# ２次関数と２次方程式

2023.04.24

# 復習（関数）

# 関数

- 変数 $x$ の値を与えると変数 $y$ の値が求まる
  例） $y = 2x + 1, \ y = x^2 + 2x + 1$
- これを変数 $x$ の関数という
- 変数 $x$ の関数であることを $f(x)$ などで表す
  例 1） $f(x) = 2x + 1$ （1 次関数）
  例 2） $g(x) = x^2 + 2x + 1$ （2 次関数）

# 関数記号

- 関数 $f(x)$ の $x$ に定数 $a$ を代入した値を $f(a)$ で表す
- 例) $f(x) = x^2 + x - 1$ のとき　$f(2) = 2^2 + 2 - 1 = 5$
- 課題 0424-1 $f(x) = x^2 - 1$ のとき，次を求めよ．

  [1] $f(0)$　　[2] $f(1)$

  [3] $f(-2)$　　[4] $f(a+1)$　($a$ は定数)

# 関数のグラフ

関数 $y = f(x)$

- $x$ を変えるとき，点 $\big(x,\ f(x)\big)$ も変わる．

例) 1 次関数 $y = 2x + 1$

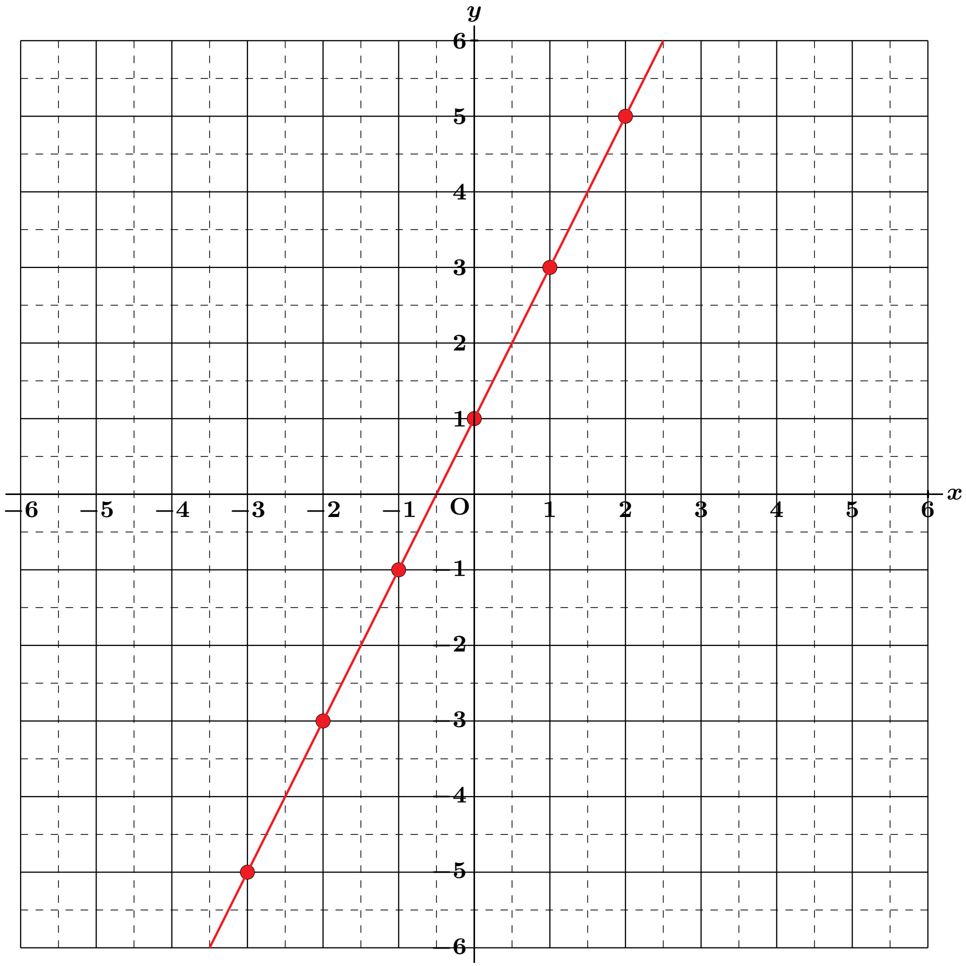
| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-9$ | $-7$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ | $7$ | $9$ | $11$ |

- この点の集まりを，その関数のグラフという．

# 1 次関数のグラフ

例） $y = 2x + 1$

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-9$ | $-7$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ | $7$ | $9$ | $11$ |



傾き　$2$

$y$ 切片　$1$

# 1 次関数のグラフ

**課題 0424-2** 関数のグラフをかき，傾きと $y$ 切片を答えよ．

[1] $y = 3x - 1$

[2] $y = 5 - x$

[3] $y = \frac{1}{2}x + 2$

[4] $y = \frac{x+2}{2}$

注) 傾きと $y$ 切片をコンマで区切って答えよ．

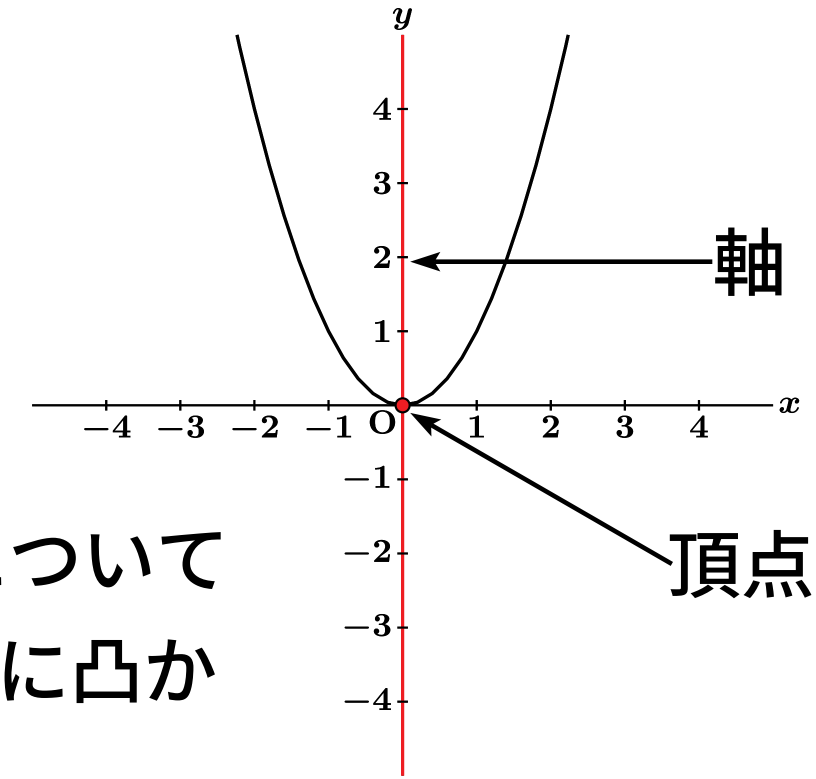
# 2 次関数のグラフ (基本形)

「関数のグラフ」で $y = x^2$, $y = -x^2$ をかこう

軸は $x = 0$($y$ 軸)

頂点は $(0,\ 0)$

下に凸




課題 0424-3 $y = -x^2$ について

　軸，頂点，どちらに凸か

を答えよ．

# 2 次関数のグラフ 2

カッコ内の定数を変えたときのグラフをかこう

(1) $y = x^2 + c$（定数 $c$）

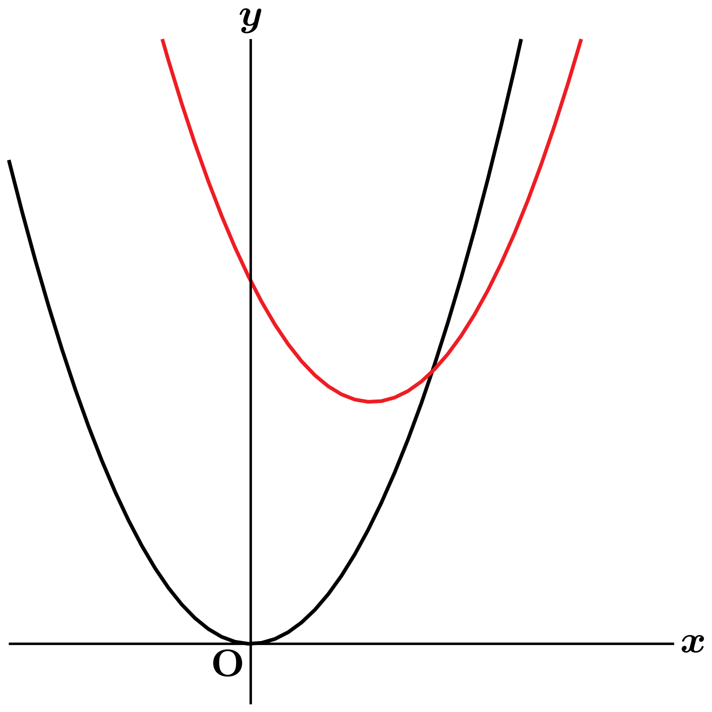
縦方向に $c$ だけ平行移動

(2) $y = (x - b)^2$（定数 $b$）

横方向に $b$ だけ平行移動

(3) $y = (x - b)^2 + c$（定数 $b$, $c$）

頂点の座標は　$(b,\ c)$




課題 0424-4 $y = ax^2$ は $y = x^2$ からどう変わるか

# 課題　2 次関数のグラフ

課題 0424-5 「2 関数のグラフ」を用いて，次の 2 次関数のグラフをかけ．また，$y = x^2$ のグラフをどのように移動 (変形) したかを答えよ．

[1] $y = x^2 + 1$

[2] $y = (x - 3)^2$

[3] $y = (x + 1)^2$

[4] $y = 2x^2$

# 2 次関数のグラフ 3

$$(x^2 + 2bx + b^2) + d$$

$$\|$$

- $y = x^2 + 2bx + c \quad \Longrightarrow (x+b)^2 + d$ の形に変形

(例) $y = x^2 - 2x + 3$

$$= (x^2 - 2x + 1) - 1 + 3$$

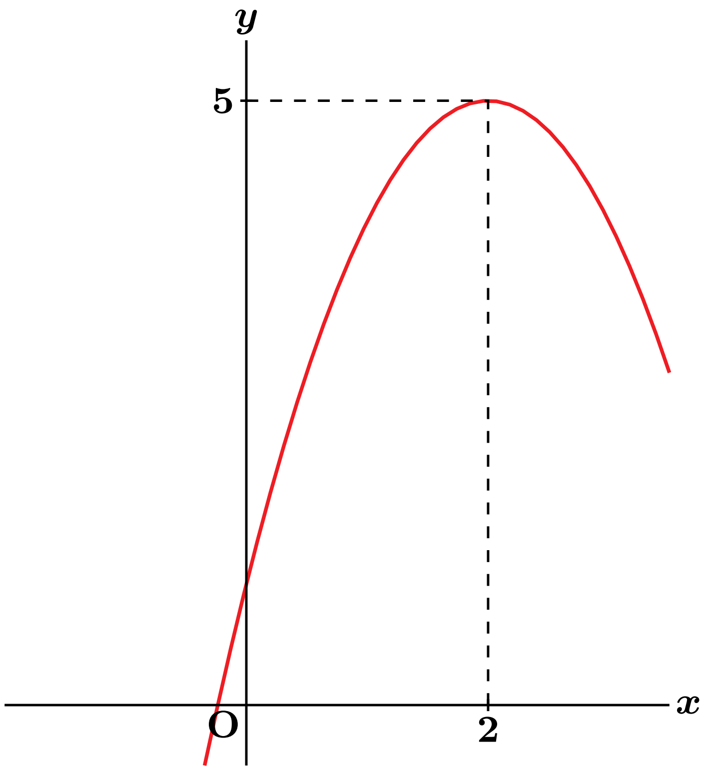
$$= (x-1)^2 + 2$$

(例) $y = -x^2 + 4x + 1$

$$= -(x^2 - 4x) + 1$$

$$= -\left((x-2)^2 - 4\right) + 1$$

$$= -(x-2)^2 + 5$$



# 課題 (2 次関数のグラフ)

**課題 0424-6** $a(x+b)^2+c$ の形に変形せよ．

[1] $y = x^2 + 4x - 5$

[2] $y = x^2 - 2x - 1$

[3] $y = -x^2 - 4x + 1$

[4] $y = x^2 + x + 1$

# 2 次方程式

# 2 次式の因数分解

$$(1)\ x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$$

$$(2)\ x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2 + 2^2 x = (x+2)^2$$

$$(3)\ x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

# 2 次方程式（因数分解）

- 「$AB = 0$ ならば $A = 0$ または $B = 0$」を用いる．

(例) $x^2 - 9 = 0$

$$\iff (x+3)(x-3) = 0$$

$$\iff x = -3 \text{ (または) } x = 3$$

$$\iff x = \pm 3$$ と書く

課題 0424-7 次の方程式を解け．

[1] $x^2 - 49 = 0$

[2] $x^2 - 2x + 1 = 0$

[3] $x^2 - 7x + 12 = 0$

[4] $x^2 - x - 20 = 0$

# 平方根

- $2$ 乗して $4$ になる数（$x^2 = 4$ となる $x$）

$$\Longrightarrow \ 2,\ -2 \text{ の } 2 \text{ つがある．}$$

- このうち，正の方の $2$ を $\sqrt{4}$ とかく
- 正の数 $a$ について，$2$ 乗して $a$ になる数のうち正の方を $\sqrt{a}$ とかく

$$(\sqrt{a})^2 = a,\ (-\sqrt{a})^2 = a$$

# 平方根の性質

- $a > 0$ のとき，$\sqrt{a^2} = a$

  2 乗して $4^2 (= 16)$ になるのは 4 と $-4$

  正の方をとって，$\sqrt{4^2} = 4$

  $a < 0$ のとき，$\sqrt{a^2} = -a$

  2 乗して $(-4)^2$ になるのも 4 と $-4$

  正の方をとって，$\sqrt{(-4)^2} = 4$

- $\sqrt{a^2} = |a|$

- $b > 0$ のとき，$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$

# 課題　平方根

**課題 0424-8 次の数を根号を用いないで表せ　TextP17**

[1] $-\sqrt{64}$　　[2] $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$

[3] $\left(-\sqrt{11}\right)^2$　　[4] $-\left(-\sqrt{3}\right)^2$

**課題 0424-9 次を計算せよ ($\sqrt{\phantom{x}}$ の中を簡単にせよ)**

[1] $-\sqrt{12}$　　[2] $\sqrt{18}$

[3] $\sqrt{27}-\sqrt{3}$　　[4] $\sqrt{100}\sqrt{8}$

# 2 次方程式（平方完成）

- 平方完成 $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$$x^2+6x+2 = (x^2+6x+9)-9+2 = (x+3)^2-7$$

- 2 次方程式 $x^2 + 6x + 2 = 0$

$$(x+3)^2 - 7 = 0$$

$$(x+3)^2 = 7$$

$$x + 3 = \sqrt{7},\ -\sqrt{7}$$

合わせて $x + 3 = \pm\sqrt{7}$

$$x = -3 \pm \sqrt{7}$$

## 解の公式 1

- $x^2 + 2ax + b = 0$

  $(x+a)^2 - a^2 + b = 0$

  $(x+a)^2 = a^2 - b$

  $x + a = \pm\sqrt{a^2 - b}$

  よって $\boxed{x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}}$

課題 0424-10 次の 2 次方程式を解け．

[1] $x^2 + 4x + 2 = 0$　　[2] $x^2 + 2x - 2 = 0$

[3] $x^2 - 6x + 1 = 0$　　[4] $x^2 - 8x + 2 = 0$

## 解の公式

- 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

例） $2x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

# 解の公式の導出

課題 0424-11 $ax^2+bx+c=0 \iff x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

- $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\boxed{[1]}$
- $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\boxed{[1]}+\frac{c}{a}=0$
- $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\boxed{[1]}-\frac{c}{a}=\frac{\boxed{[2]}}{4a^2}$
- $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\boxed{[3]}}{2a}$ から $x=\frac{-b\pm\boxed{[3]}}{2a}$