

いろいろな関数の微分2

2023.07.03

復習

導関数の定義式

- $$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$
- $\Delta x = z - x$, $\Delta y = f(z) - f(x)$ とおくと
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
- 書き方
$$y', f'(x), f', (f(x))' \text{ (ラグランジュ)}$$
$$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x)) \text{ (ライプニッツ)}$$

和・定数倍・積・商

$$\bullet (f + g)' = f' + g', \quad (f - g)' = f' - g'$$

$$\bullet (cf)' = cf'$$

定数倍の微分

$$\bullet (fg)' = f'g + fg'$$

積の微分

$$\bullet \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

商の微分

課題 202-1 積と商の微分を用いて微分せよ.

$$[1] \ y = x^3(4x + 1) \quad [2] \ y = \frac{x^3}{4x + 1}$$

三角関数の微分

$\sin x, \cos x$ の微分

課題 202-2 グラフ上の点を動かして導関数を求めよ.

[1] $y = \sin x$

[2] $y = \cos x$

$\sin x, \cos x$ の微分公式

- $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$

課題 202-3 次の関数を微分せよ

[1] $y = 2 \sin x$

[2] $y = -\cos x$

[3] $y = 3 \sin x + 4 \cos x$

[4] $y = x - \cos x$

tan x の微分

- $$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

$$\begin{aligned}
 (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\
 &= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{(\cos x \cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
 \end{aligned}$$

課題

課題 202-4 次の関数を微分せよ

$$[1] \ y = \sin x \cos x$$

$$[2] \ y = \sin^2 x (= \sin x \sin x)$$

$$[3] \ y = x \tan x$$

$$[4] \ y = \tan x - x$$

$\sin(ax + b)$ の微分

$$y' = (\sin(ax+b))' = \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sin(az + b) - \sin(ax + b)}{z - x}$$

$$ax + b = u, \quad az + b = w \text{ とおくと}$$

$$w - u = a(z - x), \quad w \rightarrow u$$

$$y' = \lim_{w \rightarrow u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{\frac{w-u}{a}} = a \lim_{w \rightarrow u} \frac{\sin(w) - \sin(u)}{w - u}$$

$$(\sin x)' = \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sin z - \sin x}{z - x}$$

$$= a \cos u = a \cos(ax + b)$$

$$\sin(ax + b)' = a \cos(ax + b)$$

微分

$f(ax + b)$ の微分

- $f(ax + b)' = a f'(ax + b)$

1 つの変数とみて微分

- $(\cos(3x + 1))' = 3(-\sin(3x + 1)) = -3 \sin(3x + 1)$
- $((2x + 3)^5)' = 2 \cdot 5(2x + 3)^4 = 10(2x + 3)^4$

課題 202-5 微分せよ

[1] $y = \sin 3x$

[2] $y = (5x + 1)^3$

[3] $y = \cos(2x + 3)$

[4] $y = \tan(-x + 1)$

指数関数の微分

$y = a^x$ の接線

- 指数関数 $y = a^x$ ($a > 0$) 上の $(0, 1)$ で接線を引く

課題 202-6 接線の傾きがちょうど 1 になる a の値を求めよ

- この a をネイピア数 (ナピア数) といい, e で表す

$$e = 2.71828182846 \dots$$

- e は微分で重要な定数

$$\bullet \quad f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \boxed{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1}$$

自然対数

- ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という

$$y = \log_e x \iff e^y = x$$

- $\ln x$ または底を略して $\log x$ と書くこともある.
- 自然対数と常用対数の変換

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}, \quad \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

関数電卓

関数電卓—自然対数と常用対数



\log_{10} \log_e

関数電卓—対数の計算

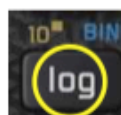
◆『基本計算』

6. 関数の計算 (3) 対数の計算

■ 常用対数

(例) $\log 2$

(ログ) \log 2 \rightarrow $=$

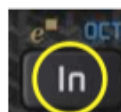


$\log(2)$
0.3010299957

■ 自然対数

(例) $\ln 2$

(エル・エヌ) \ln 2 \rightarrow $=$



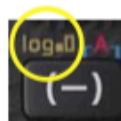
$\ln(2)$
0.6931471806

■ 底指定対数

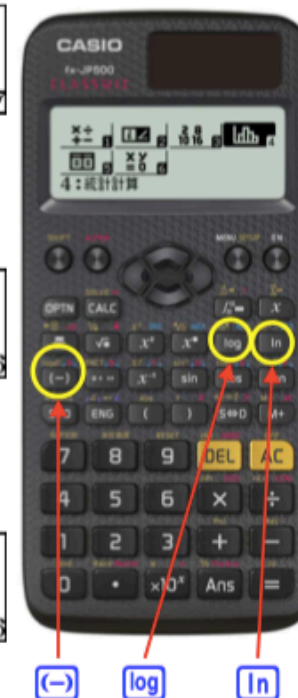
(例) $\log_3 2$

※底=3の場合

SHIFT \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow $=$
 \log_{\blacksquare}



$\log_3(2)$
0.6309297536



\log

\ln

\log_{\blacksquare}

(15)

関数電卓—度とラジアン

◆『基本計算』

6. 関数の計算 (4) 三角関数

■ 度数法での計算

(例) $\sin 30$

- ① **SHIFT** **MENU** ② **1** : 角度単位を度数法に設定

1: 入力/出力
2: 角度単位
3: 表示桁数
4: 分秒表示

1: 度数法(D)
2: 弧度法(R)
3: グラード(G)

- ② **sin** 3 0 **)** **=**

$\sin(30)$
 $\frac{1}{2}$

■ 弧度法での計算

(例) $\sin \frac{\pi}{6}$

- ① **SHIFT** **MENU** ② **2** : 角度単位を弧度法に設定

- ② **sin** **SHIFT** **$\times 10^x$** **$\frac{\pi}{\square}$** **6** **\rightarrow** **)** **=**
(π)

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
 $\frac{1}{2}$



指数関数 e^x の微分

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet (e^x)' &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{e^{x+(z-x)} - e^x}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{e^x e^{z-x} - e^x}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{e^x (e^{z-x} - 1)}{z - x} \\ &= e^x \lim_{z-x \rightarrow 0} \frac{e^{z-x} - 1}{z - x} = e^x \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z}} \frac{e^z - 1}{z} = e^x \end{aligned}$$

($z - x$ を z と考える)

• よって

$$(e^x)' = e^x$$

微分しても同じ関数になる

e^{ax+b} の微分

- $$(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$$

そのまま

例 $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $(e^{-x+3})' = -e^{-x+3}$

課題 202-7 次を微分せよ.

[1] $y = e^{5x}$

[2] $y = e^{-2x}$

[3] $y = e^{3x+1}$

[4] $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

自然対数 $y = \log x$ の微分

$$\bullet \quad \boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}} \quad \boxed{(\log(ax + b))' = \frac{a}{ax + b}}$$

証明 $(\log x)' = \lim_{z \rightarrow x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$

$\log z = w, \log x = u$ とおくと $z = e^w, x = e^u, w \rightarrow u$

$$= \lim_{w \rightarrow u} \frac{w - u}{e^w - e^u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}$$

課題 202-8 次の関数を微分せよ.

[1] $y = \log(-x)$ [2] $y = \log 2x$ [3] $y = \log(x + 5)$