Basel 問題と関連して（大島利雄）

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \le \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{N} < \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m}\ (1 \le m < N)$$

としておいて，$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m}$ に対応するもの（それを π で割ったもの）を $m = 1, 2, \ldots$ について図示するとよいのではないか（後者は赤で示すとかする．収束の様子が分かる．$m = 1$ とすると $\displaystyle 1 < \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} < 2$, $m = 2$ とすると $\displaystyle\frac{5}{4} < \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}$）．

より一般に，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}$ のときは

$$\frac{k}{(n+1)^{k+1}} < \frac{k}{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} - \frac{1}{(n+1)n\cdots(n-k+2)}$$

を使うとよい. すなわち

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}} < \frac{1}{km(m-1)\cdots(m-k+1)}.$$

整数べきでなくてもできるので，以下に $\sum n^{-\frac{3}{2}}$ の例を述べる.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} > \frac{1}{2(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum n^{-\frac{4}{3}}$ などでも同様（有理数べきならできる）.

なお，$a > b > 1$ のとき，$n^{-a} \le n^{-b}$ となることを, 残余項の評価に使ってもよい.