．（通常の実数の大小関係による順序ではこのようなことができる保証はないことに注意されたい．そしてこの g というのが，先述の $\prod_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ が空でないことの証拠である.）

今，各 $n \in \mathbb{N}$ について，$g(n) \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \wedge f(g(n)) > n$ が成り立っていることに注意しよう．数列 $\langle g(n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ は有界閉区間 $[a,b]$ 内の数列なので，収束する部分列をもつ (ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理.) つまり，狭義単調増加な数列 $\langle h(n) \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\rangle$ が存在して，$\langle g(h(n)) : n \in \mathbb{N}\rangle$ は収束する．なので，このような h をとって固定する．

さて，ここで数列 $\langle g(h(n)) : n \in \mathbb{N}\rangle \subset [a,b] \cap \mathbb{Q}$ は収束するので，その収束先を q_ω とおく．$[a,b]$ は閉区間であるため，$q_\omega \in [a,b]$ である．(余談ではあるが q_ω 自体が有理数になるかは不明であることには注意されたい.) ここで，$f(q_\omega)$ の値を考えてみよう．$f(q_\omega)$ の値は定義済みのはずであり，十分に大きい $M \in \mathbb{N}$ によって，$f(q_\omega) < M$ となる．この M をとっておく．さらに，f が連続であって，q_ω が数列 $\langle g(h(n)) : n \in \mathbb{N}\rangle$ の収束先なので，ある $N \in \mathbb{N}$ について，$\forall n > N(f(g(h(n))) < M)$ とできる．この N をとっておく．さて，h は狭義単調増加な関数であったので，$n > N \wedge h(n) > M$ となる十分大きい $n \in \mathbb{N}$ が存在するのでそれを一つとる．今，$f(g(h(n))) < M < h(n)$ が成立している．一方で $Q_{h(n)}$ の定め方により，$f(g(h(n))) > h(n)$ であり，これは矛盾している．よって背理法の仮定は間違っていて，示したい事柄が成立していることが分かった． □ 定理0.1