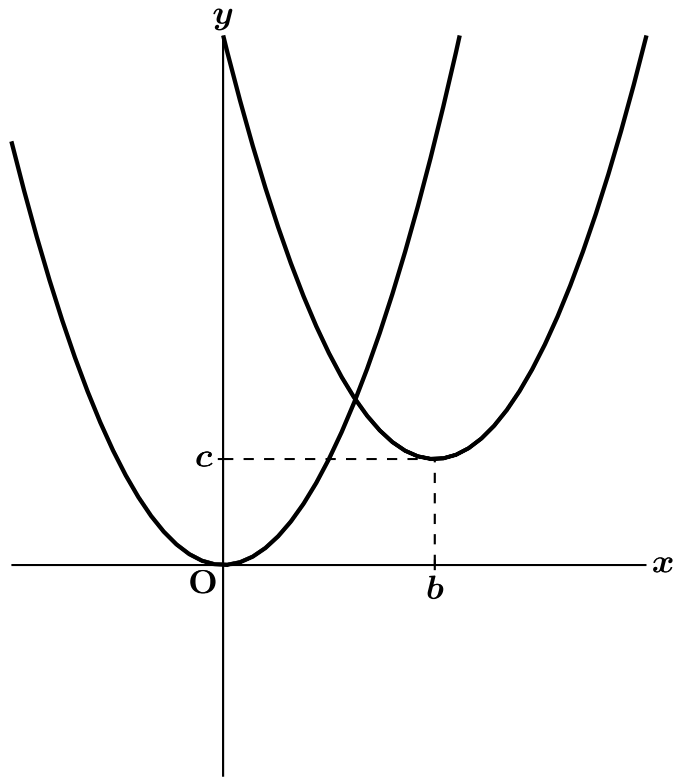
三角比と三角関数

2022.04.25

2 次関数と方程式 (復習＋)

2 次関数のグラフ



(1) $y = a(x-b)^2 + c$

- $y = ax^2$ のグラフと形は同じ
- x 方向に b，y 方向に c 平行移動
- 頂点は $(b,\ c)$

(2) $y = ax^2 + bx + c$

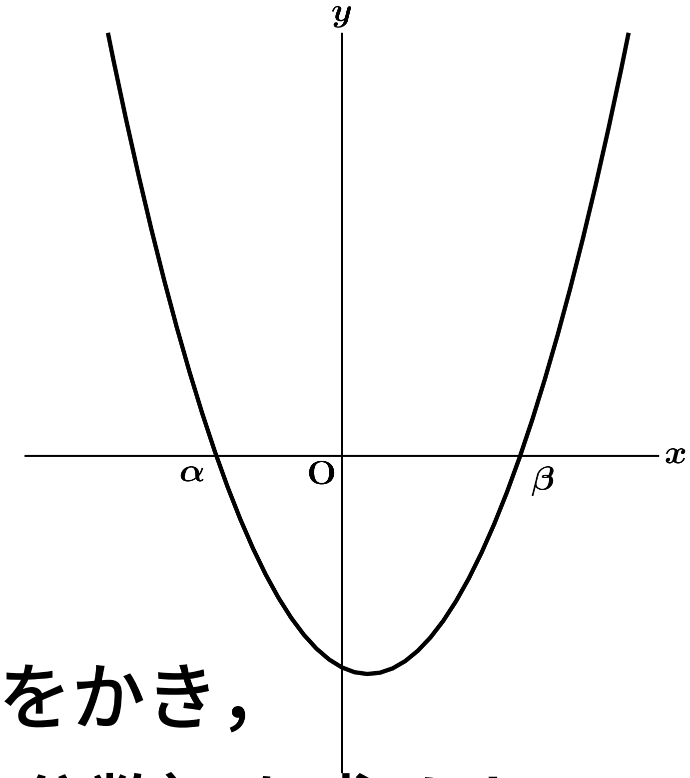
- (1) の形に変形（平方完成)
- 例） $y = x^2 + 4x + 1$

$$= (x^2 + 4x + 4) - 4 + 1 = (x+2)^2 - 3$$

頂点は $(-2, -3)$

2 次方程式の解

- 方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は
  $y=ax^2+bx+c$ のグラフと
  x 軸との交点の x 座標



課題 0508-1 「関数のグラフ」でグラフをかき，
方程式の解（整数か分母が 2 の分数）を求めよ

[1] $y=x^2-2x-3,\ x^2-2x-3=0$

[2] $y=2x^2+7x-4,\ 2x^2+7x-4=0$

解の公式 1

- $x^2 + 2ax + b = 0$

  $(x + a)^2 - a^2 + b = 0$

  $(x + a)^2 = a^2 - b$

  $x + a = \pm\sqrt{a^2 - b}$

  よって $\boxed{x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}}$

解の公式 2

- 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

例）$2x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

課題 0508-2 次の 2 次方程式を解け.　　Text P.74

[1] $2x^2 + 2x - 3 = 0$　[2] $3x^2 + 5x + 1 = 0$

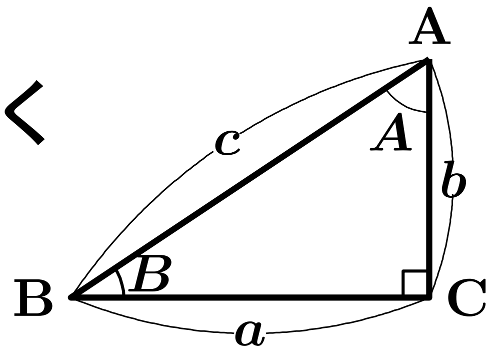
[3] $2x^2 + x - 2 = 0$　[4] $x^2 + 3x + 1 = 0$

三角比

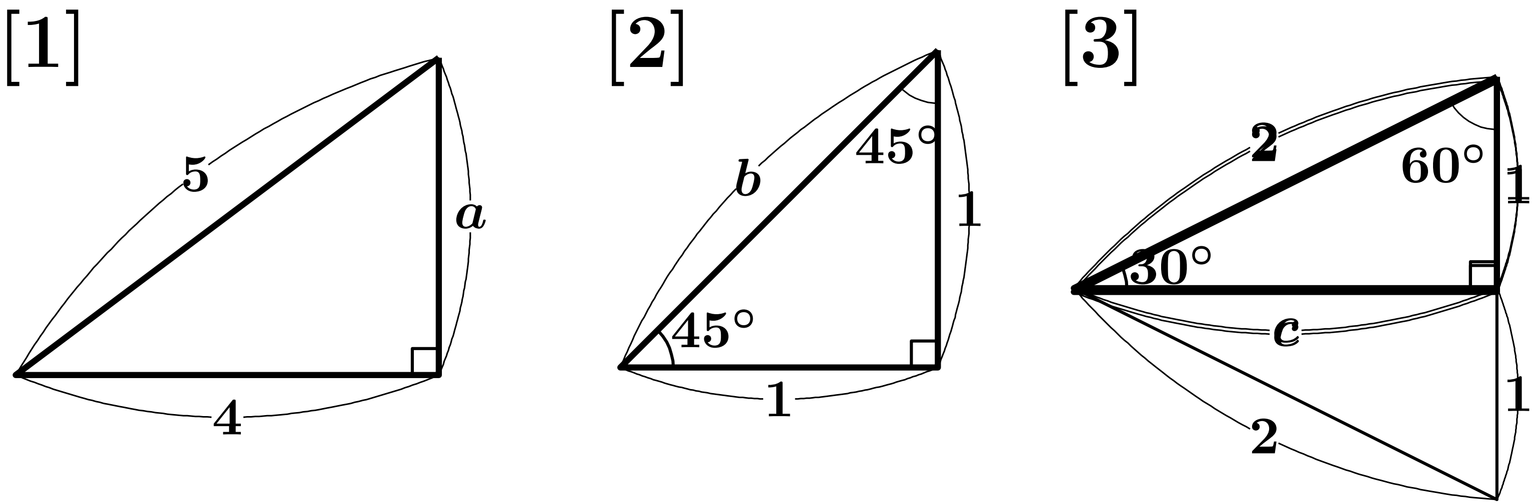
三平方の定理

- 角 C が直角の直角三角形 △ABC
- $\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b,\ \mathrm{AB}=c$ とおく

$$\Longrightarrow \boxed{a^2+b^2=c^2}$$



課題 0508-3 図の $a,\ b,\ c$ を求めよ

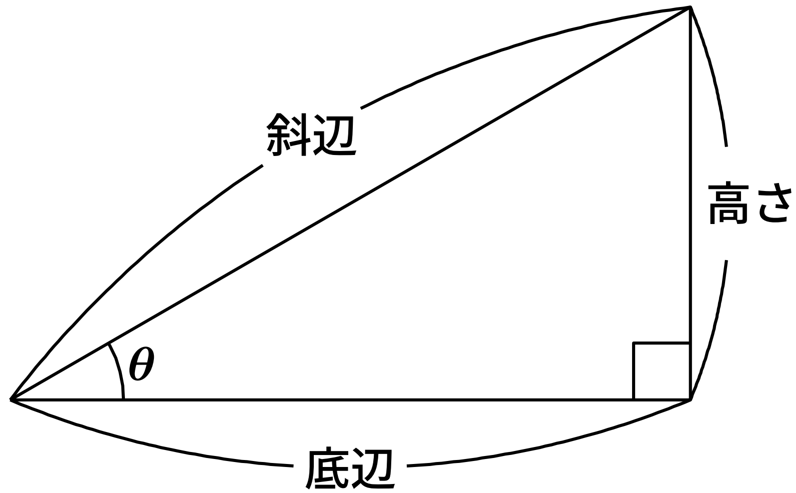


鋭角の三角比

$$\cos\theta = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$$ 底辺

$$\sin\theta = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}$$ 高さ

$$\tan\theta = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}$$ 比



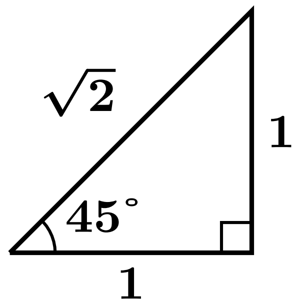
比だから大きさによらない

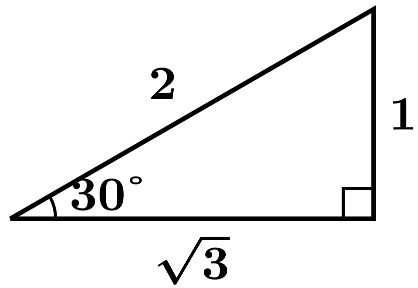
角 θ だけで決まる

課題 0508-4 次の三角比を求めよ．

[1] $\cos 30^\circ$　[2] $\sin 45^\circ$

[3] $\tan 60^\circ$

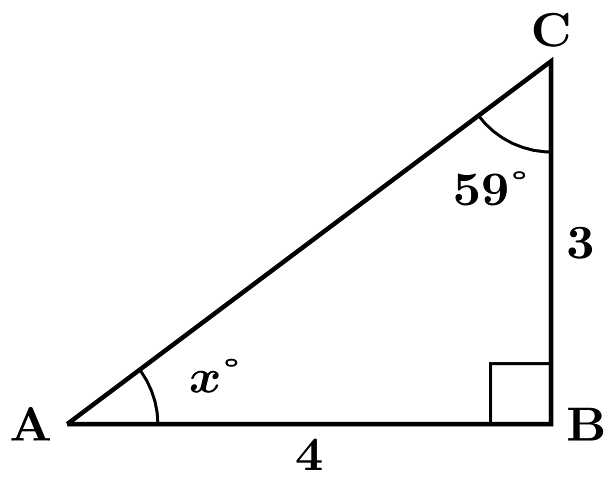




練習 (鋭角の三角比)

課題 0508-5 図の三角形について次を求めよ.

[1] x°	[2] 辺 AC
[3] $\tan x$	[4] $\cos x$
[5] $\sin x$	[6] $\tan 59^\circ$
[7] $\cos 59^\circ$	[8] $\sin 59^\circ$



三角比の拡張

鋭角から以下の角に拡張する．

(1) 0°

(2) 90°

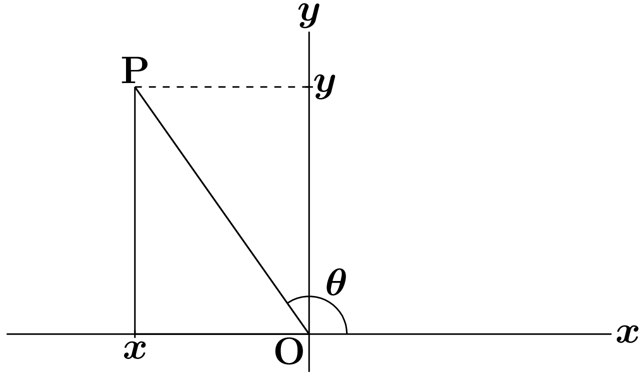
(3) 鈍角 $(90^\circ < \theta < 180^\circ)$

課題 0508-6 「鈍角等の三角比」を動かそう．次の三角比はどうなるだろうか．

[1] $\cos 0^\circ$　　[2] $\cos 90^\circ$　　[3] $\cos 120^\circ$

鈍角等の三角比

- 鈍角のとき，θ を 1 つの角とする直角三角形ができない
- 座標軸をおく
- 頂点 P の座標を (x, y) とする
- 斜辺 $=$ OP, 底辺 $= x$, 高さ $= y$



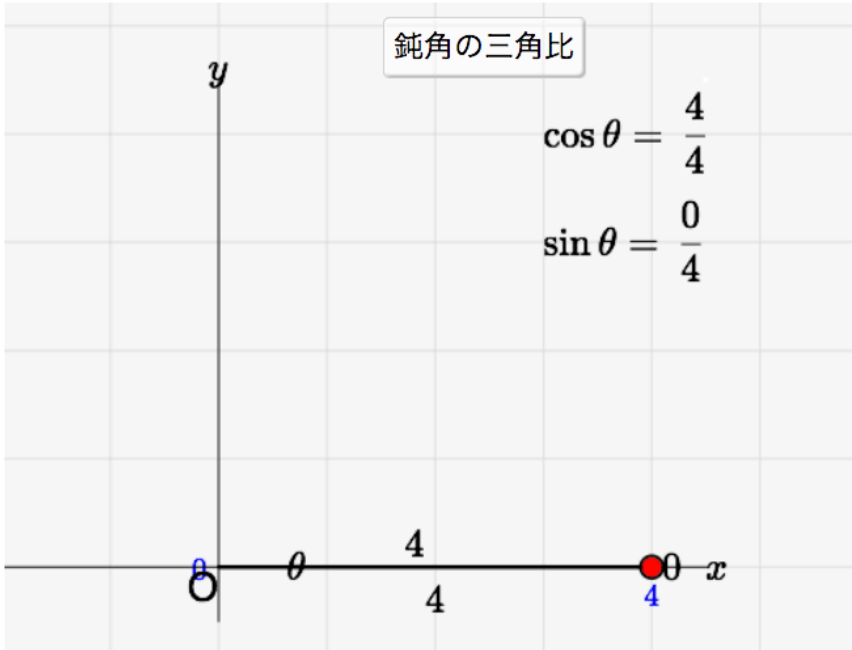
$$\cos\theta = \frac{x}{\mathrm{OP}},\ \sin\theta = \frac{y}{\mathrm{OP}},\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

0° の三角比

$$\cos 0^\circ = 1$$

$$\sin 0^\circ = 0$$

$$\tan 0^\circ = 0$$

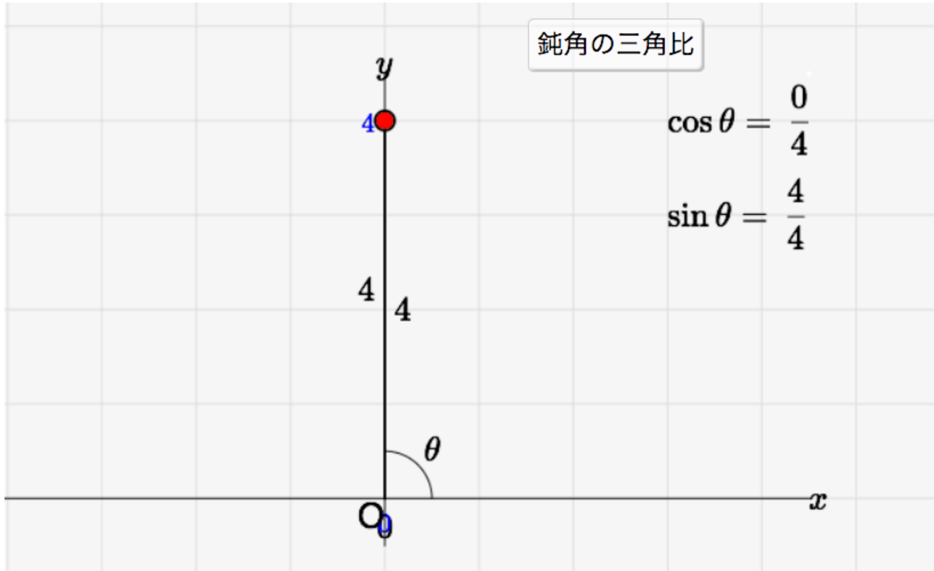


90° の三角比

$\cos 90° = 0$

$\sin 90° = 1$

$\tan 90° =$ 値がない



課題 0508-7 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{1}{0}$ の値はどうなるか，次から選べ

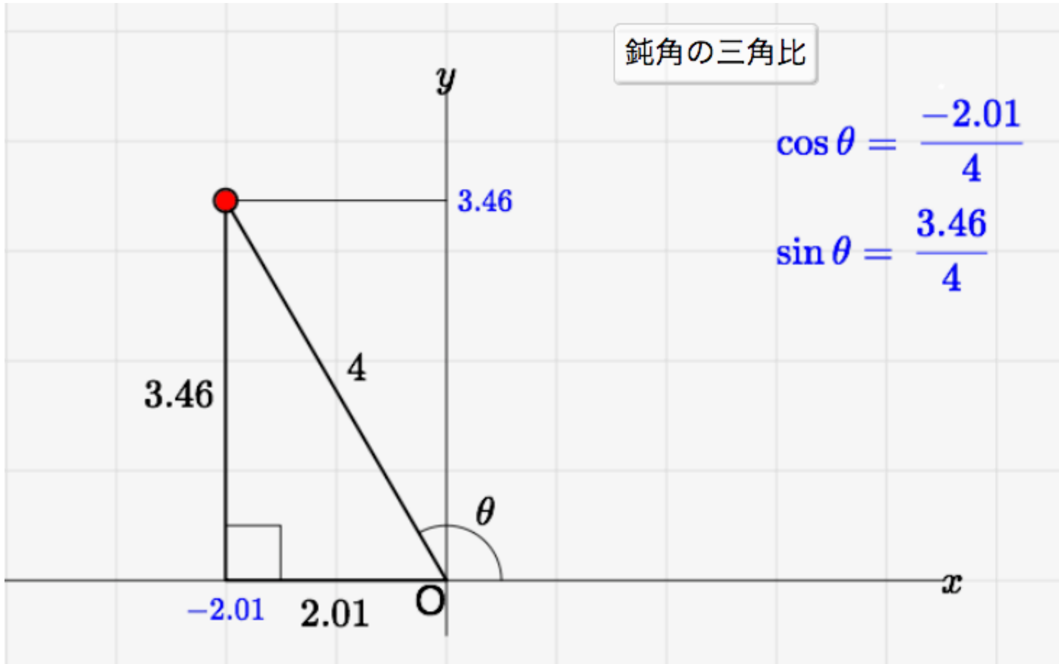
1　　0　　値がない　　値が決まらない

鈍角の三角比の符号

$\cos$ は $-$

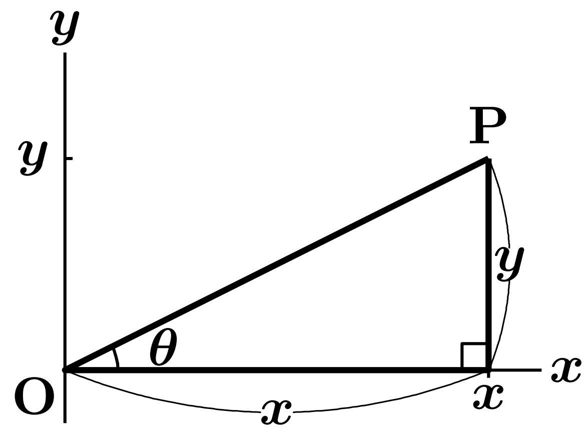
$\sin$ は $+$

$\tan$ は $-$



三角比の相互関係

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$



証) $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{y}{\mathrm{OP}}}{\frac{x}{\mathrm{OP}}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$(\cos\theta)^2$ を $\cos^2\theta$ と書く

KeTMath では cos(2,θ)

証) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \dfrac{x^2}{\mathrm{OP}^2} + \dfrac{y^2}{\mathrm{OP}^2} = \dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{OP}^2} = 1$

三角比の相互関係 (問)

例題 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ を求めよ．

解 $\dfrac{1}{9} + \sin^2\theta = 1$ より　$\sin^2\theta = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

鋭角でも鈍角でも $\sin\theta > 0$ だから　$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

課題 0508-8 $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ とする．次の場合のそれぞれについて $\cos\theta$ を求めよ

[1] θ が鋭角のとき　　　[2] θ が鈍角のとき

一般角

一般角

- これまで，角 θ は 2 つの線分の間の角だった

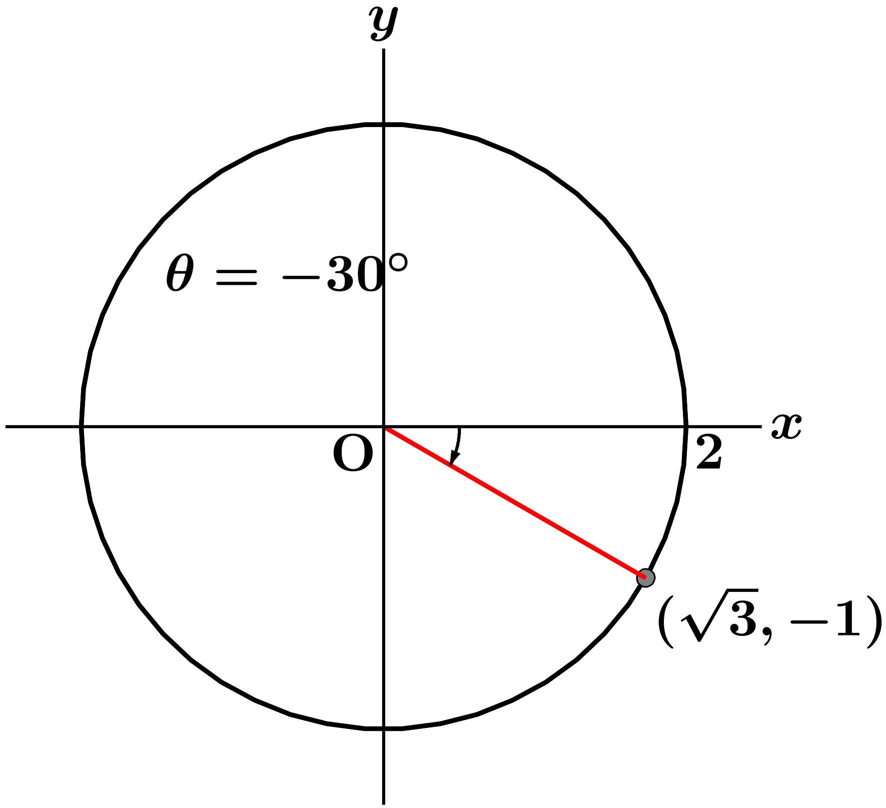
$$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$$

- 角を回転を表す量とすると
θ はどんな実数でもよい．

・x 軸を始線とする

・$\theta > 0^\circ$ のとき，反時計回り

・$\theta < 0^\circ$ のとき，時計回り



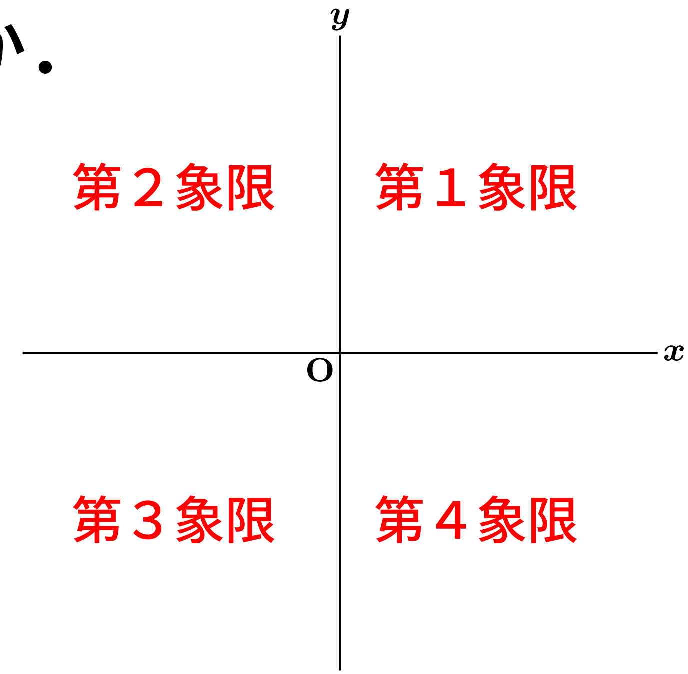
一般角

「一般角」で一般角を見てみよう

課題 0508-9 次の角は第何象限にあるか．

[1] 400°　　[2] 600°

[3] -500°　　[4] -700°



一般角の三角比

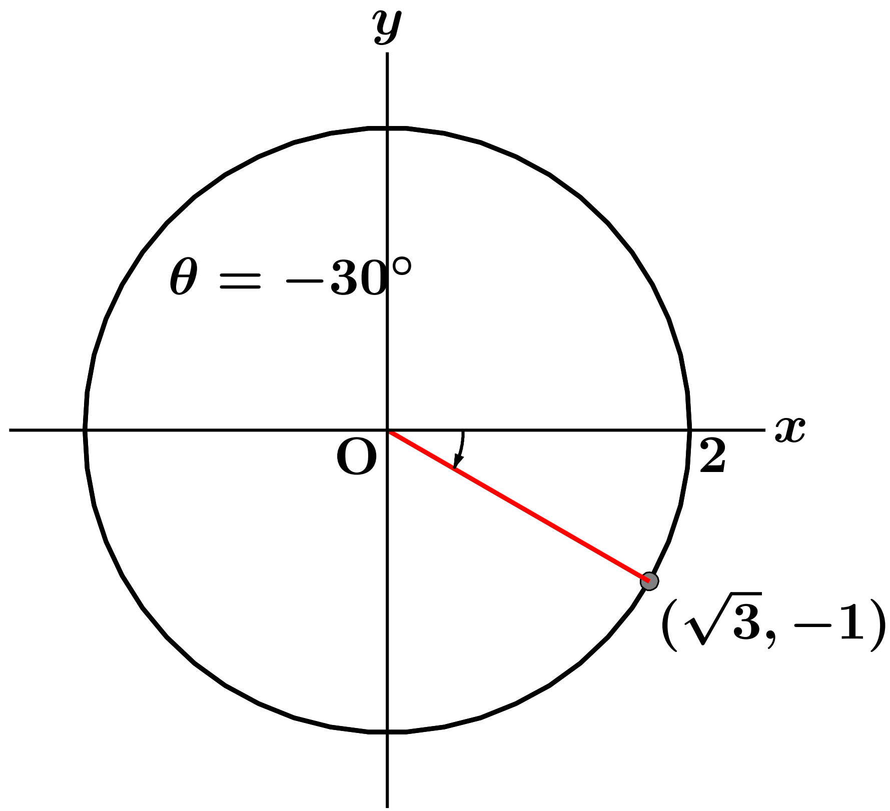
- 座標を使う（鈍角の場合と同じ）

例 $\theta = 240^\circ$

$$\cos\theta = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$



課題 0508-10 次の値を求めよ．

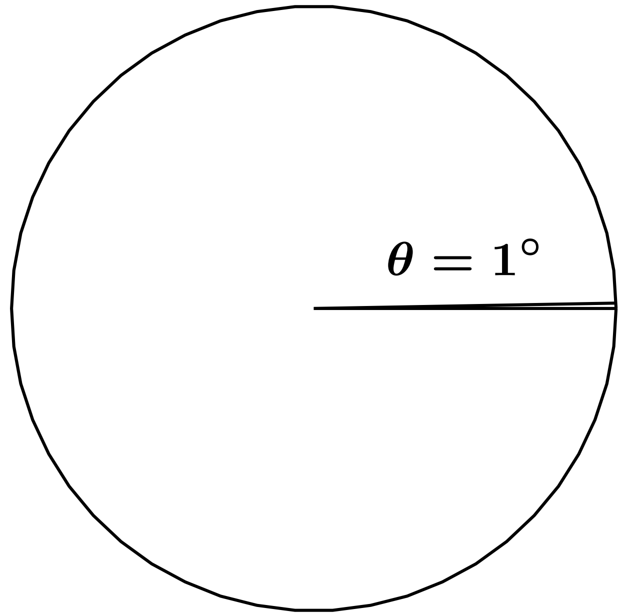
[1] $\cos(-30^\circ)$ [2] $\sin(-30^\circ)$ [3] $\tan(-30^\circ)$

弧度法（radian）

角度の測り方１

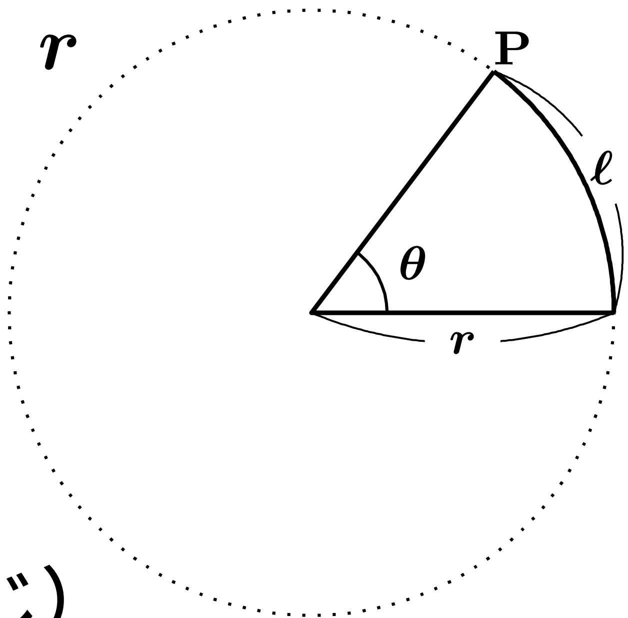
度　°

- １周を 360° とする
- 半周は 180° とする
- 一周の $\dfrac{1}{360}$ を 1° とする
- 数学的な意味は余りない
- 日常的には使いやすい



角度の測り方２（弧度法）

- 弧の長さ ℓ と半径 r の比 $\theta(\text{ rad}) = \dfrac{\ell}{r}$



- 半径 r の円周は $2\pi r$ だから
  1 周の角 $(360^\circ) = \dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$
- 半周の角 $(180^\circ) = \pi$
- 比なので単位はない（sin などと同じ）
  度と区別するときは，ラジアン (rad) を付ける

弧度法による角度の例

- 60° は 180° の $\boxed{\dfrac{1}{3}}$，したがって　$60^\circ = \boxed{\dfrac{\pi}{3}}$
- 90° は 180° の $\boxed{\dfrac{1}{2}}$，したがって　$90^\circ = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$
- 1° は $\dfrac{\pi}{180}$　　1(ラジアン) は $\dfrac{180}{\pi}$

課題 0508-11 $^\circ$ をラジアン，ラジアンを $^\circ$ に変換せよ．

[1] 30°　　[2] 45°　　[3] π　　[4] $\dfrac{2\pi}{3}$