

指数・対数関数

2022.05.23

指数関数

指数関数 $y = a^x$

- a は正の定数, x は変数
- a を底, x を (べき) 指数という.

(例) $y = 2^x$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

- x が正の整数以外の場合でも a^x の値を定める

指数法則

- 元になるのは，指数の性質（指数法則）

$$a^3 a^2 = (aaa)(aa) = a^5 = a^{3+2} \quad (\text{指数の足し算})$$

$$(a^3)^2 = (aaa)(aaa) = a^6 = a^{3 \times 2} \quad (\text{指数の掛け算})$$

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = a^3 b^3$$

$$(1) \quad a^p a^q = a^{p+q}$$

$$(2) \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(3) \quad (ab)^p = a^p b^p$$

(指数法則)

課題 0523-1 指数法則の具体例を書け

[1] (1) の例 [2] (2) の例 [3] (3) の例

指数の拡張 1 a の 0 乗

- 指数法則が成り立つように正の整数以外の指数を定める
- $a \neq 0$ とする.
- $a^p a^q = a^{p+q} \quad p = 1, q = 0$ とすると

$$a^1 a^0 = a^{1+0}$$

$$\cancel{a} a^0 = \cancel{a}$$

a は 0 でないから, 両辺を a で割って

$$a^0 = 1$$

(例) $2^0 = 1, 3^0 = 1, 10^0 = 1$

指数の拡張 2 a のマイナス乗

- $a \neq 0$ とする.
- $a^p a^q = a^{p+q}$ $q = -p$ とすると

$$a^p a^{-p} = a^{p+(-p)} = a^0 = 1$$

$$a^p a^{-q} = 1$$

両辺を a^p で割って

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$(\text{例}) \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

課題 0523-2 $5^0, 4^{-1}, 2^{-2}, 3^{-3}$ の値を求めよ.

指数関数の表

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

指数関数のグラフ

- アプリ「指数関数のグラフ」を用いる
 - (1) 下にある点を $y = 2^x$ の上に動かそう.
 - (2) $y = 2^x$ のグラフをかこう.

課題 0523-3 2^{-2} , 2^{-1} , 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 の値を書け

x が整数でない場合 (グラフから)

課題 0523-4

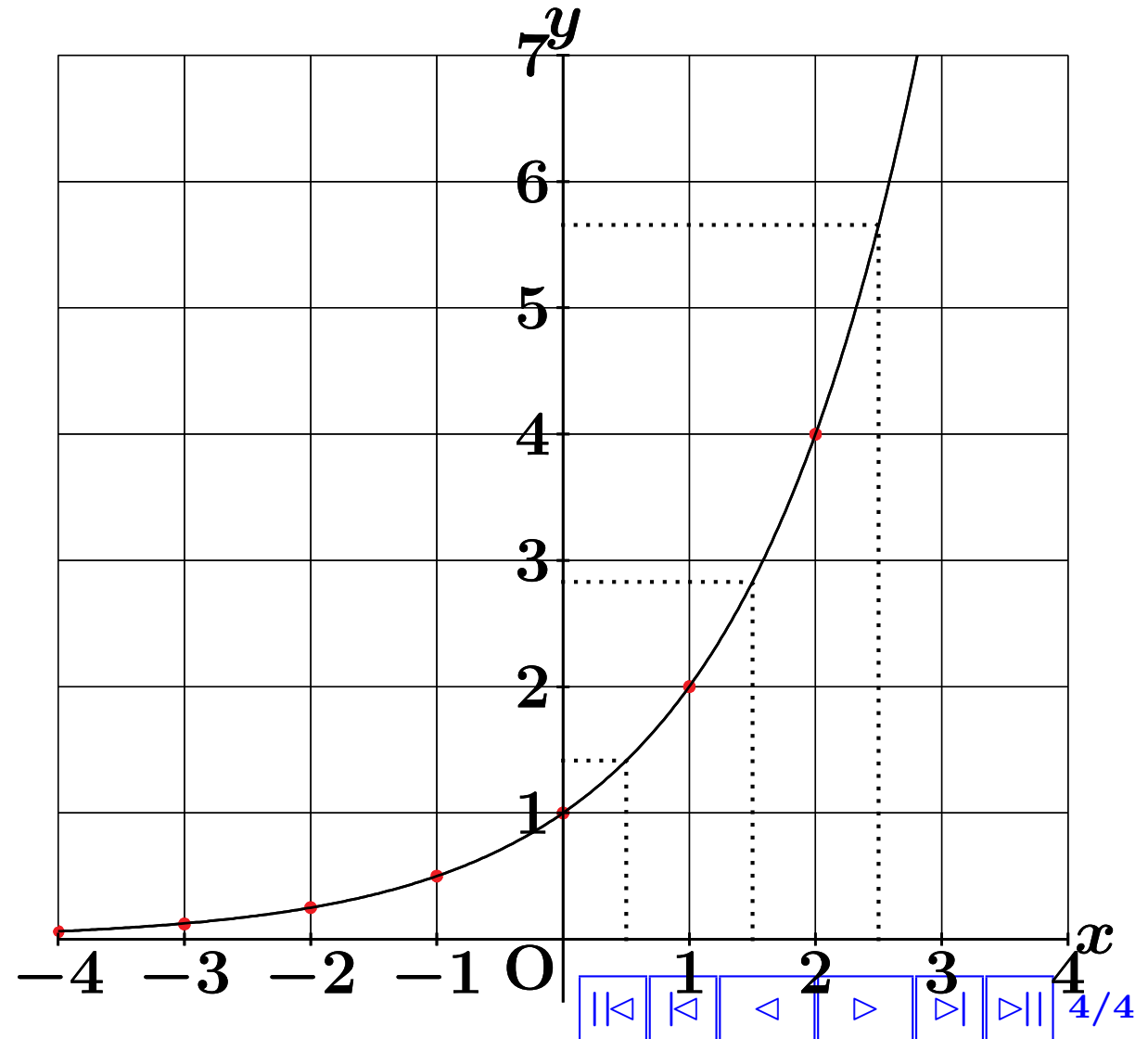
$$2^{0.5}, 2^{1.5}, 2^{2.5}$$

はどうなりそうか

$$2^{0.5} = \sqrt{2}$$

$$2^{1.5} = 2\sqrt{2}$$

$$2^{2.5} = 4\sqrt{2}$$



x が整数でない場合 (指数法則から)

- $(a^p)^q = a^{pq}$ で, $p = 0.5$, $q = 2$ とする

$$(2^{0.5})^2 = a^{0.5 \times 2} = 2^1 = 2$$

$2^{0.5}$ は 2 乗すると 2 になる数だから, $\pm\sqrt{2}$ のどちらか
 $2^{0.5} > 0$ と決めると

$$2^{0.5} = \sqrt{2}$$

または

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

- $2^{1.5} = 2^{1+0.5} = 2^1 \cdot 2^{0.5} = 2\sqrt{2}$
- $2^{2.5} = 2^{2+0.5} = 2^2 \cdot 2^{0.5} = 4\sqrt{2}$

指数法則と n 乗根

- $$\begin{aligned} (1) \quad & a^p a^q = a^{p+q} \\ (2) \quad & (a^p)^q = a^{pq} \\ (3) \quad & (ab)^p = a^p b^p \end{aligned} \quad (a > 0, b > 0)$$

- $a^{\frac{1}{3}}$ は 3 乗すると a になる正の数

これを $\sqrt[3]{a}$ と書く (3 乗根)

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

課題 0523-5 $3^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{3}}$, $8^{\frac{1}{3}}$ を求めよ

指数の計算 (TextP188)

$$(1) \ 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

$$(2) \ (64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = ((2^6)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

$$(3) \ (8^{\frac{1}{6}})^{-2} = ((2^3)^{\frac{1}{6}})^{-2} = 2^{3 \times \frac{1}{6} \times (-2)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

課題 0523-6 計算せよ

TextP188

$$[1] \ 32^{\frac{2}{5}}$$

$$[2] \ \sqrt[3]{27}$$

$$[3] \ (\sqrt[2]{4})^{\frac{1}{2}}$$

$$[4] \ (\sqrt[2]{4})^{-\frac{1}{2}}$$

指数関数のグラフの特徴

課題 0523-7 $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 1^x$ のグラフをかき、() に当てはまる言葉を入れよ.

- 指数関数 $y = a^x$ の特徴

[1] y の値はいつでも ()

[2] $a > 1$ のとき、グラフは右 ()

[3] $0 < a < 1$ のとき、グラフは右 ()

[4] $a = 1$ のとき、グラフは ()

指数方程式 (TextP191)

$$(1) 16^x = 8$$

$$(2^4)^x = 2^3$$

$$2^{4x} = 2^3$$

指数を等しいとおいて

$$4x = 3$$

$$\text{よって } x = \frac{3}{4}$$

$$(2) 8^x = 2^{x+1}$$

$$(2^3)^x = 2^{x+1}$$

$$2^{3x} = 2^{x+1}$$

指数を等しいとおいて

$$3x = x + 1$$

$$\text{よって } x = \frac{1}{2}$$

課題 0523-8 次の方程式を解け

TextP191

$$[1] 8^x = \frac{1}{32}$$

$$[2] 81^x = 3^{3-2x}$$

対数関数

対数の定義

- $y = \log_a x$

a を底, x を真数

y を a を底とする x の対数という.

- 対数 y は, a を何乗したら x になるかという数

$$a^{\boxed{y}} = x \text{ となる } \boxed{y} \text{ のこと}$$

例) $y = \log_3 9$

$$3^{\boxed{y}} = 9 \text{ となる } y \text{ のこと}$$

$$3^2 = 9 \text{ だから } y = \log_3 9 = 2$$

対数の値を求める

- $y = \log_a x \iff a^y = x$

(例) $y = \log_2 16 \iff 2^y = 16 = 2^4$
 $y = 4$ となるから $\log_2 16 = 4$

課題 0523-9 次の値を求めよ.

[1] $\log_2 8$ [2] $\log_3 3$ [3] $\log_5 \frac{1}{5}$ [4] $\log_2 \frac{1}{4}$

対数法則

$$(1) \log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 16 = 2$$

$$(2) \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \frac{15}{5} = 1$$

$$(3) \log_a b^p = p \log_a b$$

$$\log_2 4^5 = 5 \log_2 2 = 5$$

課題 0523-10 対数法則の具体例を書け

[1] (1) の例 [2] (2) の例 [3] (3) の例

証明 (1) $\log_a b = x, \log_a c = y$ とおくと $a^x = b, a^y = c$
 $a^{x+y} = a^x a^y = bc$ となるから $x + y = \log_a bc$

対数の計算

(1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$

$$\text{与式} = \log_{10}(5 \times 2) = \log_{10} 10 = 1$$

(2) $\log_2 12 - \log_2 3$

$$\text{与式} = \log_2\left(\frac{12}{3}\right) = \log_2 4 = 2$$

(3) $2 \log_3 4 + \log_3 4 - \log_3 8$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \log_3 4^2 + \log_3 4 - \log_3 8 \\ &= \log_3 \frac{16 \times 4}{8} = \log_3 8 \end{aligned}$$

対数の計算 (課題)

課題 0523-11 次の計算をせよ.

TextP192

$$[1] 2 \log_4 3 - \log_4 36$$

$$[2] \log_3 \frac{3}{4} + \log_3 24 - \log_3 2$$

$$[3] \log_3 18 + \log_3 8 - 4 \log_3 2$$

$$[4] \log_3 4 + \log_3 18 - 3 \log_3 2$$

底・真数・対数の条件

- $y = \log_a x \iff a^y = x$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- 底 a の条件は $a > 0, a \neq 1$
- 真数 x の条件は $x > 0$
- 対数 $y = \log_a x$ の範囲は 実数全部

対数関数のグラフ

- $y = \log_a x$ KeTMath では $\log(a, x)$
- アプリ「関数のグラフ」でかいてみよう
- x の範囲が全実数でない $x=0.01, 10$ などとする.

課題 0523-12 グラフをかいて，問いに答えよ

- [1] $y = \log_2 x, \log_4 x, \log_{\frac{1}{2}} x, \log_2(-x)$
- [2] $y = \log_a x$ の a を変えるとどうなるか
- [3] $y = \log_a x$ と $y = \log_a(-x)$ はどのような関係か