指数・対数関数

2023.05.22

復習（三角関数）

振幅周期位相

課題 0522-1 105-1

指数関数

指数関数 $y = a^x$

- a は正の定数，x は変数
- a を**底**，x を **(べき) 指数**という．

(例) $y = 2^x$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

- x が正の整数以外の場合でも a^x の値を定める

指数法則

- 元になるのは，指数の性質（指数法則）

$$a^3a^2 = (aaa)(aa) = a^5 = a^{3+2}$$ (指数の足し算)

$$(a^3)^2 = (aaa)(aaa) = a^6 = a^{3\times 2}$$ (指数の掛け算)

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = a^3b^3$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & a^pa^q = a^{p+q} \\ (2) & (a^p)^q = a^{pq} \\ (3) & (ab)^p = a^pb^p \end{array}}$$ (指数法則)

課題 0522-2 指数法則の具体例を書け

[1] (1) の例　[2] (2) の例　[3] (3) の例

指数の拡張1 a の0乗

- 指数法則が成り立つように正の整数以外の指数を定める
- $a \neq 0$ とする.
- $a^p a^q = a^{p+q}$ $\quad p = 1,\ q = 0$ とすると

$$a^1 a^0 = a^{1+0}$$

$$\cancel{a}\, a^0 = \cancel{a}$$

a は0でないから，両辺を a で割って

$$\boxed{a^0 = 1}$$

(例) $2^0 = 1,\ 3^0 = 1,\ 10^0 = 1$

指数の拡張２ a のマイナス乗

- $a \neq 0$ とする．
- $a^p a^q = a^{p+q}$ 　　$q = -p$ とすると

$$a^p a^{-p} = a^{p+(-p)} = a^0 = 1$$

$$a^p a^{-q} = 1$$

両辺を a^p で割って $\boxed{a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}}$

(例) $2^{-1} = \dfrac{1}{2},\ 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

課題 0522-3 $5^0, 4^{-1}, 2^{-2}, 3^{-3}$ の値を求めよ．

指数関数の表

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

指数関数のグラフ

- アプリ「指数関数のグラフ」を用いる

(1) 下にある点を $y = 2^x$ の上に動かそう.

(2) $y = 2^x$ のグラフをかこう.

課題 0522-4 $2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ の値を書け

x が整数でない場合 (グラフから)

課題 0522-5

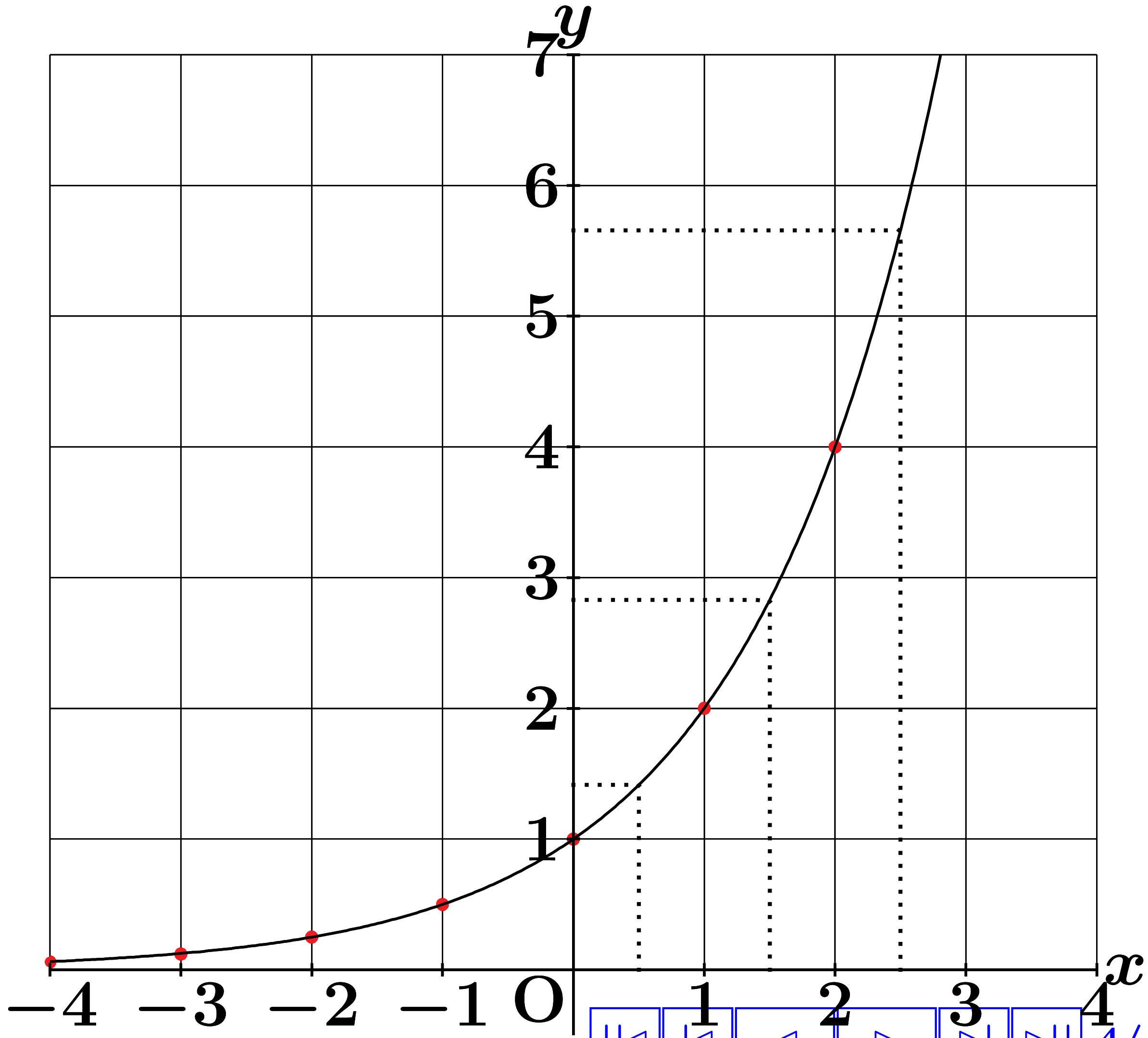
$2^{0.5}, 2^{1.5}, 2^{2.5}$

はどうなりそうか

$2^{0.5} = \sqrt{2}$

$2^{1.5} = 2\sqrt{2}$

$2^{2.5} = 4\sqrt{2}$



x が整数でない場合 (指数法則から)

- $(a^p)^q = a^{pq}$ で，$p = 0.5$，$q = 2$ とする

$$(2^{0.5})^2 = a^{0.5\times 2} = 2^1 = 2$$

$2^{0.5}$ は 2 乗すると 2 になる数だから，$\pm\sqrt{2}$ のどちらか

$2^{0.5} > 0$ と決めると

$$\boxed{2^{0.5} = \sqrt{2}} \quad \text{または} \quad \boxed{2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}}$$

- $2^{1.5} = 2^{1+0.5} = 2^1 \cdot 2^{0.5} = 2\sqrt{2}$

- $2^{2.5} = 2^{2+0.5} = 2^2 \cdot 2^{0.5} = 4\sqrt{2}$

指数法則と n 乗根

- $\boxed{\begin{array}{ll} (1) & a^p a^q = a^{p+q} \\ (2) & (a^p)^q = a^{pq} \\ (3) & (ab)^p = a^p b^p \end{array}}$ $(a > 0,\ b > 0)$

- $a^{\frac{1}{3}}$ は 3 乗すると a になる正の数

  これを $\sqrt[3]{a}$ と書く（3 乗根）

  $$\boxed{2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}}$$

課題 0522-6 $3^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{3}}$, $8^{\frac{1}{3}}$ を求めよ

指数の計算 (TextP188)

(1) $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

(2) $(64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = ((2^6)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

(3) $(8^{\frac{1}{6}})^{-2} = ((2^3)^{\frac{1}{6}})^{-2} = 2^{3\times\frac{1}{6}\times(-2)} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

課題 0522-7 計算せよ TextP188

[1] $32^{\frac{2}{5}}$ [2] $\sqrt[3]{27}$

[3] $(\sqrt[2]{4})^{\frac{1}{2}}$ [4] $(\sqrt[2]{4})^{-\frac{1}{2}}$

指数関数のグラフの特徴

課題 0522-8 $y=2^x$，$y=3^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=1^x$ のグラフをかき、（　）に当てはまる言葉を入れよ．

- 指数関数 $y=a^x$ の特徴

  [1] y の値はいつでも (　　　　　　)

  [2] $a>1$ のとき，グラフは右 (　　　　　　)

  [3] $0<a<1$ のとき，グラフは右 (　　　　　　)

  [4] $a=1$ のとき，グラフは (　　　　　　)

指数方程式 (TextP191)

(1) $16^x = 8$

$$(2^4)^x = 2^3$$

$$2^{4x} = 2^3$$

指数を等しいとおいて

$$4x = 3$$

よって $x = \frac{3}{4}$

(2) $8^x = 2^{x+1}$

$$(2^3)^x = 2^{x+1}$$

$$2^{3x} = 2^{x+1}$$

指数を等しいとおいて

$$3x = x + 1$$

よって $x = \frac{1}{2}$

課題 0522-9 次の方程式を解け TextP191

[1] $8^x = \frac{1}{32}$

[2] $81^x = 3^{3-2x}$

対数関数

対数の定義

- $y = \log_a x$

  a を**底**，x を**真数**

  y を a を底とする x の**対数**という．

- 対数 y は，a を何乗したら x になるかという数

  $a^{\boxed{y}} = x$ となる $\boxed{y}$ のこと

例) $y = \log_3 9$

$3^{\boxed{y}} = 9$ となる y のこと

$3^2 = 9$ だから　$y = \log_3 9 = 2$

対数の値を求める

- $\boxed{y = \log_a x \iff a^y = x}$

(例) $y = \log_2 16 \iff 2^y = 16 = 2^4$

$y = 4$ となるから　$\log_2 16 = 4$

課題 0522-10 次の値を求めよ．

[1] $\log_2 8$　　[2] $\log_3 3$　　[3] $\log_5 \dfrac{1}{5}$　　[4] $\log_2 \dfrac{1}{4}$

対数法則

(1) $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ $\quad$ $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 16 = 2$

(2) $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$ $\quad$ $\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \dfrac{15}{5} = 1$

(3) $\log_a b^p = p \log_a b$ $\quad$ $\log_2 4^5 = 5 \log_2 2 = 5$

課題 0522-11 対数法則の具体例を書け

[1] (1) の例　[2] (2) の例　[3] (3) の例

証明 (1) $\log_a b = x, \log_a c = x$ とおくと $a^x = b, a^y = c$

$a^{x+y} = a^x a^y = bc$ となるから $x + y = \log_a bc$

対数の計算

(1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$

与式 $= \log_{10}(5 \times 2) = \log_{10} 10 = 1$

(2) $\log_2 12 - \log_2 3$

与式 $= \log_2(\frac{12}{3}) = \log_2 4 = 2$

(3) $2\log_3 4 + \log_3 4 - \log_3 8$

与式 $= \log_3 4^2 + \log_3 4 - \log_3 8$

$= \log_3 \frac{16\times4}{8} = \log_3 8$

対数の計算 (課題)

課題 0522-12 次の計算をせよ． TextP192

[1] $2\log_4 3 - \log_4 36$

[2] $\log_3 \dfrac{3}{4} + \log_3 24 - \log_3 2$

[3] $\log_3 18 + \log_3 8 - 4\log_3 2$

[4] $\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2$

底・真数・対数の条件

- $y = \log_a x \iff a^y = x$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- 底 a の条件は $\boxed{a > 0, a \neq 1}$
- 真数 x の条件は $\boxed{x > 0}$
- 対数 $y = \log_a x$ の範囲は $\boxed{\text{実数全部}}$

対数関数のグラフ

- $y = \log_a x$ KeTMath では `log(a,x)`
- アプリ「関数のグラフ」でかいてみよう
- x の範囲が全実数でない `x=0.01,10` などとする．

課題 0522-13 グラフをかいて，問いに答えよ

[1] $y = \log_2 x,\ \log_4 x,\ \log_{\frac{1}{2}} x,\ \log_2(-x)$

[2] $y = \log_a x$ の a を変えるとどうなるか

[3] $y = \log_a x$ と $y = \log_a(-x)$ はどのような関係か