三角比と三角関数

2023.05.15

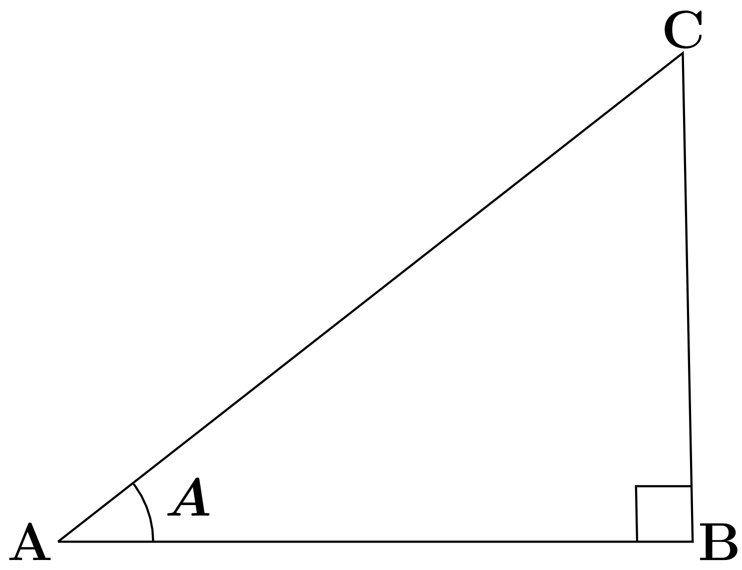
三角比から三角関数へ

三角比 (復習)

$$\cos A = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$$

$$\sin A = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}$$

$$\tan A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}$$



- 辺の比だから，三角形の大きさによらない．

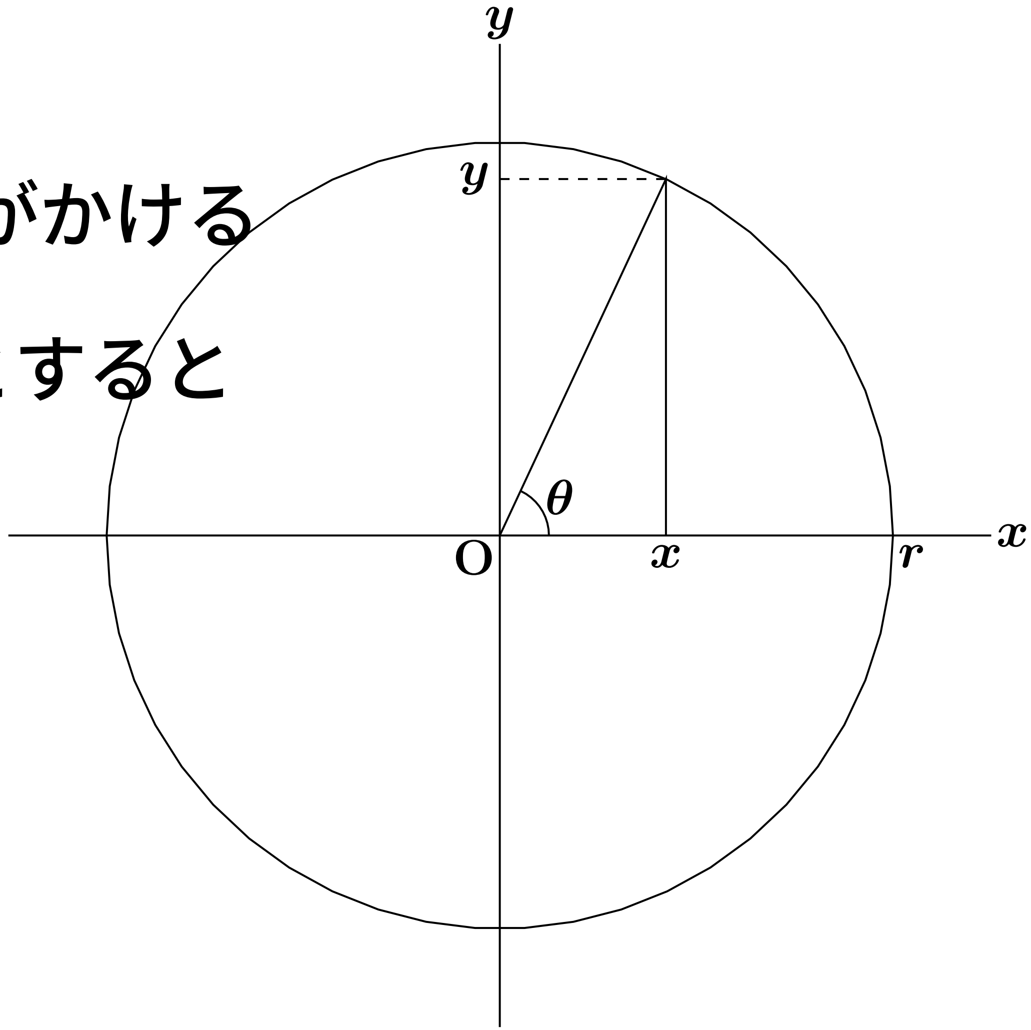
角が 90° より小さい場合 (鋭角)

- 角を θ とおく
- 左の角が θ の直角三角形がかける
- 斜辺 r，底辺 x，高さ y とすると

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



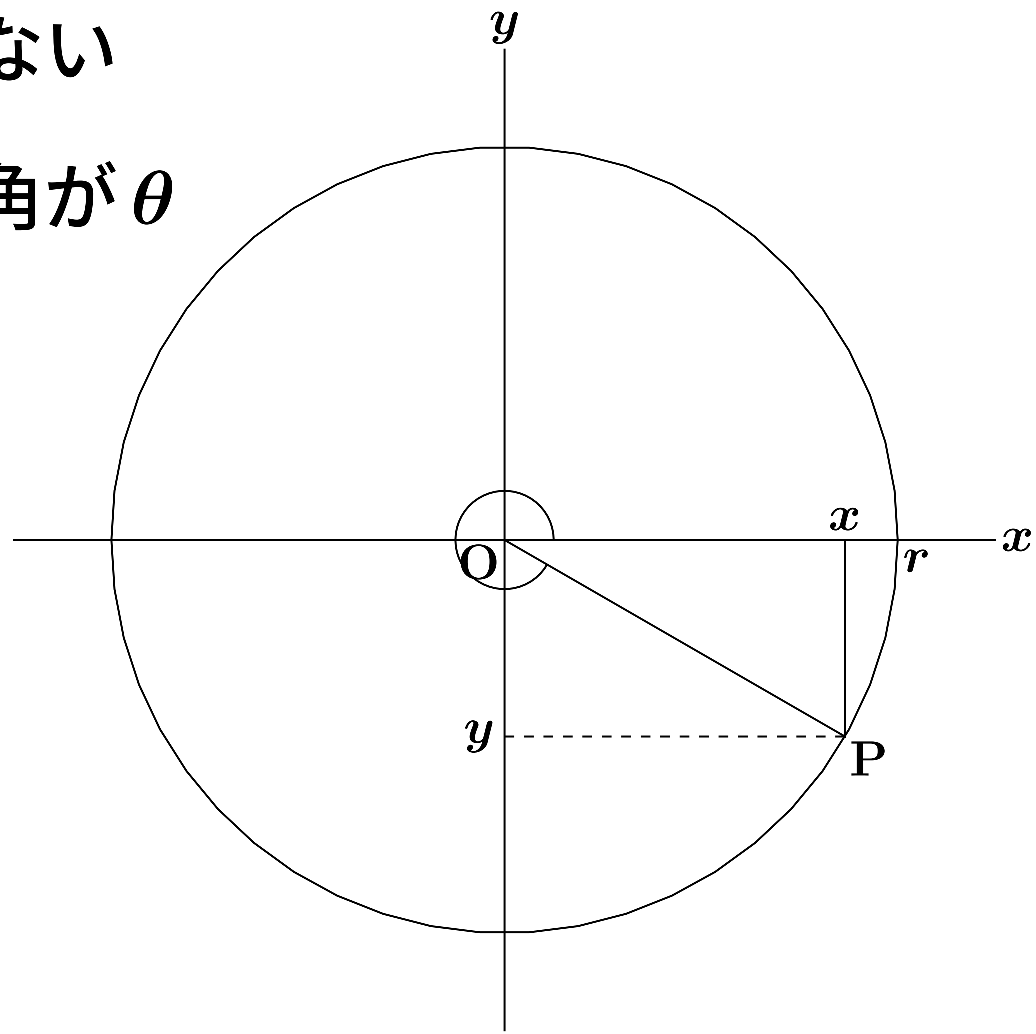
角が 90° より大きい場合

- 角 θ の直角三角形がかけない
- 半径 r の円上に x 軸との角が θ である点 P はとれる
- P の x 座標は底辺
  y 座標は高さに対応

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



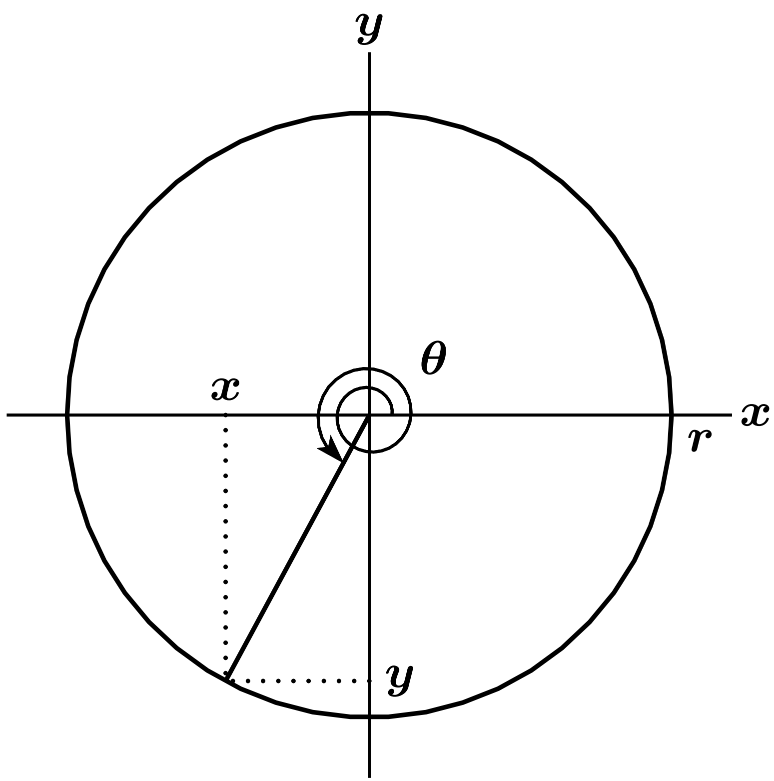
一般角の三角関数の値

- 半径 r の円上に一般角 θ の点 P をとる
- P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

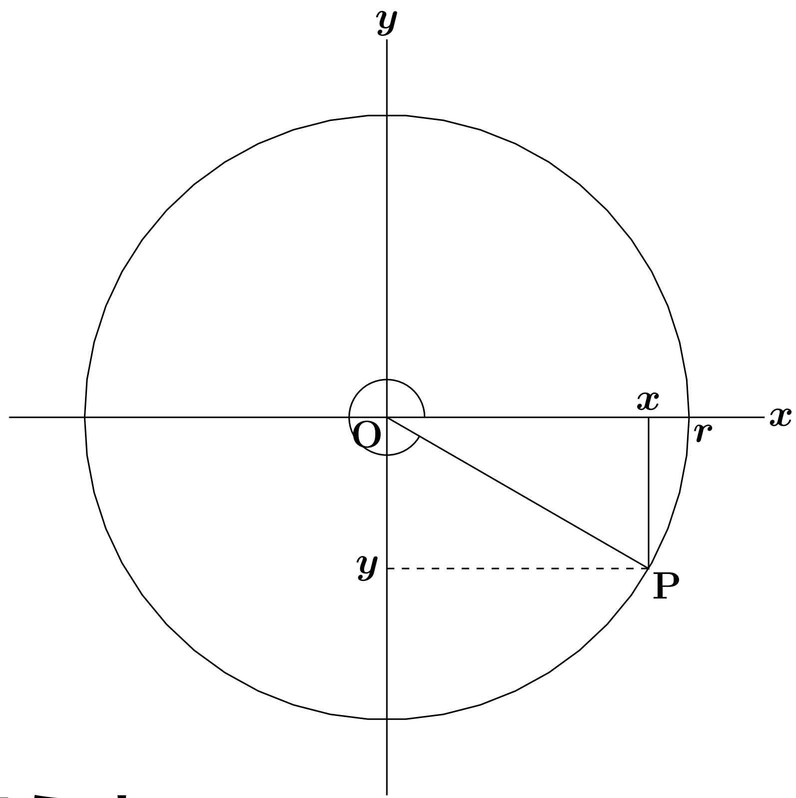


課題 0515-1 図の θ について求めよ

[1] $\cos\theta$ [2] $\sin\theta$ [3] $\tan\theta$

三角関数の値の符号

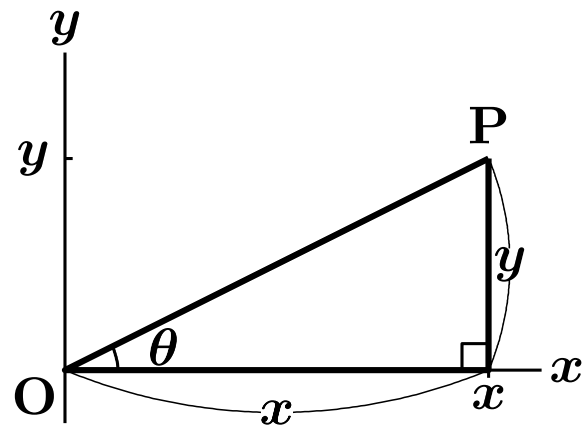
	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
• 第 1 象限	$+$	$+$	$+$
• 第 2 象限	$-$	$+$	$-$
• 第 3 象限	$-$	$-$	$+$
• 第 4 象限			



課題 0515-2 第 4 象限での符号を答えよ

[1] $\cos\theta$ の符号　[2] $\sin\theta$ の符号　[3] $\tan\theta$ の符号

三角関数の相互関係



(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

以下の証明では $\mathrm{OP} = r$ とおく

証) $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\quad$ $\left(\cos(\theta)\right)^2$ を $\cos^2\theta$ と書く

証) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{x^2+y^2}{r^2} = 1$

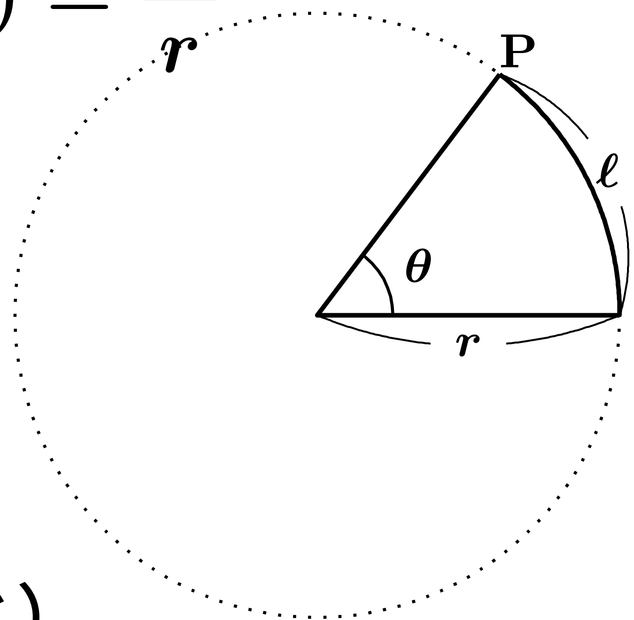
弧度法

- 弧の長さ ℓ と半径 r の比 θ(ラジアン) $= \dfrac{\ell}{r}$
- 半径 r の円周は $2\pi r$ だから

  $$1\text{周の角}\,(360^\circ) = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

- 半周の角 $(180^\circ) = \pi$
- 比なので単位はない（sin などと同じ）

  度と区別するときは，ラジアン (rad) を付ける



度とラジアンの換算

1 つの角について，x 度 $= y$(ラジアン) とする

1 度は $\dfrac{\pi}{180}$　　　x 度は $\dfrac{\pi}{180} \times x$

1 は $\dfrac{180}{\pi}$ 度　　　y は $\dfrac{180}{\pi} \times y$ 度

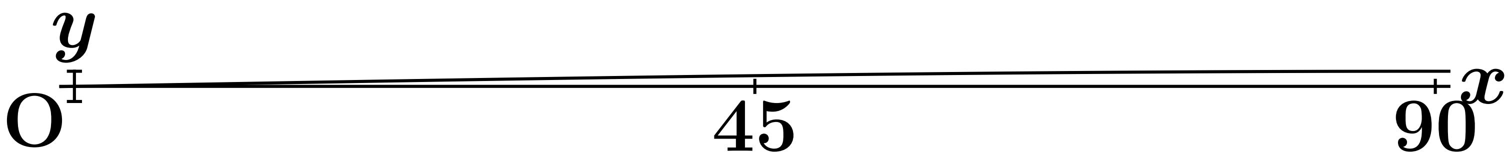
課題 0515-3 次の角を変換せよ (整数か π を含む分数で)

[1] 3.1416　[2] 10°　[3] 1　[4] 60°

正弦関数と正弦曲線

- 一般角を x とおく．
- 任意の x に対して，$y = \sin x$ の値が定まる．
- これを正弦関数という (三角関数の１つ)．
- $y = \sin x$ のグラフを正弦曲線という．
- x はラジアンとする．

  横軸を度とすると下図になってしまう



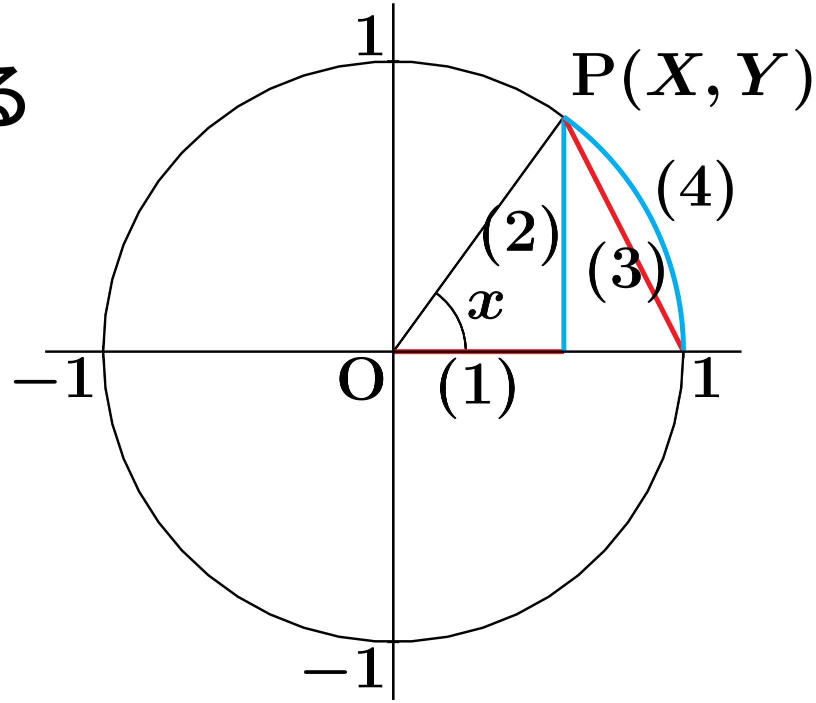
$y = \sin x$ のグラフ

- 半径 1 の円に点 $\mathrm{P}(X, Y)$ をとる

$$\sin x = \frac{Y}{r} = Y$$

- また弧の長さを ℓ とすると

$$x = \frac{\ell}{r} = \ell$$



課題 0515-4 x, $\sin x$ は

(1)-(4) のどの長さで表されるか．

[1] x は [2] $\sin x$ は

正弦曲線を描く

- アプリ「$y = \sin x$ のグラフ」を動かしてみよう
- 使い方

(1) 学生番号を入れる

(2) 赤い点を動かして x を決め，「点を打つ」

長さが x の弧を表示して $(x, \sin x)$ に点を打つ．

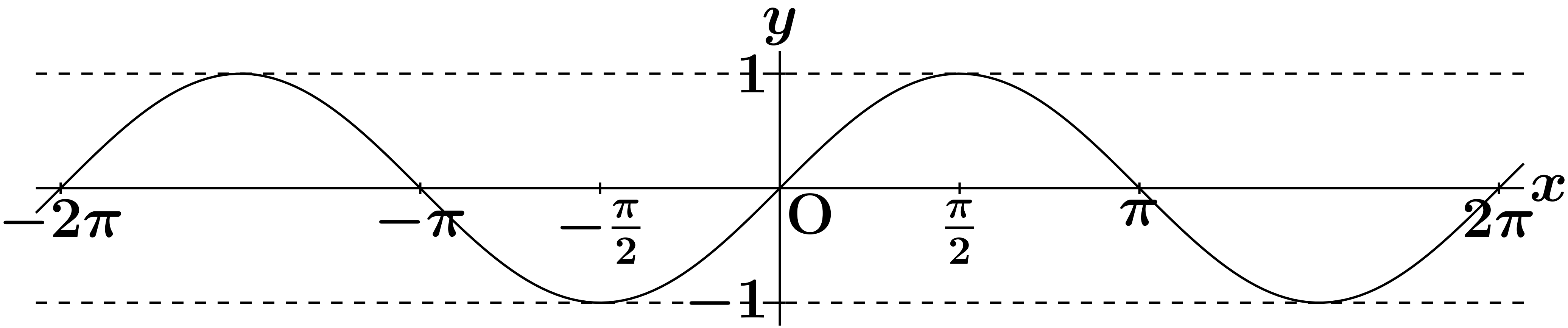
(3) いくつかの点を打って「点を結ぶ」

正弦曲線との違いが表示される

さらに「点を打つ」，「点を結ぶ」を繰り返す．

課題 0515-5「REC」を押して表示されるデータを提出せよ．

正弦曲線の特徴



- 振幅は 1（値の範囲は -1 から 1）
- 周期は 2π（2π で元に戻る）
- 原点対称

正弦曲線 (課題)

「関数のグラフ」でグラフをかいてみよう．

課題 0515-6 次の関数の振幅と周期を答えよ

[1] $y = 2\sin x$　　[2] $y = \dfrac{1}{3}\sin x$

[3] $y = \sin 2x$　　[4] $y = 4\sin\dfrac{x}{2}$

課題 0515-7 次の関数の振幅と周期を答えよ

[1] $y = A\sin x$　　[2] $y = \sin bx$

振幅・周期

- $y = \sin x$ の振幅は 1，周期は 2π
- $y = A\sin x$ の振幅は A，周期は 2π
- $y = \sin(bx)$ の振幅は 1，周期は $\dfrac{2\pi}{b}$

位相

- 「関数のグラフ」でグラフをかいてみよう．

課題 0515-8 $y = \sin x$ のグラフとの関係を答えよ．

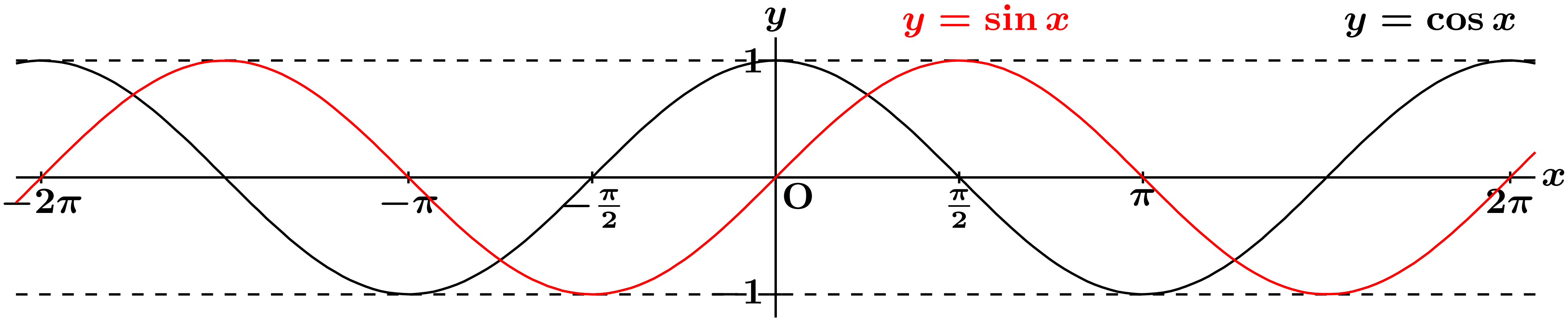
[1] $y = \sin(x-1)$　　[2] $y = \sin(x-2)$

[3] $y = \sin(x+1)$　　[4] $y = \sin(x+\frac{\pi}{2})$

- $y = \sin(x-c)$ は $y = \sin x$ を
  右方向に c だけ平行移動 位相が c だけ遅れる

- $y = \sin(x+c)$ は $y = \sin x$ を
  左方向に c だけ平行移動 位相が $-c$ だけ進む

$y = \cos x$ のグラフ (余弦曲線)



- 振幅は 1（値の範囲は -1 から 1）
- 周期は 2π（2π で元に戻る）
- $\cos x$ は y 軸対称
- $\cos x$ は $\sin x$ を左に $\frac{\pi}{2}$ 平行移動（位相が $\frac{\pi}{2}$ 進む）

角度の和の三角関数

- 2 つの角を A, B とする（通常はギリシャ文字 α, β）
- $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ が成り立つかを考えよう
- $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \sin(30^\circ + 60^\circ)$ になるかを調べる
- $\sin 90^\circ = 1$, $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

課題 0515-8 $\sqrt{3} = 1.732$ を用いて答えよ．

[1] $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ を計算せよ

[2] $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ は成り立つと言えるか

加法定理

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

具体例 (テキスト P181)

- $\sin 30^\circ = \boxed{\dfrac{1}{2}}$, $\sin 45^\circ = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$, $\sin 60^\circ = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

  $\cos 30^\circ = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$, $\cos 45^\circ = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$, $\cos 60^\circ = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

- $\sin 75^\circ$

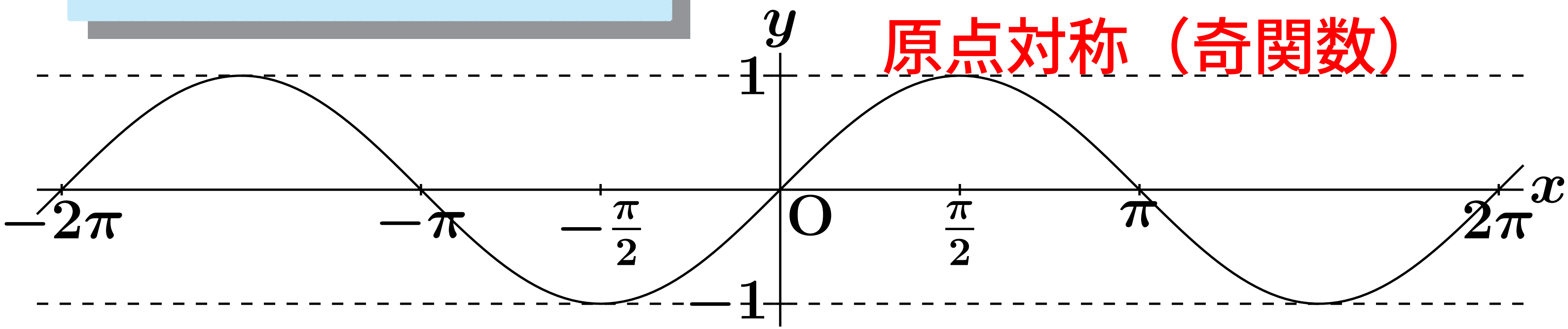
$$= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

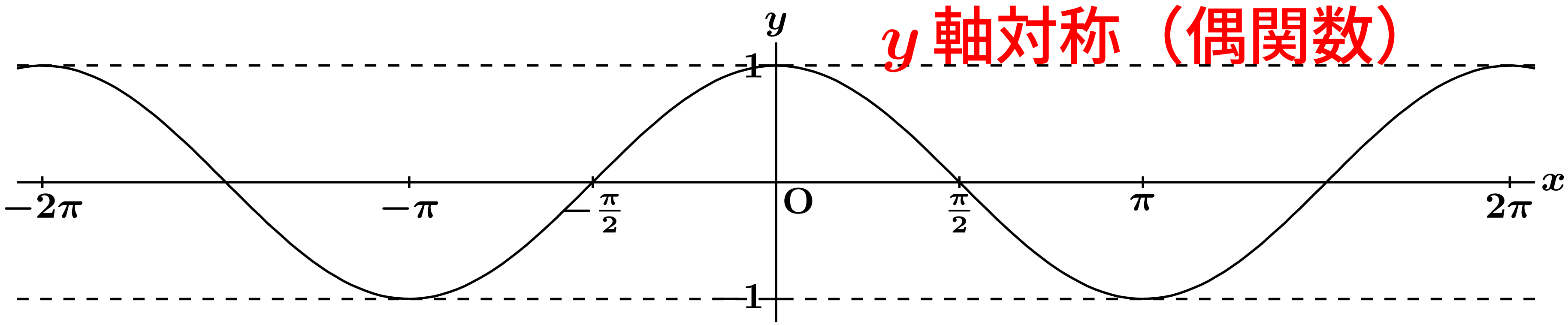
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

課題 0515-9 次を求めよ

[1] $\sin 15^\circ$　　　[2] $\cos 75^\circ$

グラフの対称性





課題 0515-10 曲線上の点を動かしてみて答えよ

[1] $\sin(-x)$ を $\sin x$ または $\cos x$ で表せ

[2] $\cos(-x)$ を $\sin x$ または $\cos x$ で表せ

加法定理による等式証明 $(-x)$

- $\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1,\ \sin \pi = 0,\ \cos \pi = -1$
- $\sin(-x)$
  $= \sin(0 - x) = \sin 0 \cos x - \cos 0 \sin x = -\sin x$
- $\cos(-x)$
  $= \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = \cos x$