三叉路配置問題
$\mathbb{R}^2$ に不可算個の三叉路を敷けるか?

October 2, 2025

今回考えたい問題

人間誰しも, T の字を平面上に不可算個書いてみたいと思ったことがあるはずです.

問題

$\mathbb{R}^2$ 上に, T の字を重ならないように不可算個配置することは可能か? ここで T の字は 2 つの閉線分 a,b からなる図形であり, a の端点でない点と b の端点が直角に接して構成される図形である.

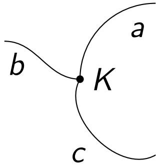
今回はこれが不可能であることを証明します.
角の三等分家よろしく, 皆さんは「T の配置家」にはならないでくださいね.

一般化

実際はもう少し本質に迫る次の定理を証明します

定理

$\mathbb{R}^2$ 上に, 三叉路を重ならないように不可算個配置することは不可能である. ここで三叉路とは中心 K と三つの曲線（ただし, 端点も含む）a, b, c からなるループの無い図形であって, a, b, c が K のみを共有点としているもののことである.



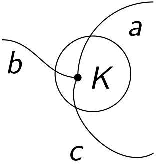
証明 - 1

証明: まず最初に, ありとあらゆる三叉路に対して, 可算個の対象を対応させることを考える.
$\mathbb{R}^2$ 上の開円盤を考える. まず, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ の元を $\mathbb{R}^2$ における有理点と呼ぶことにする. 有理点を中心とし半径を有理数とする開円盤を有理円盤と呼ぶことにする.
有理円盤は可算個しかないことに注意しよう.

証明 - 2

各三叉路に有理円盤を対応させることを考える. ただし,
次の条件を満たすものを選び対応させることにする.

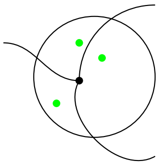
・三叉路の中心が有理円盤の中に属している.
・三叉路の各端点が有理円盤の外に存在している.



証明 - 3

対応させた有理円盤に加え, 3 つの有理点の組を追加で対応させることを考えよう. 有理点の 3 つ組は次の条件を満たすように選ぶ.

・三叉路を構成する各曲線を, 三叉路の中心から辿って有理円盤の縁と初めて交叉する軌跡によって, 有理円盤は 3 つの領域に分割される. この領域それぞれから一つ有理点を選び, 3 つ組とする.



証明 - 4

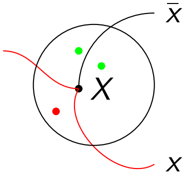
有理円盤と 3 つの有理点からなる 4-タプルは可算種類しかないため, 三叉路にこの 4-タプルを対応させることに選択公理は不要である.

さて, ここで背理法の仮定として, 互いに交わらない不可算個の三叉路が取れたとする. このとき, 4-タプルは可算個しかないため, 少なくともある 1 つの 4-タプル t に 2 つ以上の互いに交わらない三叉路が同時に対応していることになる. ここからはこの t に注目して議論を続ける.

(このことには可算和定理の仮定は必要無いことに注意. 選択公理を仮定しない場合には 2 元集合の可算和が不可算になることすらあるが, それでも不可算集合を 1 元集合の可算和に分けることはできない.)

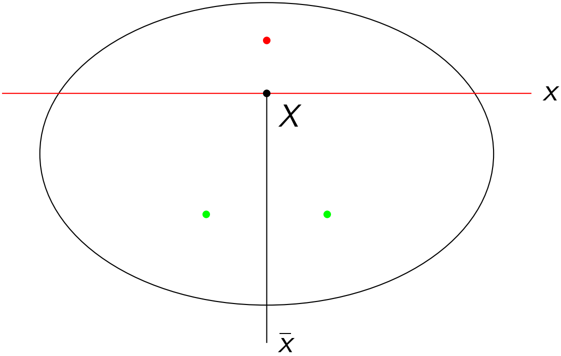
証明 - 5

それでは, この t に対応した三叉路同士は必ず交わるということを説明しよう.
まず, 3 つの有理点を 1 つと 2 つに分けて考える. ここで, t に対応している三叉路 X を一つ取る. X を構成する曲線のうち 2 つを合わせたもの x で有理点 1 つ側の領域と有理点 2 つ側の領域が分けられることになる. 三叉路の残った構成曲線を $\bar{x}$ とする.



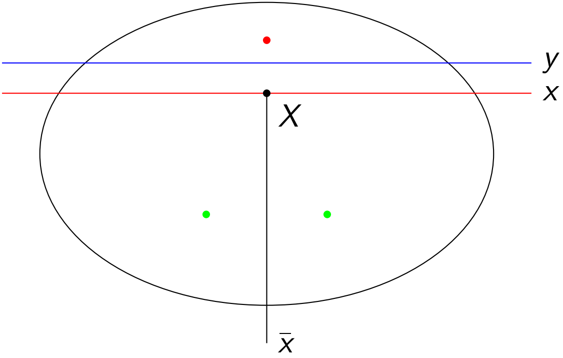
証明 - 6

この状況を明確に表現するために, 次のようにグラフ化する.



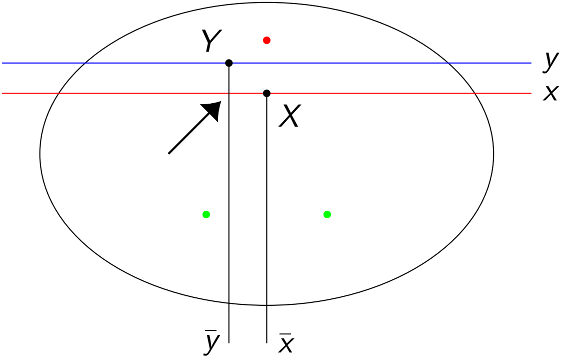
証明 - 7

この状態で, t に対応した別の三叉路 Y をとる. x と同様のルールで y, $\bar{x}$ と同様のルールで $\bar{y}$ をとることを考えると, y と X が交わらないとすると, y は x の上側に来なければならない.



証明 - 8

しかしそうすると, $\bar{y}$ を考えたときにそれが x と必ず交わってしまうことになる.



証明 - 9

つまり, t と三叉路の位置関係を守る限り, X と Y は互いに交わらない配置にはなり得ない.

もともとの仮定であった, $\mathbb{R}^2$ 上に不可算個の三叉路がどの二つも重ならないように配置することも不可能であるということが, これで示された.

補足

厳密な話をすると, 三叉路で有理円盤を 3 分割したときに各領域に有理点が残っている, というのは自明でなく, 証明しようとすると話がややこしくなる事柄であったが, これは証明無しに認めることにした.
逆に有理点が残っていないというのは, 三叉路を構成する曲線が, 2 次元の領域（それが微小であっても）に稠密に存在する有理点を自己交叉無しに全て通過する必要があることになる. しかし, これが到底不可能であろうことは感覚的にも異論は無いだろう.

まとめ

この問題は私が大昔に挑戦した問題でして, 三叉路でなくT の字に限った証明は出来てたのですが, その内容が全然本質を突いているような形でなく, エレガントでなかったために今回作り直しました.