人間ピラミッドの数理
宮永問題

August 23, 2024

資料紹介兼問題設定

とりあえず, 次の資料に目を通してください.

https://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/math/artpyramid.pdf

今回はこの資料に書いてある宮永予想について検討します.

「数学好きな高校生なら解ける問題」などと吹かされてますが, そんなことはないと思います.

問題の定式化

宮永予想

$p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq p$ とする.
このとき, $[p, m] \in \mathbb{N}$ を次のルールで定める.

- $[0, 0] = 0.$
- $[p, 0] = [p-1, 0] + 2^{p-1}.$
- $0 < m < p$ であるとき,
  $[p, m] = [p-1, m-1] + 2^{p-1} + [p-1, m] + 2^{p-1}.$
- $[p, p] = [p-1, p-1] + 2^{p-1}.$

このとき,
p が 3 以上の素数の場合 $[p-1, *]$ は p で割り切れる.

つまり，こんな状態

$$[0,0]=0$$

$$[1,0]=1 \qquad [1,1]=1$$

$$[2,0]=3 \qquad [2,1]=6 \qquad [2,2]=3$$

$$[3,0]=7 \qquad [3,1]=17 \qquad [3,2]=17 \qquad [3,3]=7$$

これの素数段目 ([0,0] を 1 段目として) が
その素数で割り切れる，という主張.
また，このピラミッドはパスカルの三角形の変種と言える
だろう.

まずは両端

両端についての補題

$p \geq 1$ が素数であるかどうかにかかわらず,

$$[p-1,0] = [p-1,p-1] = \sum_{k=0}^{p-2} 2^k = 2^{p-1} - 1$$

簡単なので証明は略

フェルマーの小定理 (の特別な場合)

p が 2 でない素数であるとき, $2^{p-1} \equiv 1 \mod p$

有名な定理なので証明は略

この二つにより, ピラミッドの両端, すなわち $[p-1,0]$ と $[p-1,p-1]$ は p が 2 以外の素数なら p で割り切れる.

$[p-1,1]$ の場合 - 1

p が 3 以上の素数, $0 < m < p-1$ として, $[p-1,m]$ がどうなるかを調べなければならない.

まず, $[p-1,1]$ を考える.

$$[p-1,1] = [p-2,0] + 2^{p-2} + [p-2,1] + 2^{p-2}$$
$$[p-2,1] = [p-3,0] + 2^{p-3} + [p-3,1] + 2^{p-3}$$
$$\ldots$$
$$[2,1] = [1,0] + 2^1 + [1,1] + 2^1$$
$$[1,1] = 2^1 - 1$$

$[p-1,1]$ の場合 - 2

これをまとめると, $[p-1,1] = \sum_{u=1}^{p-2}([u,0]) + \sum_{v=1}^{p-1}(2^v) - 1$

$$= \sum_{u=0}^{p-2}(2^u - 1) + \sum_{v=1}^{p-1}(2^v) - 1 = -1 - (p-1) + \sum_{u=0}^{p-2}(2^u) + \sum_{v=1}^{p-1}(2^v)$$

$$= -p + (2^{p-1} - 1) + \sum_{v=1}^{p-1}(2^v) = -p + 3(2^{p-1} - 1)$$

というわけで, $[p-1,1]$ の場合は p で割り切れることが分かった.
(素数でなくても p が 3 以上で等式自体は成立)

$[p-1,2]$ の場合 - 1

$p=3$ の場合は $[p-1,*]$ が完全に解析できたことになるので,
p が 4 以上の素数で, $[p-1,2]$ を考えてみる.

$$[p-1,2]=[p-2,1]+2^{p-2}+[p-2,2]+2^{p-2}$$
$$[p-2,2]=[p-3,1]+2^{p-3}+[p-3,2]+2^{p-3}$$
$$\ldots$$
$$[3,2]=[2,1]+2^2+[2,2]+2^2$$
$$[2,2]=2^2-1$$

$[p-1,2]$ の場合 - 2

これをまとめると, $[p-1,2] = \sum_{u=2}^{p-2}([u,1]) + \sum_{v=2}^{p-1}(2^v) - 1$

$$= \sum_{u=2}^{p-2}(-u-1+3(2^u-1)) + \sum_{v=2}^{p-1}(2^v) - 1$$

$$= -1 - 4(p-3) - p(p-3)/2 + \sum_{u=2}^{p-2}(3\cdot 2^u) + \sum_{v=2}^{p-1}(2^v)$$

$$= -1 - (p+8)(p-3)/2 - 3\cdot 2^{p-1} + \sum_{u=2}^{p-1}(4\cdot 2^u)$$

$$= -(p+8)(p-3)/2 + (2^{p-1}-1) - 8 - 4 + 4\sum_{u=0}^{p-2}(2^u)$$

$[p-1,2]$ の場合 - 3

$$[p-1,2] = -p(p+5)/2 + 5(2^{p-1}-1)$$

素数でなくてもこの等式は成立している. $p(p+5)$ が偶数なので, 確かにこの値は整数であり, 特に p が 4 以上の素数ならこの値は p で割り切れる. そしてピラミッドが左右対称である（この事実は帰納法で簡単に確かめられるので省略）ことから, $p=5$ の場合の $[p-1,*]$ は完全に解析できたことになる.

普通に一般項が判明するかもしれないが, まだ一般項を推測するための情報が足りないので, $[p-1,3]$ も計算してみよう.

$[p-1,3]$ の場合 - 1

$$[p-1,3] = \sum_{u=3}^{p-2}([u,2]) + \sum_{v=3}^{p-1}(2^v) - 1$$

$$= \sum_{u=3}^{p-2}(-(u+1)(u+6)/2 + 5(2^u-1)) + \sum_{v=3}^{p-1}(2^v) - 1$$

$$= -\sum_{u=3}^{p-2}(u+1)(u+6)/2 + \sum_{u=3}^{p-2}5(2^u-1) + 2^p - 2^3 - 1$$

$$= -\sum_{u=3}^{p-2}\frac{u^2+7u}{2} + 5\sum_{u=3}^{p-2}2^u - 8(p-4) + 2^p - 2^3 - 1$$

$$= -\sum_{u=3}^{p-2}\frac{u^2+7u}{2} + 5(2^{p-1}-2^3) - 8(p-4) + 2^p - 2^3 - 1$$

$[p-1,3]$ の場合 - 2

$$[p-1,3] = -\sum_{u=3}^{p-2}\frac{u^2+7u}{2} + 7\cdot 2^{p-1} - 8p - 17$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{(p-2)(p-1)(2p-3)}{6} - 5 + 7\frac{(p-4)(p+1)}{2}\right)$$
$$+7\cdot 2^{p-1} - 8p - 17$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2p^3-9p^2+13p-6}{6} - 5 + 7\frac{p^2-3p-4}{2}\right)$$
$$+7(2^{p-1}-1) - 8p - 10$$

$$= -\frac{p(p^2+6p+23)}{6} + 7(2^{p-1}-1)$$

$[p-1,3]$ の場合 - 3

$$[p-1,3] = -\frac{p(p^2+6p+23)}{6} + 7(2^{p-1}-1)$$

これがちゃんと整数になるのかという疑問については
$p(p^2+6p+23) \equiv_6 p(p^2-1) \equiv_6 (p-1)p(p+1)$
連続する 3 整数の積は 6 の倍数なので分数部分の分母は払えることが分かる.
また p が素数なら p 自体は 6 で割れないため, 分数部分は全体として p の倍数である整数になる.

一般項の推測と確認 - 1

$$[p-1,1] = 3(2^{p-1}-1) - p$$

$$[p-1,2] = 5(2^{p-1}-1) - \frac{p(p+5)}{2}$$

$$[p-1,3] = 7(2^{p-1}-1) - \frac{p(p^2+6p+23)}{6}$$

正の項と負の項で別の法則があるように見える.
正の項は $[p-1,m]$ に対して $(2m+1)(2^{p-1}-1)$ であろう.

一般項の推測と確認 - 2

負の項の法則が難しいが,
そもそもがパスカルの三角形関連の問題であること,
分母が階乗の形になっていること,
p が素数なら分母が p で払えず全体として p の倍数になることが期待されること,
などから, 二項係数を用いた一般項が定められるのではないかと推測する.

一般項の推測と確認 - 3

$$[p-1,0]=1(2^{p-1}-1)-0$$

$$[p-1,1]=3(2^{p-1}-1)-\binom{p}{1}$$

$$[p-1,2]=5(2^{p-1}-1)-\left(\binom{p}{2}+3\binom{p}{1}\right)$$

$$[p-1,3]=7(2^{p-1}-1)-\left(\binom{p}{3}+3\binom{p}{2}+5\binom{p}{1}\right)$$

と変形できた.

一般項の推測と確認 - 4

$$[p-1, m] = (2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{p}{m+1-i}$$

であると推測できる．この推測が正しければ，p が素数であるときは $(2^{p-1}-1)$ と $\binom{p}{m+1-i}$ が p の倍数であるから示したい主張は正しいことになる．

$[p-1, m-1]$ までこの一般項が正しいとして，$[p-1, m]$ が上記の値になることを示せばよい．

一般項の推測と確認 - 5

$$[p-1,m] = \sum_{u=m}^{p-2}([u,m-1]) + \sum_{v=m}^{p-1}(2^v) - 1$$

$$= \sum_{u=m}^{p-2}\left((2m-1)(2^u-1) - \sum_{i=1}^{m-1}(2i-1)\binom{u+1}{m-i}\right) + 2^p - 2^m - 1$$

$$= (2m-1)\sum_{u=m}^{p-2}(2^u-1) - \sum_{u=m}^{p-2}\sum_{i=1}^{m-1}(2i-1)\binom{u+1}{m-i} + 2^p - 2^m - 1$$

$$= (2m-1)(2^{p-1}-2^m) - \sum_{u=m}^{p-2}\sum_{i=1}^{m-1}(2i-1)\binom{u+1}{m-i} + 2^p - 2^m - 1 - (2m-1)(p-2-m+1)$$

一般項の推測と確認 - 6

$$[p-1,m]$$
$$= (2m-1)(2^{p-1}-2^m) - \sum_{u=m}^{p-2}\sum_{i=1}^{m-1}(2i-1)\binom{u+1}{m-i} + 2^p -$$
$$2^m - 1 - (2m-1)(p-2-m+1)$$
$$= (2m-1)(2^{p-1}) - \sum_{u=m}^{p-2}\sum_{i=1}^{m-1}(2i-1)\binom{u+1}{m-i} + 2^p - 2^m - 1 -$$
$$(2m-1)(p-1-m) - 2^m(2m-1)$$
$$= (2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{u=m}^{p-2}\sum_{i=1}^{m-1}(2i-1)\binom{u+1}{m-i} - (2m-$$
$$1)(p-1-m) - 2^m(2m) + 2m$$

一般項の推測と確認 - 7

$$
\begin{aligned}
&[p-1,m] \\
&= (2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{u=m}^{p-2}\sum_{i=1}^{m-1}(2i-1)\binom{u+1}{m-i} - (2m- \\
&1)(p-1-m) - 2^m(2m) + 2m \\
&= (2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{i=1}^{m-1}(2i-1)\sum_{u=m}^{p-2}\binom{u+1}{m-i} \\
&-(2m-1)(p-1-m) - 2^m(2m) + 2m \\
&-(2m-1)\sum_{u=m}^{p-2}\binom{u+1}{0} + (2m-1)\sum_{u=m}^{p-2}\binom{u+1}{0}
\end{aligned}
$$

一般項の推測と確認 - 8

$$
\begin{aligned}
&[p-1, m] \\
&= (2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{i=1}^{m-1}(2i-1)\sum_{u=m}^{p-2}\binom{u+1}{m-i} \\
&-(2m-1)(p-1-m) - 2^m(2m) + 2m \\
&-(2m-1)\sum_{u=m}^{p-2}\binom{u+1}{0} + (2m-1)\sum_{u=m}^{p-2}\binom{u+1}{0} \\
&= (2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{i=1}^{m}(2i-1)\sum_{u=m}^{p-2}\binom{u+1}{m-i} \\
&-2^m(2m) + 2m
\end{aligned}
$$

一般項の推測と確認 - 9

$$
\begin{aligned}
&[p-1, m] \\
&= (2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{i=1}^{m}(2i-1)\sum_{u=m}^{p-2}\binom{u+1}{m-i} - 2^m(2m) + 2m \\
&= (2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{i=1}^{m}(2i-1)(\sum_{u=m}^{p-2}\binom{u+1}{m-i} + \\
&\binom{m+1}{m-i+1} - \binom{m+1}{m-i+1}) - 2^m(2m) + 2m \\
&= {\color{red}(2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{p}{m-i+1}} \\
&+ \sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{m+1}{m-i+1} + 2m(1-2^m)
\end{aligned}
$$

一般項の推測と確認 - 10

示したい式が

$$[p-1,m]=(2m+1)(2^{p-1}-1)-\sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{p}{m+1-i}$$

だったので, 後は

$$\sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{m+1}{m-i+1}+2m(1-2^m)=0$$

を示せばよい. まず,

$$\sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{m+1}{m-i+1}=\sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{m+1}{i}$$

である. $S=\sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{m+1}{i}$ とおく.

一般項の推測と確認 - 11

$$\sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{m+1}{i} =$$

$$1\binom{m+1}{1}+3\binom{m+1}{2}+5\binom{m+1}{3}+\ldots+(2m-1)\binom{m+1}{m}$$

であって,

$$\sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{m+1}{m-i+1} =$$

$$1\binom{m+1}{m}+3\binom{m+1}{m-1}+5\binom{m+1}{m-2}+\ldots+(2m-1)\binom{m+1}{1}$$

であるので, この二つの式を足すと全てのスカラーが $2m$ で揃い, 二項係数の和の性質から, $S = 1/2 \cdot 2m(2^{m+1}-2) = 2m(2^m-1)$ であることが分かる.

一般項の推測と確認 - 12

$$\sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{m+1}{m-i+1}+2m(1-2^m) = 2m(2^m-1)+2m(1-2^m)$$

$$= 0$$

これが示すべきことであった.

まとめ

一般項:

$$[p-1, m] = (2m+1)(2^{p-1}-1) - \sum_{i=1}^{m}(2i-1)\binom{p}{m+1-i}$$

これは p が素数であるときは, 左の項はフェルマーの小定理により, 右の項は二項係数の性質により p の倍数となっている.

理論上, 確かに数学好きな高校生なら解ける問題ではあるが, 実際はほぼ不可能だと思われる.

関連文献/参考文献

[1] URL: http://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/susemi/susemi1710.pdf.

[2] 西山豊. 組体操・人間ピラミッドの巨大化を考える. URL: https://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/math/artpyramid.pdf.