いろいろな関数の微分

2022.7.4

復習＋

微分係数と導関数

- a における微分係数 $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

- 導関数
  - 微分係数 $f'(a)$ は a の関数
  - a を x と書き，導関数という

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

  - 導関数を求めることを「微分する」

微分の公式

- 定数 c について　$(c)' = \lim_{z \to x} \dfrac{c - c}{z - x} = 0$

- $(x)' = \lim_{z \to x} \dfrac{z - x}{z - x} = 1$

$z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$

- $(x^2)' = \lim_{z \to x} \dfrac{z^2 - x^2}{z - x} = \lim_{z \to x} (z + x) = 2x$

$z^3 - x^3 = (z - x)(z^2 + zx + x^2)$

- $(x^3)' = \lim_{z \to x} \dfrac{z^3 - x^3}{z - x} = \lim_{z \to x} (x^2 + zx + x^2) = 3x^2$

- 一般に　$(x^n)' = \boxed{nx^{n-1}}$

微分の性質

$f(x)$, $g(x)$ と定数 c について

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f-g)' = f' - g'$
- $(cf)' = cf'$

例） $(x^2+3x+4)' = (x^2)' + (3x)' + (4)' = 2x+3$

積と商の微分・記法

積の微分

- $\boxed{(f\,g)' = f'\,g + f\,g'}$ 積の微分公式

$$
\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)' &= \lim_{z\to x} \frac{f(z)g(z) - f(x)g(x)}{z-x} \\
&= \lim_{z\to x} \frac{\big(f(z) - f(x)\big)g(z) + f(x)\big(g(z) - g(x)\big)}{z-x} \\
&= \lim_{z\to x} \left(\frac{f(z) - f(x)}{z-x} g(z) + f(x) \frac{g(z) - g(x)}{z-x} \right) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

積の微分の例

例 (1) $$y' = \bigl((x+1)(x^2+2x+3)\bigr)'$$
$$= (x+1)'(x^2+2x+3) + (x+1)(x^2+2x+3)'$$
$$= (x^2+2x+3) + (x+1)(2x+2)$$
$$= 3x^2+6x+5$$

例 (2) $$\Bigl(x \cdot \frac{1}{x}\Bigr)' = (1)' = 0$$

積の微分で $$x' \cdot \frac{1}{x} + x\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr)' = 0$$

$$\frac{1}{x} + x\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr)' = 0$$ よって $$\boxed{\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr)' = -\frac{1}{x^2}}$$

商の微分

- $$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$ 商の微分公式

例 (1) $$\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)' = \frac{(2x+1)'(3x+1) - (2x+1)(3x+1)'}{(3x+1)^2}$$
$$= \frac{2(3x+1) - 3(2x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{-1}{(3x+1)^2}$$

例 (2) $$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)'(x) - 1(x)'}{x^2} = \frac{0-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

課題 0704-1 次を微分せよ.

[1] $y = \dfrac{x}{x+1}$ [2] $y = \dfrac{1}{x^2}$

導関数の書き方

- 関数 $y = f(x)$ を変数 x で微分する

  y'，$f'(x)$（ラグランジュ）

  $\dfrac{dy}{dx}$ （ライプニッツ）

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

例）$y = f(x) = x^3$

$$y' = f'(x) = f' = \left(x^3\right)' = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

べき関数の微分

x^p の微分

- n が正の整数のとき $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$
- 分数乗

$$(x^{\frac{1}{2}})' = (\sqrt{x})' = \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} = \lim_{w \to u} \frac{w - u}{w^2 - u^2}$$

$\sqrt{z} = w, \sqrt{x} = u$ とおくと　$z = w^2, x = u^2$

$$= \lim_{w \to u} \frac{1}{w + u} = \frac{1}{2u} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

課題 0704-2 $w^3 - u^3 = (w - u)(w^2 + wu + u^2)$ を用いて $(x^{\frac{1}{3}})'$ を求めよ.

x^p の微分公式

- $(x^p)' = \boxed{px^{p-1}}$
- マイナス乗も同じ

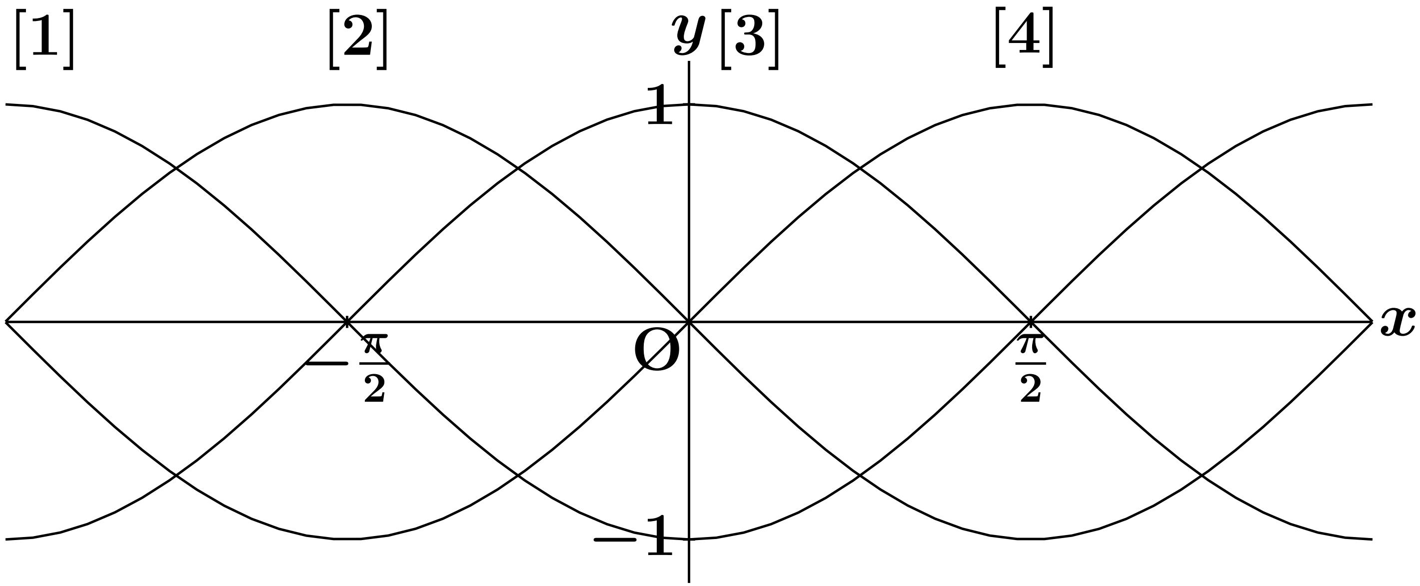
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

課題 0704-3 次の関数を微分せよ.

[1] $y = x^{\frac{1}{4}}$ [2] $y = x^{-2}$ [3] $y = x^{-\frac{1}{2}}$

三角関数の微分

三角関数のグラフ



課題 0704-4 上の図は

$$y = \sin x, y = \cos x, y = -\sin x, y = -\cos x$$

のグラフである．[1]–[4] の関数を答えよ．

$\sin x, \cos x$ の微分

課題 0704-5 「導関数の意味」を用いて導関数を求めよ.

[1] $y = \sin x$　　[2] $y = \cos x$

- 微分公式

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \ \ (\cos x)' = -\sin x}$$

課題 0704-6 次の問いに答えよ

[1] $y = \sin x$ の $(0,\ 0)$ における接線の傾きを求めよ

[2] $y = 2\sin x - 3\cos x$ を微分せよ

$\tan x$ の微分

- $\boxed{(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x \cos x) - \sin x(-\sin x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

課題

課題 0704-7 次の関数を微分せよ

[1] $y = \sin x \cos x$

[2] $y = \sin^2 x (= \sin x \sin x)$

[3] $y = x \tan x$

[4] $y = \tan x - x$

$\sin(ax+b)$ の微分

$$y' = (\sin(ax+b))' = \lim_{z\to x} \frac{\sin(az+b) - \sin(ax+b)}{z-x}$$

$ax+b=u,\ az+b=w$ とおくと

$$w-u=a(z-x),\ w\to u$$

$$y' = \lim_{w\to u} \frac{\sin(w)-\sin(u)}{\frac{w-u}{a}} = a\lim_{w\to u}\frac{\sin(w)-\sin(u)}{w-u}$$

$$(\sin x)' = \lim_{z\to x}\frac{\sin z - \sin x}{z-x}$$

$$= a\cos u = a\cos(ax+b)$$

$$\boxed{\sin(ax+b)' = a\cos(ax+b)}$$

微分

$f(ax+b)$ の微分

- $\boxed{f(ax+b)' = af'(ax+b)}$

  そのまま微分

- $\left(\cos(3x+1)\right)' = 3(-\sin(3x+1)) = -3\sin(3x+1)$
- $\left((2x+3)^5\right)' = 2\cdot 5(2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$

課題 0704-8 微分せよ

[1] $y = \sin 3x$

[2] $y = (5x+1)^3$

[3] $y = \sqrt{2x+3}$

[4] $y = \tan(-x+1)$