和算の環円問題と数式処理

高遠　節夫

木更津工業高専

1　はじめに

和算の図形問題には，見た目に美しいが実際に計算するには難しいものが多い．座標幾何の手法を用いれば，非線形の連立方程式を解くことになるが，現在の数式処理は，有理式の代数計算に比して根号計算が苦手であり，連立方程式の数が増えると計算量が飛躍的に増大してしまう。特に，三角形の問題についてはそうである．そこで，頂点の座標や辺の長さなどを表すのに２底角の半角の正接 $m,\ n$ と内心円の半径 r を用いることにする．この方法を筆者はMNR法と呼んでいる．

MNR法によれば，三角形の諸量が数式処理にとって扱いやすい有理式となり，多くの問題が数式処理を用いて比較的容易に解くことができる（文献 [1],[2]）．

今回は，和算家が好んで扱ったところの，内外円の間に多くの円を容れる（鎖円）問題や鎖円が閉じる（環円）問題について，円の中心からなる三角形にMNR法を適用すれば，数式処理的解法が可能となり有理式の形の一般公式が求められることを示したい．

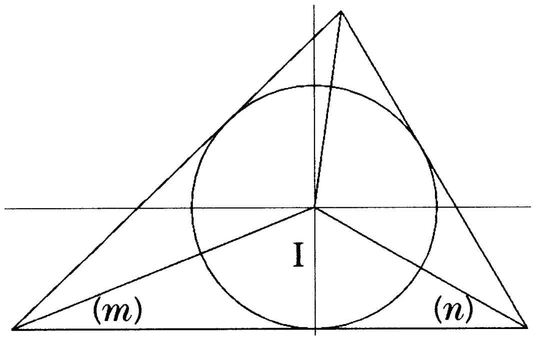

図 1: MNR法

2　鎖円の一般公式

図２において，内円 O，外円 O' の中心と半径をそれぞれ $\mathrm{O}(0,\ 0)$，r，$\mathrm{O}'(p,\ 0)$，R とおき，内外円に接する円を O_0，内外円と O_0 に接する円を O_1 とする．MNR 法に従って

$$\tan(\angle \mathrm{O}_k\mathrm{O}\mathrm{O}'/2) = m_k \quad (k = 0, 1) \tag{2.1}$$

とおくと，r_k，O_k は次のように求められる．

$$r_k = \frac{s(b{m_k}^2 + ac)}{2({m_k}^2 + a)} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{O}_k\left(\frac{as(1 - {m_k}^2)}{2({m_k}^2 + a)},\ \frac{asm_k}{{m_k}^2 + a}\right) \tag{2.3}$$

ただし

$$s=R+r+p,\ a=\frac{R+r-p}{s},\ b=\frac{R-r-p}{s},\ c=1-a+b=\frac{R-r+p}{s} \tag{2.4}$$

とおいた.

次に，m_1 を m_0 で表すことにする．それには O_0 と O_1 の外接条件を求めればよいが，これは２次方程式のため，数式処理で扱う際には根号計算を避ける多少の工夫が必要である．判別式の形から

$$d=\sqrt{a(a-b)(b+1)} \quad (a^2=abc+d^2) \tag{2.5}$$

とおくと

$$m_1=\frac{dm_0+ac}{-bm_0+d}\ ,\quad \frac{dm_0-ac}{bm_0+d} \tag{2.6}$$

解は O_1 のとる側によって２個あるが，いずれも右辺が m_0 の１次分数式となる点が重要であり，この漸化式を解くことにより一般項が求められる．以下，(2.6) から得られる公式を定理として示す.

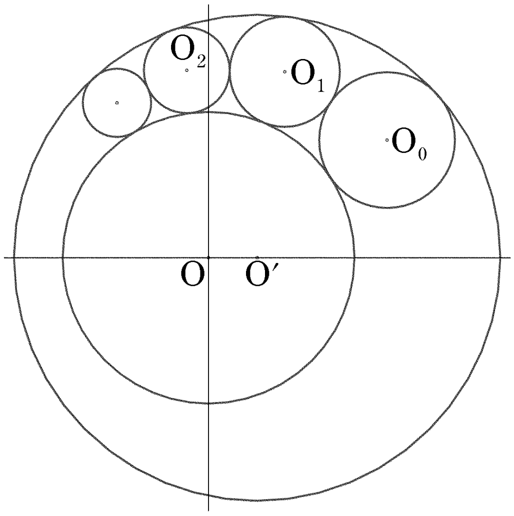

図 2: 鎖円

［定理１］ O_1 , O_2 , $\cdots$ を O_0 から反時計回りにとり，O_{-1} , O_{-2} , $\cdots$ を O_0 から時計回りにとる．$a,\ b,\ c,\ d$ を (2.4), (2.5) で定め

$$h=\sqrt{\frac{ac}{b}},\ \tan\theta=\frac{\sqrt{abc}}{d}=\frac{bh}{d} \tag{2.7}$$

とおくと

$$m_k=\frac{h(m_0+h\tan k\theta)}{-m_0\tan k\theta+h} \tag{2.8}$$

$$r_k=\frac{bs({m_k}^2+h^2)}{2({m_k}^2+a)} \tag{2.9}$$

ただし，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

また，O_k の中心は (2.3) で求められる.

証明　O_1 を反時計回りにとる場合は

$$m_1=\frac{dm_0+ac}{-bm_0+d} \qquad (\frac{ac}{d}>0 \text{ より})$$

随伴する行列 $A=\begin{pmatrix} d & ac \\ -b & d \end{pmatrix}$ の固有値は

$$\lambda=d\pm\sqrt{abc}\,i=ae^{\pm i\theta} \quad (abc+d^2=a^2 \text{と (2.7) より})$$

であり

$$P=\begin{pmatrix} h & h \\ i & -i \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} ae^{i\theta} & 0 \\ 0 & ae^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

とおくと　$A=PDP^{-1}$，これから

$$A^k=a\begin{pmatrix} \cos k\theta & h\sin k\theta \\ -h^{-1}\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

よって

$$m_k=\frac{h(m_0\cos k\theta+h\sin k\theta)}{-m_0\sin k\theta+h\cos k\theta}=\frac{h(m_0+h\tan k\theta)}{-m_0\tan k\theta+h}$$

O_1 を時計回りにとる場合は (2.6) より

$$m_{-1}=\frac{dm_0-ac}{bm_0+d}$$

同様にして

$$m_{-k}=\frac{h(m_0-h\tan k\theta)}{m_0\tan k\theta+h}$$

これは (2.8) の k に $-k$ を代入して得られる．　//

注 1　$\tan^2\theta$ を $a,\ b,\ c,\ R,\ r,\ p$ で表すと

$$\tan^2\theta=\frac{abc}{d^2}=\frac{(R-r)^2-p^2}{4Rr} \tag{2.10}$$

注 2　$k\theta=\pi/2$ のときは $\tan k\theta\to\infty$ の極限をとることにする．また，分母が 0 になるときは $m_k=\infty$　すなわち　$\angle \mathrm{O}_k\mathrm{O}\mathrm{O}'=\pi$ と考える．

［定理 2］ $\alpha_k=1/r_k$ について

$$\alpha_k=\frac{2}{bs}+\frac{2(a-h^2)(m_0\sin k\theta-h\cos k\theta)^2}{bsh^2({m_0}^2+h^2)} \tag{2.11}$$

証明　定理 1 の (2.9) より

$$\alpha_k=\frac{2({m_k}^2+a)}{bs(m_k+h^2)}=\frac{2}{bs}+\frac{2(a-h^2)}{bs({m_k}^2+h^2)}$$

(2.8) より

$$\frac{1}{{m_k}^2+h^2}=\frac{\cos^2 k\theta(h-m_0\tan k\theta)^2}{h^2({m_0}^2+h^2)}$$

これを上式に代入すればよい．　//

注　(2.11) を変形すると

$$\alpha_k=\frac{({m_0}^2-h^2)(h^2-a)\cos 2k\theta}{bsh^2({m_0}^2+h^2)}+\frac{m_0(h^2-a)\sin 2k\theta}{bsh({m_0}^2+h^2)}+\frac{h^2+a}{bsh^2}$$

(2.9) を ${m_0}^2$ について解いた式および

$$\frac{2(h^2+a)}{bsh^2}=(\alpha-\beta)\cot^2\theta \qquad \text{ただし}\quad \alpha=\frac{1}{r},\ \beta=\frac{1}{R}$$

を代入して次の式を得る．

$$\alpha_k = \alpha_0 \cos 2k\theta + \frac{(2 - bs\alpha_0)m_0 \sin 2k\theta}{bsh} + (\alpha - \beta)\sin^2 k\theta \cot^2 \theta \tag{2.12}$$

［定理３］ $\alpha = 1/r$, $\beta = 1/R$ とおくと，O_k，O_{-k} の半径の逆数和について次の公式が成り立つ．

$$\alpha_k + \alpha_{-k} = 2\alpha_0 \cos 2k\theta + 2(\alpha - \beta)\sin^2 k\theta \cot^2 \theta \tag{2.13}$$

証明　(2.12) を用いて計算する．第２項が消え合うことに注意すればよい．　//

3　環円問題への応用

N 個の円が環円をなす場合は，(2.8) より

$$\frac{h(m_0 + h\tan N\theta)}{-m_0 \tan N\theta + h} = m_0$$

これから

$$\tan N\theta = 0 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \pi/N$$

よって，(2.10) より

$$\frac{(R-r)^2 - p^2}{4Rr} = \tan^2 \frac{\pi}{N} \tag{3.1}$$

が成り立つ．これは Steiner の条件である．

以下，環円問題への応用例を考えることにする．

また，$\theta = \pi/N$ とする．

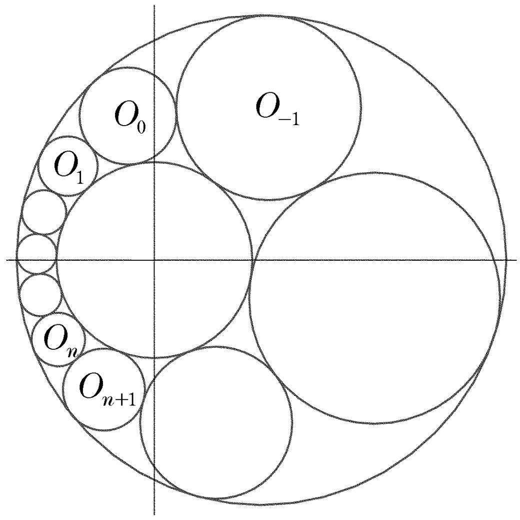

図 3: 環円

［例１］ $N = 2n$（偶数）のとき

$O_n = O_{-n}$ であるから (2.13) より

$$2\alpha_n = 2\alpha_0 \cos \pi + 2(\alpha - \beta)\sin^2 \frac{\pi}{2} \cot^2 \theta$$

よって

$$\alpha_n + \alpha_0 = (\alpha - \beta)\cot^2 \theta \tag{3.2}$$

となる．これから，安島直円とその後の和算家によって得られた次の定理が証明される．

「環円の個数が偶数個 $2n$ のとき相対する円の半径の逆数和は一定である」

［例２］ $N = 2n + 1$ （奇数）のとき

$O_{n+1} = O_{-n}$，$2n\theta = \pi - \theta$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha_n + \alpha_{n+1} &= 2\alpha_0 \cos 2n\theta + 2(\alpha - \beta)\sin^2 n\theta \cot^2 \theta \\ &= -2\alpha_0 \cos\theta + 2(\alpha - \beta)\cos^2(\theta/2)\cot^2\theta\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \alpha_0 + \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2\cos\theta} = \frac{(\alpha - \beta)\cos\theta}{2(1-\cos\theta)} \tag{3.3}$$

これから，(3.3) の左辺の和が一定であることが証明される．

［例３］ 中心 O, O′, O_0 が一直線上にある場合（$m_0 = 0$）

$$m_k = h\tan k\theta \tag{3.4}$$

$$r_k = \frac{bsh^2(1+\tan^2 k\theta)}{2(h^2\tan^2 k\theta + a)} \tag{3.5}$$

$$\alpha_k = \frac{2}{bs}\left(\sin^2 k\theta + \frac{b}{c}\cos^2 k\theta\right) \tag{3.6}$$

$$\text{とくに} \quad \alpha_0 = \frac{2}{cs} \tag{3.7}$$

$N = 2n$（偶数）のとき　$\alpha_n = 2/bs$ (3.8)

さらに，$r_0 = r$ とすると

$c = a - b = 1/2$

($r = (a-b)s/2$ と (3.7), (3.8) より)

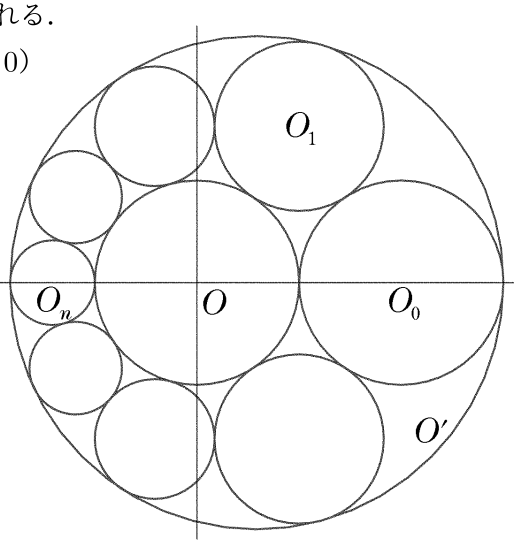

図 4: 千葉の算額より

これと (2.10) を用いると

$$b = \frac{\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos 2\theta}$$

よって，(3.6), (3.7) より

$$\frac{r_n}{r_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos 4\theta}{\cos 2\theta}\right) \tag{3.9}$$

とくに，$N = 8$ のときは $2r_4 = r_1$ となる．これは文献 [3] にある算額の問題の１つである．

4　２円が外側にある場合

内接と外接条件の関係から，R を $-R$ とすれば 2 節の公式は有効である．すなわち

$$s = -R + r + p$$
$$a = \frac{-R + r - p}{s} < 0$$
$$b = \frac{-R - r - p}{s} < 0$$
$$c = \frac{-R - r + p}{s} > 0$$
$$\tan\theta = -\frac{bh}{d} \quad (b < 0 \text{ より})$$

とすればよい．ただし，$r_k > 0$ のときは O, O' に外接，$r_k < 0$ のときは内接である．図５のように環円をなす条件は

$$\frac{p^2 - (R+r)^2}{4Rr} = \tan^2\frac{\pi}{N} \tag{4.1}$$

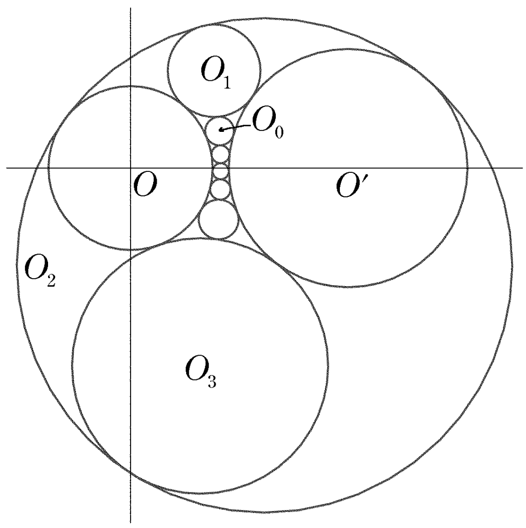

図 5: 外接の場合

であり，相対円の（符号をつけた）半径の逆数の和はやはり一定である．

とくに，2円 O, O' が外接する場合（図 6）

$p \to R + r$ とすれば

$$\frac{1}{m_k} = \frac{1}{m_0} - \frac{R+r}{R}k$$

$$\alpha_k = \frac{1}{r_k} = -\frac{1}{p} + \frac{R}{rp{m_k}^2}$$

$1/rm_k = \mu_k,\ \gamma = 1/r_0,\ \delta_k = 1/r_{-k}$ とおくと

$$\mu_{-k} = \mu_0 + (\alpha + \beta)k \tag{4.2}$$

$$\mu_0{}^2 = (\alpha+\beta)\gamma + \alpha\beta \tag{4.3}$$

$$\mu_{-k}{}^2 = (\alpha+\beta)\delta_k + \alpha\beta \tag{4.4}$$

$$\text{ただし}\quad \alpha = \frac{1}{r},\ \beta = \frac{1}{R}$$

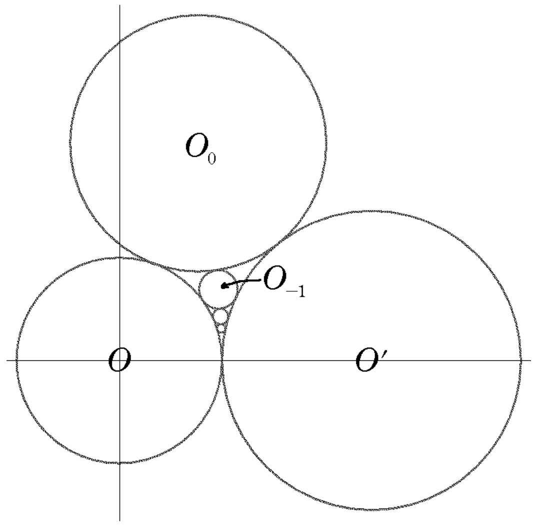

図 6: Descartes の円定理

これから次の等式が得られる．

$$2\left\{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta_k) + 2\alpha\beta\right\}k^2 = (\delta_k - \gamma)^2 + (\alpha+\beta)^2 k^4 \tag{4.5}$$

$k = 1$ のときは，Descartes の円定理である．

5 まとめ

数式処理で計算するときには，できるだけ根号計算を避ける工夫が必要であり，相接円の問題でも同様であるが，MNR法により数式処理の有効な利用を図ることができる．すなわち，式の変形や方程式を解くなどの数式計算に加えて，図形処理の機能による描画でも数式処理の利点を活かすことができる．本稿に掲げた図の描画には数式処理システムの１つである maple を用いたが，円の中心も同時に求められるため，内接および外接の関係が正確に描かれている．数式処理によって得られたこれらの公式自体も比較的簡単な形をしており，数式処理電卓や手計算での利用も可能である．r, $R \to \infty$ の極限を考えれば，和算に現れる円と直線の相接問題にも広く適用できて，これらを数学教育で取り上げる際の一助になると考えられる．

参考文献

[1] 高遠節夫, 和算に現れる三角形問題の数式処理による解法について, 日本数学教育学会誌, 第 80 巻, 第 11 号, 1998.11 , pp 225-28

[2] 高遠節夫，和算の図形問題と数式処理, T[3] Japan 第７回年会，2003

[3] 平山諦．千葉県の算額．成田山資料館．1970

[4] 深川・ペドー，日本の幾何—何題解けますか？，森北出版，1991