いろいろな関数の微分

2023.06.26

復習

導関数の定義式

- a における微分係数

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

- a を x で置き換える

$$\boxed{f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}}$$

導関数の定義式の別形

- $f'(x) = \lim_{z \to x} \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- $z - x = \Delta x$ とおく（x の変化量でデルタ x と読む）
- $f(z) - f(x) = \Delta y$ とおく（y の変化量）
- $z \to x$ より　$\Delta x \to 0$
- $z = x + \Delta x$ より

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{（教科書）}$$

x^3 の微分

- $f(x) = x^3$
- $f'(x) = \lim_{z \to x} \dfrac{z^3 - x^3}{z - x} \qquad (1)$
- 次の因数分解公式を用いる

$$z^3 - x^3 = (z - x)(z^2 + zx + x^2)$$

- (1)$= \lim_{z \to x} \dfrac{(z - x)(z^2 + zx + x^2)}{z - x}$

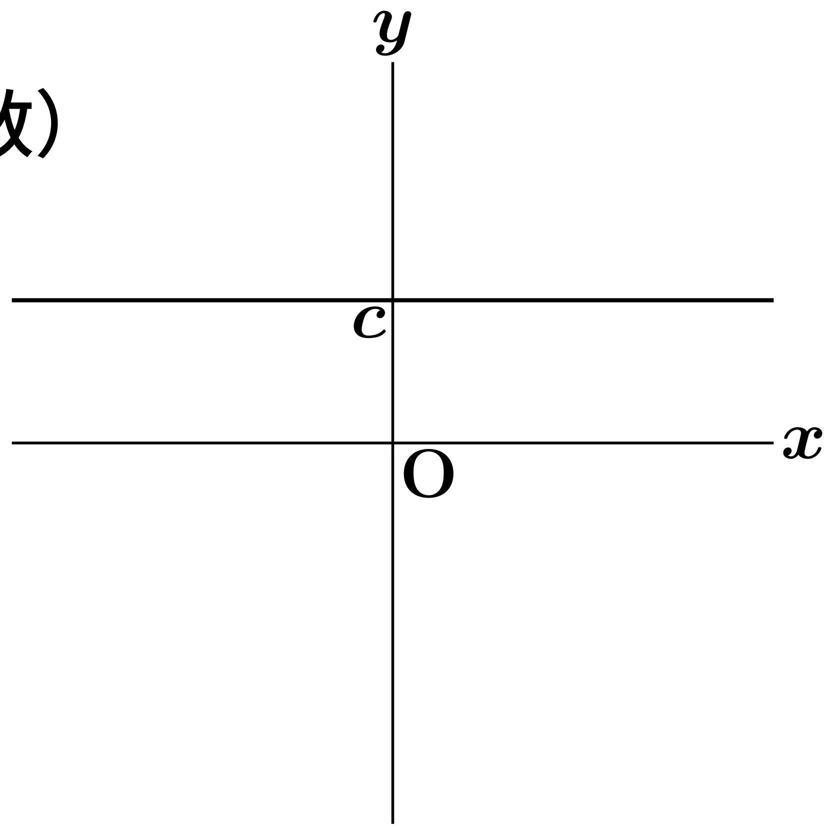
$$= \lim_{z \to x}(z^2 + zx + x^2) = 3x^2$$

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$$

微分の公式

- 定数関数 $f(x) = c$（c は定数）

$$(c)' = 0$$



- $f(x) = x$

$$(x)' = \lim_{z \to x} \frac{z - x}{z - x} = 1$$

- $(x^2)' = 2x$

- $(x^3)' = 3x^2$

- 一般に　$(x^n)' = \boxed{nx^{n-1}}$

微分の性質 (和と定数倍)

$f(x)$, $g(x)$ と定数 c について

- $(f+g)' = f' + g'$, $(f-g)' = f' - g'$
- $(cf)' = cf'$

例) $(x^2+3x+4)' = (x^2)' + (3x)' + (4)' = 2x + 3$

課題 0626-1 微分せよ

[1] $y = 2x^2 - 3x + 2$

[2] $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

導関数の書き方

- 関数 $y = f(x)$ を変数 x で微分する

  $y',\ f'(x),\ f',\ \big(f(x)\big)'$（ラグランジュ）

  $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{df}{dx},\ \dfrac{d}{dx}\big(f(x)\big)$（ライプニッツ）

例） $y = f(x) = x^3$

$$y' = f'(x) = f' = \big(x^3\big)' = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

積と商の微分・記法

積の微分

- $\boxed{(f\,g)' = f'\,g + f\,g'}$ 積の微分公式

$$\big(f(x)g(x)\big)' = \lim_{z\to x}\frac{f(z)g(z) - f(x)g(x)}{z-x}$$

$$= \lim_{z\to x}\frac{\big(f(z)-f(x)\big)g(z) + f(x)\big(g(z)-g(x)\big)}{z-x}$$

$$= \lim_{z\to x}\left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x}g(z) + f(x)\frac{g(z)-g(x)}{z-x}\right)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

積の微分の例

例 $y' = \big((x+1)(x^2+2x+3)\big)'$

$$
\begin{aligned}
&= (x+1)'(x^2+2x+3)+(x+1)(x^2+2x+3)' \\
&= (x^2+2x+3)+(x+1)(2x+2) \\
&= 3x^2+6x+5
\end{aligned}
$$

課題 0626-2 積の微分公式で微分せよ．

[1] $y = (x+1)(x+3)$ [2] $y = x^2(x+2)$

商の微分

- $$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$ 商の微分公式

例 (1) $$\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)' = \frac{(2x+1)'(3x+1)-(2x+1)(3x+1)'}{(3x+1)^2}$$
$$= \frac{2(3x+1)-3(2x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{-1}{(3x+1)^2}$$

例 (2) $$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)'(x)-1(x)'}{x^2} = \frac{0-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

課題 0626-3 次を微分せよ.

[1] $y = \dfrac{x}{x+1}$ [2] $y = \dfrac{1}{x^2}$

導関数の書き方

- 関数 $y = f(x)$ を変数 x で微分する

  y', $f'(x)$（ラグランジュ）

  $\dfrac{dy}{dx}$（ライプニッツ）

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

例）$y = f(x) = x^3$

$$y' = f'(x) = f' = \left(x^3\right)' = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

べき関数の微分

x^p の微分

- n が正の整数のとき $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$
- 分数乗

$$(x^{\frac{1}{2}})' = (\sqrt{x})' = \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} = \lim_{w \to u} \frac{w - u}{w^2 - u^2}$$

$\sqrt{z} = w, \sqrt{x} = u$ とおくと　$z = w^2, x = u^2$

$$= \lim_{w \to u} \frac{1}{w + u} = \frac{1}{2u} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

課題 0626-4 $y = x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$ を微分せよ.

x^p の微分公式

- $(x^p)' = \boxed{px^{p-1}}$
- マイナス乗も同じ

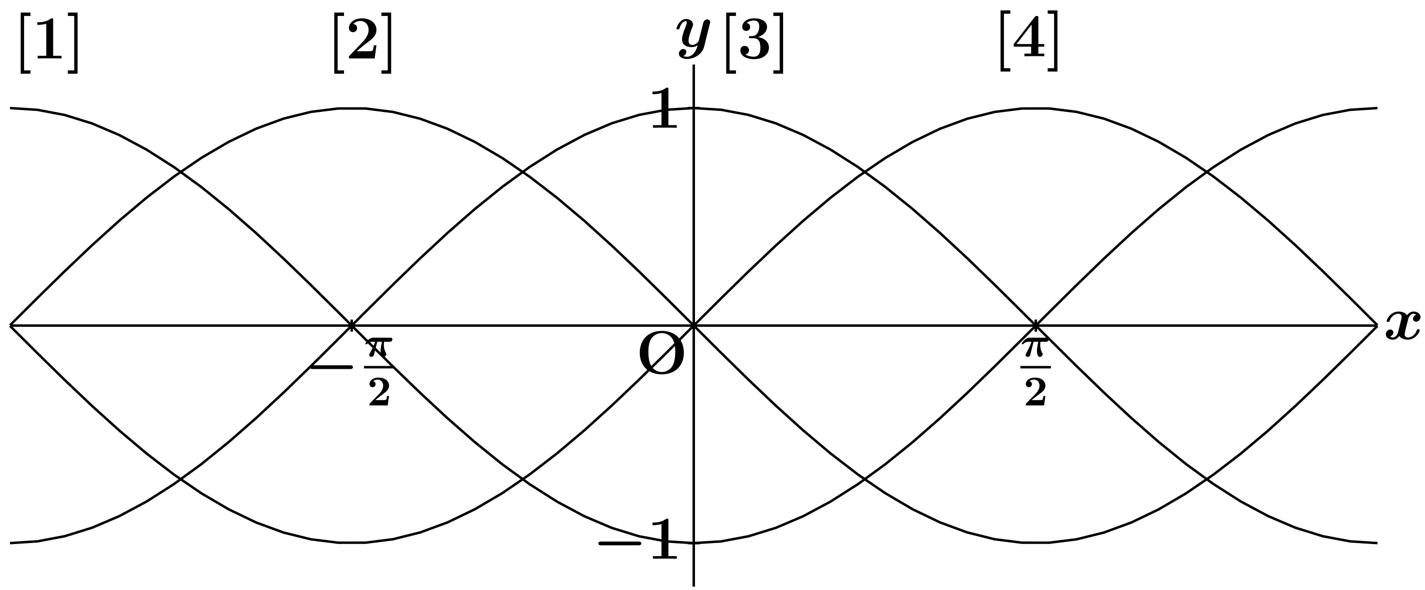
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

課題 0626-5 次の関数を微分せよ．

[1] $y = x^{\frac{1}{4}}$ [2] $y = x^{-2}$ [3] $y = x^{-\frac{1}{2}}$

三角関数の微分

三角関数のグラフ



課題 0626-6 上の図は

$$y = \sin x, y = \cos x, y = -\sin x, y = -\cos x$$

のグラフである．[1]–[4] の関数を答えよ．

$\sin x, \cos x$ の微分

課題 0626-7 「導関数の意味」を用いて導関数を求めよ.

[1] $y = \sin x$ [2] $y = \cos x$

- 微分公式

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \ \ (\cos x)' = -\sin x}$$

課題 0626-8 次の問いに答えよ

[1] $y = \sin x$ の $(0,\ 0)$ における接線の傾きを求めよ

[2] $y = 2\sin x - 3\cos x$ を微分せよ

$\tan x$ の微分

- $\boxed{(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\cos^2 x = (\cos x)^2$

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{(\cos x \cos x) - \sin x(-\sin x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

課題

課題 0626-9 次の関数を微分せよ

[1] $y = \sin x \cos x$

[2] $y = \sin^2 x (= \sin x \sin x)$

[3] $y = x \tan x$

[4] $y = \tan x - x$

$\sin(ax+b)$ の微分

$$y' = (\sin(ax+b))' = \lim_{z\to x} \frac{\sin(az+b) - \sin(ax+b)}{z-x}$$

$ax+b=u,\ az+b=w$ とおくと

$$w-u = a(z-x),\ w\to u$$

$$y' = \lim_{w\to u} \frac{\sin(w)-\sin(u)}{\frac{w-u}{a}} = a\lim_{w\to u}\frac{\sin(w)-\sin(u)}{w-u}$$

$$(\sin x)' = \lim_{z\to x}\frac{\sin z - \sin x}{z-x}$$

$$= a\cos u = a\cos(ax+b)$$

$$\boxed{\sin(ax+b)' = a\cos(ax+b)}$$

微分

$f(ax+b)$ の微分

- $\boxed{f(ax+b)' = af'(ax+b)}$

  1つの変数とみて微分

- $\bigl(\cos(3x+1)\bigr)' = 3(-\sin(3x+1)) = -3\sin(3x+1)$
- $\bigl((2x+3)^5\bigr)' = 2\cdot 5(2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$

課題 0626-10 微分せよ

[1] $y = \sin 3x$　　[2] $y = (5x+1)^3$

[3] $y = \sqrt{2x+3}$　　[4] $y = \tan(-x+1)$