

# 指数・対数関数

2023.05.22

# 復習 (三角関数)

## 振幅周期位相

課題 0522-1 問題のアプリを動かして問いに答えよ.

# 指数関数

## 指数関数 $y = a^x$

- $a$  は正の定数,  $x$  は変数
- $a$  を底,  $x$  を (べき) 指数という.

(例)  $y = 2^x$

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

- $x$  が正の整数以外の場合でも  $a^x$  の値を定める

# 指数法則

- 元になるのは，指数の性質（指数法則）

$$a^3 a^2 = (aaa)(aa) = a^5 = a^{3+2} \quad (\text{指数の足し算})$$

$$(a^3)^2 = (aaa)(aaa) = a^6 = a^{3 \times 2} \quad (\text{指数の掛け算})$$

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = a^3 b^3$$

$$(1) \quad a^p a^q = a^{p+q}$$

$$(2) \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(3) \quad (ab)^p = a^p b^p$$

(指数法則)

課題 0522-2 指数法則の具体例を書け

[1] (1) の例      [2] (2) の例      [3] (3) の例

## 指数の拡張 1 $a$ の 0 乗

- 指数法則が成り立つように正の整数以外の指数を定める
- $a \neq 0$  とする.
- $a^p a^q = a^{p+q} \quad p = 1, q = 0$  とすると

$$a^1 a^0 = a^{1+0}$$

$$\cancel{a} a^0 = \cancel{a}$$

$a$  は 0 でないから, 両辺を  $a$  で割って

$$a^0 = 1$$

(例)  $2^0 = 1, 3^0 = 1, 10^0 = 1$

## 指数の拡張 2 $a$ のマイナス乗

- $a \neq 0$  とする.
- $a^p a^q = a^{p+q}$   $q = -p$  とすると

$$a^p a^{-p} = a^{p+(-p)} = a^0 = 1$$

$$a^p a^{-q} = 1$$

両辺を  $a^p$  で割って

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$(\text{例}) \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

課題 0522-3  $5^0, 4^{-1}, 2^{-2}, 3^{-3}$  の値を求めよ.



# 指数関数の表

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

$x$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

## 指数関数のグラフ

- アプリ「指数関数のグラフ」を用いる
  - (1) 下にある点を  $y = 2^x$  の上に動かそう.
  - (2)  $y = 2^x$  のグラフをかこう.

課題 0522-4  $2^{-2}$ ,  $2^{-1}$ ,  $2^0$ ,  $2^1$ ,  $2^2$ ,  $2^3$  の値を書け

# $x$ が整数でない場合 (グラフから)

課題 0522-5

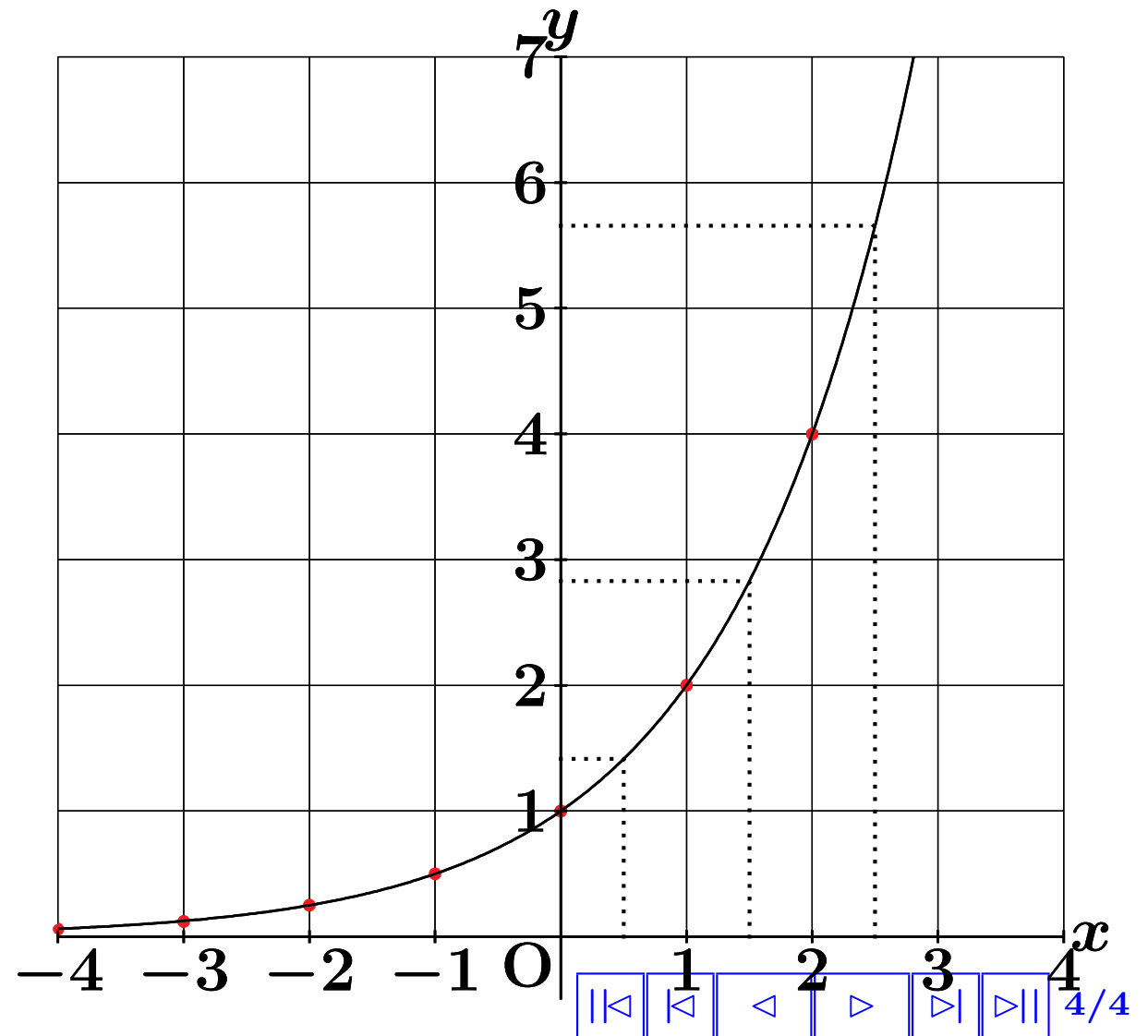
$$2^{0.5}, 2^{1.5}, 2^{2.5}$$

はどうなりそうか

$$2^{0.5} = \sqrt{2}$$

$$2^{1.5} = 2\sqrt{2}$$

$$2^{2.5} = 4\sqrt{2}$$



## $x$ が整数でない場合 (指数法則から)

- $(a^p)^q = a^{pq}$  で,  $p = 0.5$ ,  $q = 2$  とする  
 $(2^{0.5})^2 = a^{0.5 \times 2} = 2^1 = 2$

$2^{0.5}$  は 2 乗すると 2 になる数だから,  $\pm\sqrt{2}$  のどちらか  
 $2^{0.5} > 0$  と決めると

$$2^{0.5} = \sqrt{2}$$

または

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

- $2^{1.5} = 2^{1+0.5} = 2^1 \cdot 2^{0.5} = 2\sqrt{2}$
- $2^{2.5} = 2^{2+0.5} = 2^2 \cdot 2^{0.5} = 4\sqrt{2}$

## 指数法則と $n$ 乗根

- $$\begin{aligned} (1) \quad & a^p a^q = a^{p+q} \\ (2) \quad & (a^p)^q = a^{pq} \\ (3) \quad & (ab)^p = a^p b^p \end{aligned} \quad (a > 0, b > 0)$$

- $a^{\frac{1}{3}}$  は 3 乗すると  $a$  になる正の数

これを  $\sqrt[3]{a}$  と書く (3 乗根)

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

課題 0522-6  $3^{\frac{1}{2}}$ ,  $5^{\frac{1}{2}}$ ,  $4^{\frac{1}{3}}$ ,  $8^{\frac{1}{3}}$  を求めよ

## 指数の計算 (TextP188)

$$(1) \ 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

$$(2) \ (64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = ((2^6)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

$$(3) \ (8^{\frac{1}{6}})^{-2} = ((2^3)^{\frac{1}{6}})^{-2} = 2^{3 \times \frac{1}{6} \times (-2)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

課題 0522-7 計算せよ

TextP188

$$[1] \ 32^{\frac{2}{5}}$$

$$[2] \ \sqrt[3]{27}$$

$$[3] \ (\sqrt[2]{4})^{\frac{1}{2}}$$

$$[4] \ (\sqrt[2]{4})^{-\frac{1}{2}}$$

## 指数関数のグラフの特徴

課題 0522-8  $y = 2^x$ ,  $y = 3^x$ ,  $y = (\frac{1}{2})^x$ ,  $y = 1^x$  のグラフをかき、( ) に当てはまる言葉を入れよ.

- 指数関数  $y = a^x$  の特徴

[1]  $y$  の値はいつでも ( )

[2]  $a > 1$  のとき、グラフは右 ( )

[3]  $0 < a < 1$  のとき、グラフは右 ( )

[4]  $a = 1$  のとき、グラフは ( )

# 指数方程式 (TextP191)

$$(1) 16^x = 8$$

$$(2^4)^x = 2^3$$

$$2^{4x} = 2^3$$

指数を等しいとおいて

$$4x = 3$$

よって  $x = \frac{3}{4}$

$$(2) 8^x = 2^{x+1}$$

$$(2^3)^x = 2^{x+1}$$

$$2^{3x} = 2^{x+1}$$

指数を等しいとおいて

$$3x = x + 1$$

よって  $x = \frac{1}{2}$

課題 0522-9 次の方程式を解け

TextP191

$$[1] 8^x = \frac{1}{32}$$

$$[2] 81^x = 3^{3-2x}$$



# 対数関数

## 対数の定義

- $y = \log_a x$

$a$  を **底**,  $x$  を **真数**

$y$  を  $a$  を底とする  $x$  の **対数** という.

- 対数  $y$  は,  $a$  を何乗したら  $x$  になるかという数

$$a^{\boxed{y}} = x \text{ となる } \boxed{y} \text{ のこと}$$

例)  $y = \log_3 9$

$$3^{\boxed{y}} = 9 \text{ となる } y \text{ のこと}$$

$$3^2 = 9 \text{ だから } y = \log_3 9 = 2$$

## 対数の値を求める

- $y = \log_a x \iff a^y = x$

(例)  $y = \log_2 16 \iff 2^y = 16 = 2^4$   
 $y = 4$  となるから  $\log_2 16 = 4$

課題 0522-10 次の値を求めよ.

[1]  $\log_2 8$     [2]  $\log_3 3$     [3]  $\log_5 \frac{1}{5}$     [4]  $\log_2 \frac{1}{4}$

# 対数法則

$$(1) \log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 16 = 2$$

$$(2) \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \frac{15}{5} = 1$$

$$(3) \log_a b^p = p \log_a b$$

$$\log_2 2^5 = 5 \log_2 2 = 5$$

課題 0522-11 対数法則の具体例を書け

[1] (1) の例    [2] (2) の例    [3] (3) の例

証明 (1)  $\log_a b = x, \log_a c = y$  とおくと  $a^x = b, a^y = c$   
 $a^{x+y} = a^x a^y = bc$  となるから  $x + y = \log_a bc$

## 対数の計算

(1)  $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$

$$\text{与式} = \log_{10}(5 \times 2) = \log_{10} 10 = 1$$

(2)  $\log_2 12 - \log_2 3$

$$\text{与式} = \log_2\left(\frac{12}{3}\right) = \log_2 4 = 2$$

(3)  $2 \log_3 4 + \log_3 4 - \log_3 8$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \log_3 4^2 + \log_3 4 - \log_3 8 \\ &= \log_3 \frac{16 \times 4}{8} = \log_3 8 \end{aligned}$$

## 対数の計算 (課題)

課題 0522-12 次の計算をせよ.

TextP192

$$[1] 2 \log_4 3 - \log_4 36$$

$$[2] \log_3 \frac{3}{4} + \log_3 24 - \log_3 2$$

$$[3] \log_3 18 + \log_3 8 - 4 \log_3 2$$

$$[4] \log_3 4 + \log_3 18 - 3 \log_3 2$$

## 底・真数・対数の条件

- $y = \log_a x \iff a^y = x$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- 底  $a$  の条件は  $a > 0, a \neq 1$
- 真数  $x$  の条件は  $x > 0$
- 対数  $y = \log_a x$  の範囲は 実数全部

## 対数関数のグラフ

- $y = \log_a x$  のグラフを「関数のグラフ」でかこう

$$y = \log_2 x, \log_4 x, \log_{\frac{1}{2}} x$$

注意： $x$  の範囲が全実数でない  $x=0.1, 10$  などとする

課題 0522-13  $y = \log_a x$  のグラフについて ( ) を埋めよ

- [1]  $a > 1$  のとき, 右 ( )
- [2] [1] の範囲で  $a$  を大きくすると  $x$  軸 ( )
- [3]  $0 < a < 1$  のとき, 右 ( )
- [4] [2] の範囲で  $a$  を大きくすると  $x$  軸 ( )