

指数对数・数列

2022.05.30

指数対数（復習＋）

指数関数 $y = a^x$

- a は正の定数
- 任意の実数 x について a^x が定まる.

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

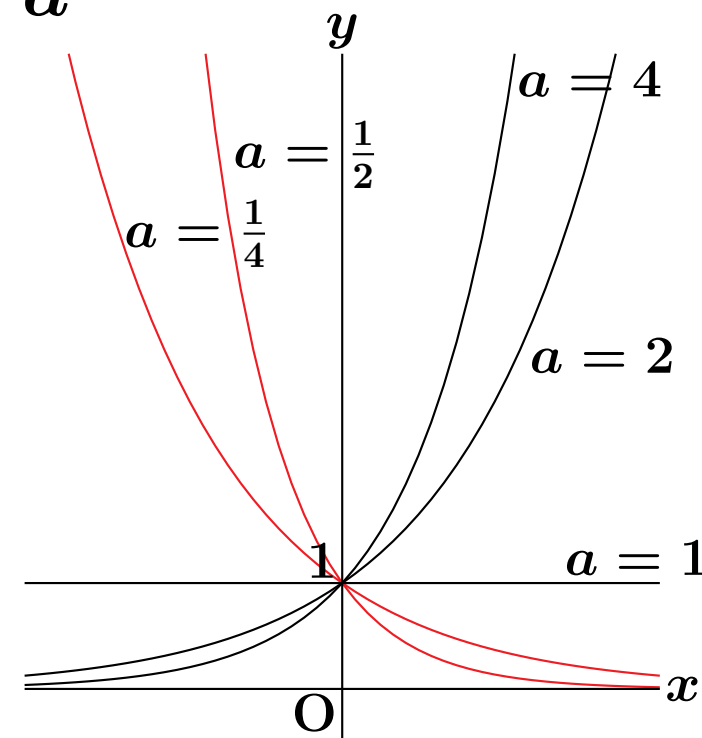
- 指数法則

$$(1) \quad a^p a^q = a^{p+q}$$

$$(2) \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(3) \quad (ab)^p = a^p b^p$$

- $y = a^x$ のグラフ



対数関数

対数の定義

- $y = \log_a x$

a を **底**, x を **真数**

y を a を底とする x の **対数** という.

- 対数 y は, a を何乗したら x になるかという数

$$a^{\boxed{y}} = x \text{ となる } \boxed{y} \text{ のこと}$$

例) $y = \log_3 9$

$$3^{\boxed{y}} = 9 \text{ となる } y \text{ のこと}$$

$$3^2 = 9 \text{ だから } y = \log_3 9 = 2$$

対数の値と対数法則

- $y = \log_a x \iff a^y = x$

(例) $y = \log_2 16 \iff 2^y = 16 = 2^4$
 $y = 4$ となるから $\log_2 16 = 4$

- 対数法則

(1) $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$

(2) $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

(3) $\log_a b^p = p \log_a b$

対数の計算

(1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$

$$\text{与式} = \log_{10}(5 \times 2) = \log_{10} 10 = 1$$

(2) $\log_2 12 - \log_2 3$

$$\text{与式} = \log_2\left(\frac{12}{3}\right) = \log_2 4 = 2$$

(3) $2 \log_3 4 + \log_3 4 - \log_3 8$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \log_3 4^2 + \log_3 4 - \log_3 8 \\ &= \log_3 \frac{16 \times 4}{8} = \log_3 8 \end{aligned}$$

底・真数・対数の条件

- $y = \log_a x \iff a^y = x$
- $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
- 底 a の条件は $a > 0, a \neq 1$
- 真数 x の条件は $x > 0$
- 対数 $y = \log_a x$ の値の範囲は 実数全部

対数関数のグラフ

- $y = \log_a x \iff a^y = x \ (x = a^y)$
- x と y を入れ替えれば $y = a^x$ のグラフになる.
- アプリ「**指数と対数**」を動かしてみよう
- $y = \log_a x$ と $y = a^x$ のグラフは
直線 $y = x$ に関して (**対称**)

指数対数の課題

課題 0530-1 指数対数の値を求めよ.

課題 0530-2 計算せよ.

課題 0530-3 指数対数のグラフについて答えよ.

底の変換公式

底を a から別の c に変える公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

例) $\log_3 8$ を底が 2 の対数に変える

$$\log_3 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 3}$$

課題 0530-4 底を変換して計算せよ

Text P193 問 1

[1] $\log_4 32$

[2] $\log_9 3$

[3] $\log_3 2 \log_2 27$

[4] $\log_a b \times \log_b a$

常用対数

- 底が 10 の対数 $\log_{10} x$
- 数値計算ではよく用いられる (対数表, 関数電卓)
- $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ (近似値)

課題 0530-5 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ を用いて
求めよ

[1] $\log_{10} 4$ [2] $\log_{10} 6$ [3] $\log_{10} 5$ [4] $\log_{10} 8$

常用対数と桁数

- 100000 の桁数は 6 桁
- $100000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ より
 $\log_{10} 100000 = \log_{10} 10^5 = 5 \log_{10} 10 = 5$

- 常用対数と桁数 桁数 = 常用対数の整数部分 + 1

例) 2^{100} の桁数

$$\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$$

よって 31 桁

課題 0530-6 3^{30} の桁数を求めよ

Text P196 問 2

自然対数

- もう1つ、数学では大切な自然対数がある。

- ネイピアの定数 e を底とする対数

$$e = 2.718281828$$

- 自然対数と常用対数の変換

$$\log_e 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} e}$$

- 詳しくは、微分のときに説明する

数列

数列とは

- 数の列

$$a_1, a_2, \dots \quad \text{KeTMath} \quad a_n$$

- ここでは規則的に並んだ数列とする

$$1, 3, 5, 7, \boxed{9}, \boxed{11}, \dots$$

- 最初の項を**初項**という

- 最後の項（**末項**）があるとき，項の数を**項数**という

数列の一般項

- n を正の整数とするとき、第 n 項を表す式を一般項

例 1) 2, 3, 4, ...

一般項 (第 n 項) は $n + 1$

例 2) 2, 4, 8, ...

一般項 (第 n 項) は 2^n

課題 0530-7 次を求めよ

TextP200 問 1, 問 2

[1] 一般項が $a_n = 2^n$ のとき, a_1 から a_5 までの値

[2] 数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ の一般項 a_n

交互に符号が変わる数列の一般項

- $-1, 1, -1, 1, \dots$ の一般項は $\boxed{(-1)^n}$
- $1, -1, 1, -1, \dots$ の一般項は $\boxed{(-1)^{n-1}}$
- $1, -2, 3, -4, \dots$ の一般項は $\boxed{(-1)^{n-1}n}$
- $2, 0, 2, 0, \dots$ の一般項は $\boxed{(-1)^{n-1} + 1}$

課題 0530-8 次の数列の一般項はどうなるか.

[1] $1, 0, 1, 0, \dots$ [2] $0, 1, 0, 1, \dots$

等差数列

- 差（公差）が等しい数列

例) $1, \underbrace{3}_{+2}, \underbrace{5}_{+2}, \underbrace{7}_{+2}, \dots$

- 初項を a ，公差を d とおくと

$$a, a + d, a + 2d, \dots, \text{第 } n \text{ 項は?}$$

- 第 n 項 (一般項) は $a_n = a + (n - 1)d$

(例) 等差数列 $1, 3, 5, 7, \dots$ の一般項は

$$a_n = 1 + 2 \boxed{(n - 1)} = 2n - 1$$

等比数列

- 比（**公比**）が等しい数列

例) $2, 6, 18, 54, \dots$

$\underbrace{\quad}_{\times 3} \quad \underbrace{\quad}_{\times 3} \quad \underbrace{\quad}_{\times 3}$

- 初項を a ，公比を r とおくと

$$a, ar, ar^2, \dots, \text{第 } n \text{ 項 } a_n = \boxed{a r^{n-1}}$$

例) 等比数列 $2, 6, 18, 54, \dots$ の一般項は

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} = \textcolor{red}{6^{n-1}} \text{ としない}$$

課題 (等差数列と等比数列)

課題 0530-9 次を求めよ

Text P201,203

[1] 初項 2, 公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n

[2] a_{10}

[3] 初項 2, 公比 -3 の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n

[4] b_5

等差数列の和

初項 a ，公差 d ，項数が 4 の場合で説明する

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d)$$

$$S = (a + 3d) + (a + 2d) + (a + d) + a$$

2つの式を加えると

$$2S = (2a + 3d) \times 4$$

$$\text{したがって } S = \frac{4(2a + 3d)}{2}$$

等差数列の和の公式

初項 a ，公差 d ，項数 n の等差数列の和 S は

$$S = \frac{n(2a + (n - 1)d)}{2}$$

$$2a + (n - 1)d = a + (a + (n - 1)d) = \text{初項} + \text{末項}$$

$$S = \frac{\text{項数} \times (\text{初項} + \text{末項})}{2}$$

等差数列の和の例題

例題) $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 99$ を求めよ

解) 項数 n を求める.

初項 1, 公差 2 より, 第 n 項 a_n は

$$a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$$

$$a_n = 2n - 1 = 99 \text{ より } n = \frac{99 + 1}{2} = 50$$

$$\text{したがって } S = \frac{50(1 + 99)}{2} = 2500$$

課題 0530-10 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ について

[1] 項数を求めよ

[2] 和を求めよ