

2次関数と2次方程式

2023.04.24

復習 (関数)

関数

- 変数 x の値を与えると変数 y の値が求まる
例) $y = 2x + 1$, $y = x^2 + 2x + 1$
- これを変数 x の関数という
- 変数 x の関数であることを $f(x)$ などで表す
例 1) $f(x) = 2x + 1$ (1 次関数)
例 2) $g(x) = x^2 + 2x + 1$ (2 次関数)

関数記号

- 関数 $f(x)$ の x に定数 a を代入した値を $f(a)$ で表す
- 例) $f(x) = x^2 + x - 1$ のとき $f(2) = 2^2 + 2 - 1 = 5$
- 課題 0424-1 $f(x) = x^2 - 1$ のとき, 次を求めよ.
 - [1] $f(0)$
 - [2] $f(1)$
 - [3] $f(-2)$
 - [4] $f(a + 1)$ (a は定数)

関数のグラフ

関数 $y = f(x)$

- x を変えるとき，点 $(x, f(x))$ も変わる．

例) 1 次関数 $y = 2x + 1$

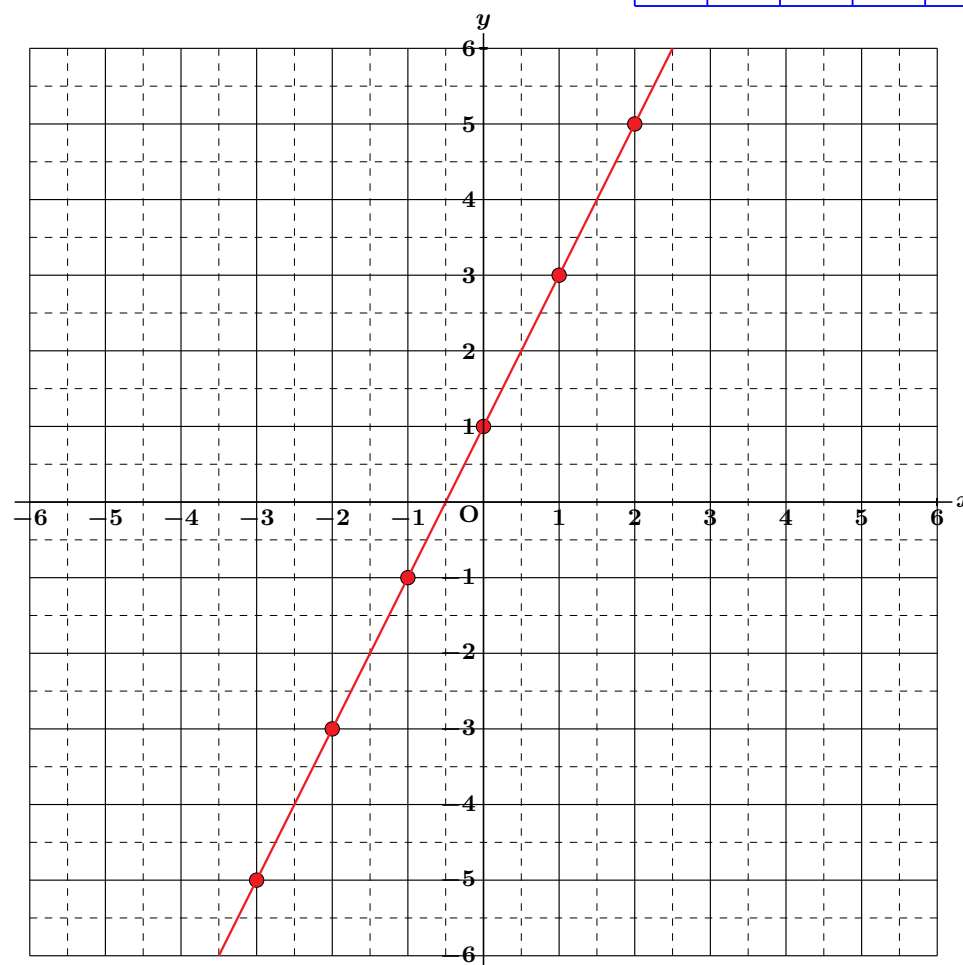
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11

- この点の集まりを，その関数の**グラフ**という．

1 次関数のグラフ

例) $y = 2x + 1$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11



傾き 2
 y 切片 1

1 次関数のグラフ

課題 0424-2 関数のグラフをかき，傾きと y 切片を答えよ．

[1] $y = 3x - 1$

[2] $y = 5 - x$

[3] $y = \frac{1}{2}x + 2$

[4] $y = \frac{x+2}{2}$

注) 傾きと y 切片をコンマで区切って答えよ．

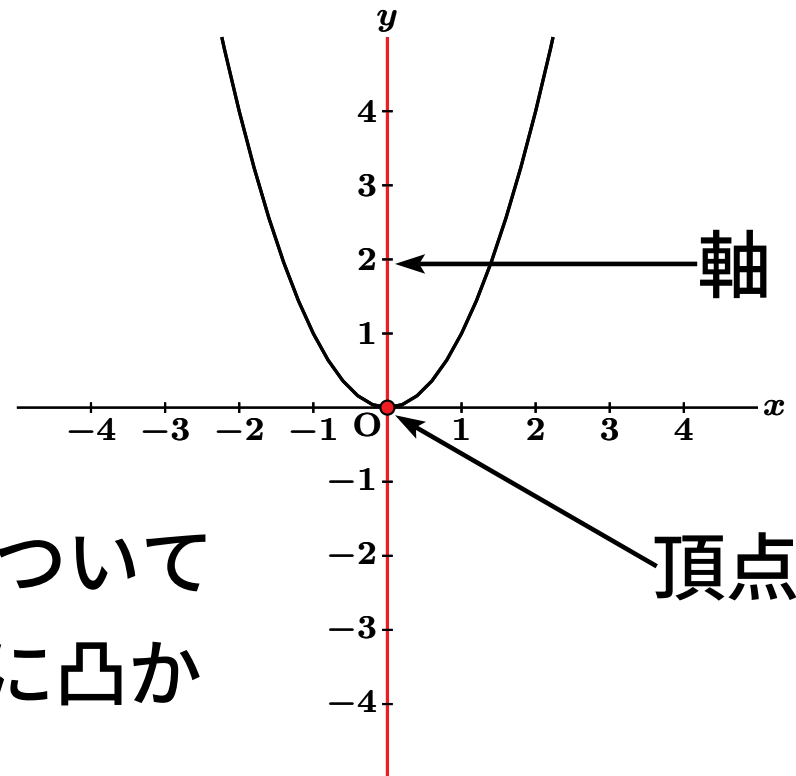
2 次関数のグラフ (基本形)

「関数のグラフ」で $y = x^2$, $y = -x^2$ をかこう

軸は $x = 0$ (y 軸)

頂点は $(0, 0)$

下に凸



課題 0424-3 $y = -x^2$ について
軸, 頂点, どちらに凸かを答えよ.

2 次関数のグラフ 2

カッコ内の定数を変えたときのグラフをかこう

(1) $y = x^2 + c$ (定数 c)

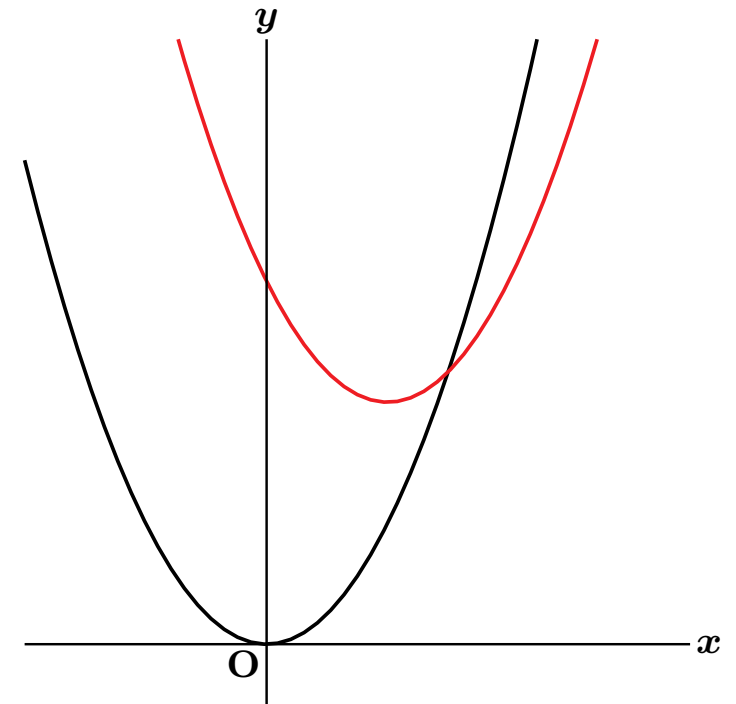
縦方向に c だけ平行移動

(2) $y = (x - b)^2$ (定数 b)

横方向に b だけ平行移動

(3) $y = (x - b)^2 + c$ (定数 b, c)

頂点の座標は (b, c)



課題 0424-4 $y = ax^2$ は $y = x^2$ からどう変わるか

課題 2 次関数のグラフ

課題 0424-5 「2 関数のグラフ」を用いて，次の 2 次関数のグラフをかけ．また， $y = x^2$ のグラフをどのように移動 (変形) したかを答えよ．

[1] $y = x^2 + 1$

[2] $y = (x - 3)^2$

[3] $y = (x + 1)^2$

[4] $y = 2x^2$

2 次関数のグラフ 3

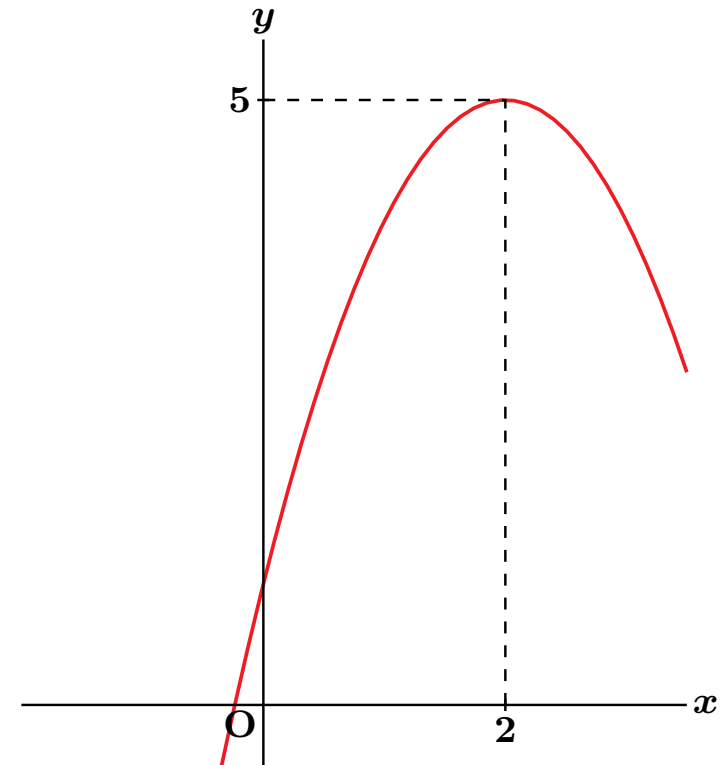
$$(x^2 + 2bx + b^2) + d$$

$$\parallel$$

• $y = x^2 + 2bx + c \implies (x + b)^2 + d$ の形に変形

(例) $y = x^2 - 2x + 3$
 $= (x^2 - 2x + 1) - 1 + 3$
 $= (x - 1)^2 + 2$

(例) $y = -x^2 + 4x + 1$
 $= -(x^2 - 4x) + 1$
 $= -((x - 2)^2 - 4) + 1$
 $= -(x - 2)^2 + 5$



課題 (2 次関数のグラフ)

課題 0424-6 $a(x + b)^2 + c$ の形に変形せよ.

[1] $y = x^2 + 4x - 5$

[2] $y = x^2 - 2x - 1$

[3] $y = -x^2 - 4x + 1$

[4] $y = x^2 + x + 1$

2 次方程式

2 次式の因数分解

$$(1) \quad x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$$

$$(2) \quad x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2 + 2^2x = (x + 2)^2$$

$$(3) \quad x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

2 次方程式（因数分解）

- 「 $AB = 0$ ならば $A = 0$ または $B = 0$ 」を用いる.

(例) $x^2 - 9 = 0$

$$\iff (x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\iff x = -3 \text{ (または) } x = 3$$

$$\iff x = \pm 3 \text{ と書く}$$

課題 0424-7 次の方程式を解け.

$$[1] \quad x^2 - 49 = 0$$

$$[2] \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$[3] \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$[4] \quad x^2 - x - 20 = 0$$

平方根

- 2 乗して 4 になる数 ($x^2 = 4$ となる x)

$\implies 2, -2$ の 2 つがある.

- このうち, 正の方の 2 を $\sqrt{4}$ とかく
- 正の数 a について, 2 乗して a になる数のうち正の方を \sqrt{a} とかく

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (-\sqrt{a})^2 = a$$

平方根の性質

- $a > 0$ のとき, $\sqrt{a^2} = a$
2乗して $4^2 (= 16)$ になるのは 4 と -4
正の方をとって, $\sqrt{4^2} = 4$
- $a < 0$ のとき, $\sqrt{a^2} = -a$
2乗して $(-4)^2$ になるのも 4 と -4
正の方をとって, $\sqrt{(-4)^2} = 4$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $b > 0$ のとき, $\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$

課題 平方根

課題 0424-8 次の数を根号を用いしないで表せ

TextP17

[1] $-\sqrt{64}$

[2] $\sqrt{\frac{4}{9}}$

[3] $(-\sqrt{11})^2$

[4] $-(-\sqrt{3})^2$

課題 0424-9 次を計算せよ ($\sqrt{\quad}$ の中を簡単にせよ)

[1] $-\sqrt{12}$

[2] $\sqrt{18}$

[3] $\sqrt{27} - \sqrt{3}$

[4] $\sqrt{100}\sqrt{8}$

2 次方程式（平方完成）

- 平方完成 $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$$x^2 + 6x + 2 = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 2 = (x + 3)^2 - 7$$

- 2 次方程式 $x^2 + 6x + 2 = 0$

$$(x + 3)^2 - 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 7$$

$$x + 3 = \sqrt{7}, -\sqrt{7}$$

合わせて $x + 3 = \pm\sqrt{7}$

$$x = -3 \pm \sqrt{7}$$

解の公式 1

- $x^2 + 2ax + b = 0$

$$(x + a)^2 - a^2 + b = 0$$

$$(x + a)^2 = a^2 - b$$

$$x + a = \pm \sqrt{a^2 - b}$$

よって

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

課題 0424-10 次の2次方程式を解け.

[1] $x^2 + 4x + 2 = 0$

[2] $x^2 + 2x - 2 = 0$

[3] $x^2 - 6x + 1 = 0$

[4] $x^2 - 8x + 2 = 0$

解の公式

- 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

解の公式の導出

課題 0424-11 $ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$\bullet x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \boxed{[1]}$$

$$\bullet x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \boxed{[1]} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\bullet \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \boxed{[1]} - \frac{c}{a} = \frac{\boxed{[2]}}{4a^2}$$

$$\bullet x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\boxed{[3]}}{2a} \text{ から } x = \frac{-b \pm \boxed{[3]}}{2a}$$