指数対数・数列

2023.05.29

指数対数（復習＋）

指数関数 $y = a^x$

- a は正の定数
- 任意の実数 x について a^x が定まる.

$$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

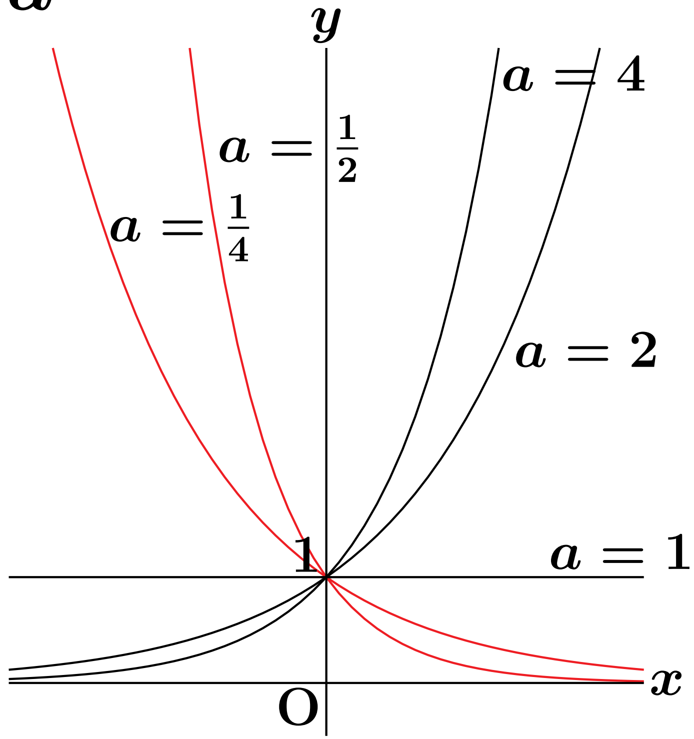
- 指数法則

(1) $a^p a^q = a^{p+q}$

(2) $(a^p)^q = a^{pq}$

(3) $(ab)^p = a^p b^p$

- $y = a^x$ のグラフ



対数関数

対数の定義

- $y = \log_a x$

  a を**底**，x を**真数**

  y を a を底とする x の**対数**という．

- 対数 y は，a を何乗したら x になるかという数

  $a^{\boxed{y}} = x$ となる $\boxed{y}$ のこと

例) $y = \log_3 9$

$3^{\boxed{y}} = 9$ となる y のこと

$3^2 = 9$ だから　$y = \log_3 9 = 2$

対数の値と対数法則

- $y = \log_a x \iff a^y = x$

(例) $y = \log_2 16 \iff 2^y = 16 = 2^4$

$y = 4$ となるから　$\log_2 16 = 4$

- 対数法則

(1) $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$

(2) $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$

(3) $\log_a b^p = p \log_a b$

対数の計算

(1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$

与式 $= \log_{10}(5 \times 2) = \log_{10} 10 = 1$

(2) $\log_2 12 - \log_2 3$

与式 $= \log_2(\frac{12}{3}) = \log_2 4 = 2$

(3) $2 \log_3 4 + \log_3 4 - \log_3 8$

与式 $= \log_3 4^2 + \log_3 4 - \log_3 8$
$= \log_3 \frac{16\times4}{8} = \log_3 8$

底・真数・対数の条件

- $y = \log_a x \iff a^y = x$
- $\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$
- 底 a の条件は　$a > 0, a \fallingdotseq 1$
- 真数 x の条件は　$x > 0$
- 対数 $y = \log_a x$ の値の範囲は　実数全部

対数関数のグラフ

- $y = \log_a x \iff a^y = x \ (x = a^y)$
- x と y を入れ替えれば $y = a^x$ のグラフになる．
- これを逆関数という．
- アプリ「指数と対数」を動かしてみよう

課題 0529-1 $y = \log_a x$ と $y = a^x$ について（　）を埋めよ．

[1] グラフは直線 $y = x$ に関して（　　）

[2] $y = \log_a x$ は $y = a^x$ の（　　）

底の変換公式

底を a から別の c に変える公式

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

例) $\log_3 8$ を底が 2 の対数に変える

$$\log_3 8 = \frac{\log_2 \boxed{8}}{\log_2 \boxed{3}} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3} = \frac{3\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{3}{\log_2 3}$$

課題 0529-2 底を変換して計算せよ　　Text P193 問 1

[1] $\log_4 32$　　[2] $\log_9 3$　　[3] $\log_3 2 \log_2 27$

[4] $\log_a b \times \log_b a$

常用対数

- 底が 10 の対数　$\log_{10} x$
- 数値計算ではよく用いられる（対数表，関数電卓）
- $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$（近似値）

例
$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771$$
$$= 0.7781$$

課題 0529-3 次の値を求めよ

[1] $\log_{10} 4$　[2] $\log_{10} 8$　[3] $\log_{10} \frac{1}{2}$　[4] $\log_{10} 5$

常用対数と桁数

- 100000 の桁数は $\boxed{6\text{ 桁}}$
- $100000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ より
  $$\log_{10} 100000 = \log_{10} 10^5 = 5 \log_{10} 10 = 5$$
- 常用対数と桁数 $\boxed{\text{桁数} = \text{常用対数の整数部分} + 1}$

例) 2^{100} の桁数

$$\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$$

よって　31 桁

課題 0529-4 3^{30} の桁数を求めよ　　Text P196 問 2

自然対数

- もう１つ，数学では大切な**自然対数**がある．
- ネイピアの定数 e を底とする対数

$$e = 2.718281828$$

- 自然対数と常用対数の変換

$$\log_e 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} e}$$

- 詳しくは，微分のときに説明する

数列

数列とは

- 数の列

$$a_1, \ a_2, \ \cdots$$

KeTMath　a_n

- ここでは規則的に並んだ数列とする

$$1, \ 3, \ 5, \ 7, \ \boxed{9}, \ \boxed{11}, \ \cdots$$

- 最初の項を初項という
- 最後の項（末項）があるとき，項の数を項数という

数列の一般項

- n を正の整数とするとき，第 n 項を表す式を**一般項**

例 1) $2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

一般項（第 n 項）は $\boxed{n+1}$

例 2) $2,\ 4,\ 8,\ \cdots$

一般項（第 n 項）は $\boxed{2^n}$

課題 0529-5 次を求めよ　TextP200 問 1, 問 2

[1] 一般項が $a_n = 2^n$ のとき，a_1 から a_5 までの値

[2] 数列 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots$ の一般項 a_n

交互に符号が変わる数列の一般項

- $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ の一般項は $\boxed{(-1)^n}$
- $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$ の一般項は $\boxed{(-1)^{n-1}}$
- $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ \cdots$ の一般項は $\boxed{(-1)^{n-1}n}$
- $2,\ 0,\ 2,\ 0,\ \cdots$ の一般項は $\boxed{(-1)^{n-1}+1}$

課題 0529-6 次の数列の一般項はどうなるか．

[1] $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$　[2] $0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots$

等差数列

- 差（公差）が等しい数列

  例）$\underbrace{1,\ 3}_{+2},\ \underbrace{\ 5}_{+2},\ \underbrace{\ 7}_{+2},\ \cdots$

- 初項を a，公差を d とおくと

  $a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots,$ 第 n 項は？

- 第 n 項 (一般項) は $a_n = a + (n-1)d$

(例) 等差数列 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$ の一般項は

$$a_n = 1 + 2\boxed{(n-1)} = 2n - 1$$

等比数列

- 比（公比）が等しい数列

  例）$\underbrace{2,\ 6}_{\times 3},\ \underbrace{6,\ 18}_{\times 3},\ \underbrace{18,\ 54}_{\times 3},\ \cdots$

- 初項を a，公比を r とおくと

  $a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots,$ 第 n 項 $a_n = \boxed{a\,r^{n-1}}$

例) 等比数列 $2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \cdots$ の一般項は

$$a_n = 2\cdot 3^{n-1} = 6^{n-1} \text{ としない}$$

課題 (等差数列と等比数列)

課題 0529-7 次を求めよ **Text P201,203**

[1] 初項 2, 公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n

[2] a_{10}

[3] 初項 2, 公比 -3 の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n

[4] b_5

等差数列の和

初項 a，公差 d，項数が 4 の場合で説明する

$$S = \boxed{a} + \boxed{(a+d)} + \boxed{(a+2d)} + \boxed{(a+3d)}$$

$$S = \boxed{(a+3d)} + \boxed{(a+2d)} + \boxed{(a+d)} + \boxed{a}$$

2 つの式を加えると

$$2S = (2a+3d) \times 4$$

したがって　$S = \dfrac{4(2a+3d)}{2}$

等差数列の和の公式

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S は

$$\boxed{S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}}$$

$$2a + (n-1)d = a + (a + (n-1)d) = \text{初項} + \text{末項}$$

$$\boxed{S = \frac{\text{項数} \times (\text{初項} + \text{末項})}{2}}$$

等差数列の和の例題

例題) $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 99$ を求めよ

解) 項数 n を求める.

初項 1，公差 2 より，第 n 項 a_n は

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

$a_n = 2n - 1 = 99$ より　$n = \dfrac{99+1}{2} = 50$

したがって　$S = \dfrac{50(1+99)}{2} = 2500$

課題 0529-8 $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ について

[1] 項数を求めよ　　[2] 和 S を求めよ