三叉路配置問題
$\mathbb{R}^2$ に不可算個の三叉路を敷けるか?

September 15, 2025

今回考えたい問題

人間誰しも, T の字を平面上に不可算個書いてみたいと思ったことがあるはずです.

問題

$\mathbb{R}^2$ 上に, T の字を重ならないように不可算個配置することは可能か? ここで T の字は 2 つの閉線分 a,b からなる図形であり, a の端点でない点と b の端点が直角に接して構成される図形である.

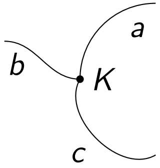
今回はこれが不可能であることを証明します.
角の三等分家よろしく, 皆さんは「T の配置家」にはならないでくださいね.

一般化

実際はもう少し本質に迫る次の定理を証明します

定理

$\mathbb{R}^2$ 上に, 三叉路を重ならないように不可算個配置することは不可能である. ここで三叉路とは中心 K と三つの曲線（ただし, 端点も含む）a, b, c からなるループの無い図形であって, a, b, c が K のみを共有点としているもののことである.



証明 - 1

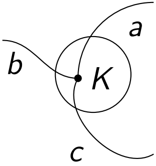
証明: 背理法で進める. $\mathbb{R}^2$ 上に不可算個の三叉路がどの二つも重ならないように配置されたとする.

ここで, $\mathbb{R}^2$ 上の開円盤を考える. まず, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ の元を $\mathbb{R}^2$ における有理点と呼ぶことにする. 有理点を中心とし半径を有理数とする開円盤を有理円盤と呼ぶことにする. 有理円盤は可算個しかないことに注意しよう.

証明 - 2

ここで, 不可算個の各三叉路に有理円盤を対応させることを考える. ただし, 次の条件を満たすものを選び対応させることにする.

・三叉路の中心が有理円盤の中に属している.
・三叉路の各端点が有理円盤の外に存在している.

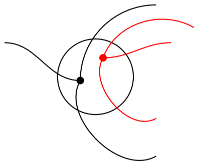


有理円盤は可算個しかないので, このような対応づけは選択公理無しで可能である.

証明 - 3

部屋割り論法によって，不可算個の三叉路が同じ有理円盤に対応付けられていることが分かる．なので，そのような有理円盤を一つ選びこれ以降，その有理円盤とそれに対応づいた三叉路のみを考える．

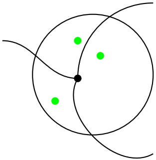
交わらない三叉路が一つの有理円盤内に中心を持つ様子は，例えば下記のようになる．



証明 - 4

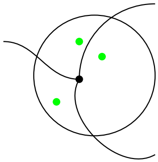
追加の条件で, 都合の良い不可算個の三叉路を絞り込んでいく.
各三叉路にそれぞれ 3 つの有理点の組を対応させることを考えよう. 有理点の 3 つ組は次の条件を満たすように選ぶ.

・三叉路を構成する各曲線を, 三叉路の中心から辿って有理円盤の縁と初めて交叉する軌跡によって, 有理円盤は 3 つの領域に分割される. この領域それぞれから一つ有理点を選び, 3 つ組とする.



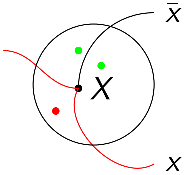
証明 - 5

このような有理点の 3 つ組は可算種類しかないため，これを選ぶのにも選択公理は不要である．さて，今考えている三叉路は不可算個であるため，再び部屋割り論法によって有理点の 3 つ組の 1 つが不可算個の三叉路と対応づいていることになる．これ以降は，そのような有理点の 3 つ組を一つ固定し，それに対応している三叉路のみを考えることにする．



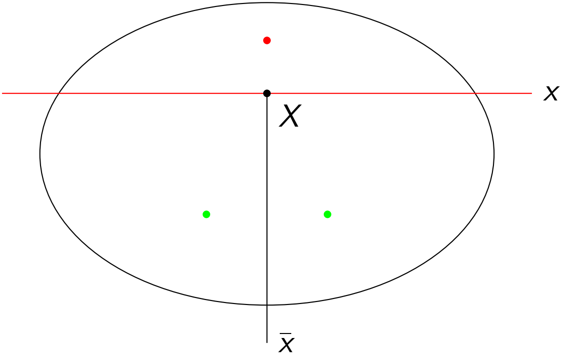
証明 - 6

それでは, ここまでの選抜で生き残っている三叉路がどの 2 つも必ず交わっているということを説明しよう.
まず, 3 つの有理点を 1 つと 2 つに分けて考える. ここで, 三叉路 X を一つ取る. X を構成する曲線のうち 2 つを合わせたもの x で有理点 1 つ側の領域と有理点 2 つ側の領域が分けられることになる. 三叉路の残った構成曲線を $\bar{x}$ とする.



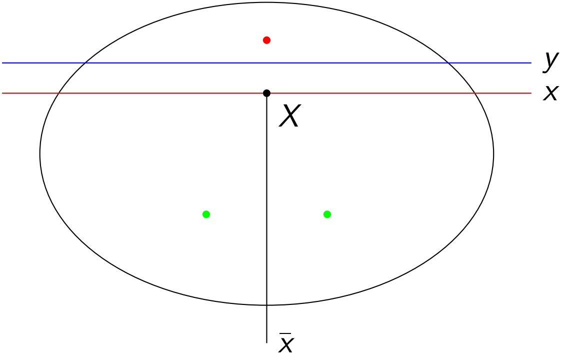
証明 - 7

この状況を明確に表現するために, 次のようにグラフ化する.



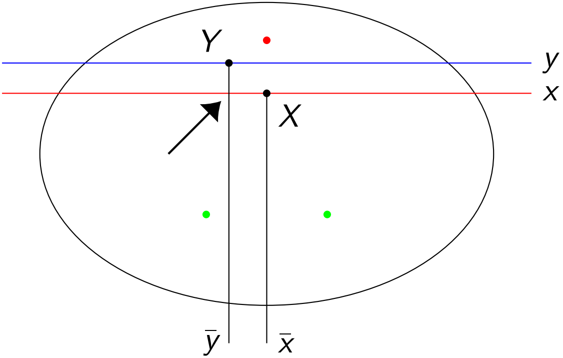
証明 - 8

この状態で, 選抜されている別の三叉路 Y をとるとする. x と同様に y, $\bar{x}$ と同様に $\bar{y}$ をとることを考えると, y と X が交わらないとすると, y は x の上側に来なければならない.



証明 - 9

しかしそうすると, $\bar{y}$ を考えたときにそれが x と必ず交わってしまうことになる.



証明 - 10

つまり, 3 つの有理点と三叉路の位置関係を守る限り, X と Y は互いに交わらない配置にはなり得ない.

もともとの仮定であった, $\mathbb{R}^2$ 上に不可算個の三叉路がどの二つも重ならないように配置することも不可能であるということが, これで示された.

まとめ

この問題は私が大昔に挑戦した問題でして, 三叉路でなく T の字に限った証明は出来てたのですが, その内容が全然本質を突いているような形でなく, エレガントでなかったために今回作り直しました.