

変化率と極限

2023.06.12

平均変化率

平均変化率の意味

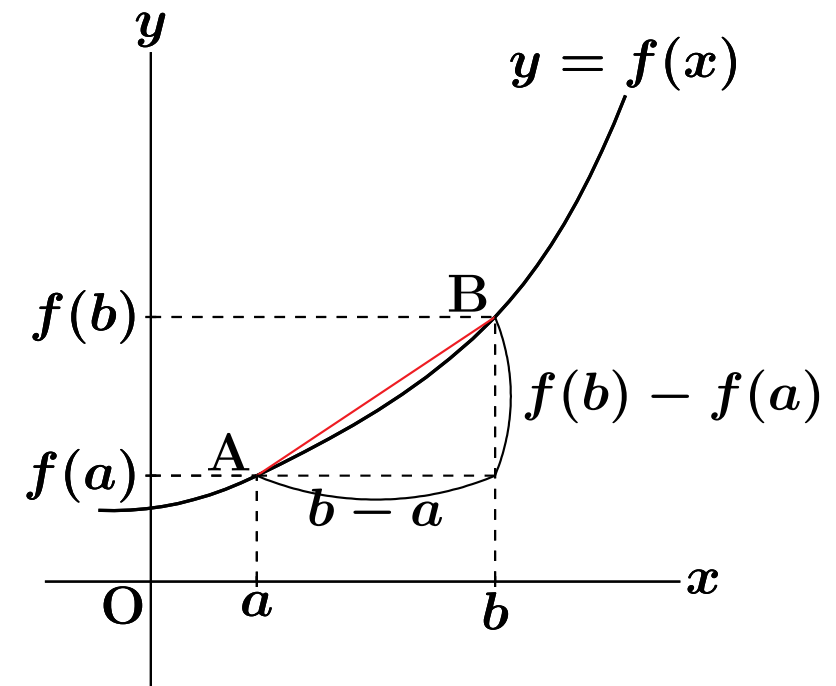
- 関数 $y = f(x)$, 区間 $[a, b]$
- $f(x)$ の $[a, b]$ での変化量は
 $f(b) - f(a)$

区間幅 $b - a$ で割る

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

これを平均変化率という

- 平均変化率は直線 AB の傾き



平均変化率の計算例

- $f(x) = x^2$ の $[1, 3]$ での平均変化率 (r とおく)

$$r = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$$

- $f(x) = x^2$ の $[a, b]$ での平均変化率

$$r = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{b - a} = b + a$$

課題 0612-1 次を求めよ.

[1] $f(x) = 4x^2$ の $(2, 4)$ での平均変化率

[2] $f(x) = 3x$ の (a, b) での平均変化率

b を a に近づけたときの変化率

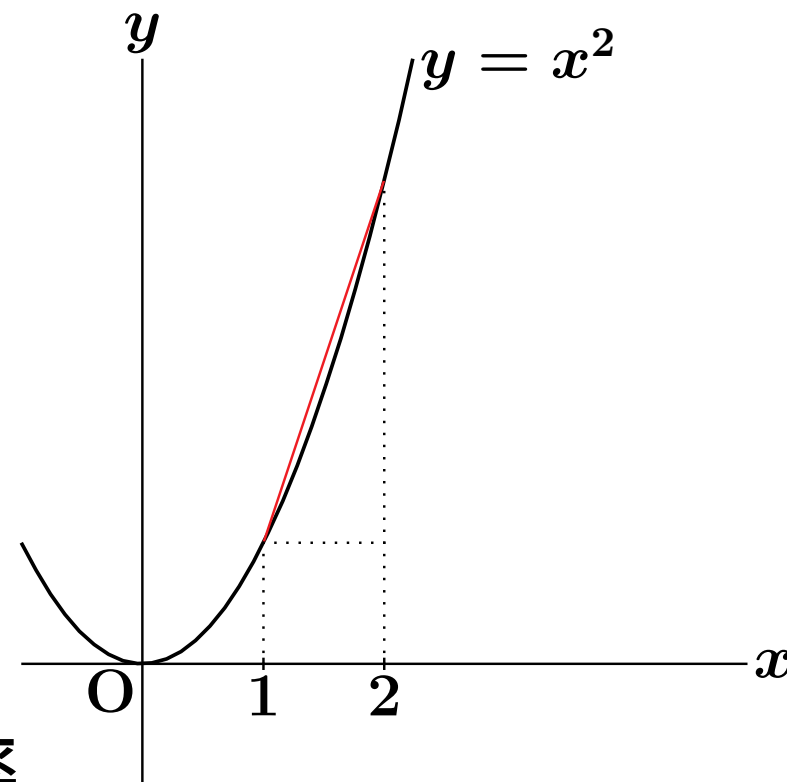
- 関数 $y = x^2$ の $[a, b]$ での平均変化率

$$r = \frac{b^2 - a^2}{b - a}$$

$[1, b]$ のとき

$$r = \frac{b^2 - 1}{b - 1}$$

- $b = 2$ のとき $r = \boxed{3}$



課題 0612-2 $[1, b]$ での平均変化率
 b を 1 にするとどうなるか

割り算（分数）の意味

- $a \div b \left(\frac{a}{b} \right)$ とは

例) $x = \frac{6}{2} \iff 2x = 6$ となる x のこと

例) $x = \frac{3}{5} \iff 5x = 3$ となる x のこと

- $x = \frac{a}{b} \iff bx = a$ となる x のこと

分母が0になると？

(1) $\frac{1}{0}$ は 求まらない

(2) $\frac{0}{0}$ は 決まらない

$$x = \frac{1}{0} \iff \boxed{0} \quad x = \boxed{1}$$

$$x = \frac{0}{0} \iff \boxed{0} \quad x = \boxed{0}$$

- 分母が0となる分数は考えない

1点における変化率

- 区間 $[a, b]$ の平均変化率 $r = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- 1点 a における変化率 $r = \frac{f(a) - f(a)}{a - a}$

分母が0になってしまう

- 1点における変化率はどうやって求めればいいか

微分係数

関数の極限

- x が a に限りなく近づくとする ($x \rightarrow a$)
 a に等しくはないが、いくらでも近くなること
- $f(x)$ が α に近づくとき、 α を**極限值**という
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と書く

例 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$

課題 0612-3 次の極限值を求めよ

TextP3

[1] $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x)$

[2] $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x + 2}{x + 2}$

1点における変化率

- 区間 $[a, b]$ の平均変化率 $r = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- 1点 a における変化率 $r = \frac{f(a) - f(a)}{a - a}$

分母が0になってしまう

- 1点における変化率はどうやって求めればいいか

微分係数

関数の極限

- x が a に限りなく近づくとする ($x \rightarrow a$)
 a に等しくはないが、いくらでも近くなること

- $f(x)$ が α に近づくとき、 α を**極限值**という

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \text{ と書く}$$

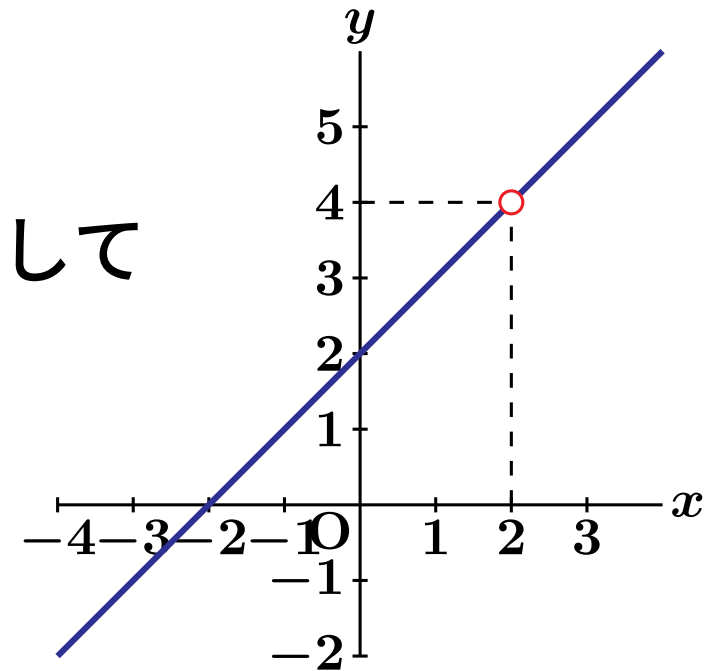
例 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ のグラフ}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad y &= \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= x + 2 \end{aligned}$$

課題 0612-4 $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ のグラフとして
図は正しくない．理由を述べよ．

• 正しくは \Rightarrow



分母が0に近づくときの極限

例 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

- $x \rightarrow 2$ とすると，分母も分子も0に近づく
- そのままでは極限值がわからない
- $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ と因数分解して

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{1} = \boxed{4}$$

a における変化率

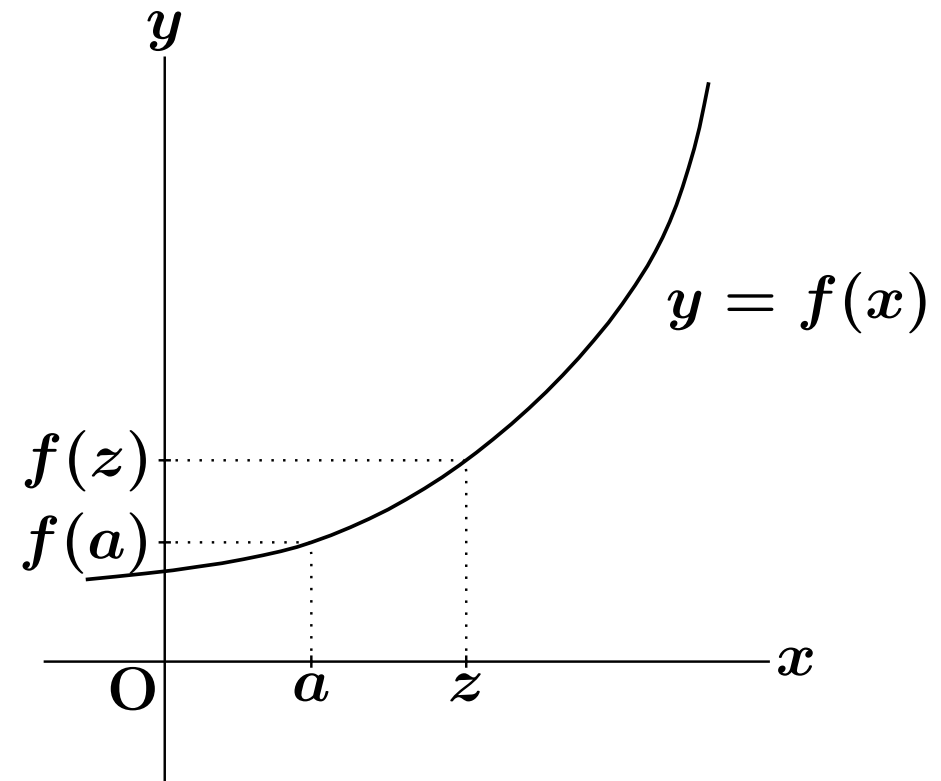
- a の近くに z をとる
- $[a, z]$ での平均変化率は

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

- $z \rightarrow a$ の極限值

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

- これを a における微分係数といい, $f'(a)$ と書く



微分係数の計算例

例 $f(x) = x^2$ の 1 における微分係数 $f'(1)$

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z + 1)(\cancel{z - 1})}{\cancel{z - 1}} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (z + 1) = 2
 \end{aligned}$$

課題 0612-5 次を求めよ

[1] $f(x) = 2x^2$ のとき, $f'(1)$

[2] $f(x) = 3x$ のとき, $f'(2)$

微分係数の図形的意味

課題 0612-6 微分係数の意味を動かせ

a における微分係数の値 $f'(a)$ を求めよ

- 微分係数 $f'(a)$ は
A における接線の傾き

微分係数の定義式の別形

- $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad (1)$

- $z - a = h$ とおくと $z = a + h, h \rightarrow 0$

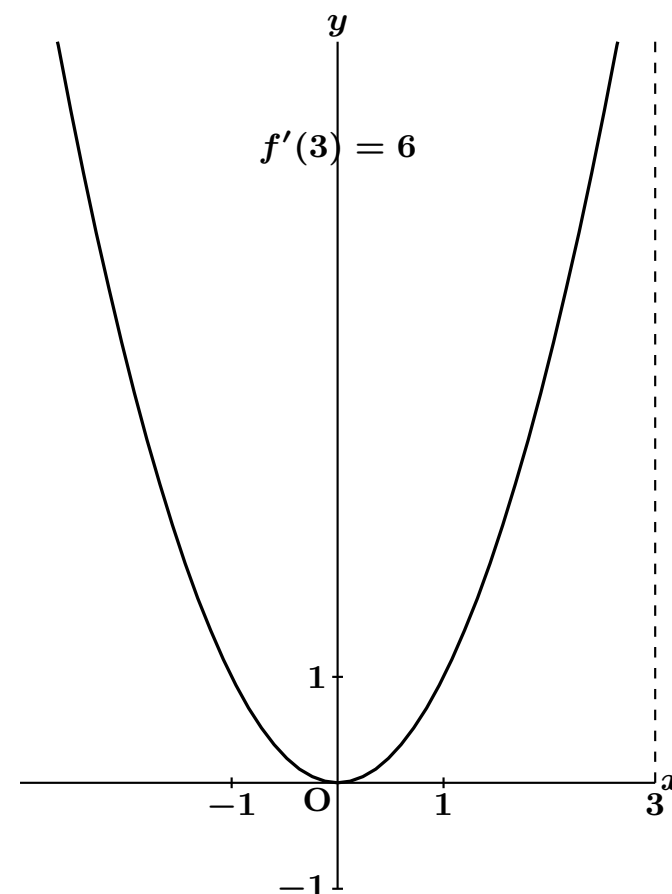
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

- (2) はよく用いられるが, (1) がおすすめ

導関数

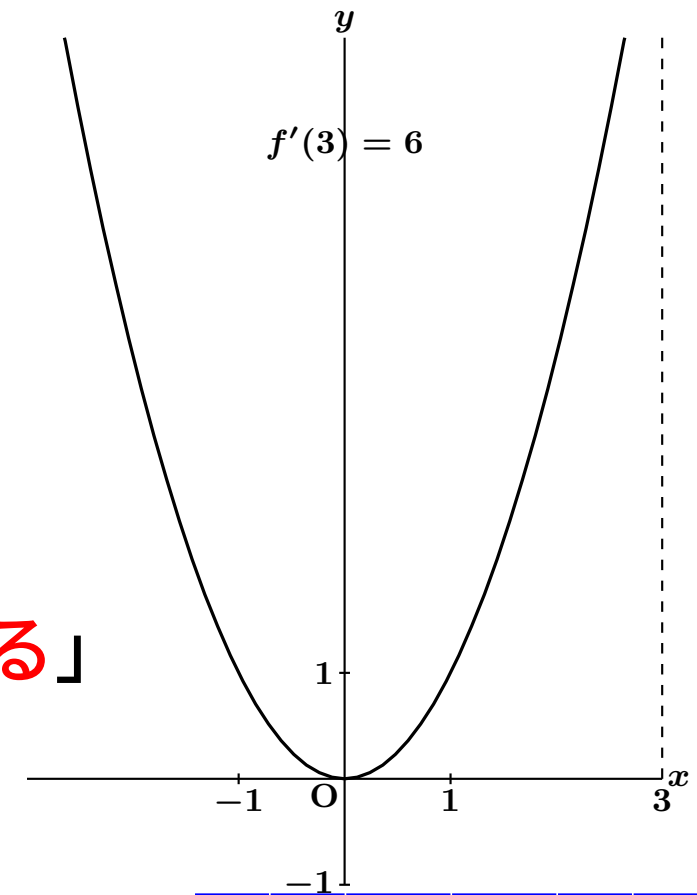
導関数

- 微分係数 $f'(a)$
- a を動かすと, $f'(a)$ も変わる
 $\implies f'(a)$ は a の関数



導関数 2

- 微分係数 $f'(a)$
- a を動かすと, $f'(a)$ も変わる
 $\implies f'(a)$ は a の関数
- a を x と置き換えて
 $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数という
- 導関数を求めることを「微分する」



導関数の定義式

- $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$

- a を x で置き換える

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

導関数の意味 (課題)

課題 0612-7 導関数の意味を動かして，次の関数の導関数を求めよ．

$$[1] \ y = x^2 - x$$

$$[2] \ y = x^2 - 3$$

課題 0612-8 前題の関数 $y = x^2 - 3$ について，定義に従って導関数を求めよ．