Basel 問題と関連して（2020.12.2 大島利雄）

$$
\begin{aligned}
A_m := \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} &< S_N := \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\\
&\le \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{(n-\frac12)(n+\frac12)} = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m+\frac12} - \frac{1}{N+\frac12}\\
&< B_m := \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m+\frac12} \qquad (1\le m<N)
\end{aligned}
$$

としておいて A_m と B_m に対応するもの（それを π で割ったもの）を $m=1,2,\dots$ について図示するとよいのではないか（後者は赤で示すとかする．$\{A_m\}$ は単調増加, $\{B_m\}$ は単調減少で，収束の様子が分かる）．

$m=1$ とすると $1<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<\frac{5}{3}=1.66\cdots$, $m=2$ とすると $\frac54<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<\frac{33}{20}=1.65$, $B_3=\frac{415}{252}=1.6468\cdots$, $B_4=\frac{79}{48}=1.6458\cdots$．なお，$\frac{79}{8}$ は既に π^2 のよい近似値で，誤差は 0.055%以下となる．

なお

$$
A_m < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668482\cdots < B_m, \tag{1}
$$

$$
\frac{1}{m+1} < \frac{\pi^2}{6} - A_m < \frac{1}{m+\frac12}, \tag{2}
$$

$$
\frac{1}{12(m+1)^3} < B_m - \frac{\pi^2}{6} < \frac{1}{12(m-\frac12)^3}. \tag{3}
$$

最後の不等式は

$$
\frac{1}{(n-\frac12)(n+\frac12)} - \frac{1}{n^2} = \frac{\frac14}{(n-\frac12)(n+\frac12)n^2}\begin{cases} < \frac{1}{4(n-\frac12)^4},\\ > \frac{1}{4n^4},\end{cases}
$$

$$
\int_{m+1}^{\infty}\frac{dt}{4t^4} < B_m - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=m+1}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{(n-\frac12)(n+\frac12)} - \frac{1}{n^2}\Bigr) < \int_{m}^{\infty}\frac{dt}{4(t-\frac12)^4}
$$

から分かる．

$m=100$ とすると，$\frac{\pi^2}{6}$ を近似する A_m の誤差は 10^{-2} 程度（実際は，約 0.995×10^{-2}) であるが，B_m では 10^{-7} 以下（実際は，約 0.82×10^{-7}）である[1]．

より一般に，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}} \quad (k=1,2,\dots)$ のときは, $(n+\frac{j}{2})(n-\frac{j}{2})\le n^2$ より

$$
\frac{k}{n^{k+1}} \le \frac{k}{(n+\frac{k}{2})(n+\frac{k}{2}-1)\cdots(n-\frac{k}{2})} = \frac{1}{(n+\frac{k}{2}-1)\cdots(n-\frac{k}{2})} - \frac{1}{(n+\frac{k}{2})\cdots(n-\frac{k}{2}+1)}
$$

を使うとよい．これにより

$$
\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}} < \frac{1}{k(m+\frac{k}{2})(m+\frac{k}{2}-1)\cdots(m-\frac{k}{2}+1)}.
$$

[1] $C_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m+1/2}-\frac{1}{12(m^2-1/4)(m+3/2)}$ とすれば，よりよい下からの近似となる（m^{-5} のオーダー）．たとえば，$0<\frac{\pi^2}{6}-C_{100}=1.09\cdots\times10^{-11}$）．さらに $D_m=\cdots$ などと，何段階も続けられる．

整数べきでないときは, $A \geq B > 0$ とすると

$$A - B = \frac{A^N - B^N}{A^{N-1} + A^{N-2}B + \cdots + B^{N-1}} \geq \frac{A^N - B^N}{NA^{N-1}}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2}-1)\cdots(n-\frac{k}{2})}} - \frac{1}{\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2})\cdots\cdots(n-\frac{k}{2}+1)}} = \frac{\sqrt[N]{n+\frac{k}{2}} - \sqrt[N]{n-\frac{k}{2}}}{\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2})\cdots(n-\frac{k}{2})}}\\
&\quad\geq \frac{k}{N\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2})\cdots(n-\frac{k}{2})\cdot(n+\frac{k}{2})^{N-1}}}\\
&\quad\geq \frac{k}{N\bigl(n+\frac{k(N-1)}{2(N+k)}\bigr)^{\frac{k}{N}+1}} \quad (\because \text{相加平均} \geq \text{相除平均})\\
&\quad\geq \frac{k}{N(n+\frac{k}{2})^{\frac{k}{N}+1}} \quad (\text{より簡単})
\end{aligned}$$

よって（簡単な方を使うと）, N と k を正整数とするとき

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{k}{N}+1}} < \frac{N}{k\sqrt[N]{m(m-1)\cdots(m-k+1)}} \leq \frac{N}{k}(m-k+1)^{-\frac{k}{N}}. \tag{4}$$

最初の（よりよい）評価からは

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{k}{N}+1}} < \frac{N}{k\sqrt[N]{\bigl(m+\frac{k(k+1)}{2(N+k)}\bigr)\bigl(m+\frac{k(k+1)}{2(N+k)}-1\bigr)\cdots\bigl(m+\frac{k(k+1)}{2(N+k)}-(k-1)\bigr)}}. \tag{5}$$

なお，$a > b \geq 0$ のとき，$\frac{1}{n^{a+1}} \leq \frac{1}{n^{b+1}}$ となることを, 残余項の評価に使ってもよい．一方

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1}} < \int_m^{\infty} \frac{dt}{t^{a+1}} = \frac{1}{am^a}. \tag{6}$$

π^2 **に収束するある数列**. 以下で定まる数列 $c_0, c_1, c_2, \ldots$ に対し

$$\begin{aligned}
&c_0 = 1,\quad c_k = \frac{c_{k-1}}{3!} - \frac{c_{k-2}}{5!} + \frac{c_{k-3}}{7!} - \cdots - \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}c_0 \quad (k = 1, 2, \ldots),\\
&\pi^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{k-1}}{c_k}.
\end{aligned} \tag{7}$$

なお，B_k を Bernoulli 数とすると

$$c_k = \frac{(2^{2k}-2)}{(2k)!}B_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{2k} = \frac{z}{\sin z}.$$

(T. Oshima, On analytic equivalence of glancing hypersurfaces, Sci. Ppaer College Ge. Ed. Univ. Tokyp **28**(1978), 51–57 で (7) が使われている)