Basel 問題と関連して（大島利雄）

$$\begin{aligned}
A_m := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} < S_N &:= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \\
&\le \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{(n-\frac12)(n+\frac12)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m+\frac12} - \frac{1}{N+\frac12} \\
&< B_m := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m+\frac12} \quad (1 \le m < N)
\end{aligned}$$

としておいて A_m と B_m に対応するもの（それを π で割ったもの）を $m = 1, 2, \ldots$ について図示するとよいのではないか（後者は赤で示すとかする．

$\{A_m\}$ は単調増加, $\{B_m\}$ は単調減少で，収束の様子が分かる．$m = 1$ とすると $1 < \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3} = 1.66\cdots$, $m = 2$ とすると $\displaystyle\frac{5}{4} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{33}{20} = 1.65$, $B_3 = \frac{415}{252} = 1.6468\cdots$）．

なお

$$\begin{gathered}
A_m < \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668482\cdots < B_m, \\
\frac{1}{m+1} < \frac{\pi^2}{6} - A_m < \frac{1}{m+\frac12}, \\
\frac{1}{12(m+1)^3} < B_m - \frac{\pi^2}{6} < \frac{1}{12(m-\frac12)^3}.
\end{gathered}$$

最後の不等式は

$$\begin{gathered}
\frac{1}{(n-\frac12)(n+\frac12)} - \frac{1}{n^2} = \frac{\frac14}{(n-\frac12)(n+\frac12)n^2} \begin{cases} < \frac{1}{4(n-\frac12)^4}, \\ > \frac{1}{4n^4}, \end{cases} \\
\int_{m+1}^{\infty} \frac{dt}{4t^4} < B_m - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \Bigl(\frac{1}{(n-\frac12)(n+\frac12)} - \frac{1}{n^2} \Bigr) < \int_{m}^{\infty} \frac{dt}{4(t-\frac12)^4}
\end{gathered}$$

から分かる．

$m = 100$ とすると，$\frac{\pi^2}{6}$ を近似する A_m の誤差は 10^{-2} 程度（実際は，約 0.995×10^{-2}) であるが，B_m では 10^{-7} 以下（実際は，約 0.82×10^{-7}）である．

より一般に，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots)$ のときは, $(n + \frac{j}{2})(n - \frac{j}{2}) \le n^2$ より

$$\frac{k}{n^{k+1}} \le \frac{k}{(n+\frac{k}{2})(n+\frac{k}{2}-1)\cdots(n-\frac{k}{2})} = \frac{1}{(n+\frac{k}{2}-1)\cdots(n-\frac{k}{2})} - \frac{1}{(n+\frac{k}{2})\cdots(n-\frac{k}{2}+1)}$$

を使うとよい. これにより

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} < \frac{1}{k(m+\frac{k}{2})(m+\frac{k}{2}-1)\cdots(m-\frac{k}{2}+1)}.$$

整数べきでないときは, $A \geq B > 0$ とすると

$$A - B = \frac{A^N - B^N}{A^{N-1} + A^{N-2}B + \cdots B^{N-1}} \geq \frac{A^N - B^N}{NA^{N-1}}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2}-1)\cdots(n-\frac{k}{2})}} - \frac{1}{\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2})\cdots\cdots(n-\frac{k}{2}+1)}} = \frac{\sqrt[N]{n+\frac{k}{2}} - \sqrt[N]{n-\frac{k}{2}}}{\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2})\cdots(n-\frac{k}{2})}}\\
&\geq \frac{k}{N\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2})\cdots(n-\frac{k}{2})\cdot(n+\frac{k}{2})^{N-1}}}\\
&\geq \frac{k}{N\bigl(n+\frac{k(N-1)}{2(N+k)}\bigr)^{\frac{k}{N}+1}} \quad (\because \text{相加平均} \geq \text{相除平均})\\
&\geq \frac{k}{N(n+\frac{k}{2})^{\frac{k}{N}+1}} \quad (\text{より簡単})
\end{aligned}$$

よって（簡単な方を使うと）

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{k}{N}+1}} < \frac{N}{k\sqrt[N]{m(m-1)\cdots(m-k+1)}} \leq \frac{N}{k}(m-k+1)^{-\frac{k}{N}}.$$

なお，$a > b > 0$ のとき，$n^{-a-1} \leq n^{-b-1}$ となることを, 残余項の評価に使ってもよい．一方

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1}} < \int_m^{\infty} \frac{1}{x^{a+1}}dx = \frac{1}{am^a}.$$