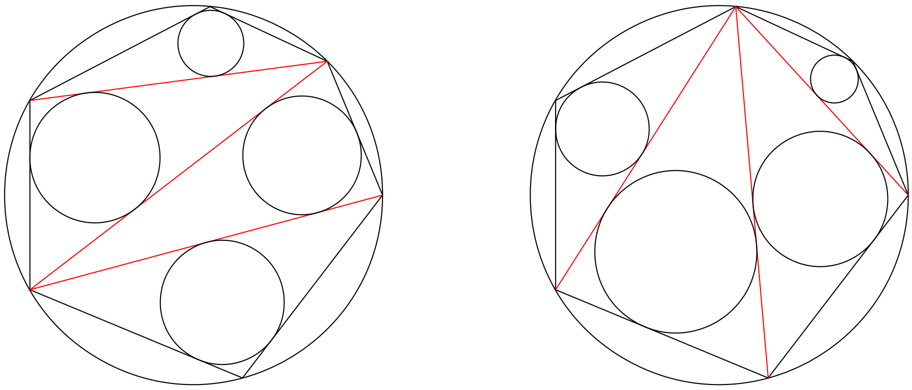
# Japanese Theorem について

大島利雄（城西大学），2021 年 7 月

## §1 Japanese Theorem とは

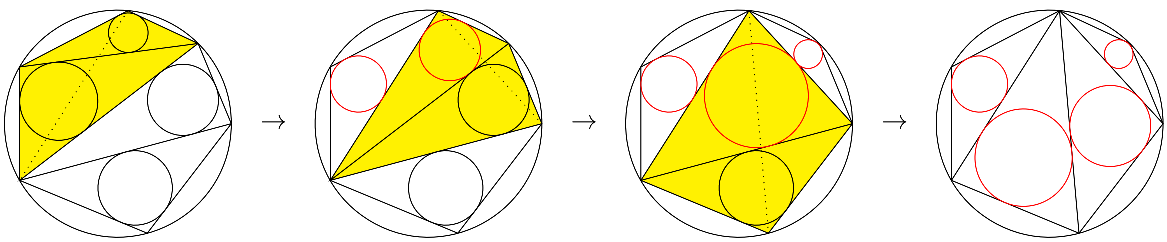
**定理**. 円に内接する多角形を描く．この多角形の頂点を結んだ対角線を適当に用いて多角形を三角形に分割したとき，そのすべての内接円の半径の総計は分割の仕方によらない．

という美しい定理は Japanese theorem と呼ばれています．例えば，円に内接する六角形は，対角線を用いて 4 つの三角形に分割されますが，その 4 つの三角形の内接円の半径の総和は，分割の仕方に依存しません．



和算家藤田貞資の門弟丸山良元の門人であった丸山良寛という人が，寛政 12 年（西暦 1800 年）に東北地方の鶴岡山王社という神社に奉納した「算額」には，円に内接する四角形の場合に，上の問題が書かれていて，それが起源とされています（cf. [1]）．円に内接する四辺形において対角線で 2 つに分けられた三角形の 2 つの内接円の半径が 2 と 3 であったとき，もう 1 つの対角線で分けられた三角形の内接円の一方の半径が 1 なら他方はいくつか？ というような問題です．答えを得るのにこれが書かれています．

Japanese theorem は，円に内接する四角形の場合が基本で，円に内接する一般の多角形の場合は，四角形の場合から分かります．たとえば上の例では，四角形場合の結果を順に適用していけばよいことが分かります（詳しくは後述）．



江戸時代には和算が庶民にまで普及し，神社仏閣の絵馬堂に奉納される絵馬には，和算の問題やそれを解いたものを算額（数学の絵馬）として奉納したものがありました．書物に比べると，はるかに手軽な発表の形態で，広く庶民の目にとまる公開の手段だったのでしょう．

完全な形で現存する算額は，1686 年に京都の北野天満宮に奉納されたもので，絵馬（1754 年に描かれた）の絵具がはがれて下から算額が現れ，1957 年に発見されました．失われた算額は日本中に沢山あったことと想像されます．京都の御香宮に掲げられたある算額の問題は，その解が元禄 4 年（1691 年）に京都の八坂神社に算額として奉納されました．道後温泉の伊佐爾波神社には，1803 年から 1937 年までの 22 面もの算額が残されています．埼玉県内でも現存する算額が 100 以上確認されているようです．東京には，天明 9 年（1788 年）に奉納された墓石に掘られた珍しい算額もあります．算額では，円や線を使った分かりやすい幾何の問題（易しいという意味ではありません）が多く，人の目を引くように，色づけされた綺麗なものが沢山あります．

和算や算額については，書物やインターネットから多くの情報を得ることができます．また，Japanese theorem は，何通りかの証明と共に歴史的観点からも詳しく [1] に書かれており，その著者も加わった英文の [2] も論文として何通りかの証明が分かりやすく書かれています．一方，このノートは，Japanese theorem を取り上げ，現代の数学の教育に役立つことがあるかもしれない，という教育的な観点も入れて [1] や [2] などをもとに書きました（他にも面白い問題が沢山あります．cf. [3], [4], [5]）．残りのこの節では，多角形についての Japanese theorem が，四角形の場合から分かることを示しましょう

円に内接する多角形を $P_0P_1\ldots P_{n-1}$ とします（$n$ 角形）．対角線が三角形の辺となっているとき，その対角線を共有する 2 つの三角形を合わせた四角形に注目して，もう一つの対角線に取り替えた三角形分割に取り替える操作をフリップと呼ぶことしましょう．フリップは，分割に現れる対角線を 1 つ指定すると定まり，そのフリップで出現した新たな対角線を指定したフリップで元に戻ります．その両者で内接円の半径の総和が等しいことは，四角形の場合から分かかります．したがって，

**命題**. 円に内接する多角形の対角線による三角形分割は，互いにフリップの操作を続けることで移りあう．

ということから，Japanese theorem は，四角形の場合に示すことができればよいことになります．

**命題の証明**. 円に内接する $n$ 角形の任意の三角形分割は，適当なフリップを続けて，$P_0$ を端点とする $(n-3)$ 本の対角線による三角形分割に移せることを示せばよい．

$P_0$ を端点とする分割に現れる三角形の辺を $P_0P_{j_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ とおく．ただし

$$j_0 = 0 < j_1 = 1 < j_2 < \cdots < j_{m-1} < \cdots < j_{m-1} < j_m = n-1.$$

$m = n-1$ ならば目的の三角形分割に他ならない．$j_{m+1} = 0$ とおく．$m < n-1$ ならば $j_{i+1} > j_i + 1$ となっている $i$ がある．このとき，$P_0P_i$ を端点とする三角形の頂点 $P_{i'}$ で $i' > j_i$ となるものは，$i' = j_{i+1}$ で与えられることが分かる（$P_{j_i}P_{i'}$ と $P_0P_{i'}$ と $P_0P_{j_{i+1}}$ が分割三角形の辺となっていることから）．対角線 $P_{j_i}P_{j_{i+1}}$ によるフリップを行うと $P_0$ を端点とする対角線で分割三角形の辺となるものの個数が 1 つ増やすことができる．この手順を繰り返せばよい．

最初の六角形の例は，この手順の例となっています．

逆をたどれば，任意の三角形分割は，$P_0$ を端点とする $(n-3)$ 本の対角線による三角形分割からフリップを使って移すことができます．

**注意**. 1) 異なった三角形分割は，高々 $2(n-3)-1$ 回のフリップでつなぐことができる．実際，一方の分割に現れる対角線の頂点となっているものを $P_0$ として，一方に上の命題の証明の手順を使い，その後、他方にその手順の逆を使えばよい．

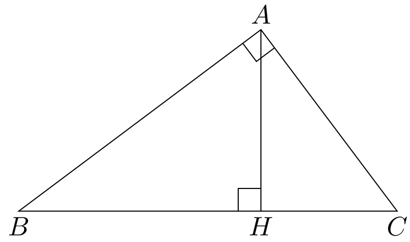
2) 円に内接する $(n+2)$ 角形（凸 $(n+2)$ 角形でよい）において，対角線による三角形分割のやり方の数は，カタラン数 $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ で与えられる．

## §2 いくつかの初等幾何

頂角 $A$ を直角とする直角三角形 $\triangle ABC$ を考える．

頂点 $A$ から底辺 $BC$ に下ろした垂線の足を $H$ とすると，
$\triangle HBA \sim \triangle ABC \sim \triangle HAC$（互いに相似）であるから

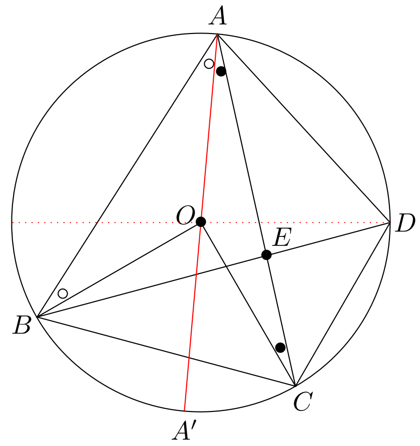
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \;\Rightarrow\; AB^2 = BH \cdot BC,$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \;\Rightarrow\; AC^2 = CH \cdot BC,$$
$$AB^2 + AC^2 = (BH + CH)BC = BC^2$$
$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2 \qquad \text{（ピタゴラスの定理）}$$




円周上に点 $B, C$ をとる．
弦 $BC$ で区切った同じ側の円周上に点 $A, D$ を取る．

円の中心を $O$ とし，円周上の点 $A$ を線分 $AA'$ の中点が $O$ となるようにとる．このとき

$$\begin{aligned}\angle BOC &= \angle A'OB + \angle A'OC \\ &= \angle OAB + \angle OBA + \angle OAC + \angle OCA \\ &= 2\angle OAB + 2\angle OAC = 2\angle BAC.\end{aligned}$$




よって**弦 $BC$ の円周角 $\angle BAC$ は，弦 $BC$ の中心角 $\angle BOC$ の半分に等しい**（この中心角は，$A$ を含まない側の弧 $BC$ に対する中心角）．特に

**弦 $BC$ の円周角は互いに等しい．**

すなわち

$$\angle BAC = \angle BDC.$$

円に内接する四角形 $ABCD$ を考える．直線 $AD$ と $BC$ の交点を $E$ とおくと

$$\triangle EAB \sim \triangle EDC \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE} \quad \Rightarrow \quad AE \cdot CE = BE \cdot DE \quad \text{(方ベキの定理)}$$

四辺形の内角 $\angle BAD$ と内角 $\angle BCD$ に対する中心角は，弦 $BD$ の $A$ を含まない側の中心角と $C$ を含まない側の中心角に対応し，それらは互いに補角（和が $360°$）になっている．よって

**円に内接する四辺形の対角の位置にある 2 頂点の内角の和は** $180°$

となります．

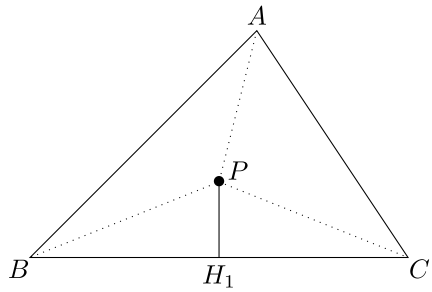
三角形 $ABC$ の内部の点 $P$ から $BC, CA, AB$ に下ろした垂線の足を $H_1, H_2, H_3$ とすると，三角形の面積 $S$ は

$$S = \tfrac{1}{2}(BC \cdot PH_1 + CA \cdot PH_2 + AB \cdot PH_3)$$

となる．

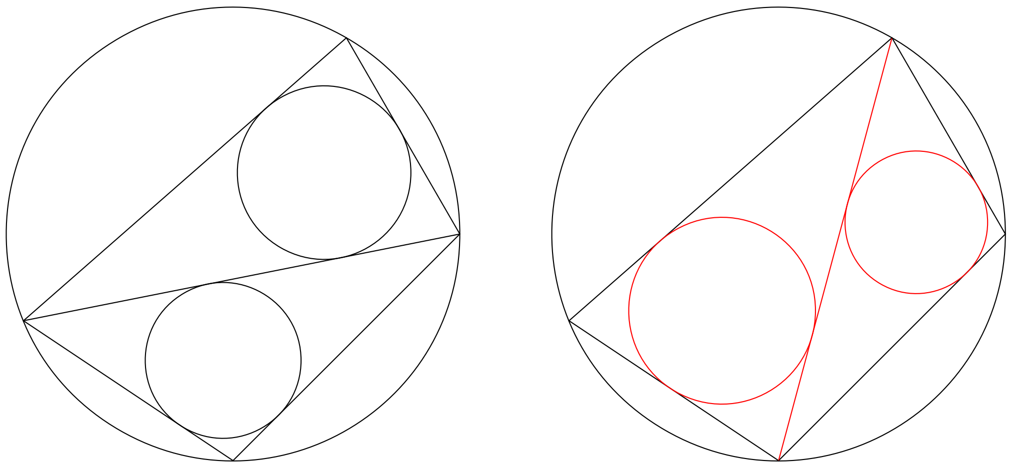
特に $P$ を三角形の内心とし，内心円の半径を $r$ とおくと

$$S = \tfrac{r}{2}(BC + CA + AB).$$



## §3 証明その１（対角線上の接点間は等距離）

四角形の場合の Japanese theorem の証明を，以下考えることにします．
最初は，和算家の吉田為幸氏（1819–1892）が書いた証明です．



まず，記号の準備です．

$P_0P_1P_1P_3$：$O$ を中心とする円に内接する四角形

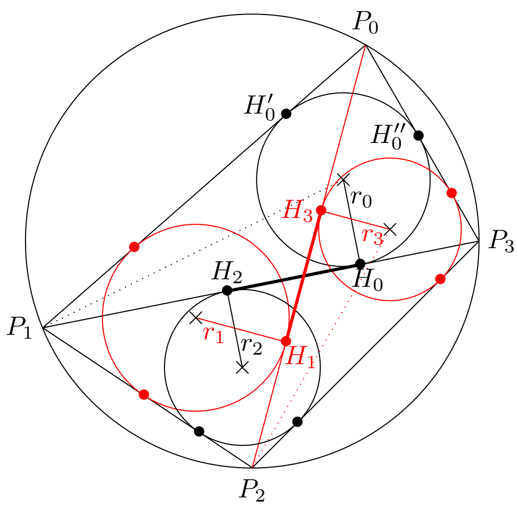
$\bar{i} \in \{0,1,2,3\} \qquad (i-\bar{i} \in 4\mathbb{Z},\ i \in \mathbb{Z})$

$P_i := P_{\bar{i}} \qquad (i \in \mathbb{Z})$

$O_i$：三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の内接円の中心

$r_i$：三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の内接円の半径

$H_i$：三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の内接円が辺 $P_{i+1}P_{i-1}$ と接する点




**定理**（Japanese theorem).

$$r_0 + r_2 = r_1 + r_3.$$

$$\begin{aligned}
P_0H_0' &= P_0H_0'' \text{ etc.} \ \Rightarrow \\
P_0P_1 - P_3P_0 &= P_0H_0' + P_1H_0' - (P_0H_0'' + P_3H_0'') \\
&= P_1H_0' - P_3H_0'' = P_1H_0 - P_3H_0 \text{ etc.} \ \Rightarrow \\
P_0P_1 + P_2P_3 - P_1P_2 - P_3P_0 &= P_1H_0 - P_3H_0 + P_3H_2 - P_1H_2 = 2(P_1H_0 - P_1H_2) \\
&= P_0H_1 - P_2H_1 + P_2H_3 - P_0H_3 = 2(P_0H_1 - P_0H_3),
\end{aligned}$$

$$\angle O_0P_1H_0 = \tfrac{1}{2}\angle P_0P_1P_3 = \tfrac{1}{2}\angle P_0P_2P_3 = \angle O_3P_2H_3 \text{ etc.} \ \Rightarrow$$

$$\frac{r_0}{P_1H_0} = \frac{r_3}{P_2H_3},\ \ r_0P_2H_3 = r_3P_1H_0 \quad (\triangle O_0P_1H_0 \sim \triangle O_3P_2H_3),$$

$$\frac{r_0}{P_3H_0} = \frac{r_1}{P_2H_1},\ \ r_0P_2H_1 = r_1P_3H_0 \quad (\triangle O_0P_3H_0 \sim \triangle O_1P_2H_1),$$

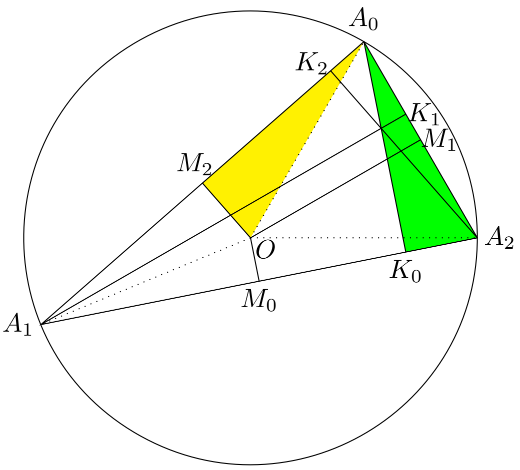
$$\frac{r_2}{P_1H_2} = \frac{r_3}{P_0H_3},\ \ r_2P_0H_3 = r_3P_1H_2 \quad (\triangle O_2P_1H_2 \sim \triangle O_3P_0H_3),$$

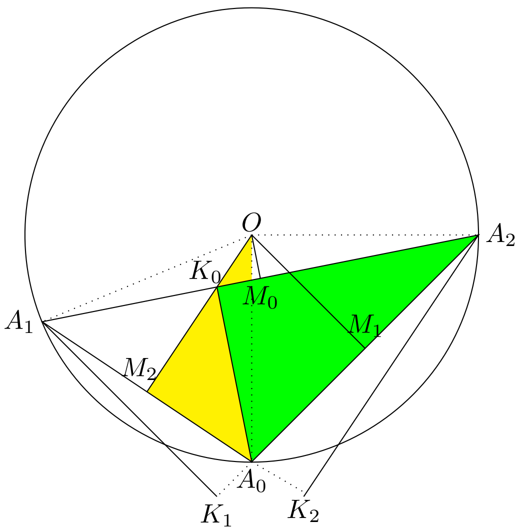
$$\frac{r_2}{P_3H_2}=\frac{r_1}{P_0H_1},\ \ r_2P_0H_1=r_1P_3H_2 \quad (\triangle O_2P_3H_2\sim\triangle O_1P_0H_1),$$
$$r_0(P_2H_3-P_2H_1)+r_2(P_0H_1-P_0H_3)=r_1(P_3H_2-P_3H_0)+r_3(P_1H_0-P_1H_2),$$
$$(r_0+r_1)(P_0H_1-P_0H_3)=(r_1+r_3)(P_1H_0-P_1H_2),$$
$$r_0+r_2=r_1+r_3.$$

**注意**. 1) $H_0H_2=H_1H_3$ （円に内接することは使っていない）
2) $H_0=H_2$ となるときは，$P_0$ を外接円周上少しずらして極限を考えればよい（$r_i$ は連続的に変化）．

## §4 証明その２（面積，多角形の場合の和の値）

$s_i$：三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の面積
$H_{ij}$：$O$ から $P_iP_j$ に下ろした垂線の足
$2s_0=r_0(P_0P_1+P_1P_3+P_3P_0)=2\triangle OP_0P_1+2\triangle OP_1P_3+2\triangle OP_3P_0$
$A_0=A_3:=P_0$，$A_1:=P_1$，$A_2=A_{-1}:=P_2$
$K_i$：$A_i$ から $A_{i-1}A_{i+1}$ に下ろした垂線の足
$M_i$：$O$ から $A_{i-1}A_{i+1}$ に下ろした垂線の足




外心が三角形の内部にあるとき（内接円の半径を $r_0$ とする）

$$\angle A_0OM_2=\tfrac{1}{2}\angle A_0OA_1=\angle A_0A_2K_0=\angle A_1A_2K_1 \quad \text{etc.}$$
$$\frac{OM_2}{R}=\frac{A_2K_0}{A_2A_0}=\frac{A_2K_1}{A_1A_2}$$
$$R(A_2K_0+A_2K_1)=OM_2(A_2A_0+A_1A_2),$$
$$R(A_1K_2+A_1K_0)=OM_1(A_1A_2+A_1A_0),$$
$$R(A_0K_1+A_0K_2)=OM_0(A_0A_1+A_2A_0),$$
$$r(A_0A_1+A_1A_2+A_2A_0)=2s_0=OM_0\cdot A_1A_2+OM_1\cdot A_2A_0+OM_2\cdot A_0A_1,$$
$$(R+r)(A_0A_1+A_1A_2+A_2A_0)=(OM_0+OM_1+OM_2)(A_0A_1+A_1A_2+A_2A_1),$$
$$R+r_0=OM_1+OM_2+OM_3.$$

外心が三角形の外で，頂角 $A_0$ 内にあるとき（内接円の半径を $r_2$ とする）

$$\begin{aligned}
R(A_2K_0 + A_2K_1) &= OM_2(A_2A_0 + A_1A_2),\\
R(A_1K_2 + A_1K_0) &= OM_1(A_1A_2 + A_1A_0),\\
-R(A_0K_1 + A_0K_2) &= -OM_0(A_0A_1 + A_2A_0),\\
r_2(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_1) = 2s_2 &= OM_2 \cdot A_0A_1 + OM_1 \cdot A_2A_0 - OM_0 \cdot A_1A_2,\\
R(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) &= OM_2(A_2A_0 + A_1A_2) + OM_1(A_1A_2 + A_1A_0) - OM_0(A_0A_1 + A_2A_0),\\
(R + r_2)(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) &= (OM_1 + OM_2 - OM_0)(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0),\\
R + r_2 &= OM_1 + OM_2 - OM_0.
\end{aligned}$$

以上から，一般に以下のことが成り立つ．

**命題**. 三角形 $A_0A_1A_2$ において，その外接円と内接円の半径を，それぞれ $R$, $r$ とし，内心を $O_0$ とおく．外心 $O$ から頂点 $A_i$ の底辺に下ろした垂線の長さを $h_i$ とする．このとき

$$R + r = \begin{cases} h_0 + h_1 + h_2 & (O \text{ が三角形の内部または辺上にあるとき}) \\ h_0 + h_1 + h_2 - 2h_i & (\text{線分 } O_0O \text{ が辺 } A_{i-1}A_{i+1} \text{ と交わるとき}) \end{cases}$$

$O$ を中心とする円に内接する四角形 $P_0P_1P_2P_3$ について（最初の記号に戻る）．

$O$ から線分 $P_iP_j$ に下ろした垂線の足を $M_{ij}$ とおく．

$O$ が四角形 $P_0P_1P_2P_3$ の内部にあるとき：

$$\begin{aligned}
R + r_0 &= OM_{01} + OM_{30} \pm OM_{13} \quad (+ \text{ は } O \text{ が三角形 } P_0P_1P_3 \text{ の内部にあるとき})\\
R + r_2 &= OM_{12} + OM_{23} \mp OM_{13},\\
2R + r_0 + r_2 &= OM_{01} + OM_{12} + OM_{23} + OM_{30}.
\end{aligned}$$

$O$ が線分 $P_2P_3$ で外接円を二分したときの四角形を含まない側にあるとき：

$$\begin{aligned}
R + r_0 &= OM_{01} + OM_{30} - OM_{13}\\
R + r_2 &= OM_{13} + OM_{12} - OM_{23}\\
2R + r_0 + r_2 &= OM_{01} + OM_{12} - OM_{23} + OM_{30}.
\end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned}
r_0 + r_2 = r_1 + r_3 &= \sum_{i=0}^{4} (-1)^{\epsilon_{i,i+1}} OM_{i,i+1} - 2R,\\
\epsilon_{i,i+1} &:= \begin{cases} -1 & (O \text{ は弧 } P_iP_{i+1} \text{ と外接円で囲まれた四角形を含まない領域内にある}) \\ 1 & (\text{上以外}) \end{cases}
\end{aligned}$$

**注意**．1) 上の等式は，四角形を円に内接する $N$ 角形の場合に拡張される．ただし，左辺は，頂点を適当に結んで $N$ 角形を $(N-2)$ 個の三角形に分割したときの三角形の内接円の半径の和．右辺の和は $i = N$ までとし，$-2$ を $-(N-2)$ と変える．

2) $O$ が内接 $N$ 角形の内部にあるときの等式から，内部にないときの公式は次のように容易に導ける．すなわち，$O$ は弧 $P_iP_{i+1}$ と外接円で囲まれた四角形を含まない領域内にあるならば，弧 $P_iP_{i+1}$ 上に点 $P_i'$ を，三角形 $P_iP_i'P_{i+1}$ 内に $O$ を含むように選んで，この三角形の場合と頂点 $P_i'$ を加えた $(N+1)$ 角形の場合との等式の差を考えればよい．

## §5 証明その３（４つの内接円の中心は長方形の頂点）

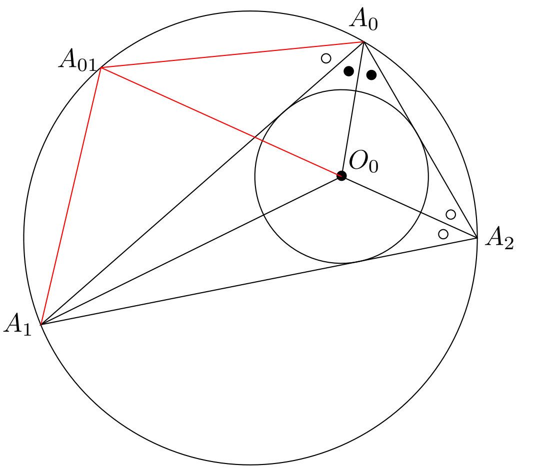
$A_{01}$：直線 $A_2O_0$ の延長線が外接円と交わる点

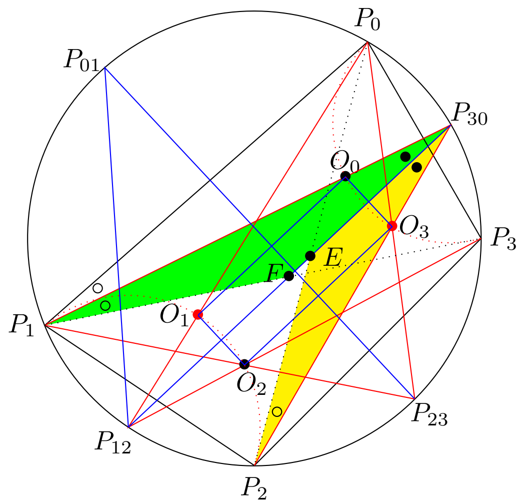
$\angle A_{01}A_2A_0 = \angle A_{01}A_2A_1$ であるから，$A_{01}$ は三角形の外接円の外側の円弧 $A_0A_1$ の中点となる．

$\angle A_{01}O_oA_0 = \angle O_0A_0A_2 + \angle O_0A_2A_0 = \angle O_oA_0A_1 + \angle A_{01}A_2A_1 = \angle O_oA_0A_1 + \angle A_{01}A_0A_1 = \angle A_{01}A_0O_0.$

よって

$$A_{01}O_o = A_{01}A_0 = A_{01}A_1. \qquad (\bigstar)$$




$P_{ii+1}$：弧 $P_iP_{i+1}$ の中点．線分 $P_iP_{i+1}$ と線分 $P_{ii+1}P_{i-1}$ とが交わるように定める（$P_{30} := P_{34}$）．

$$\begin{aligned}
\angle P_{01}P_{12}P_{30} &= \angle P_0P_{12}P_{01} + \angle P_0P_{12}P_{30} = \tfrac{1}{2}\angle P_0P_{12}P_1 + \tfrac{1}{2}\angle P_0P_{12}P_3 \\
&= \tfrac{1}{4}\angle P_0OP_1 + \tfrac{1}{4}\angle P_3OP_0, \\
\angle P_{30}P_{12}P_0 &= \tfrac{1}{4}\angle P_1OP_2 + \tfrac{1}{4}\angle P_2OP_3, \\
\therefore \angle P_{01}P_{12}P_{30} + \angle P_{30}P_{12}P_0 &= \tfrac{1}{4}(\angle P_0OP_1 + \angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \angle P_3OP_0) = 90^\circ.
\end{aligned}$$

よって

直線 $P_{01}P_{23}$ と直線 $P_{23}P_{30}$ は直交する．

一方 $P_{12}P_1 = P_{12}P_2 = P_{12}O_2 = P_{12}O_3$ であって，$\angle P_0P_{12}P_{30} = \angle P_3P_{12}P_{30}$ であるから，直線 $O_1O_2$ は直線 $P_{12}P_{30}$ に直交する．同様に直線 $O_3O_0$ も直線 $P_{12}P_{30}$ に直交し，直線 $O_0O_1$ と直線 $O_2O_3$ は直線 $P_{01}P_{23}$ に直交する．従って，

四辺形 $O_0O_1O_2O_3$ は長方形となる．

直線 $P_0P_2$ と $P_{12}P_{30}$ の交点を $E$, 直線 $P_1P_3$ と $P_{12}P_{30}$ の交点を $F$ とおく．

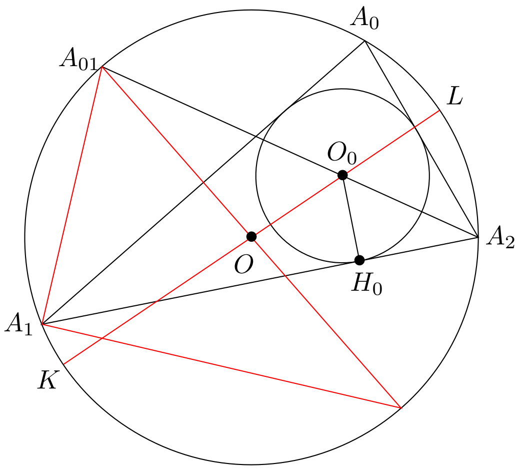
$\angle EP_{30}P_2 = \frac{1}{2}\angle P_1P_{30}P_2 = \angle FP_{30}P_1$，$\angle EP_2P_{30} = \angle P_0P_1P_{30} = FP_1P_{30}$.

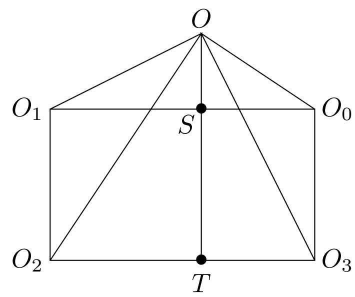
よって，$\angle P_{12}FP_3 = \angle P_{12}EP_3$. すなわち，直線 $P_{12}P_{30}$ は, 直線 $P_0P_2$ および直線 $P_1P_2$ と同じ角度で，逆向きに交わる．そこで，$P_0P_2$ と直交する直線 $\ell_{02}$ および $P_1P_3$ と直交する直線と直線 $\ell_{13}$ を考えると，直線 $O_0O_1$ は，それらと同じ角度で，逆向きに交わる．

一方直線 $O_0O_1$ は，直線 $O_0O_2$ および $O_1O_3$ とも同じ角度で，逆向きに交わる．したがって，$\ell_{13}$ と直線 $O_0O_2$ のなす角は，$\ell_{02}$ と直線 $O_1O_3$ のなす角に等しい．線分 $O_0O_2$ の $\ell_{13}$ への射影の長さが $r_0 + r_2$ で，線分 $O_1O_3$ の $\ell_{02}$ への射影の長さが $r_1 + r_3$ であり，$O_0O_2 = O_1O_3$ であるから，$r_0 + r_2 = r_1 + r_3$ が分かる．

## §6 証明その４（証明その３のバリエーション）

外接円上に 2 点 $K$, $L$ を，線分 $KL$ が点 $O$ と $O_0$ を通るように取る．



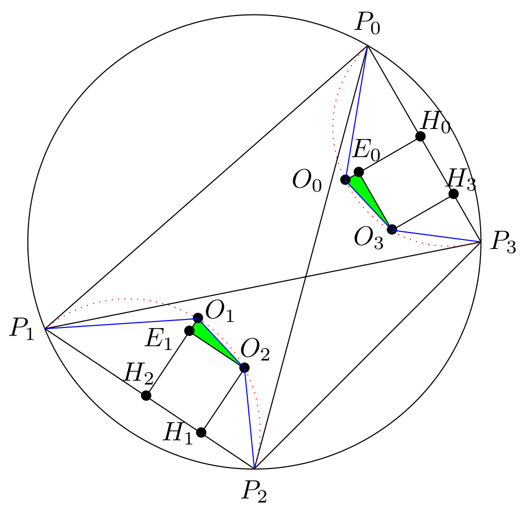

$\angle A_1A_{10}A_{01} = \angle H_0A_2O_0$ より $\dfrac{A_{01}A_1}{A_{01}A_{10}} = \dfrac{O_0H_0}{O_0A_2}$ となる．よって

$$\begin{aligned} 2Rr_0 &= A_{01}A_{10} \cdot O_0H_0 = A_{01}A_1 \cdot O_0A_2 \\ &= A_{01}O_0 \cdot O_0A_2 = KO_o \cdot O_0L \\ &= (R - OO_o)(R + OO_0) = R^2 - OO_0^2, \\ OO_0^2 &= R^2 - 2Rr_0 \ \Rightarrow\ OO_i^2 = R^2 - 2Rr_i \quad (i = 0, 1, 2, 3). \end{aligned}$$

$O$ を通って $O_1O_2$ に平行な直線が $O_0O_1$, $O_2O_3$ と交わる点を $S$, $T$ とおく．四辺形 $O_0O_3O_2O_1$ は長方形であるから，$OO_0^2 - OO_1^2 = O_0P^2 - O_1P^2 = O_3Q^2 - O_2Q^2 = OO_3^2 - OO_2^2$ より，$OO_0^2 + OO_2^2 = OO_1^2 + OO_3^2$. よって $0 = OO_0^2 + OO_2^2 - (OO_1^2 + OO_3^2) = 2R(r_1 + r_3 - r_0 - r_2)$ となるので，$r_0 + r_2 = r_1 + r_3$.

## §7 証明その５（内接円の半径の差）

$O_0$, $O_3$ から線分 $P_0P_3$ に下した垂線の足を $H_0$, $H_3$ とおき，$O_1$, $O_2$ から線分 $P_1P_2$ に下した垂線の足を $H_1$, $H_2$ とおく．$O_3$ から直線 $O_0H_0$ に下した垂線の足を $E_0$, $O_2$ から直線 $O_1H_1$ に下した垂線の足を $E_1$ とおく．$O_1$, $O_2$, $P_1$, $P_2$ は同一円周上にあるので（∵ 前節 (★)）




$$\begin{aligned} &(180^\circ - \angle P_1P_2O_2) + (180^\circ - \angle P_2O_2O_1) \\ &\quad = (180^\circ - \angle P_1P_2O_2) + \angle P_2P_1O_1 \\ &\quad = 180^\circ + \tfrac{1}{2}\angle P_0P_1P_2 - \tfrac{1}{2}\angle P_1P_2P_3. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} &(180^\circ - \angle P_0P_3O_3) + (180^\circ - \angle P_3O_3O_0) \\ &\quad = 180^\circ + \tfrac{1}{2}\angle P_2P_3P_0 - \tfrac{1}{2}\angle P_3P_0P_1. \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}\angle P_2P_3P_0 - \angle P_3P_0P_1 &= (180^\circ - \angle P_0P_1P_2) - (180^\circ - \angle P_2P_3P_0)\\ &= \angle P_0P_1P_2 - \angle P_1P_2P_3.\end{aligned}$$

よって $\angle P_0P_1P_2 \le \angle P_1P_2P_3$ のとき $\epsilon = 1$, そうでないとき $\epsilon = -1$ とおくと

$$\begin{aligned}\angle E_1O_2O_1 = \angle E_0O_3O_0 &= \tfrac{\epsilon}{2}(\angle P_1P_2P_3 - \angle P_0P_1P_2),\\ r_1 - r_2 &= \epsilon O_0E_0,\\ r_0 - r_3 &= \epsilon O_1E_1\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}2H_1H_2 &= (P_1H_2 - P_1H_1) + (P_2H_1 - P_2H_2) = (P_1H_2 - P_2H_2) - (P_1H_1 - P_2H_1)\\ &= (P_1P_3 - P_2P_3) - (P_1P_0 - P_2P_0)\\ &= (P_3P_1 - P_0P_1) - (P_3P_2 - P_0P_2) = 2H_3H_0,\\ \therefore E_1O_2 &= H_1H_2 = H_3H_0 = E_0O_3.\end{aligned}$$

よって三角形 $E_1O_2O_1$ と $E_0O_3O_0$ は合同で，$O_1E_1 = O_0E_0$ となる．よって $r_0 + r_3 = r_1 + r_2$.

**注意**. 円周上に 4 点 $A$, $B$, $C$, $D$ をとって，線分 $AB$，$BC$, $CD$, $DA$ で頂点を結ぶ，凸多角形となる場合と，$AB$ と $CD$ が交わる場合がある．前者において，対角線 $AC$ を加えて出来る 2 つの三角形の内接円の半径の和が，対角線 $BD$ を加えて出来る 2 つの三角形の内接円の半形の和に等しい，というのが Japanese theorem であった．後者の場合，すなわち上の図において $A = P_0$, $B = P_1$, $C = P_3$, $D = P_2$ というような場合に同じことを考えてみよう．そうすると，対角線 $BD = P_1P_2$ を加えてできる 2 つの三角形とは，$\triangle P_0P_1P_2$ と $\triangle P_3P_1P_2$ のことで，その場合は内接円の半径の差が，別の対角線 $AC = P_0P_3$ を加えて出来る 2 つの三角形の内接円の半径の差に等しい，という結果になる．というのがこの節で示したこととなる．

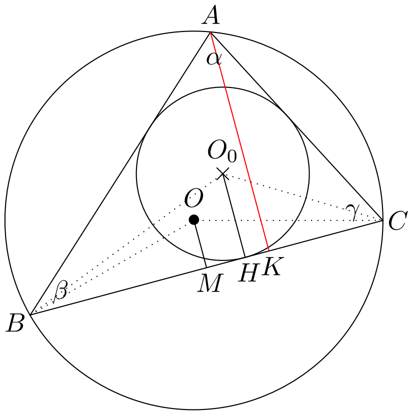
## §8 証明その６（三角関数を用いる）

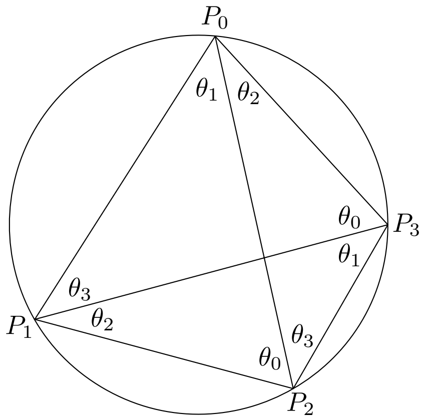
三上義夫氏（和算研究家 1875–1950）によるものに基づく紹介です（若干変えています）．
ますは，三角形の内接円の半径を求めましょう．

半径 $R$ の円に内接する三角形 $ABC$ に対し，$A$, $B$, $C$ の内角を $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ とおく．
三角形 $ABC$ の外心を $O$, 内心を $O_o$ とおき，$O$, $O_0$，$A$ から底辺 $BC$ に下ろした垂線の足を $M$, $H$, $K$ とおく．また，内接円，外接円の半径を $r$, $R$ とおく．

$$\begin{aligned}BC &= BH + CH = r\cot\tfrac{\beta}{2} + r\cot\tfrac{\gamma}{2} = r\frac{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\\ &= r\frac{\sin(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2})}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = r\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}},\\ BC &= 2BM = 2R\sin\alpha = 4R\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} \quad (\because \angle BOM = \tfrac{1}{2}\angle BOC = \alpha),\\ \therefore r &= 4R\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

円に内接する四辺形 $P_0P_1P_2P_3$ の話に戻ろう．




$\theta_i$：$P_iP_{i+1}$ の中心角（$P_0P_1P_2P_3$ は，円に内接する四辺形）

$$\begin{aligned} r_0 + r_2 &= 4R(\sin\tfrac{\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_3}{2}\sin\tfrac{\theta_1+\theta_2}{2} + \sin\tfrac{\theta_1}{2}\sin\tfrac{\theta_2}{2}\sin\tfrac{\theta_0+\theta_3}{2}) \\ &= 4R(\sin\tfrac{\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_1}{2}\sin\tfrac{\theta_2}{2}\cos\tfrac{\theta_3}{2} + \sin\tfrac{\theta_0}{2}\sin\tfrac{\theta_1}{2}\cos\tfrac{\theta_2}{2}\sin\tfrac{\theta_3}{2} \\ &\qquad + \sin\tfrac{\theta_0}{2}\cos\tfrac{\theta_1}{2}\sin\tfrac{\theta_2}{2}\sin\tfrac{\theta_3}{2} + \sin\tfrac{\theta_0}{2}\cos\tfrac{\theta_1}{2}\sin\tfrac{\theta_2}{2}\sin\tfrac{\theta_3}{2}). \end{aligned}$$

$r_0 + r_2$ は $\theta_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ に対称な式であるから, $r_1 + r_3$ も同じ式となって $r_0 + r_2 = r_1 + r_3$.

**注意**. 三角形の面積 $S$ は $\frac{1}{2}BC \cdot AK$ に等しく，$AK = AB\sin\beta = 2R\sin\beta\sin\gamma$ であるから

$$S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

また

$$r = 4R\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\gamma}{2}$$

で，$S = \frac{1}{2}r(AB + BC + CA)$ より

$$\begin{aligned} AB + BC + CA &= 8R\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2} \\ &= 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma). \end{aligned}$$

## 文献表

[1] 上垣渉, Japanese Theorem の起源と歴史，三重大学教育学部研究紀要 **52**(2001)，23–45.

[2] A. Ahuja, W. Uegaki and K. Matsushita, Japanese Theorem：A little known theorem with many proofs, PART I, II), Missouri Journal of Mathematical Sciences **16**(2004), 72–80, 149–158.

[3] J. M. Unger, A Collection of 30 Sangaku Problems, Department of East Asian Languages & Literatures, The Ohio State University, 2016.

[4] 小寺裕，和算の館，`http://www.wasan.jp`.

[5] 山口正義，やまぶき — 和算と歴史随想，`https://yamabukiwasan.sakura.ne.jp`.