

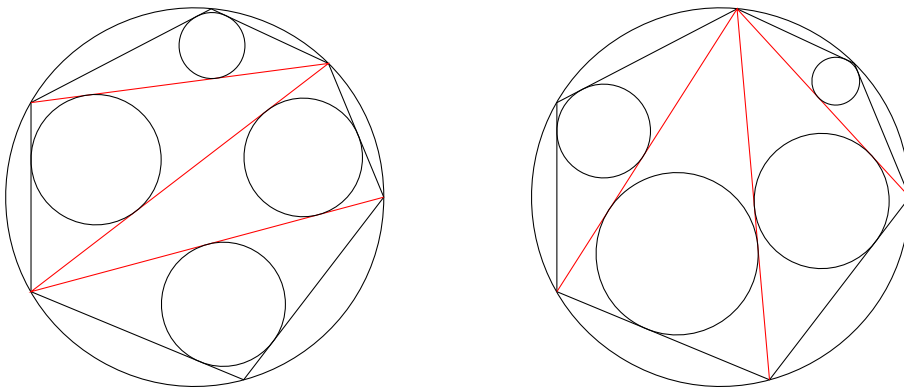
Japanese Theorem について

大島利雄（城西大学），2021 年 7 月

§1 Japanese Theorem とは

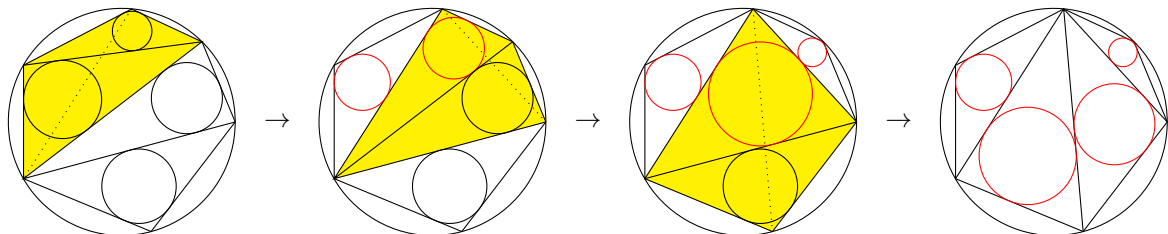
定理. 円に内接する多角形を描く．頂点を結ぶ対角線を適当に用いて多角形を三角形に分割したとき，そのすべての内接円の半径の和は分割の仕方によらない．

という美しい定理は Japanese theorem と呼ばれています．例えば，円に内接する六角形は，対角線を用いて 4 つの三角形に分割されますが，その 4 つの三角形の内接円の半径の総和は，分割の仕方に依存しません．



和算家藤田貞資の門弟丸山良元の門人であった丸山良寛という人が，寛政 12 年（西暦 1800 年）に東北地方の鶴岡山王社という神社に奉納した「算額」には，円に内接する四角形の場合に，上の問題が書かれていて，それが起源とされています（cf. [1]）．円に内接する四辺形において対角線で 2 つに分けられた三角形の 2 つの内接円の半径が 2 と 3 であったとき，もう 1 つの対角線で分けられた三角形の内接円の一方の半径が 1 なら他方はいくつ？ というような問題です．内接円の半径の和が分割によらないことが用いられています．

Japanese theorem は，円に内接する四角形の場合が基本で，円に内接する一般の多角形の場合は，四角形の場合から分かります．上の例では，四角形の場合の結果を順に適用していけば分かります（詳しくは後述）．



江戸時代には和算が庶民にまで普及し，神社仏閣の絵馬堂に奉納される絵馬には，和算の問題やそれを解いたものを算額（数学の絵馬）として奉納したものがありませんでした．書物に比べると，はるかに手軽な発表の形態で，広く庶民の目にとまる公開の手段だったのでしょう．

完全な形で現存する最古の算額は，1686 年に京都の北野天満宮に奉納されたもので，絵馬（1754 年に描かれた）の絵具がはがれて下から算額が現れ，1957 年に発見されました．失われた算額は日本中に沢山あったこ

と想像されます。京都の御香宮に掲げられたある算額の問題は、その解が元禄 4 年 (1691 年) に八坂神社に算額として奉納されました。道後温泉の伊佐爾波神社には、1803 年から 1937 年までの 22 面もの算額が残されています。埼玉県内でも現存する算額が 100 面ほど確認されているようです。東京には、天明 9 年 (1788 年) に奉納された墓石に掘られた珍しい算額もあります。算額では、円や線を使った分かりやすい幾何の問題 (易しいという意味ではありません) が多く、人の目を引くように、色づけされた綺麗なものが沢山あります。

和算や算額については、書物やインターネットから多くの情報を得ることができます。また、Japanese theorem は、何通りかの証明と共に歴史的観点からも詳しく [1] に書かれており、その著者も加わった英文の [3] も何通りかの証明が分かりやすく書かれています。一方、このノートは、Japanese theorem を取り上げ、現代の数学の教育に役立つことがあるかもしれない、という教育的な観点も入れて [1] や [3] などをもとに書きました (他にも面白い問題が沢山あります。cf. [4, 5, 7, 9, 10])。この節の残りでは、多角形についての Japanese theorem が、四角形の場合から分かることを示しましょう

円に内接する多角形を $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ とします (n 角形)。対角線が三角形の辺となっているとき、その対角線を共有する 2 つの三角形を合わせた四角形に注目して、もう一つの対角線に取り替えた三角形分割に取り替える操作をフリップと呼ぶことしましょう。フリップは、分割に現れる対角線を 1 つ指定すると定まり、そのフリップで出現した新たな対角線を指定したフリップで元に戻ります。その両方で内接円の半径の総和が等しいことは、四角形の場合から分かります。したがって、

命題. 円に内接する多角形の対角線による三角形分割は、フリップを続けることで互いに移りあう。

ということから、Japanese theorem は、四角形の場合に示すことができればよいことになります。

命題の証明. 円に内接する n 角形の任意の三角形分割は、適当なフリップを続けて、 P_0 を端点とする $(n-3)$ 本の対角線による三角形分割に移せることを示せばよい。

P_0 を端点とする分割に現れる三角形の辺を $P_0P_{j_\nu}$ ($\nu = 1, \dots, m$) とおく。ただし

$$j_0 = 0 < j_1 = 1 < j_2 < \dots < j_{m-1} < \dots < j_{m-1} < j_m = n-1.$$

$m = n-1$ ならば目的の三角形分割に他ならない。 $j_{m+1} = 0$ とおく。 $m < n-1$ ならば $j_{i+1} > j_i + 1$ となっている i がある。このとき、 P_0P_i を端点とする三角形の頂点 $P_{i'}$ で $i' > j_i$ となるものは、 $i' = j_{i+1}$ で与えられることが分かる ($P_{j_i}P_{i'}$ と $P_0P_{i'}$ と $P_0P_{j_{i+1}}$ が分割三角形の辺となっていることから)。対角線 $P_{j_i}P_{j_{i+1}}$ によるフリップを行うと P_0 を端点とする対角線で分割三角形の辺となるものの個数を 1 つ増やすことができる。この手順を繰り返せばよい。

最初の六角形の例は、この手順の例となっています。

逆をたどれば、任意の三角形分割は、 P_0 を端点とする $(n-3)$ 本の対角線による三角形分割からフリップを使って移すことができます。

注意. 1) 異なった三角形分割は、高々 $2(n-3)-1$ 回のフリップでつながることができる。実際、一方の分割に現れる対角線の頂点となっているものを P_0 として、一方に上の命題の証明の手順を使い、その後、他方にその手順の逆を使えばよい。

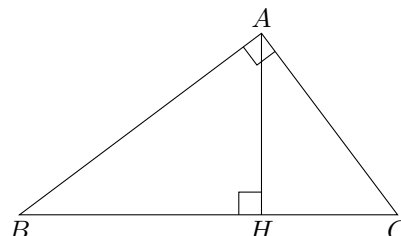
2) 円に内接する $(n+2)$ 角形 (凸 $(n+2)$ 角形でよい) において、対角線による三角形分割のやり方の数は、カタラン数 $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ で与えられる (cf. [8])。

§2 いくつかの初等幾何

頂角 A を直角とする直角三角形 $\triangle ABC$ を考える.

頂点 A から底辺 BC に下ろした垂線の足を H とすると,
 $\triangle HBA \sim \triangle ABC \sim \triangle HAC$ (互いに相似) であるから

$$\begin{aligned}\frac{AB}{BC} &= \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC, \\ \frac{AC}{BC} &= \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \cdot BC, \\ AB^2 + AC^2 &= (BH + CH)BC = BC^2 \\ \therefore AB^2 + AC^2 &= BC^2 \quad (\text{ピタゴラスの定理})\end{aligned}$$



円周上に点 B, C をとる.

弦 BC で区切った同じ側の円周上に点 A, D を取る.

円の中心を O とし, 円周上の点 A を線分 AA' の中点が O となるようにとる. このとき

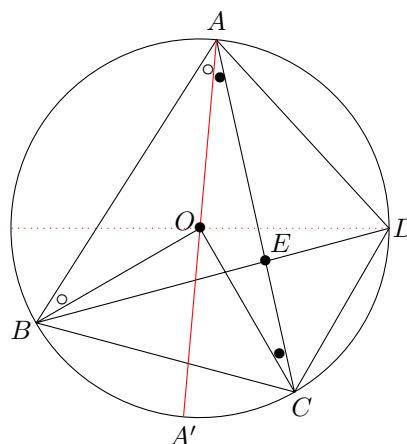
$$\begin{aligned}\angle BOC &= \angle A'OB + \angle A'OC \\ &= \angle OAB + \angle OBA + \angle OAC + \angle OCA \\ &= 2\angle OAB + 2\angle OAC = 2\angle BAC.\end{aligned}$$

よって弦 BC の円周角 $\angle BAC$ は, 弦 BC の中心角 $\angle BOC$ の半分に等しい (この中心角は, A を含まない側の弧 BC に対する中心角). 特に

弦 BC の円周角は互いに等しい.

すなわち

$$\angle BAC = \angle BDC.$$



円に内接する四角形 $ABCD$ を考える. 直線 AD と BC の交点を E とおくと

$$\triangle EAB \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow AE \cdot CE = BE \cdot DE \quad (\text{方べきの定理})$$

四角形の内角 $\angle BAD$ と内角 $\angle BCD$ に対する中心角は, 弦 BD の A を含まない側の中心角と C を含まない側の中心角に対応し, それらは互いに補角 (和が 360°) になっている. よって

円に内接する四角形の対角の位置にある 2 頂点の内角の和は 180°

となります.

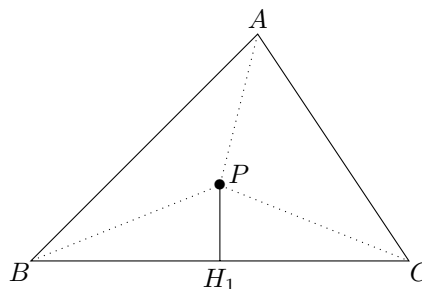
三角形 ABC の内部の点 P から BC, CA, AB に下ろした垂線の足を H_1, H_2, H_3 とすると, 三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(BC \cdot PH_1 + CA \cdot PH_2 + AB \cdot PH_3)$$

となる.

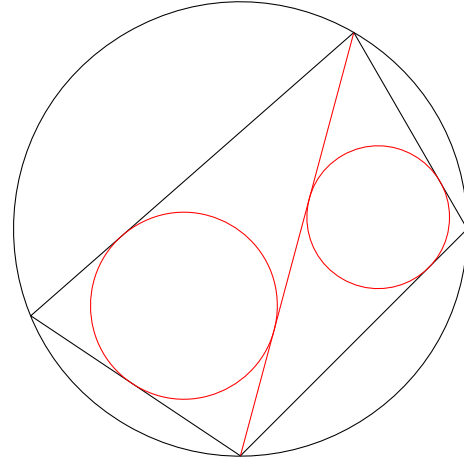
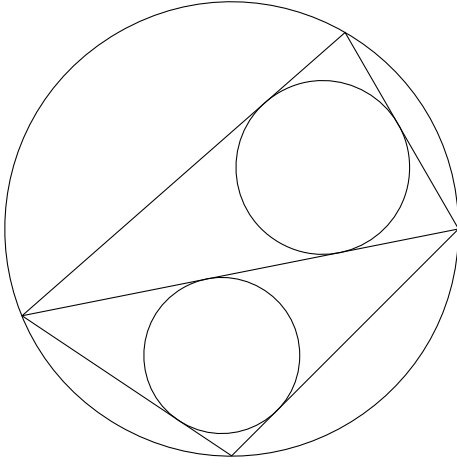
特に P を三角形の内心とし, 内心円の半径を r とおくと

$$S = \frac{r}{2}(BC + CA + AB).$$



§3 丸山良寛の定理の証明 その 1（対角線上の接点間は等距離）

四角形の場合の Japanese theorem の証明を、以下考えることにします。
最初は、和算家の吉田為幸（1819–1892）が書いた証明です。



まず、記号の準備です。

$P_0P_1P_2P_3$: O を中心とする円に内接する四角形

$\bar{i} \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (i - \bar{i} \in 4\mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z})$

$P_i := P_{\bar{i}} \quad (i \in \mathbb{Z})$

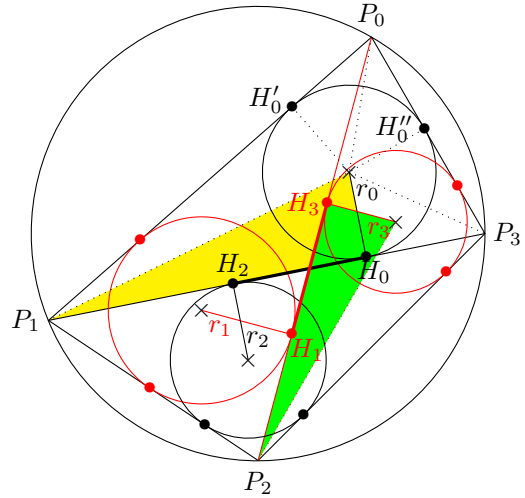
O_i : 三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の内接円の中心

r_i : 三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の内接円の半径

H_i : 三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の内接円が辺 $P_{i+1}P_{i-1}$ と接する点

定理 (Japanese theorem).

$$r_0 + r_2 = r_1 + r_3.$$



$$P_0H'_0 = P_0H''_0 \text{ etc. } \Rightarrow$$

$$P_0P_1 - P_3P_0 = P_0H'_0 + P_1H'_0 - (P_0H''_0 + P_3H''_0)$$

$$= P_1H'_0 - P_3H''_0 = P_1H_0 - P_3H_0 \text{ etc. } \Rightarrow$$

$$P_0P_1 + P_2P_3 - P_1P_2 - P_3P_0 = P_1H_0 - P_3H_0 + P_3H_2 - P_1H_2 = 2(P_1H_0 - P_1H_2)$$

$$= P_0H_1 - P_2H_1 + P_2H_3 - P_0H_3 = 2(P_0H_1 - P_0H_3),$$

$$\angle O_0P_1H_0 = \frac{1}{2}\angle P_0P_1P_3 = \frac{1}{2}\angle P_0P_2P_3 = \angle O_3P_2H_3 \text{ etc. } \Rightarrow$$

$$\frac{r_0}{P_1H_0} = \frac{r_3}{P_2H_3}, \quad r_0P_2H_3 = r_3P_1H_0 \quad (\triangle O_0P_1H_0 \sim \triangle O_3P_2H_3),$$

$$\frac{r_0}{P_3H_0} = \frac{r_1}{P_2H_1}, \quad r_0P_2H_1 = r_1P_3H_0 \quad (\triangle O_0P_3H_0 \sim \triangle O_1P_2H_1),$$

$$\frac{r_2}{P_1H_2} = \frac{r_3}{P_0H_3}, \quad r_2P_0H_3 = r_3P_1H_2 \quad (\triangle O_2P_1H_2 \sim \triangle O_3P_0H_3),$$

$$\begin{aligned}\frac{r_2}{P_3H_2} &= \frac{r_1}{P_0H_1}, \quad r_2P_0H_1 = r_1P_3H_2 \quad (\triangle O_2P_3H_2 \sim \triangle O_1P_0H_1), \\ r_0(P_2H_3 - P_2H_1) + r_2(P_0H_1 - P_0H_3) &= r_1(P_3H_2 - P_3H_0) + r_3(P_1H_0 - P_1H_2), \\ (r_0 + r_1)(P_0H_1 - P_0H_3) &= (r_1 + r_3)(P_1H_0 - P_1H_2), \\ r_0 + r_2 &= r_1 + r_3.\end{aligned}$$

注意. 1) $H_0H_2 = H_1H_3$ (円に内接することは使っていない)

2) $H_0 = H_2$ となるときは, P_0 を外接円周上少しずらして極限を考えればよい (r_i は連続的に変化).

§4 証明その2 (面積, カルノーの定理, 多角形の場合の和の値)

s_i : 三角形 $P_iP_{i+1}P_{i-1}$ の面積

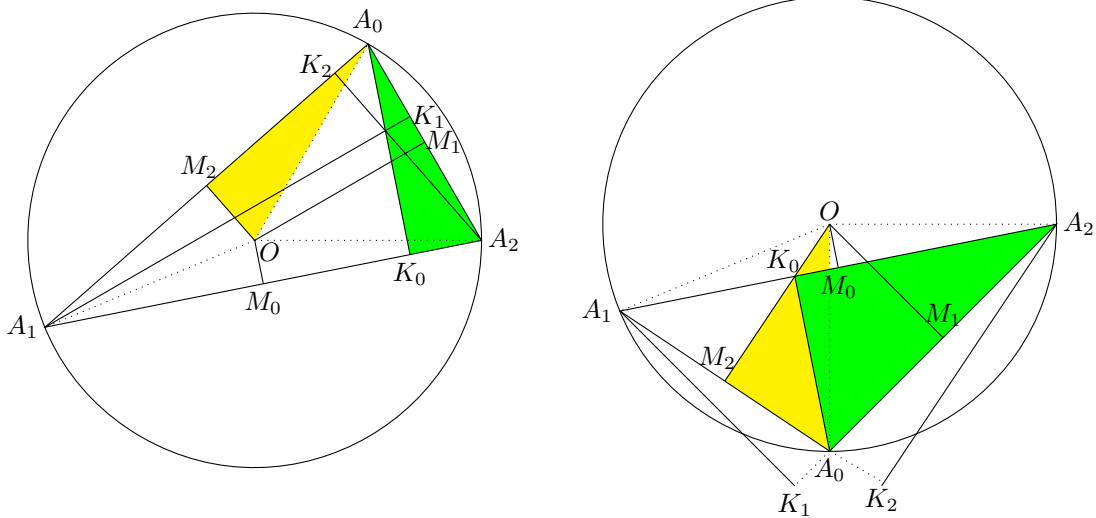
H_{ij} : O から P_iP_j に下ろした垂線の足

$$2s_0 = r_0(P_0P_1 + P_1P_3 + P_3P_0) = 2\triangle OP_0P_1 + 2\triangle OP_1P_3 + 2\triangle OP_3P_0$$

$$A_0 = A_3 := P_0, \quad A_1 := P_1, \quad A_2 = A_{-1} := P_2$$

K_i : A_i から $A_{i-1}A_{i+1}$ に下ろした垂線の足

M_i : O から $A_{i-1}A_{i+1}$ に下ろした垂線の足



外心が三角形の内部にあるとき (内接円の半径を r_0 とする)

$$\angle A_0OM_2 = \frac{1}{2}\angle A_0OA_1 = \angle A_0A_2K_0 = \angle A_1A_2K_1 \quad \text{etc.}$$

$$\frac{OM_2}{R} = \frac{A_2K_0}{A_2A_0} = \frac{A_2K_1}{A_1A_2} = \frac{A_2K_0 + A_2K_1}{A_2A_0 + A_1A_2}$$

$$R(A_2K_0 + A_2K_1) = OM_2(A_2A_0 + A_1A_2),$$

$$R(A_1K_2 + A_1K_0) = OM_1(A_1A_2 + A_1A_0),$$

$$R(A_0K_1 + A_0K_2) = OM_0(A_0A_1 + A_2A_0),$$

$$\text{ここで } r(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) = 2s_0 = OM_0 \cdot A_1A_2 + OM_1 \cdot A_2A_0 + OM_2 \cdot A_0A_1,$$

$$\therefore (R + r)(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) = (OM_0 + OM_1 + OM_2)(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_1),$$

$$R + r_0 = OM_1 + OM_2 + OM_3.$$

外心が三角形の外で、頂角 A_0 内にあるとき（内接円の半径を r_2 とする）

$$\begin{aligned}
R(A_2K_0 + A_2K_1) &= OM_2(A_2A_0 + A_1A_2), \\
R(A_1K_2 + A_1K_0) &= OM_1(A_1A_2 + A_1A_0), \\
-R(A_0K_1 + A_0K_2) &= -OM_0(A_0A_1 + A_2A_0), \\
r_2(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_1) &= 2s_2 = OM_2 \cdot A_0A_1 + OM_1 \cdot A_2A_0 - OM_0 \cdot A_1A_2, \\
R(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) &= OM_2(A_2A_0 + A_1A_2) + OM_1(A_1A_2 + A_1A_0) - OM_0(A_0A_1 + A_2A_0), \\
(R + r_2)(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0) &= (OM_1 + OM_2 - OM_0)(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_0), \\
R + r_2 &= OM_1 + OM_2 - OM_0.
\end{aligned}$$

以上から、一般に以下のことが成り立つ。

命題 (カルノーの定理). 三角形 $A_0A_1A_2$ において、その外接円と内接円の半径を、それぞれ R, r とし、内心を O_0 とおく。外心 O から頂点 A_i の底辺に下ろした垂線の長さを h_i とする。このとき

$$R + r = \begin{cases} h_0 + h_1 + h_2 & (O \text{ が三角形の内部または辺上にあるとき}) \\ h_0 + h_1 + h_2 - 2h_i & (\text{線分 } O_0O \text{ が辺 } A_{i-1}A_{i+1} \text{ と交わる時}) \end{cases}$$

O を中心とする円に内接する四角形 $P_0P_1P_2P_3$ について（最初の記号に戻る）。

O から線分 P_iP_j に下ろした垂線の足を M_{ij} とおく。

O が四角形 $P_0P_1P_2P_3$ の内部にあるとき：

$$\begin{aligned}
R + r_0 &= OM_{01} + OM_{30} \pm OM_{13} \quad (+ \text{ は } O \text{ が三角形 } P_0P_1P_3 \text{ の内部にあるとき}) \\
R + r_2 &= OM_{12} + OM_{23} \mp OM_{13}, \\
2R + r_0 + r_2 &= OM_{01} + OM_{12} + OM_{23} + OM_{30}.
\end{aligned}$$

O が線分 P_2P_3 で外接円を二分したときの四角形を含まない側にあるとき：

$$\begin{aligned}
R + r_0 &= OM_{01} + OM_{30} - OM_{13} \\
R + r_2 &= OM_{13} + OM_{12} - OM_{23} \\
2R + r_0 + r_2 &= OM_{01} + OM_{12} - OM_{23} + OM_{30}.
\end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned}
r_0 + r_2 = r_1 + r_3 &= \sum_{i=0}^4 (-1)^{\epsilon_{i,i+1}} OM_{i,i+1} - 2R, \\
\epsilon_{i,i+1} &:= \begin{cases} -1 & (O \text{ は弧 } P_iP_{i+1} \text{ と外接円で囲まれた四角形を含まない領域内にある}) \\ 1 & (\text{上以外}) \end{cases}
\end{aligned}$$

注意. 1) 上の等式は、四角形を円に内接する N 角形の場合に拡張される。ただし、左辺は、頂点を適当に結んで N 角形を $(N-2)$ 個の三角形に分割したときの三角形の内接円の半径の和。右辺の和は $i = N$ までとし、 -2 を $-(N-2)$ と変える。

2) O が内接 N 角形の内部にあるときの等式から、内部にないときの公式は次のように容易に導ける。すなわち、 O は弧 P_iP_{i+1} と外接円で囲まれた四角形を含まない領域内にあるならば、弧 P_iP_{i+1} 上に点 P'_i を、三角形 $P_iP'_iP_{i+1}$ 内に O を含むように選んで、この三角形の場合と頂点 P'_i を加えた $(N+1)$ 角形の場合との等式の差を考えればよい。

§5 証明その3（4つの内接円の中心は長方形の頂点）

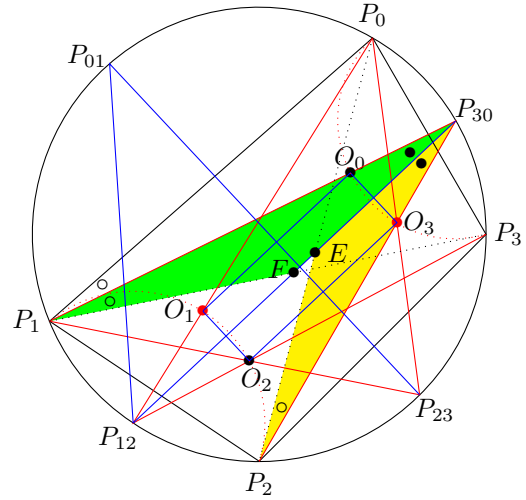
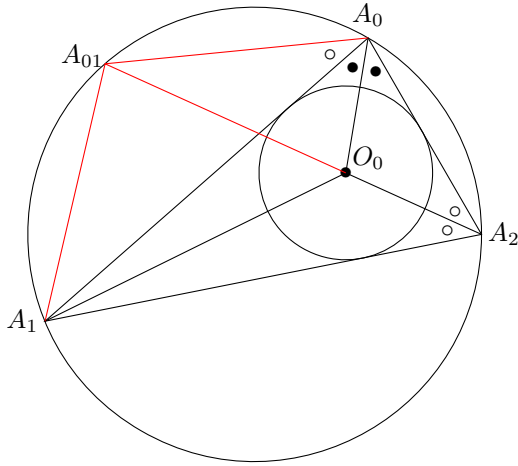
A_{01} : 直線 A_2O_0 の延長線が外接円と交わる点

$\angle A_{01}A_2A_0 = \angle A_{01}A_2A_1$ であるから, A_{01} は三角形の外接円の外側の円弧 A_0A_1 の中点となる.

$\angle A_{01}O_0A_0 = \angle O_0A_0A_2 + \angle O_0A_2A_0 = \angle O_0A_0A_1 + \angle A_{01}A_2A_1 = \angle O_0A_0A_1 + \angle A_{01}A_0A_1 = \angle A_{01}A_0O_0$.

よって

$$A_{01}O_0 = A_{01}A_0 = A_{01}A_1. \quad (\star)$$



P_{ii+1} : 弧 P_iP_{i+1} の中点. 線分 P_iP_{i+1} と線分 $P_{ii+1}P_{i-1}$ とが交わるように定める ($P_{30} := P_{34}$).

$$\begin{aligned} \angle P_{01}P_{12}P_{30} &= \angle P_0P_{12}P_{01} + \angle P_0P_{12}P_{30} = \frac{1}{2}\angle P_0P_{12}P_1 + \frac{1}{2}\angle P_0P_{12}P_3 \\ &= \frac{1}{4}\angle P_0OP_1 + \frac{1}{4}\angle P_3OP_0, \end{aligned}$$

$$\angle P_{30}P_{12}P_0 = \frac{1}{4}\angle P_1OP_2 + \frac{1}{4}\angle P_2OP_3,$$

$$\therefore \angle P_{01}P_{12}P_{30} + \angle P_{30}P_{12}P_0 = \frac{1}{4}(\angle P_0OP_1 + \angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \angle P_3OP_0) = 90^\circ.$$

よって

直線 $P_{01}P_{23}$ と直線 $P_{23}P_{30}$ は直交する.

一方, $P_{12}P_1 = P_{12}P_2 = P_{12}O_2 = P_{12}O_3$ であって, $\angle P_0P_{12}P_{30} = \angle P_3P_{12}P_{30}$ であるから, 直線 O_1O_2 は直線 $P_{12}P_{30}$ に直交する. 同様に直線 O_3O_0 も直線 $P_{12}P_{30}$ に直交し, 直線 O_0O_1 と直線 O_2O_3 は直線 $P_{01}P_{23}$ に直交する. 従って,

四角形 $O_0O_1O_2O_3$ は長方形となる.

直線 P_0P_2 と $P_{12}P_{30}$ の交点を E , 直線 P_1P_3 と $P_{12}P_{30}$ の交点を F とおく.

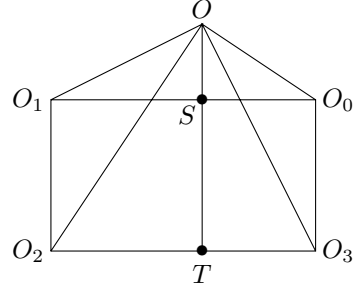
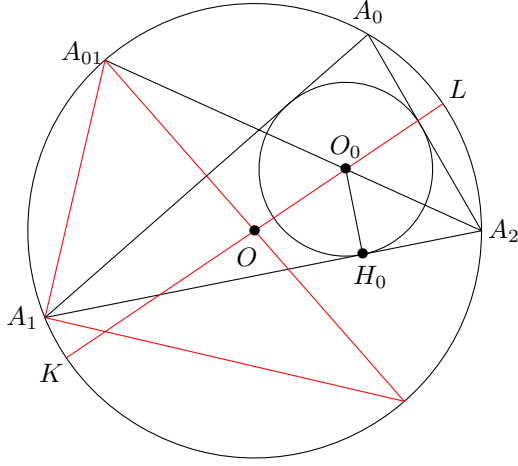
$$\angle EP_3P_2 = \frac{1}{2}\angle P_1P_3P_2 = \angle FP_3P_1, \quad \angle EP_2P_3 = \angle P_0P_1P_3 = \angle FP_1P_3.$$

よって, $\angle P_{12}FP_3 = \angle P_{12}EP_3$. すなわち, 直線 $P_{12}P_{30}$ は, 直線 P_0P_2 および直線 P_1P_2 と同じ角度で, 逆向きに交わる. そこで, P_0P_2 と直交する直線 ℓ_{02} および P_1P_3 と直交する直線と直線 ℓ_{13} を考えると, 直線 O_0O_1 は, それらと同じ角度で, 逆向きに交わる.

一方, 直線 O_0O_1 は, 直線 O_0O_2 および O_1O_3 と同じ角度で, 逆向きに交わる. したがって, ℓ_{13} と直線 O_0O_2 のなす角は, ℓ_{02} と直線 O_1O_3 のなす角に等しい. 線分 O_0O_2 の ℓ_{13} への射影の長さが $r_0 + r_2$ で, 線分 O_1O_3 の ℓ_{02} への射影の長さが $r_1 + r_3$ であり, $O_0O_2 = O_1O_3$ であるから, $r_0 + r_2 = r_1 + r_3$ が分かる.

§6 証明その4（証明その3のバリエーション）

外接円上に2点 K, L を、線分 KL が点 O と O_0 を通るように取る．



$\angle A_1 A_{10} A_{01} = \angle H_0 A_2 O_0$ より $\frac{A_{01} A_1}{A_{01} A_{10}} = \frac{O_0 H_0}{O_0 A_2}$ となる． よって

$$\begin{aligned} 2Rr_0 &= A_{01} A_{10} \cdot O_0 H_0 = A_{01} A_1 \cdot O_0 A_2 \\ &= A_{01} O_0 \cdot O_0 A_2 = K O_0 \cdot O_0 L \\ &= (R - OO_0)(R + OO_0) = R^2 - OO_0^2, \\ OO_0^2 &= R^2 - 2Rr_0 \quad (\text{チャップルの定理}) \Rightarrow OO_i^2 = R^2 - 2Rr_i \quad (i = 0, 1, 2, 3). \end{aligned}$$

O を通って $O_1 O_2$ に平行な直線が $O_0 O_1, O_2 O_3$ と交わる点を S, T とおく． 四角形 $O_0 O_3 O_2 O_1$ は長方形であるから、 $OO_0^2 - OO_1^2 = O_0 P^2 - O_1 P^2 = O_3 Q^2 - O_2 Q^2 = OO_3^2 - OO_2^2$ より、 $OO_0^2 + OO_2^2 = OO_1^2 + OO_3^2$ ． よって $0 = OO_0^2 + OO_2^2 - (OO_1^2 + OO_3^2) = 2R(r_1 + r_3 - r_0 - r_2)$ となるので、 $r_0 + r_2 = r_1 + r_3$ ．

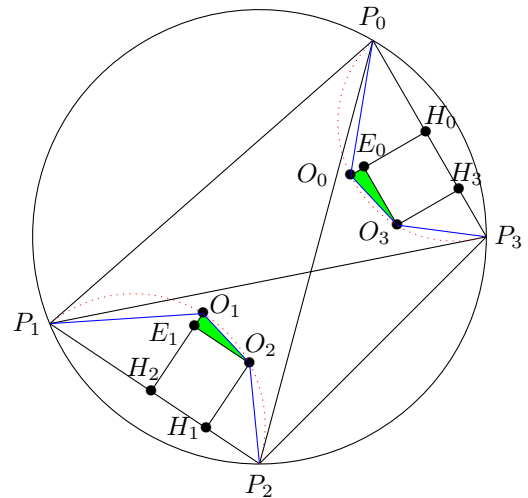
§7 証明その5（内接円の半径の差）

O_0, O_3 から線分 $P_0 P_3$ に下した垂線の足を H_0, H_3 とおき、 O_1, O_2 から線分 $P_1 P_2$ に下した垂線の足を H_1, H_2 とおく． O_3 から直線 $O_0 H_0$ に下した垂線の足を E_0 、 O_2 から直線 $O_1 H_1$ に下した垂線の足を E_1 とおく． O_1, O_2, P_1, P_2 は同一円周上にあるので（ \because 前節（★））

$$\begin{aligned} & (180^\circ - \angle P_1 P_2 O_2) + (180^\circ - \angle P_2 O_2 O_1) \\ &= (180^\circ - \angle P_1 P_2 O_2) + \angle P_2 P_1 O_1 \\ &= 180^\circ + \frac{1}{2} \angle P_0 P_1 P_2 - \frac{1}{2} \angle P_1 P_2 P_3. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} & (180^\circ - \angle P_0 P_3 O_3) + (180^\circ - \angle P_3 O_3 O_0) \\ &= 180^\circ + \frac{1}{2} \angle P_2 P_3 P_0 - \frac{1}{2} \angle P_3 P_0 P_1. \end{aligned}$$



一方

$$\begin{aligned}\angle P_2P_3P_0 - \angle P_3P_0P_1 &= (180^\circ - \angle P_0P_1P_2) - (180^\circ - \angle P_2P_3P_0) \\ &= \angle P_0P_1P_2 - \angle P_1P_2P_3.\end{aligned}$$

よって $\angle P_0P_1P_2 \leq \angle P_1P_2P_3$ のとき $\epsilon = 1$, そうでないとき $\epsilon = -1$ とおくと

$$\begin{aligned}\angle E_1O_2O_1 &= \angle E_0O_3O_0 = \frac{\epsilon}{2}(\angle P_1P_2P_3 - \angle P_0P_1P_2), \\ r_1 - r_2 &= \epsilon O_0E_0, \\ r_0 - r_3 &= \epsilon O_1E_1\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}2H_1H_2 &= (P_1H_2 - P_1H_1) + (P_2H_1 - P_2H_2) = (P_1H_2 - P_2H_2) - (P_1H_1 - P_2H_1) \\ &= (P_1P_3 - P_2P_3) - (P_1P_0 - P_2P_0) \\ &= (P_3P_1 - P_0P_1) - (P_3P_2 - P_0P_2) = 2H_3H_0, \\ \therefore E_1O_2 &= H_1H_2 = H_3H_0 = E_0O_3.\end{aligned}$$

よって三角形 $E_1O_2O_1$ と $E_0O_3O_0$ は合同で, $O_1E_1 = O_0E_0$ となる. よって $r_0 + r_3 = r_1 + r_2$.

注意. 円周上に 4 点 A, B, C, D をとって, 線分 AB, BC, CD, DA で頂点を結ぶ, 凸多角形となる場合と, AB と CD が交わる場合がある. 前者において, 対角線 AC を加えて出来る 2 つの三角形の内接円の半径の和が, 対角線 BD を加えて出来る 2 つの三角形の内接円の半径の和に等しい, というのが Japanese theorem であった. 後者の場合, すなわち上の図において $A = P_0, B = P_1, C = P_3, D = P_2$ というような場合に同じことを考えてみよう. そうすると, 対角線 $BD = P_1P_2$ を加えてできる 2 つの三角形とは, $\triangle P_0P_1P_2$ と $\triangle P_3P_1P_2$ のことで, その場合は内接円の半径の差が, 別の対角線 $AC = P_0P_3$ を加えて出来る 2 つの三角形の内接円の半径の差に等しい, という結果になる. というのがこの節で示したこととなる.

§8 証明その 6 (三角関数を用いる. 傍接円への拡張)

三上義夫 (和算研究家 1875–1950) に基づく証明の紹介です (若干変えています).

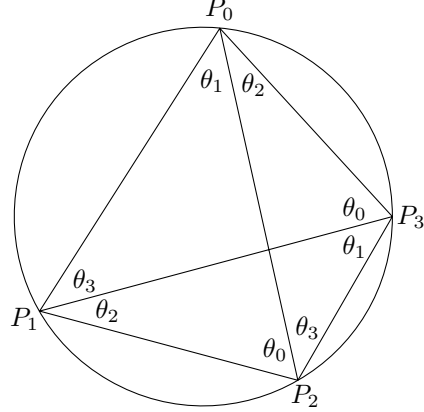
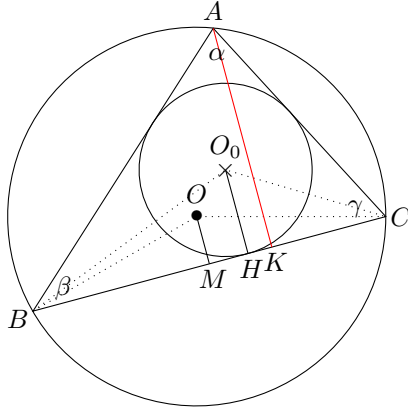
まずは, 三角形の内接円の半径を求めましょう.

半径 R の円に内接する三角形 ABC に対し, A, B, C の内角を α, β, γ とおく.

三角形 ABC の外心を O , 内心を O_o とおき, O, O_o, A から底辺 BC に下ろした垂線の足を M, H, K とおく. また, 内接円, 外接円の半径を r, R とおく.

$$\begin{aligned}BC &= BH + CH = r \cot \frac{\beta}{2} + r \cot \frac{\gamma}{2} = r \frac{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} \\ &= r \frac{\sin(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2})}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = r \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}, \\ BC &= 2BM = 2R \sin \alpha = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (\because \angle BOM = \frac{1}{2} \angle BOC = \alpha), \\ \therefore r &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

円に内接する四角形 $P_0P_1P_2P_3$ の話に戻ろう.



$\theta_i : P_iP_{i+1}$ の中心角 ($P_0P_1P_2P_3$ は, 円に内接する四角形)

$$\begin{aligned} r_0 + r_2 &= 4R(\sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_3}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_0 + \theta_3}{2}) \\ &= 4R(\sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} + \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2} \\ &\quad + \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2} + \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2}). \end{aligned}$$

$r_0 + r_2$ は θ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) に対称な式であるから, $r_1 + r_3$ も同じ式となって $r_0 + r_2 = r_1 + r_3$.

$\triangle ABC$ の辺 BC に接する傍心円の半径 r' を求めよう.
 A, B, C の内角を α, β, γ とし, 外接円の半径を R , 傍心円の中心 O' から辺 BC に下ろした垂線の足を H' とおくと

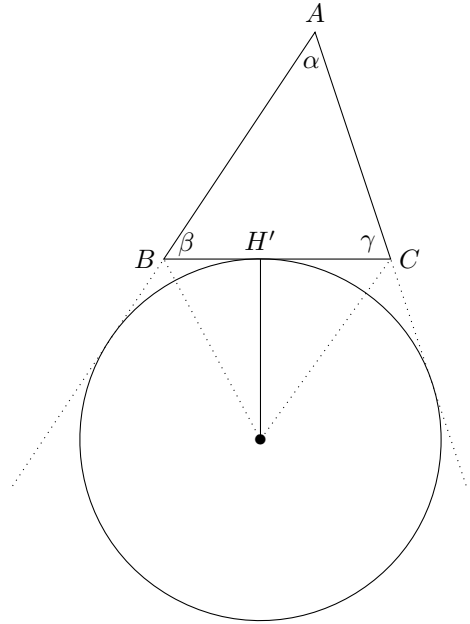
$$\begin{aligned} BC &= r' \cot \frac{180^\circ - \beta}{2} + r' \cot \frac{180^\circ - \gamma}{2} \\ &= r'(\tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2}) \\ &= r' \frac{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = r' \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}. \\ BC &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \\ r' &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

定理. 円に内接する四角形において, 対角線で四角形を三角形に分けたとき, 対角線に接する三角形の傍接円の半径の和は, 対角線の選び方に依らない.

半径 R の円に内接する四角形 $P_0P_1P_2P_3$ を考える.
 辺 P_1P_3 と接する $\triangle P_0P_1P_3$ と $\triangle P_1P_2P_3$ の傍接円の半径を r'_0, r'_2 とおく.

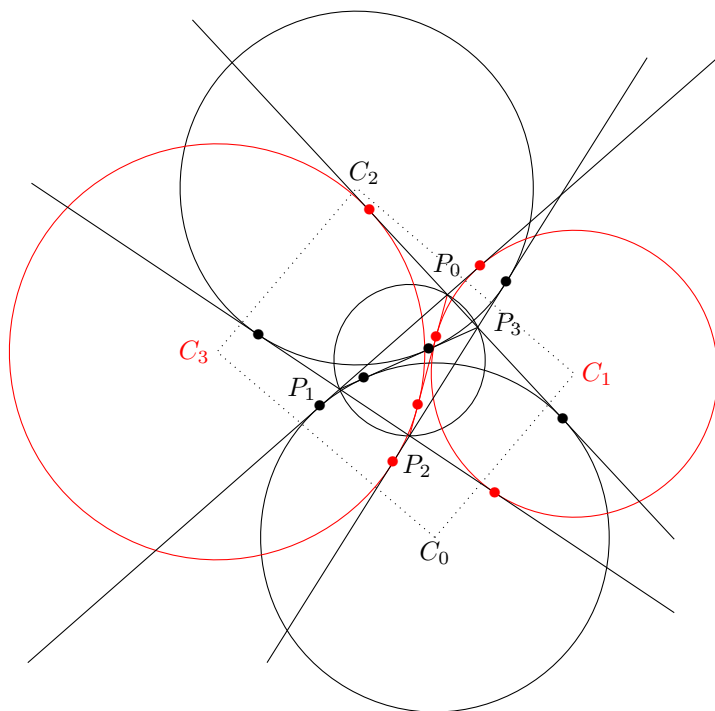
$$\begin{aligned} r'_0 + r'_2 &= 4R(\cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_0 + \theta_3}{2}) \\ &= 4R(\cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2} + \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} \\ &\quad + \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} + \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2}). \end{aligned}$$

となるので, もう 1 つの対角線を選んでも同じ値となることが分かる.



$P_0P_1P_2P_3$: 円に内接する四角形
 $P_{-1} = P_3, P_4 = P_0$
 C'_i : $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ の傍接円 ($\angle P_i$ 内)
 r'_i : C'_i の半径

$$r'_0 + r'_2 = r'_1 + r'_3.$$



注意. 1) 筆者は傍接円の場合に拡張できることに気づいたが, 知られていることかもしれない.
 2) 三角形 ABC の面積 S は $\frac{1}{2}BC \cdot AK$ に等しく, $AK = AB \sin \beta = 2R \sin \beta \sin \gamma$ であるから

$$S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

また

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

で, $S = \frac{1}{2}r(AB + BC + CA)$ より

$$\begin{aligned}
 AB + BC + CA &= 8R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\
 &= 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).
 \end{aligned}$$

3) $\angle A$ 内の傍接円の半径を r' とすると

$$\begin{aligned}
 r' &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\
 S &= \frac{1}{2}r'(AB + AC - BC), \\
 AB + AC - BC &= 8R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\
 &= 2R(\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha).
 \end{aligned}$$

§9 発展

1. 正六角形の三角形分割に対して, 内接円の半径を求めよ.

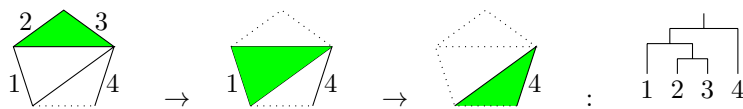
2. 凸五角形, 凸六角形, 凸八角形の (頂点を結ぶ互いに交わらない線分で結んでの) 三角形分割の場合の数を求めよ.
3. 正 n 角形の対角線による三角形分割を考える. 回転や裏返して移るものは同じ分割と考えるとき, 三角形分割の種類を n が小さいときに具体的に分類せよ ($n = 4, 5$ は 1 種類, $n = 6$ は 3 種類).

いろいろな考え方があがるが, たとえば

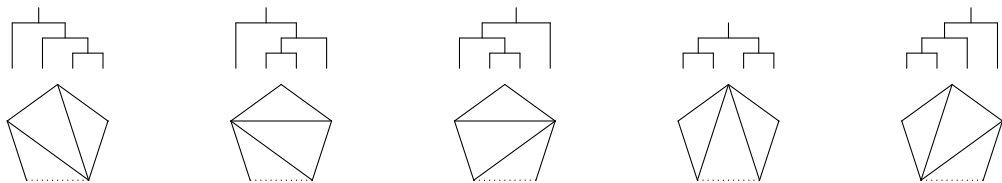
- (a) 互いにフリップで移るので, 1 つの例から異なるものを構成していき, 最後は, どの対角線でフリップを行っても既に構成したものに含まれることを示す.
- (b) 次の 4 より, n 角形の三角形分割は, $(n - 1)$ 角形の三角形分割のいずれかの辺の外側に頂点を付け加えて出来ることを使って (cf. 4), より n が小さいものの分類から得る.
- (c) いろいろな不変量を使って分類する. たとえば, 使われた対角線の形状. 凸多角形の隣り合った辺を含む三角形の数など. それで厳密に示してもよいし, 適当に全リストと思われるものが得られたら, フリップによって出来るものはリストに含まれることを示す. 分類には, 区別できる不変量が分かれば, それを示しておく分かりやすい.
- (d) 全てと思われる三角形分割のリストを作り, それぞれについて回転や裏返しで移るものを同一視しない場合に何通りあるか調べ, その総計が期待する数になる (全てである) ことを示す (cf. 6).
4. 対角線による凸多角形の三角形分割には, 凸多角形の隣り合った辺を含む三角形が 2 つ以上含まれることを示せ.
5. 円に内接する $(n + 1)$ 角形 $P_0P_1 \cdots P_n$ の三角形分割に対し, 辺 P_nP_0 を除いた図形と辺 $L_i = P_{i-1}P_i$ ($i = 1, \dots, n$) を考える. n チームが試合をすること考える. 隣りあった 2 辺が分割三角形となっているチーム同士の試合を全て行い, 勝ったチームが三角形のもう一辺に移るとして, 元の隣り合った 2 辺は除く. これを全て行うことが第 1 段階の試合である. 残ったチームで同様なことを行って第 2 段階の試合を行う. 最後に辺 P_nP_0 を加えたときに出来る三角形が残るが, これが優勝決定戦に対応する.

このようにして, n チームのトーナメント戦の図を考えることと円に内接する $(n + 1)$ 角形の三角形分割を考えることが対応する.

たとえば



4 チームの場合の全てを書く



6. 凸 $(n + 2)$ 角形 $P_0P_1 \cdots P_{n+1}$ の三角形分割の数を C_n ($n \geq 1$) とおく. $n \geq 2$ のとき, P_0P_j が分割の区切りとなっている最初の正数を k とする ($1 \leq k \leq n + 1$). 凸多角形を $P_0P_1 \cdots P_k$ と $P_0P_k \cdots P_{n+1}$ に分けることにより, 以下の関係式を示せ.

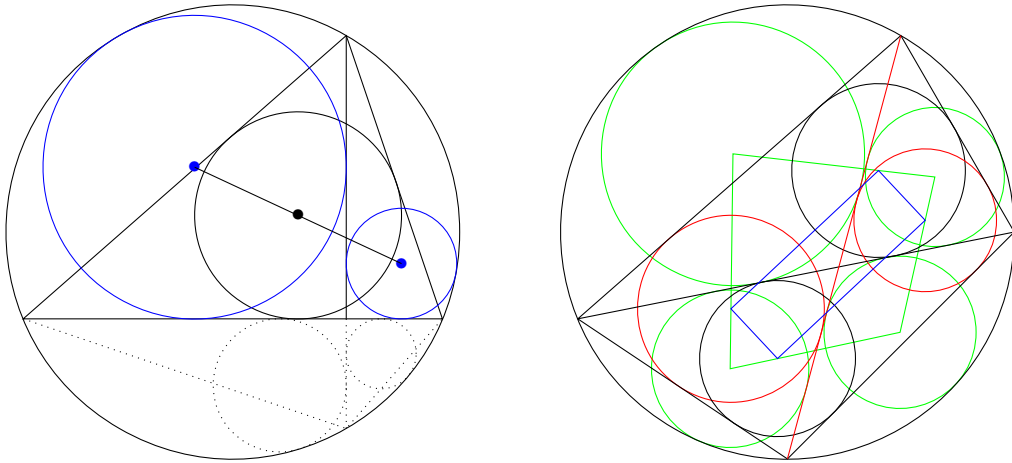
$$C_n = C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_1.$$

7. §4 の注意 1), 2) について考察し, より詳しく説明せよ.

8. §8 の注意 2), 3) の最後に現れた三角関数の次の恒等式を示せ ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$).

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ -\sin \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

9. 半径 R の円に内接する五角形に対し, 三角形分割における内接円の半径の和を辺の円周角で表せ.
10. 点 O を中心とする半径 R の円に内接する三角形 $A_0A_1A_2$ において, 頂点 A_i の内角を α_i とする. O から辺 A_1A_2, A_2A_0, A_0A_1 , または, その延長線上に下した垂線の足を M_0, M_1, M_2 とおく. OM_0, OM_1, OM_2 を R と α_i を用いて表せ. さらに, §4 で求めた内接円の半径と, §8 の結果を比較し, 成り立つべき三角関数の恒等式を証明せよ.
11. 円周上に P_0, P_1, \dots, P_{n-1} が反時計回りとは限らずにバラバラに並んでいる場合を考える. この場合の三角形分割の三角形とは, 点が反時計回りに順に並んでいたとしたときの n 角形の三角形分割に現れる三頂点で決まる三角形とする. 半径とは, 三頂点の回転向きが点が反時計回りに並んでいたときと逆になるときは -1 倍して符号付きで考える. このように考えると, Japanese theorem が符号付きで成り立つことが分かる (cf. §7 注意). 幾何的証明の他, §8 の証明についても検討してください (番号付けに応じて円周角を符号付きで考える).
12. 円に内接する四角形の対角線側に傍接円を描いたとき, 丸山良寛の定理と同じ結果が成り立つ. その証明を, §3~§7 の方法で考えよ.
13. 円に内接する四角形において, その対角線が直交しているとする. 2 つの対角線に接し, 円に内接する 4 つの円を考える. 1 つの対角線の片側にある 2 つの円の半径の平均値は, 四角形をその対角線で分割したときの同じ側の三角形の内接円の半径に等しい (明治 34 年 (1901) 福島県田村大元神社へ奉納の算額, 2 枚目 9 問中の 5 問目. cf. [9, 11]).
底辺の内角が等しい場合, 一方が直角の場合, 鈍角の場合も考察してみよう.



一般の場合は Thébault's theorem (cf. [2]). すなわち, 円と三角形の底辺 (四角形の対角線) とともう一方の対角線とに内接する 2 つの円を結ぶ線分上に内接円の中心がある. 中心は中点ではなくて, $\cos^2 \frac{\theta}{2} : \sin^2 \frac{\theta}{2}$ の比に内分した点となる. ここで, θ は, 2 つの対角線のなす角.

14. 平面を複素数平面とみて考えてみるのも面白い. 平行移動, 回転, 裏返しなどの変換の他, z を $\frac{1}{z}$ に対

応させる反転と呼ばれる興味深い変換がある。反転を 2 回行くと元に戻る。反転は以下の性質をもつ。

- 円や直線は、円や直線に移る。
 - 原点を通る円や直線は直線に移る。
 - 円や直線がその交点でなす角は、変換によって変わらない。特に接していれば変換後も同様である。
 - 平行な直線は、原点で接する円や直線に移る。
 - 二点間の距離や円の中心は変換では保たれない。
 - 円周上の 3 点で円が定まる（直線も半径無限大の円と見なす）。4 点が同一円周上にある、ということは変換で不変。
 - 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 の非調和比 $\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ は反転で不変（この値が実数 \Leftrightarrow 4 点が同一円周上にある）。絶対値を考えれば、二点間の距離の関係式が得られる。
- (a) 3 本の直線に接する円は、それで作られる三角形の内接円や傍接円となり、外接円は 2 本の直線の交点の 3 点を通る円となる。一般の点や三角形の頂点、辺上の点、あるいは接点を原点として反転を行うと、元の直線や円はそのような図形となるか、図示してみよう。
- 内心は、三角形の頂角の二等分線の交点であるが、それを反転で移して考えてみよう。
- (b) 三角形内の点を原点に取って反転すると、三角形の内角の和が 180° であることは、どのような事実に変換されるか。

参考文献

- [1] 上垣渉, Japanese Theorem の起源と歴史, 三重大学教育学部研究紀要 **52**(2001), 23–45.
- [2] W. Reyes, An application of Thébault's theorem, Forum Geometricorum **2**(2002) 183–185.
- [3] A. Ahuja, W. Uegaki and K. Matsushita, Japanese Theorem : A little known theorem with many proofs, PART I, II, Missouri Journal of Mathematical Sciences **16**(2004), 72–80, 149–158.
- [4] J. M. Unger, A Collection of 30 Sangaku Problems, Department of East Asian Languages & Literatures, The Ohio State University, 2016.
- [5] 深川英俊, 例題で知る 日本の数学と算額, 付：全国算額一覧, 森北出版社, 1998.
- [6] 小寺裕, だから楽しい 江戸の算額, 研成社, 2007.
- [7] 五輪教一, 黄金比の眠るほこら, 算額探訪から広がる数学の風景, 日本評論社, 2015.
- [8] 大島利雄, 個数を数える, 数学書房, 2019.
- [9] 小寺裕, 和算の館 — 福島県田村大元神社, <http://www.wasan.jp>.
- [10] 山口正義, やまぶき — 和算と歴史随想, <https://yamabukiwasan.sakura.ne.jp>.
- [11] 三春の算額, 動画で見るニッポンみちしる, NHK アーカイブス.