いろいろな関数の微分2

2023.07.03



$$ullet f'(x) = \lim_{z o x} rac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$ullet f'(x) = \lim_{z o x} rac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

•
$$\Delta x = z - x$$
, $\Delta y = f(z) - f(x)$ とおくと

$$ullet f'(x) = \lim_{z o x} rac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

•
$$\Delta x = z - x, \; \Delta y = f(z) - f(x)$$
 とおくと $f'(x) = \lim_{\Delta x o 0} rac{\Delta y}{\Delta x}$

$$ullet f'(x) = \lim_{z o x} rac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

•
$$\Delta x = z - x, \; \Delta y = f(z) - f(x)$$
 とおくと $f'(x) = \lim_{\Delta x o 0} rac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x o 0} rac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$ullet \left| f'(x) = \lim_{z o x} rac{f(z) - f(x)}{z - x}
ight|$$

•
$$\Delta x = z - x, \; \Delta y = f(z) - f(x)$$
 とおくと $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} rac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} rac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

• 書き方

$$y', \ f'(x), \ f', \ \left(f(x)\right)'$$
 (ラグランジュ) $rac{dy}{dx}, \ rac{df}{dx}, \ rac{d}{dx}(f(x))$ (ライプニッツ)

$$\bullet (f+g)' = f'+g', (f-g)' = f'-g'$$

•
$$(cf)'=cf'$$
 定数倍の微分

$$\bullet (f+g)' = f'+g', (f-g)' = f'-g'$$

•
$$(cf)'=cf'$$
 定数倍の微分

$$\bullet$$
 $(fg)' = f'g + fg'$ 積の微分

$$\bullet (f+g)' = f'+g', (f-g)' = f'-g'$$

•
$$(cf)'=cf'$$
 定数倍の微分

•
$$(fg)' = f'g + fg'$$
 積の微分

$$ullet \left(rac{f}{q}
ight)' = rac{f'\,g - f\,g'}{q^2}$$
 商の微分

$$ullet (f+g)' = f'+g', \ (f-g)' = f'-g'$$

$$\bullet \ (cf)' = cf'$$

定数倍の微分

$$\bullet \ (f g)' = f' g + f g'$$

積の微分

$$ullet \left(rac{f}{g}
ight)' = rac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

商の微分

課題 202-1 積と商の微分を用いて微分せよ.

[1]
$$y = x^3(4x+1)$$
 [2] $y = \frac{x^3}{4x+1}$

三角関数の微分

$\sin x,\cos x$ の微分

課題 202-2 グラフ上の点を動かして導関数を求めよ.

$$[1] y = \sin x \qquad [2] y = \cos x$$

$\sin x,\cos x$ の微分公式

 $\bullet \left| (\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x \right|$

$\sin x,\cos x$ の微分公式

$$\bullet \ |(\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x$$

課題 202-3 次の関数を微分せよ

$$[1] y = 2\sin x \qquad \qquad [2] y = -\cos x$$

[3]
$$y = 3 \sin x + 4 \cos x$$
 [4] $y = x - \cos x$

$$\bullet \left| (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \right|$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

$$\bullet \left| (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \right|$$

$$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})'$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

$$\bullet \left[(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \right] \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\
(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\
= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}
\bullet & (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\
(\tan x)' &= (\frac{\sin x}{\cos x})' \\
&= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{(\cos x \cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\bullet \left[(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \right] \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}
(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)'
= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x}
= \frac{(\cos x \cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}
= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

課題

課題 202-4 次の関数を微分せよ

- $[1] y = \sin x \cos x$
- $[2] y = \sin^2 x (= \sin x \sin x)$
- $[3] y = x \tan x$
- $[4] y = \tan x x$

$$y'=(\sin(ax+b))'=\lim_{z o x}rac{\sin(az+b)-\sin(ax+b)}{z-x}$$

$$y' = (\sin(ax+b))' = \lim_{z \to x} \frac{\sin(az+b) - \sin(ax+b)}{z - x}$$
 $ax + b = u, \ az + b = w$ とおくと
 $w - u = a(z - x), \ w \to u$

$$y' = (\sin(ax+b))' = \lim_{z \to x} \frac{\sin(az+b) - \sin(ax+b)}{z - x}$$
 $ax + b = u, \ az + b = w$ とおくと
 $w - u = a(z - x), \ w \to u$
 $y' = \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{\frac{w - u}{a}} = a \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{w - u}$

$$y' = (\sin(ax+b))' = \lim_{z \to x} \frac{\sin(az+b) - \sin(ax+b)}{z - x}$$
 $ax + b = u, \ az + b = w$ とおくと
 $w - u = a(z - x), \ w \to u$
 $y' = \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{\frac{w - u}{a}} = a \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{w - u}$
 $(\sin x)' = \lim_{z \to x} \frac{\sin z - \sin x}{z - x}$

$$y' = (\sin(ax+b))' = \lim_{z \to x} \frac{\sin(az+b) - \sin(ax+b)}{z - x}$$
 $ax + b = u, \ az + b = w$ とおくと
 $w - u = a(z - x), \ w \to u$

$$y' = \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{\frac{w - u}{a}} = a \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{w - u}$$
 $(\sin x)' = \lim_{z \to x} \frac{\sin z - \sin x}{z - x}$
 $= a \cos u = a \cos(ax + b)$

$$y' = (\sin(ax+b))' = \lim_{z \to x} \frac{\sin(az+b) - \sin(ax+b)}{z - x}$$
 $ax + b = u, \ az + b = w$ とおくと
 $w - u = a(z - x), \ w \to u$

$$y' = \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{\frac{w - u}{a}} = a \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{w - u}$$
 $(\sin x)' = \lim_{z \to x} \frac{\sin z - \sin x}{z - x}$
 $= a \cos u = a \cos(ax + b)$

$$\sin(ax + b)' = a \cos(ax + b)$$

$$y' = (\sin(ax+b))' = \lim_{z \to x} \frac{\sin(az+b) - \sin(ax+b)}{z - x}$$
 $ax + b = u, \ az + b = w$ とおくと
 $w - u = a(z - x), \ w \to u$
 $y' = \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{\frac{w - u}{a}} = a \lim_{w \to u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{w - u}$
 $(\sin x)' = \lim_{z \to x} \frac{\sin z - \sin x}{z - x}$
 $= a \cos u = a \cos(ax + b)$

$$f(ax+b)$$
の微分

 $ullet \left| f(ax+b)' = af'(ax+b)
ight|$

$$f(ax+b)$$
の微分

•
$$f(ax+b)'=of'(ax+b)$$
1つの変数とみて微分

•
$$f(ax+b)'=of'(ax+b)$$
 1つの変数とみて微分

 $\bullet (\cos(3x+1))'$

•
$$f(ax+b)'=of'(ax+b)$$
 1つの変数とみて微分

•
$$(\cos(3x+1))' = 3(-\sin(3x+1))$$

•
$$f(ax+b)'=of'(ax+b)$$
 1つの変数とみて微分

•
$$(\cos(3x+1))' = 3(-\sin(3x+1)) = -3\sin(3x+1)$$

•
$$f(ax+b)'=of'(ax+b)$$
 1つの変数とみて微分

•
$$(\cos(3x+1))' = 3(-\sin(3x+1)) = -3\sin(3x+1)$$

•
$$((2x+3)^5)'$$

•
$$f(ax+b)'=of'(ax+b)$$
 1つの変数とみて微分

•
$$(\cos(3x+1))' = 3(-\sin(3x+1)) = -3\sin(3x+1)$$

$$\bullet \ \left((2x+3)^5 \right)' = 2 \cdot 5(2x+3)^4$$

f(ax+b)の微分

•
$$f(ax+b)'=of'(ax+b)$$
 1つの変数とみて微分

- $(\cos(3x+1))' = 3(-\sin(3x+1)) = -3\sin(3x+1)$
- $((2x+3)^5)' = 2 \cdot 5(2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$

f(ax+b)の微分

•
$$f(ax+b)'=of'(ax+b)$$
 1つの変数とみて微分

•
$$(\cos(3x+1))' = 3(-\sin(3x+1)) = -3\sin(3x+1)$$

•
$$((2x+3)^5)' = 2 \cdot 5(2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$$

課題 202-5 微分せよ

[1]
$$y = \sin 3x$$
 [2] $y = (5x+1)^3$
[3] $y = \cos(2x+3)$ [4] $y = \tan(-x+1)$

指数関数の微分

$$y=a^x$$
の接線

• 指数関数 $y=a^x\ (a>0)$ 上の (0,1) で接線を引く課題 202-6 接線の傾きがちょうど1 になる a の値を求めよ

 $y=a^x$ の接線

- 指数関数 $y=a^x\ (a>0)$ 上の (0,1) で接線を引く課題 202-6 接線の傾きがちょうど1 になる a の値を求めよ
 - この a をネイピア数 (ナピア数) といい, e で表す

$$y=a^x$$
の接線

- 指数関数 $y=a^x\ (a>0)$ 上の (0,1) で接線を引く課題 202-6 接線の傾きがちょうど1 になる a の値を求めよ
 - このaをネイピア数 (ナピア数) といい,eで表す $e=2.71828182846 \cdots$

$y=a^x$ の接線

- 指数関数 $y=a^x\ (a>0)$ 上の (0,1) で接線を引く課題 202-6 接線の傾きがちょうど1 になる a の値を求めよ
 - このaをネイピア数 (ナピア数) といい,eで表す $e=2.71828182846 \cdots$
 - e は微分で重要な定数

$$y=a^x$$
の接線

- 指数関数 $y=a^x\ (a>0)$ 上の (0,1) で接線を引く課題 202-6 接線の傾きがちょうど1 になる a の値を求めよ
 - このaをネイピア数 (ナピア数) といい,eで表す $e=2.71828182846 \cdots$
 - e は微分で重要な定数

•
$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$$

$$y=a^x$$
の接線

- 指数関数 $y=a^x\ (a>0)$ 上の (0,1) で接線を引く課題 202-6 接線の傾きがちょうど1 になる a の値を求めよ
 - このaをネイピア数 (ナピア数) といい,eで表す $e=2.71828182846 \cdots$
 - e は微分で重要な定数

•
$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

◆ ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という

● ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という

$$y = \log_e x \iff e^y = x$$

◆ ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という

$$y = \log_e x \iff e^y = x$$

 $\bullet \ln x$ または底を略して $\log x$ と書くこともある.

◆ ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という

$$y = \log_e x \iff e^y = x$$

- $\bullet \ln x$ または底を略して $\log x$ と書くこともある.
- 自然対数と常用対数の変換

$$\log_e x = rac{\log_{10} x}{\log_{10} e}, \ \log_{10} x = rac{\log_e x}{\log_e 10}$$

関数電卓

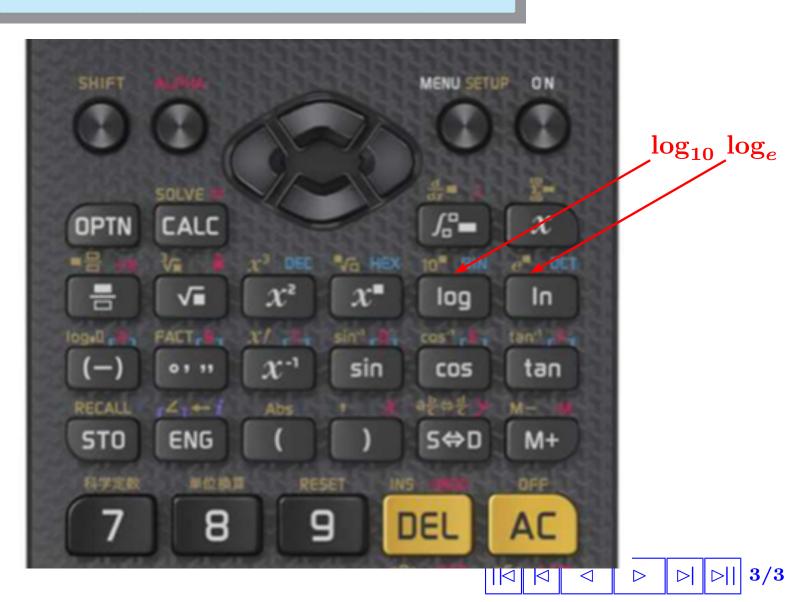
関数電卓-自然対数と常用対数



関数電卓-自然対数と常用対数



関数電卓-自然対数と常用対数



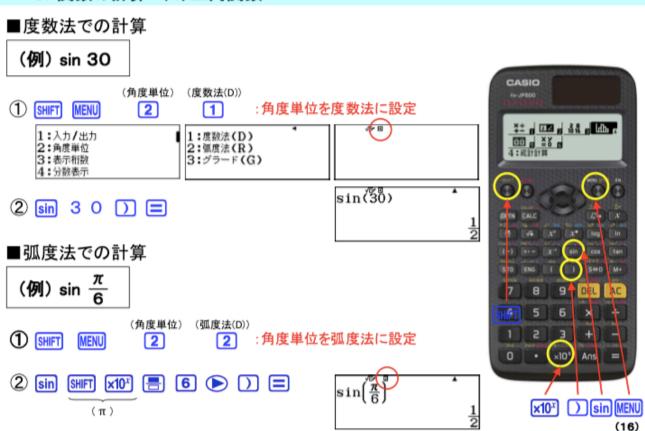
関数電卓-対数の計算



関数電卓-度とラジアン

◆『基本計算』

6. 関数の計算 (4)三角関数



$$\bullet \ (e^x)' = \lim_{z \to x} \frac{e^z - e^x}{z - x}$$

•
$$(e^x)' = \lim_{z \to x} \frac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x + (z - x)} - e^x}{z - x}$$

$$\bullet (e^x)' = \lim_{z \to x} \frac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x + (z - x)} - e^x}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{e^x e^{z - x} - e^x}{z - x}$$

•
$$(e^x)' = \lim_{z \to x} \frac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x + (z - x)} - e^x}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{e^x e^{z - x} - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^x (e^{z - x} - 1)}{z - x}$$

$$\bullet (e^{x})' = \lim_{z \to x} \frac{e^{z} - e^{x}}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x + (z - x)} - e^{x}}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{e^{x} e^{z - x} - e^{x}}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x} (e^{z - x} - 1)}{z - x}$$

$$= e^{x} \lim_{z - x \to 0} \frac{e^{z - x} - 1}{z - x} =$$

•
$$(e^x)' = \lim_{z \to x} \frac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x + (z - x)} - e^x}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{e^x e^{z - x} - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^x (e^{z - x} - 1)}{z - x}$$

$$= e^x \lim_{z - x \to 0} \frac{e^{z - x} - 1}{z - x} = \frac{e^{z - x} - 1}{z - x}$$
 $(z - x \, \epsilon \, z \, \xi \, \xi \, \xi \, \delta)$

•
$$(e^x)' = \lim_{z \to x} \frac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x + (z - x)} - e^x}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{e^x e^{z - x} - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^x (e^{z - x} - 1)}{z - x}$$

$$= e^x \lim_{z \to x \to 0} \frac{e^{z - x} - 1}{z - x} = e^x \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z}$$
 $(z - x \, \xi \, z \, \xi \, \xi \, \xi \, \delta)$

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

•
$$(e^x)' = \lim_{z \to x} \frac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x + (z - x)} - e^x}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{e^x e^{z - x} - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^x (e^{z - x} - 1)}{z - x}$$

$$= e^x \lim_{z \to x \to 0} \frac{e^{z - x} - 1}{z - x} = e^x \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = e^x$$
 $(z - x \, \xi \, z \, \xi \, \xi \, \xi \, \xi)$

・よって

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

•
$$(e^x)' = \lim_{z \to x} \frac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x + (z - x)} - e^x}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{e^x e^{z - x} - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^x (e^{z - x} - 1)}{z - x}$$

$$= e^x \lim_{z \to x \to 0} \frac{e^{z - x} - 1}{z - x} = e^x \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = e^x$$
 $(z - x \, \xi \, z \, \xi \, \xi \, \xi \, \xi)$

・よって

$$(e^x)' = e^x$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

・よって

$$(e^x)' = e^x$$

$(e^x)' = e^x$ 微分しても同じ関数になる

$$ullet \left| (e^{ax+b})' = ae^{ax+b}
ight|$$

$$ullet (e^{ax+b})' = e^{ax+b}$$

•
$$(e^{ax+b})' = e^{ax+b}$$

•
$$(e^{ax+b})' = e^{ax+b}$$

例
$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$
, $(e^{-x+3})' = -e^{-x+3}$

•
$$(e^{ax+b})' = e^{ax+b}$$

例
$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$
, $(e^{-x+3})' = -e^{-x+3}$

課題 202-7 次を微分せよ.

$$[1] y = e^{5x}$$

[3]
$$y = e^{3x+1}$$

$$egin{aligned} [2] \ y &= e^{-2x} \ [4] \ y &= rac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \left| (\log x)' = \frac{1}{x} \right|$$

$$ullet \left| (\log x)' = rac{1}{x}
ight|$$

証明
$$(\log x)' = \lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$$

$$ullet \left| (\log x)' = rac{1}{x}
ight|$$

証明
$$(\log x)' = \lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$$
 $\log z = w, \log x = u$ とおくと

$$ullet \left| (\log x)' = rac{1}{x}
ight|$$

証明
$$(\log x)' = \lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$$
 $\log z = w, \ \log x = u$ とおくと $z = e^w, \ x = e^u, \ w \to u$

$$ullet \left| (\log x)' = rac{1}{x}
ight|$$

証明
$$(\log x)' = \lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$$
 $\log z = w, \log x = u$ とおくと $z = e^w, x = e^u, w \to u$ $= \lim_{w \to u} \frac{w - u}{e^w - e^u}$

$$ullet \left| (\log x)' = rac{1}{x}
ight|$$

証明
$$(\log x)' = \lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$$
 $\log z = w, \log x = u$ とおくと $z = e^w, x = e^u, w \to u$ $= \lim_{w \to u} \frac{w - u}{e^w - e^u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}$

$$ullet \left((\log x)' = rac{1}{x}
ight)$$

$$ullet \left| (\log x)' = rac{1}{x}
ight| \left| (\log (ax+b))' = rac{a}{ax+b}
ight|$$

証明
$$(\log x)' = \lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$$
 $\log z = w, \log x = u$ とおくと $z = e^w, x = e^u, w \to u$ $= \lim_{w \to u} \frac{w - u}{e^w - e^u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}$

$$ullet \left((\log x)' = rac{1}{x}
ight)$$

$$ullet \left| (\log x)' = rac{1}{x}
ight| \left| (\log (ax+b))' = rac{a}{ax+b}
ight|$$

証明
$$(\log x)' = \lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$$
 $\log z = w, \ \log x = u$ とおくと $z = e^w, \ x = e^u, \ w \to u$ $= \lim_{w \to u} \frac{w - u}{e^w - e^u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}$

課題 202-8 次の関数を微分せよ.

[1]
$$y = \log(-x)$$
 [2] $y = \log 2x$ [3] $y = \log(x+5)$