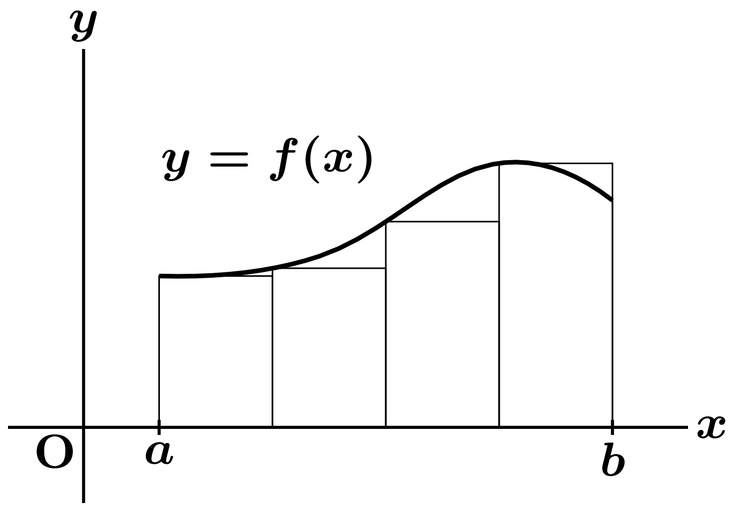
積分法 2

2022.9.12

定積分

区分求積法による定義

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



- 区間を n 個に分けて長方形で近似

$$a = x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n = b$$

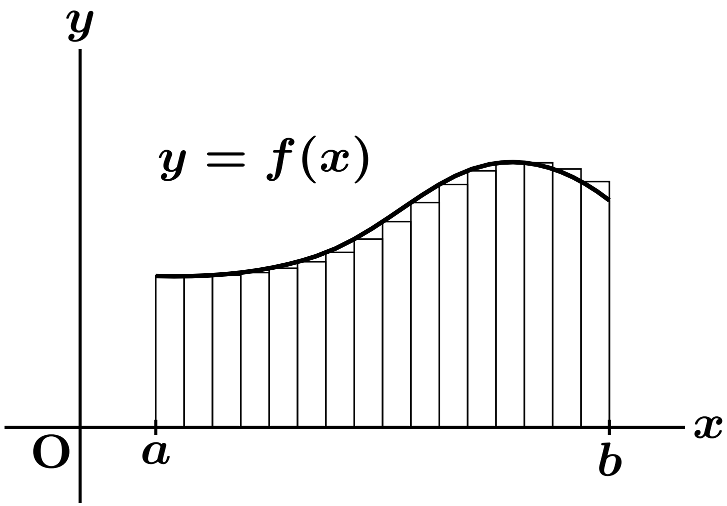
- 区間の幅を dx_j，区間内の 1 点を x_j とすると

長方形の面積 $\fallingdotseq f(x_j)dx_j$

- 長方形の面積の合計 (近似値) は

$$\sum_j f(x_j)dx_j$$

区分求積法による定義 (続)



- n を限りなく大きくする

$$\lim_{n\to\infty}\sum f(x_j)dx_j$$

- その極限値が定積分である.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_j f(x_j)dx_j$$

注) $f(x)$ が負の場合もこの式は有効である.

基本定理と定積分の計算公式

- 基本定理

  $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ は $f(x)$ の不定積分の 1 つである.

  $$\left(\int_a^x f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

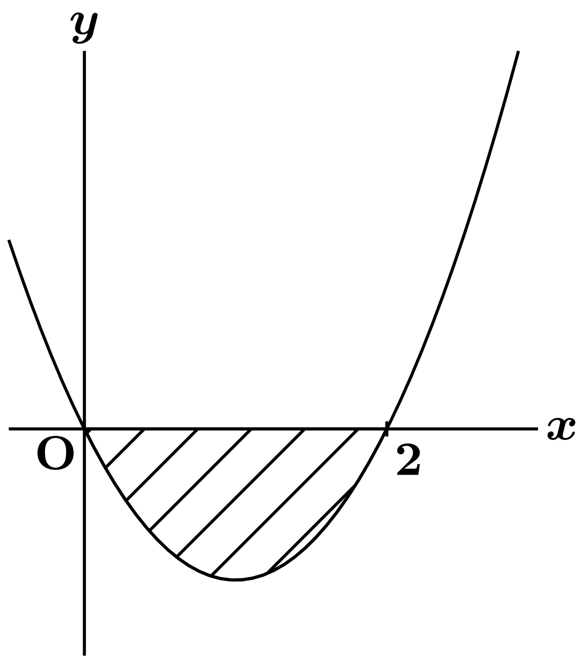
- 計算公式

  $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

  $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

定積分の計算例 1

- $$\int_0^2 (3x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$



課題 0912-1 問いに答えよ．

[1] なぜマイナスか．理由を書け

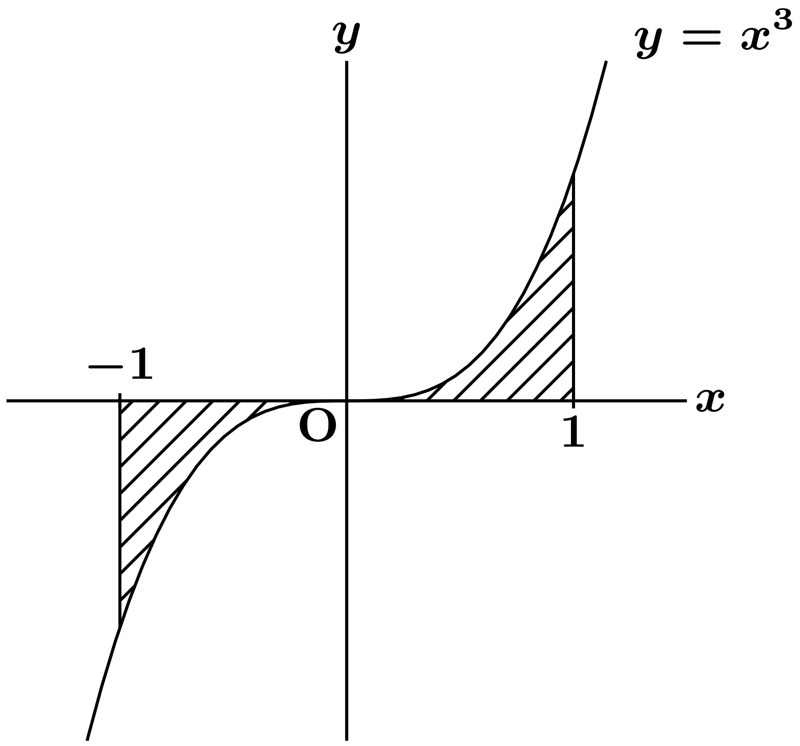
[2] 図の斜線部分の面積を答えよ

定積分の計算例 2

- $$\int_{-1}^{1} x^3\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$



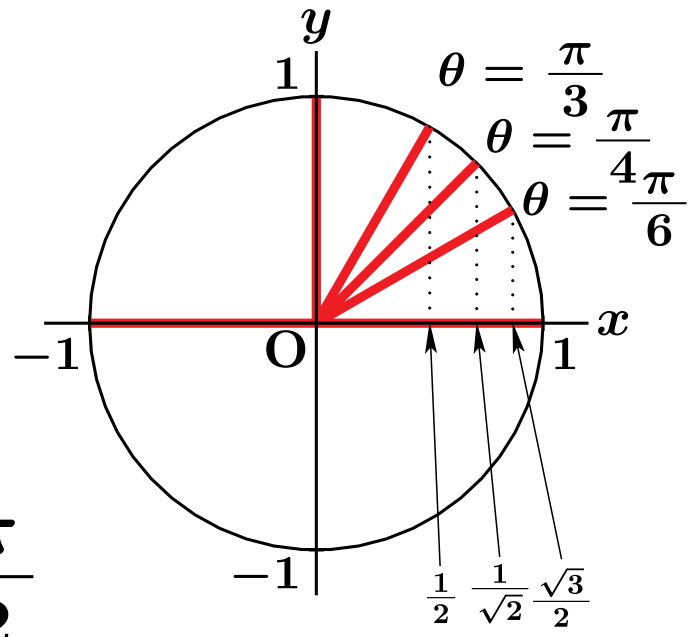
課題 0912-2 問いに答えよ．

[1] なぜ 0 か．理由を書け

[2] 図の斜線部分の面積を答えよ

三角関数の定積分

三角関数 (復習)



課題 0912-3 次の値を求めよ.

[1] $\sin 0$　　[2] $\cos 0$　　[3] $\sin \pi$

[4] $\cos \pi$　　[5] $\sin \dfrac{\pi}{2}$　　[6] $\cos \dfrac{\pi}{2}$

[7] $\sin \dfrac{\pi}{6}$　　[8] $\cos \dfrac{\pi}{4}$　　[9] $\cos \dfrac{\pi}{3}$

課題 0912-4 次の不定積分を求めよ（積分定数 C）

[1] $\displaystyle\int \sin x \, dx$　　[2] $\displaystyle\int \cos x \, dx$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

[3] $\displaystyle\int \cos 2x \, dx$　　[4] $\displaystyle\int \sin 3x \, dx$

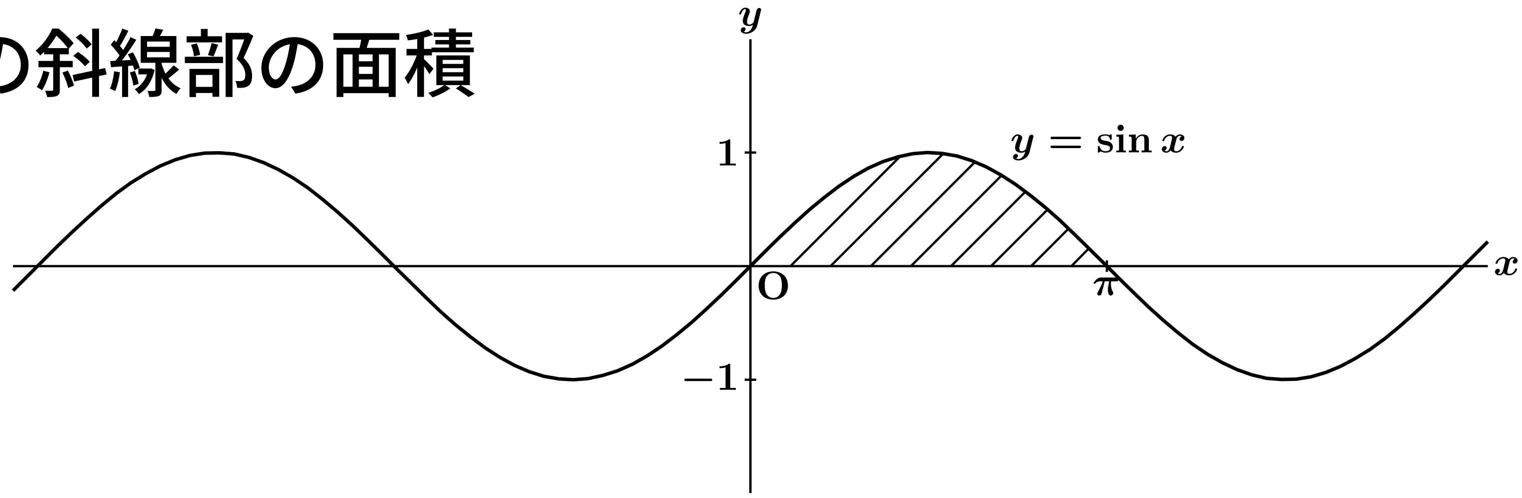
課題 (三角関数の定積分)

課題 0912-5 次を求めよ．

[1] $\displaystyle\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\cos x)\,dx$

[2] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x - 3\sin x)\,dx$

[3] 図の斜線部の面積



指数対数関数の定積分

指数対数 (復習)

- e はネピアの数，$\log x$ は自然対数（$= \log_e x$）

課題 0912-6 次の値を求めよ.

[1] e^0 [2] $\log 1$ [3] $\log e$

課題 0912-7 次の関数を微分せよ.

[1] $y = e^x$ [2] $y = e^{2x}$ [3] $y = \log x$

課題 0912-8 次の不定積分を求めよ.

[1] $\displaystyle\int e^x \, dx$ [2] $\displaystyle\int e^{2x} \, dx$ [3] $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx$

$(x > 0)$

対数関数の積分についての注

- $x < 0$ のとき，$\dfrac{1}{x}$ の不定積分を求める．

$x < 0$ のとき　$y = \log|x| = \log(-x)$

微分する　　$(\log ax)' = a \cdot \dfrac{1}{ax}$

$$y' = (-1)\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

- x が負のとき　$\big(\log(-x)\big)' = \dfrac{1}{x}$

- $\boxed{x \neq 0 \text{ のとき} \quad \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C}$

指数対数の定積分

- $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_1^e = \log e - \log 1 = 1 - 0 = 1$

[課題]0912-9 次の値を求めよ．

[1] $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x\,dx$ [2] $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$

[3] $\displaystyle\int_1^2 -2e^x\,dx$ [4] $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x}\,dx$

e^{ax+b} 型の積分

- 微分 $(e^{ax})' = ae^{ax}, \ (e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$
- 積分 $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

例題 $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

課題 0912-10 次の値を求めよ．

[1] $\displaystyle\int_0^1 (e^x + e^{-x})\,dx$ [2] $\displaystyle\int_0^1 (e^x + 1)(e^x - 1)\,dx$