

# 数列の和・複素数

2022.06.06

# 数列

## 等差数列と等比数列

差が等しい数列を等差数列，等しい差を公差という

- 初項を  $a$ ，公差を  $d$  の等差数列の第  $n$  項を  $a_n$  とおくと

$$a_1 = a, a_2 = a + d, a_3 = a + 2d, \dots$$

$$\text{一般項 } a_n = \boxed{a + (n - 1)d}$$

- 初項を  $a$ ，公比を  $r$  の等比数列の第  $n$  項を  $a_n$  とおくと

$$a_1 = a, a_2 = ar, a_3 = ar^2, \dots$$

$$\text{一般項 } a_n = \boxed{ar^{n-1}}$$

## 等差数列の和

初項  $a$ ，公差  $d$ ，項数が 4 の場合で説明する

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d)$$

逆順にして

$$S = (a + 3d) + (a + 2d) + (a + d) + a$$

2つの式を加えると

$$2S = (2a + 3d) \times 4$$

$$2 \text{ で割ると } S = \frac{4(2a + 3d)}{2} = \boxed{\frac{n(a + a + 3d)}{2}}$$

## 等差数列の和の公式

初項  $a$ ，公差  $d$ ，項数  $n$  の等差数列の和  $S$  は

$$S = \frac{n(2a + (n - 1)d)}{2}$$

$$2a + (n - 1)d = a + (a + (n - 1)d) = \text{初項} + \text{末項}$$

$$S = \frac{\text{項数} \times (\text{初項} + \text{末項})}{2}$$

## 等差数列の和の例題

例題)  $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 99$  を求めよ.

解) 項数  $n$  を求める.

初項 1, 公差 2 より, 末項 (第  $n$  項)  $a_n$  は

$$a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$$

$$a_n = 2n - 1 = 99 \text{ より } n = \frac{99 + 1}{2} = 50$$

$$\text{したがって } S = \frac{50(1 + 99)}{2} = 2500$$

## 等比数列の和

初項  $a$ ，公比  $r$ ，項数が 5 の場合で説明する

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4$$

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5$$

2つの式を引くと

$$S - rS = a - ar^5$$

$$\therefore (1 - r)S = a(1 - r^5)$$

したがって， $r \neq 1$  のとき 
$$S = \frac{a(1 - r^5)}{1 - r}$$

## 等比数列の和の公式

初項  $a$ ，公比  $r$ ，項数  $n$  の等比数列の和  $S$  は

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

ただし， $r \neq 1$  とする

[覚え方] 
$$S = \frac{\text{初項}(1 - r^{\text{項数}})}{1 - r}$$

項数は第  $n$  項の式から求める

$$a_n = ar^{n-1}$$



## 等比数列の和の例題

例題)  $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$  を求めよ.

解) 初項1, 公比2より, 末項(第 $n$ 項) $a_n$ は

$$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$a_n = 2^{n-1} = 2^{10} \text{ より } n - 1 = 10$$

$$\therefore n = 11$$

$$S = \frac{1 \times (1 - 2^{11})}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{11}}{-1} = 2^{11} - 1$$

## 課題 (等差数列と等比数列の和)

課題 0605-1 次の和を求めよ. (TextP202,204)

[1] 初項 3, 末項 19, 項数 15 の等差数列の和

[2] 初項 3, 公比 2 の等比数列の初項から第  $n$  項までの和

# 和の記号 $\sum$ (シグマ)

例) 1, 2, 3,  $\dots$ , 10 の和を表す

$$(1) S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$(2) S = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10$$

(3) 第  $k$  項は  $k$

$$k = 1, 2, 3, \dots, 10$$

$$S = \sum_{k=1}^{10} k$$

KeTMath sum(k=1,10,k)

$k$  に 1, 2,  $\dots$ , 10 を順に入れて加えるという意味

# $\Sigma$ の使い方

$$\text{例 1)} \sum_{k=1}^5 (2k + 1) = \boxed{3 + 5 + 7 + 9 + 11}$$

$$\text{例 2)} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 = \sum_{k=\boxed{1}}^{\boxed{20}} \boxed{k^2}$$

$$\text{第 } k \text{ 項は } \boxed{k^2}, k = \boxed{1, 2, \cdots 20}$$

課題 0605-2  $S, n, a_k$  を求めよ.

$$[1] S = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} \quad [2] 2 + 4 + 6 + \cdots + 10 = \sum_{k=1}^n a_k$$

# 複素数

## 虚数

- $x^2 + 6x + 10 = 0$  (1)
- $(x + 3)^2 - 9 + 10 = 0$  より  $(x + 3)^2 = -1$  (2)
- 実数では、2乗して  $-1$  になることはない
- 2乗して  $-1$  になるものも数と考え、 $i$  とおく (虚数単位)
- $i^2 = -1$  また  $(-i)^2 = -1$
- 2乗して  $-1$  になる数は  $\pm i$  があるが  $\sqrt{-1} = i$  とする
- (2) より  $x + 3 = \pm i$   $x = -3 \pm i$

## 負の数の平方根

例)  $\sqrt{-4}$

- 2 乗して  $-4$  になる数

$$(2i)^2 = 4i^2 = -4, \quad (-2i)^2 = 4i^2 = -4$$

$$\sqrt{-4} = 2i \text{ と定める}$$

例)  $\sqrt{-2} = \boxed{\sqrt{2}i}$

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

課題 0605-3 計算せよ.

Text P133 問 1

[1]  $\sqrt{-6}$

[2]  $\sqrt{-\frac{9}{4}}$

[3]  $\sqrt{-6}\sqrt{-2}$

[4]  $\sqrt{-3}\sqrt{2}$

## 複素数

- $z = a + bi$  の形の数を複素数という ( $a, b$  は実数)  
 $1 + i, 2 + 3i, 4 - 2i, \dots$
- $a$  を  $z$  の実部,  $b$  を  $z$  の虚部という



## 複素数の計算

- ふつうの式のように計算し， $i^2$  が出たら  $-1$  で置き換える

- 和  $(2 + 3i) + (5 - i) = \boxed{7 + 2i}$

- 積  $(2 + 3i)(4 + i)$   
 $= 8 + 2i + 12i + 3i^2 = 8 + 14i - 3 = 5 + 14i$

$$(2 + i)(2 - i)$$
$$= 4 - i^2 = 4 + 1 = 5$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

## 複素数の計算（商）

- $\frac{1 + 3i}{2 + i}$

$(2 + i)(2 - i) = 5$  を用いる

$$= \frac{(1 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$

## 複素数の計算問題

課題 0605-4 計算せよ.

TextP132 問 1

$$[1] (1 - 3i) + (2 - 5i) \quad [2] (10 - 7i) - (3 + 9i)$$

$$[3] (-4 + 7i)(3 + 2i) \quad [4] (-2 + 6i)(2 + 6i)$$

$$[5] \frac{5 + 2i}{1 - 3i}$$

$$[6] \frac{1 + i}{-2 + 5i} - \frac{4 - 2i}{2 + 5i}$$

# 複素数平面

- $z = a + bi$  を平面上の点  $(a, b)$  で表す

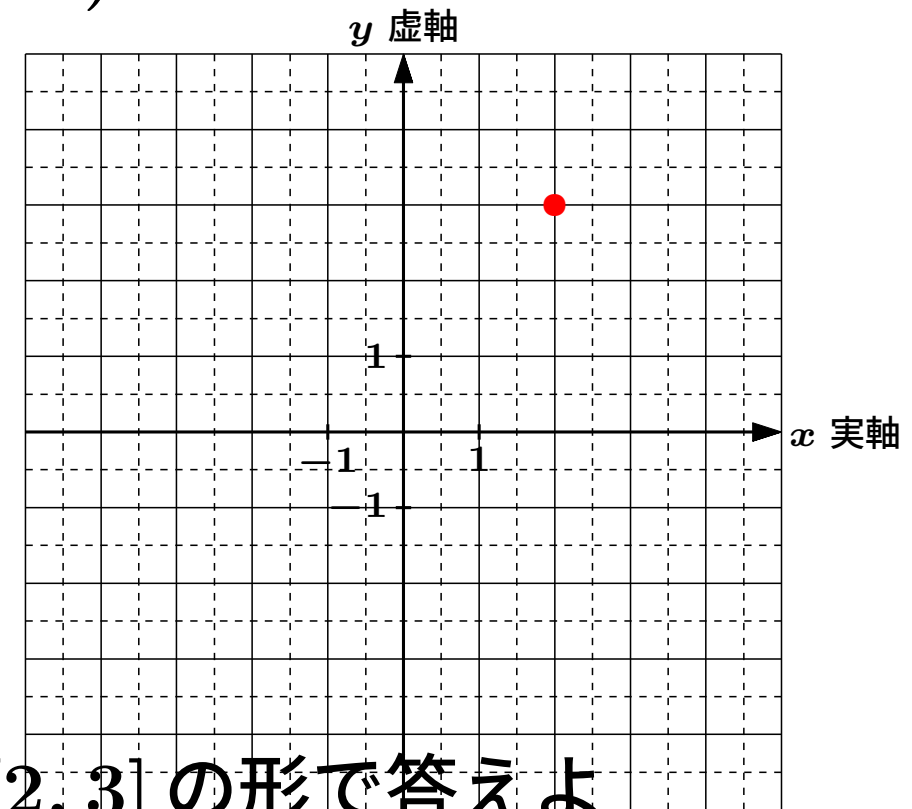
[1]  $2 + 3i \leftrightarrow$  点  $(2, 3)$

[2]  $-2 + i \leftrightarrow$  点

[3]  $3 \leftrightarrow$  点

[4]  $-3 \leftrightarrow$  点

[5]  $4i \leftrightarrow$  点



課題 0605-5 [2]-[5] の点を求めよ

ここでは,  $(2, 3)$  の代わりに  $[2, 3]$  の形で答えよ

## 複素数の和 $z + w$ と図形

- $z = a + bi, w = c + di$  ( $a, b, c, d$  は実数)

$$z + w = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

- 複素数の和を動かそう

- (1) ID に学生番号を入れて「確認」「出題」を押す.
- (2) 赤い点を  $z + w (= \alpha + \beta)$  の位置に動かす.
- (3) 点が決まったら、「採点」を押す.
- (4) 以上を 4 回ほど繰り返す.

課題 0605-6  $O, z, z + w, w$  でできる四辺形は何か.

## 絶対値と偏角

- $z = a + bi$  を平面上の点  $(a, b)$  で表したとき

絶対値  $|z|$

原点  $O$  と  $z$  の距離

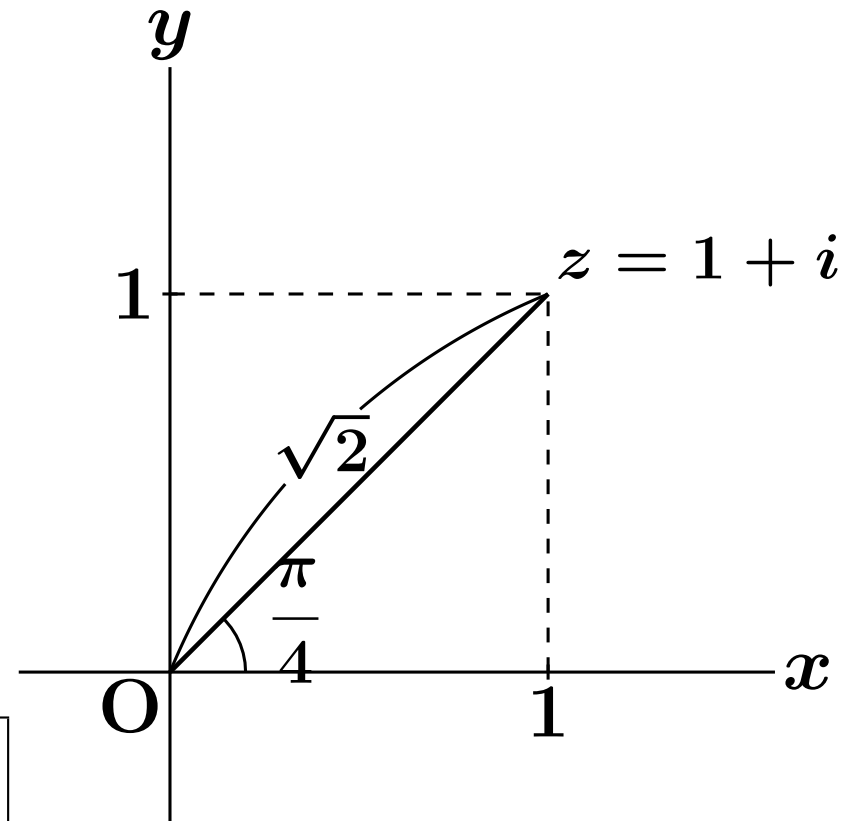
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

偏角  $\arg z$

$Oz$  と  $x$  軸 (正) の角  $\theta$

例)  $z = 1 + i$

絶対値  $\boxed{\sqrt{2}}$ , 偏角  $\boxed{\frac{\pi}{4}}$



## 絶対値と偏角の問題

課題 0605-7 次の複素数の絶対値と偏角を求めよ.

[1] $z_1 = \sqrt{3} + i$	[2] $z_2 = i$
[3] $z_3 = -2$	[4] $z_4 = -3i$

## 絶対値と偏角の応用問題

課題 0605-8  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  とする.

[1]  $|z|^2$  を  $a, b$  で表せ

[2]  $|w|^2$  を  $c, d$  で表せ

[3]  $zw$  の実部と虚部を  $a, b, c, d$  で表せ

[4]  $|zw|^2$  を計算せよ

[5]  $|zw|^2 = |z|^2|w|^2$  を証明せよ