2変数関数

2022.09.30

2 変数関数

1 変数関数と 2 変数関数

- これまでの関数 $y = f(x)$（1 変数関数）

  1 つの値 x を与えると，y の値が決まる

  例）$y = x^2$

1 変数関数と 2 変数関数

- これまでの関数 $y = f(x)$（1 変数関数）

  1 つの値 x を与えると，y の値が決まる

  例）$y = x^2$

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$

  2 つの値 $x,\ y$ を与えると，z の値が決まる

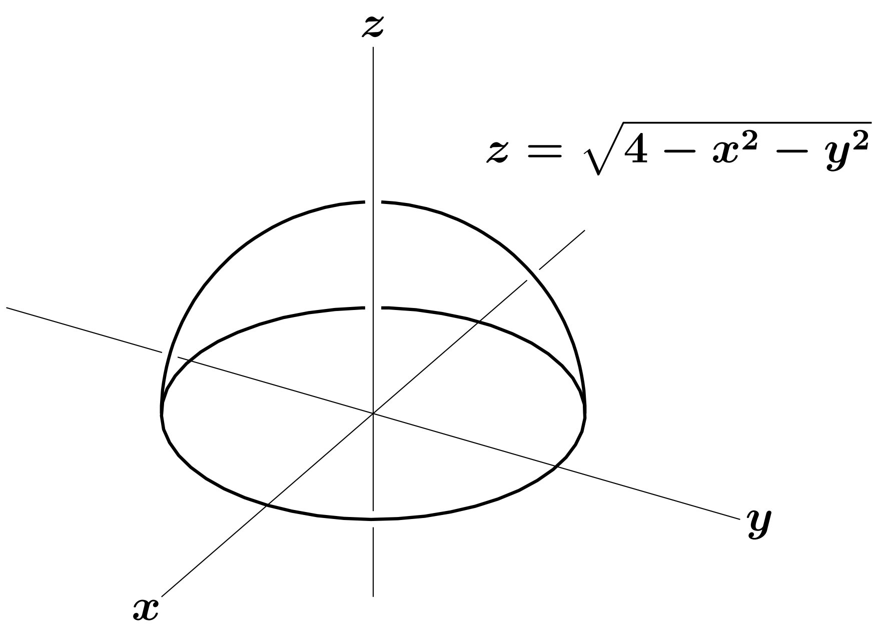
  例）$z = x^2 + y^2$

2 変数関数のグラフ

- 1 変数関数のグラフは曲線

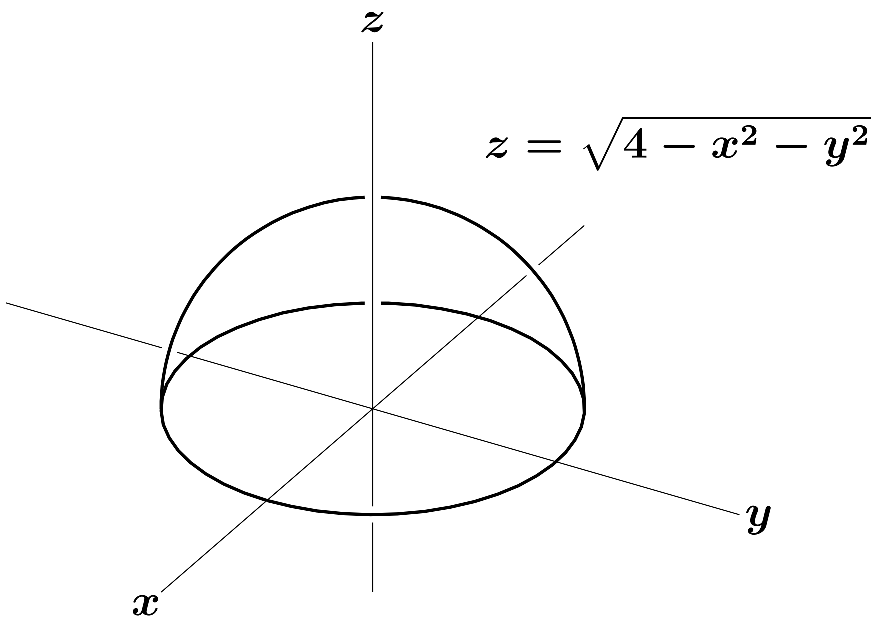
2 変数関数のグラフ

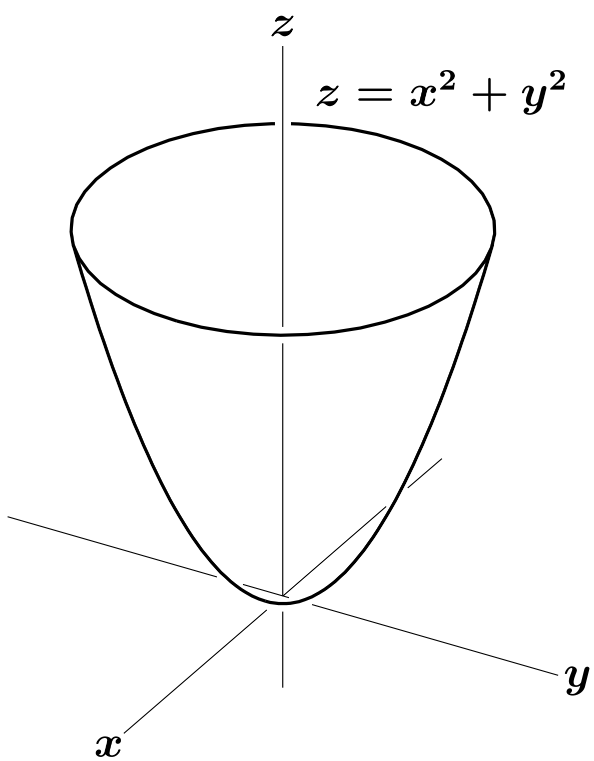
- 1 変数関数のグラフは曲線
- 2 変数関数のグラフは曲面になる



2 変数関数のグラフ

- 1 変数関数のグラフは曲線
- 2 変数関数のグラフは曲面になる





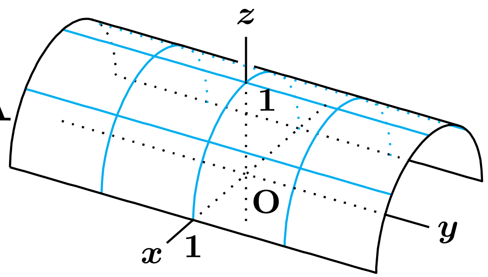
2 変数関数のグラフ (課題)

課題 0930-1 次のグラフとなる 2 変数関数を選べ

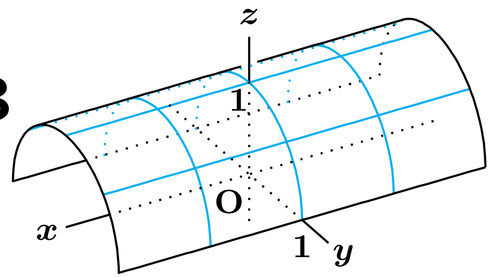
$$1\ \ z = \sqrt{1-y^2} \qquad 2\ \ z = \sqrt{1-x^2}$$

$$3\ \ z = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \qquad 4\ \ z = \sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{4}}$$

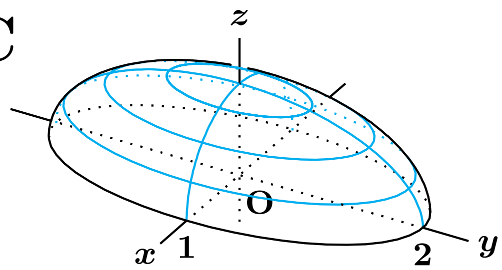
A



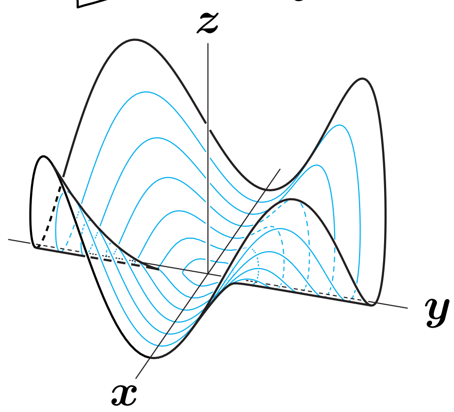
B



C



D



2 変数関数の微分

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$

2 変数関数の微分

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$
  例えば　$z = x^2 + 3y$

2 変数関数の微分

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$
  例えば　$z = x^2 + 3y$
- x だけを変数と考えて（y は定数とみて）

2 変数関数の微分

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$

  例えば　$z = x^2 + 3y$

- x だけを変数と考えて（y は定数とみて）

  z を x で微分したものを x についての**偏微分**といい

2 変数関数の微分

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$
  例えば　$z = x^2 + 3y$
- x だけを変数と考えて（y は定数とみて）
  z を x で微分したものを x についての**偏微分**といい

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

と書く.

2 変数関数の微分

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$

  例えば $\quad z = x^2 + 3y$

- x だけを変数と考えて（y は定数とみて）

  z を x で微分したものを x についての**偏微分**といい

  $$\frac{\partial z}{\partial x}$$

  と書く.

- y についての偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ も同様

2 変数関数の微分

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$
  例えば　$z = x^2 + 3y$

- x だけを変数と考えて（y は定数とみて）
  z を x で微分したものを x についての**偏微分**といい
  $$\frac{\partial z}{\partial x}$$
  と書く.

- y についての偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ も同様

注) $z_x,\ z_y$ とも書く.

2 変数関数の微分

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$
  例えば　$z = x^2 + 3y$

- x だけを変数と考えて（y は定数とみて）
  z を x で微分したものを x についての**偏微分**といい
  $$\frac{\partial z}{\partial x}$$
  と書く.

- y についての偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ も同様

注) $z_x,\ z_y$ とも書く.

注) z' とは書かない.

偏微分の計算

例) $z = x^3 + y^2 + x^4 y^5$

偏微分の計算

例) $z = x^3 + y^2 + x^4 y^5$

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4 y^5)$

偏微分の計算

例) $z = x^3 + y^2 + x^4y^5$

- $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4y^5)$$
  $$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(x^4y^5)$$

偏微分の計算

例) $z = x^3 + y^2 + x^4 y^5$

- $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4 y^5)$$
  $$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(x^4 y^5)$$
  $$= 3x^2 + 4x^3 y^5$$

偏微分の計算

例) $z = x^3 + y^2 + x^4 y^5$

- $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4 y^5)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(x^4 y^5)$$
$$= 3x^2 + 4x^3 y^5$$

- $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4 y^5)$$

偏微分の計算

例) $z = x^3 + y^2 + x^4y^5$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4y^5)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(x^4y^5)\\ &= 3x^2 + 4x^3y^5\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4y^5)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^4y^5)\end{aligned}$$

偏微分の計算

例) $z = x^3 + y^2 + x^4 y^5$

- $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4 y^5)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(x^4 y^5)$$
$$= 3x^2 + 4x^3 y^5$$

- $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4 y^5)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^4 y^5)$$
$$= 2y + 5x^4 y^4$$

課題 (偏微分)

課題 0930-2 次の 2 変数関数の偏微分 z_x, z_y を求めよ．

[1] $z = x^3 + 2y^3$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$

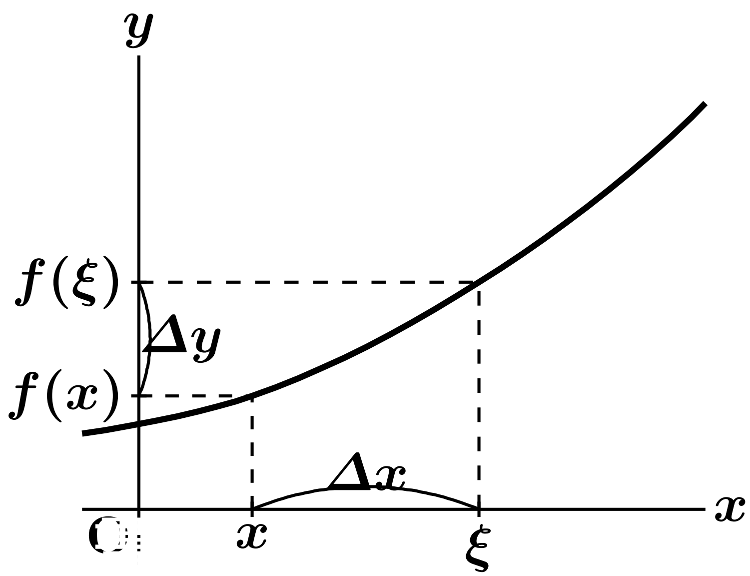
[2] $z = x^3 + 2y^3$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

[3] $z = x^2 + xy - y^2$ のとき，z_x

[4] $z = x^2 + xy - y^2$ のとき，z_y

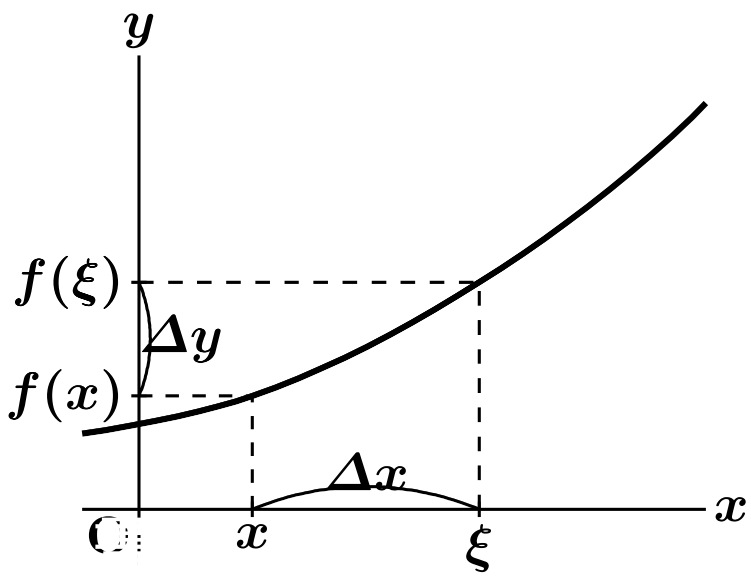
1 変数関数の微分

- x の変化量 $\Delta x = z - x$
- y の変化量 $\Delta y = f(\xi) - f(x)$



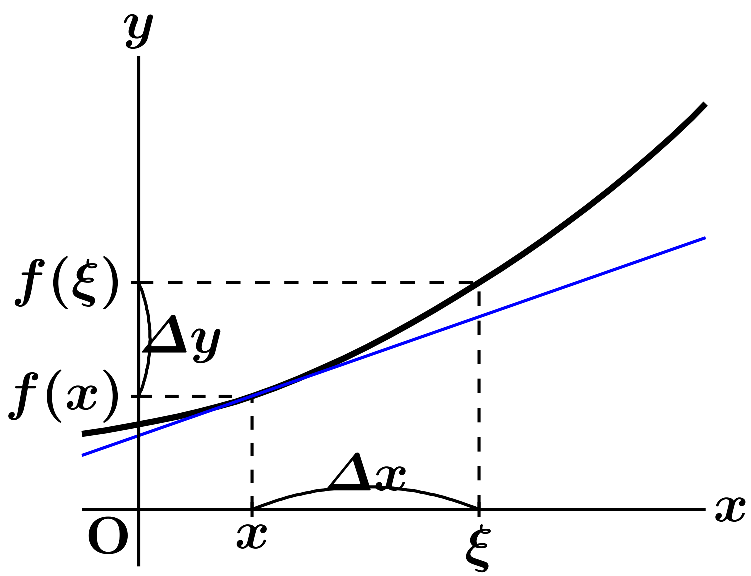
1 変数関数の微分

- x の変化量 $\Delta x = z - x$
- y の変化量 $\Delta y = f(\xi) - f(x)$
- $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



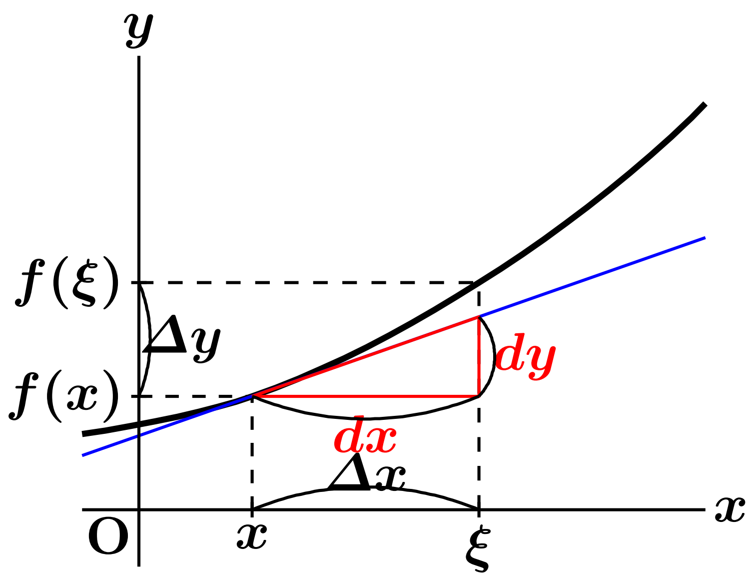
1 変数関数の微分

- x の変化量 $\Delta x = z - x$
- y の変化量 $\Delta y = f(\xi) - f(x)$
- $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- これは図の接線の傾き



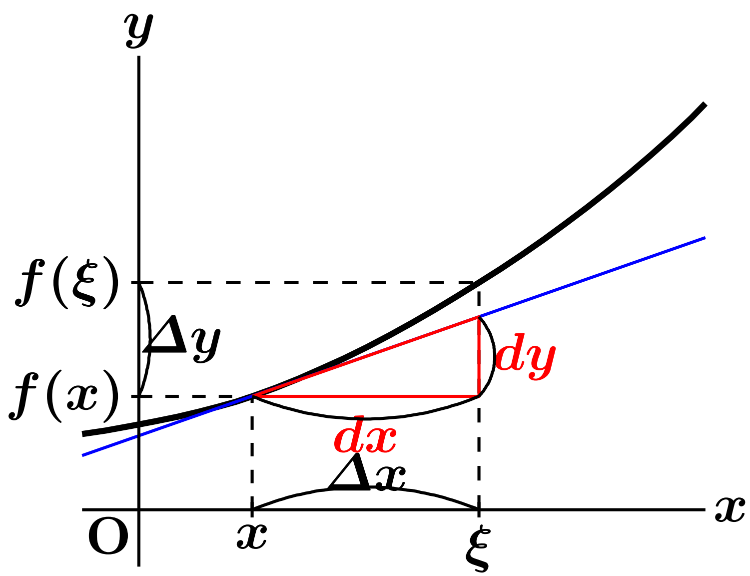
1 変数関数の微分

- x の変化量 $\Delta x = z - x$
- y の変化量 $\Delta y = f(\xi) - f(x)$
- $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- これは図の接線の傾き
- 赤の直角三角形の底辺と高さを dx, dy と書く



$$\Delta x = dx$$

1 変数関数の微分



- x の変化量 $\Delta x = z - x$
- y の変化量 $\Delta y = f(\xi) - f(x)$
- $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- これは図の接線の傾き
- 赤の直角三角形の底辺と高さを dx, dy と書く
- $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$ より $dy = \dfrac{dy}{dx}dx$（dx, dy の意味付け）

$$\Delta x = dx$$

2 変数関数の偏微分

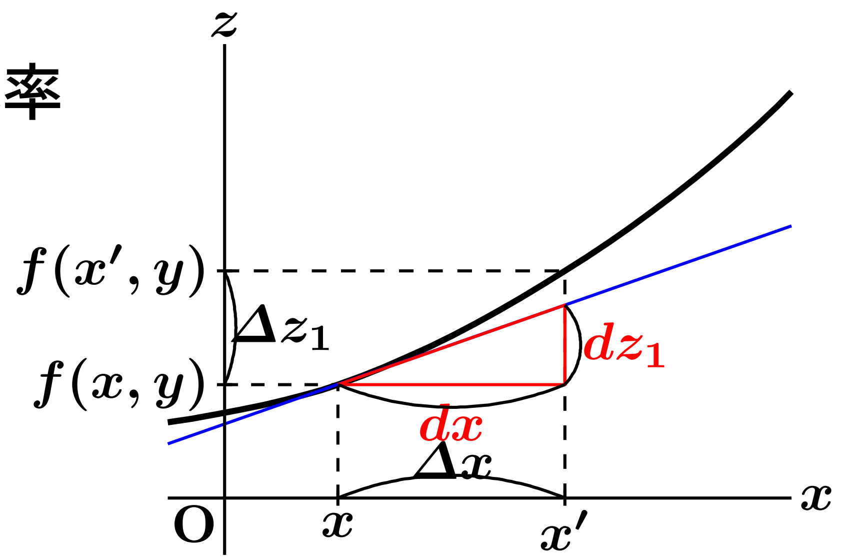
- 2 変数関数 $z = f(x, y)$

2 変数関数の偏微分

- 2 変数関数 $z = f(x, y)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ は

2 変数関数の偏微分

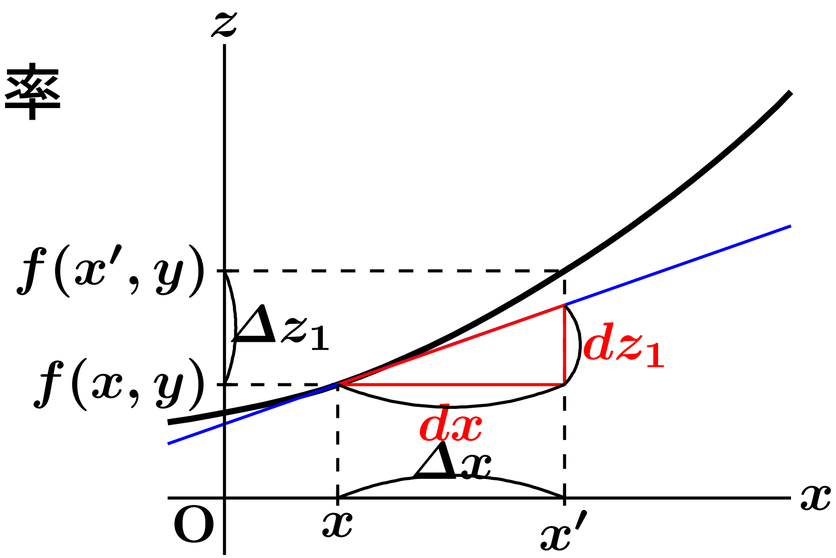
- 2 変数関数 $z = f(x, y)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ は x だけが変化したときの変化率



2 変数関数の偏微分

- 2 変数関数 $z = f(x, y)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ は x だけが変化したときの変化率

  変化量 $\Delta z_1 = f(x', y) - f(x, y)$

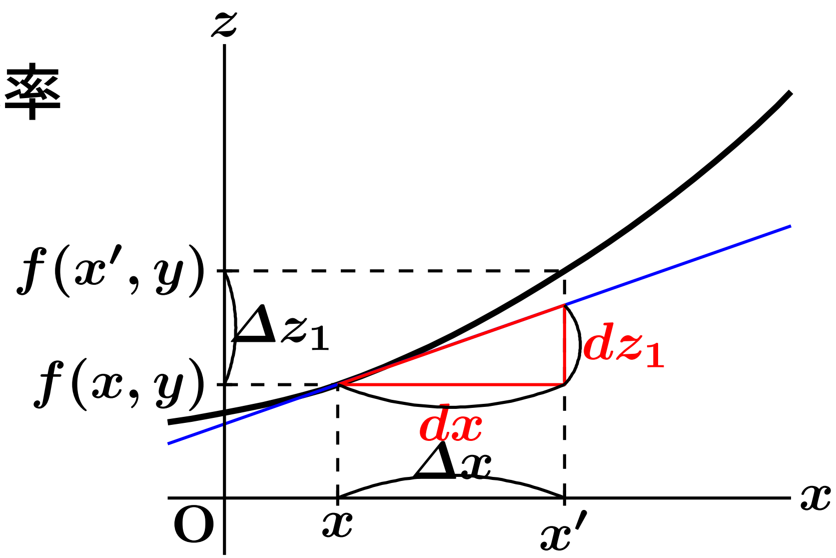


2 変数関数の偏微分

- 2 変数関数 $z = f(x, y)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ は x だけが変化したときの変化率

  変化量 $\Delta z_1 = f(x', y) - f(x, y)$

  $$\Longrightarrow \quad dz_1 = \frac{\partial z}{\partial x} dx \text{ で近似}$$



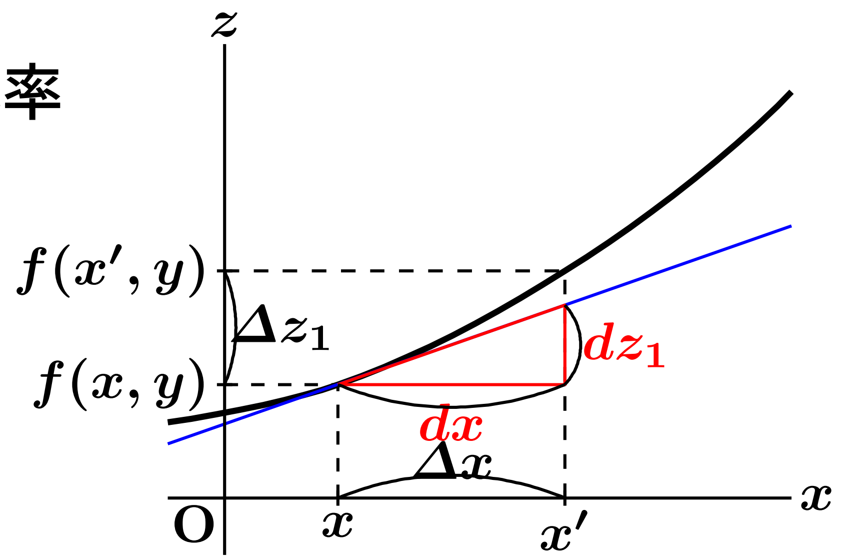
2 変数関数の偏微分

- 2 変数関数 $z = f(x, y)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ は x だけが変化したときの変化率

  変化量 $\Delta z_1 = f(x', y) - f(x, y)$

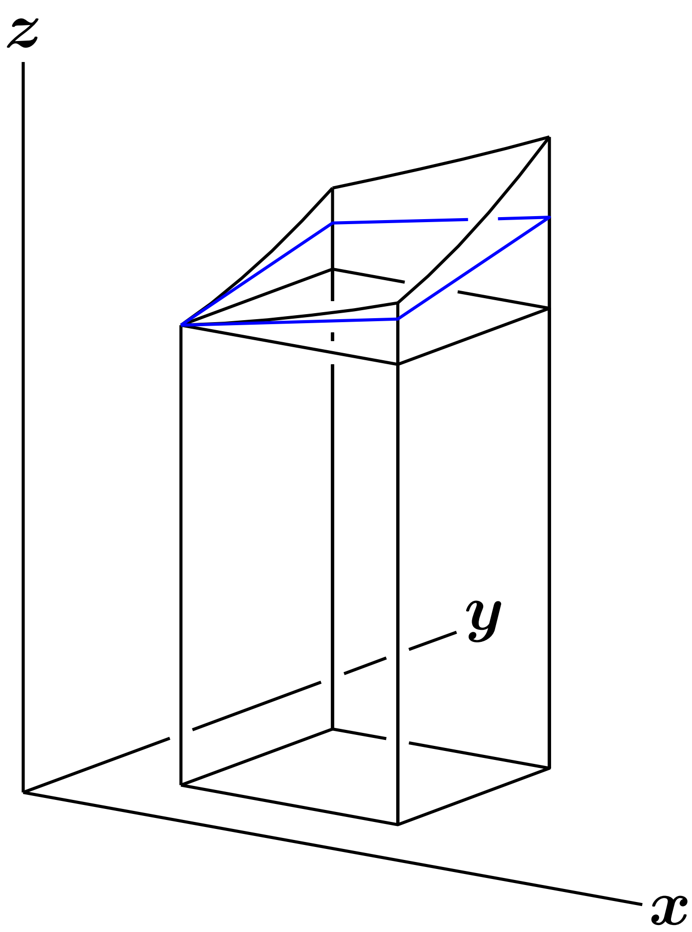
  $$\Longrightarrow \quad dz_1 = \frac{\partial z}{\partial x} dx$$ で近似

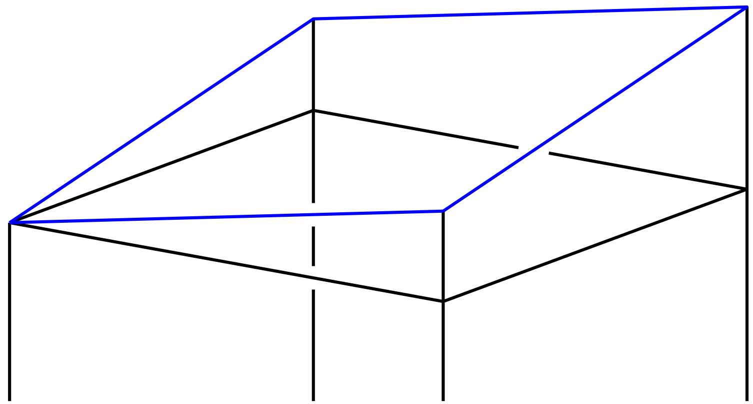
- y についても同様　$dz_2 = \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$



全微分

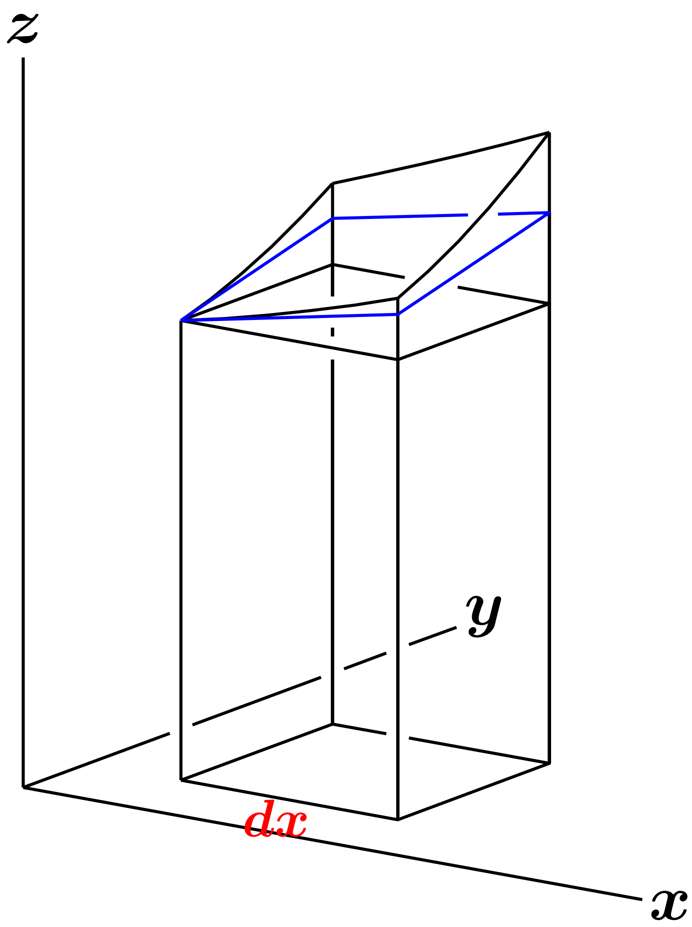
x, y の両方を dx, dy だけ変えたとき，z の変化量 dz は？

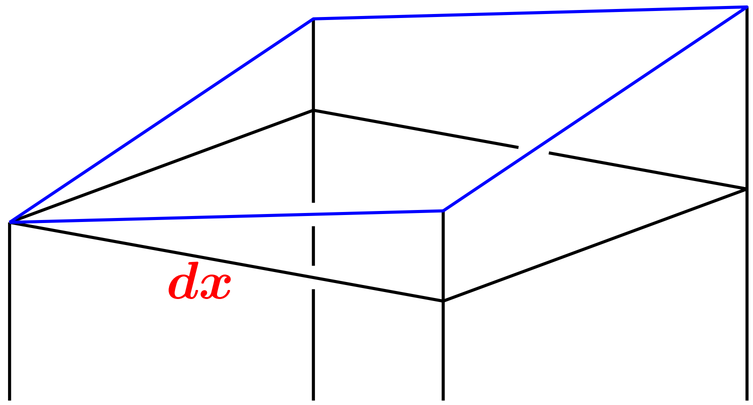




全微分

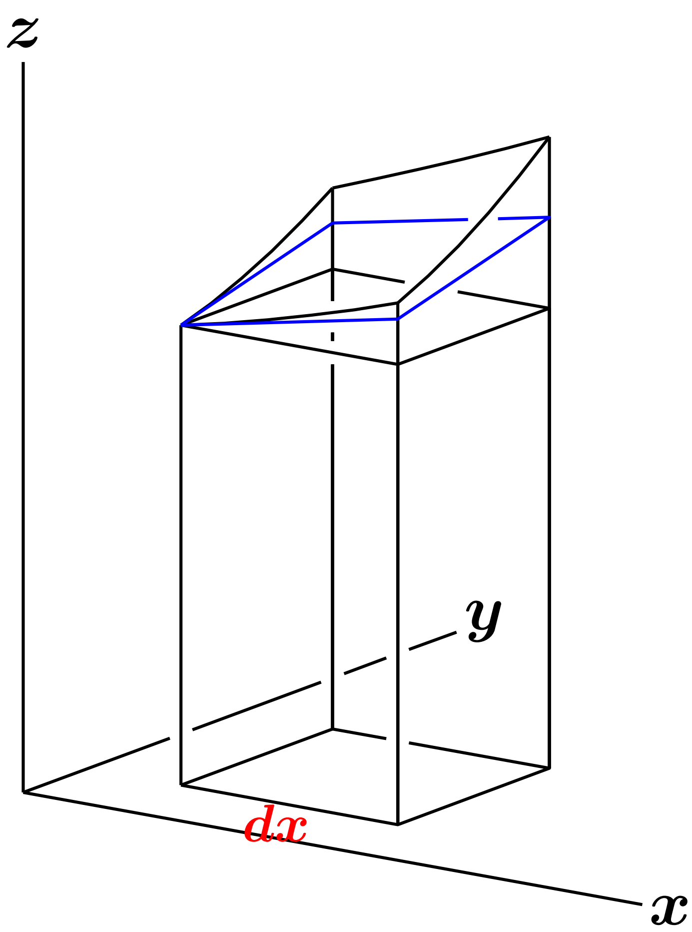
x, y の両方を dx, dy だけ変えたとき，z の変化量 dz は？

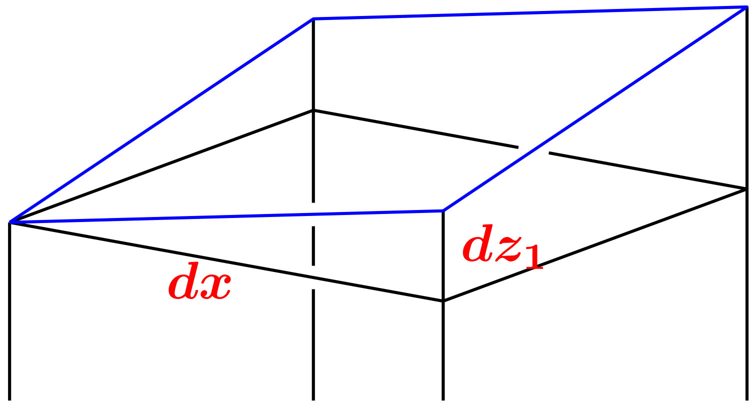




全微分

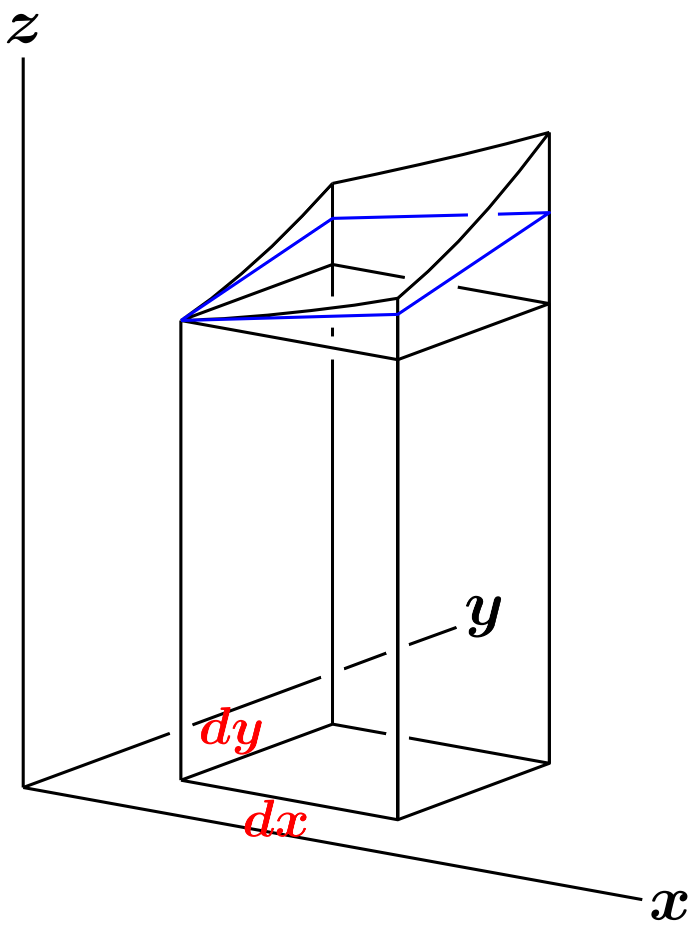
x，y の両方を dx，dy だけ変えたとき，z の変化量 dz は？

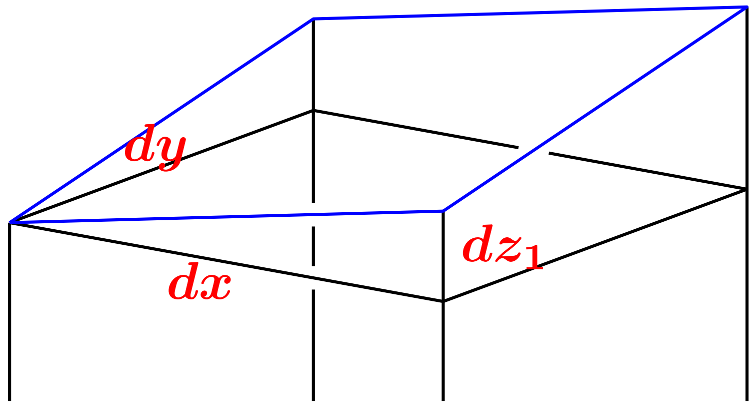




全微分

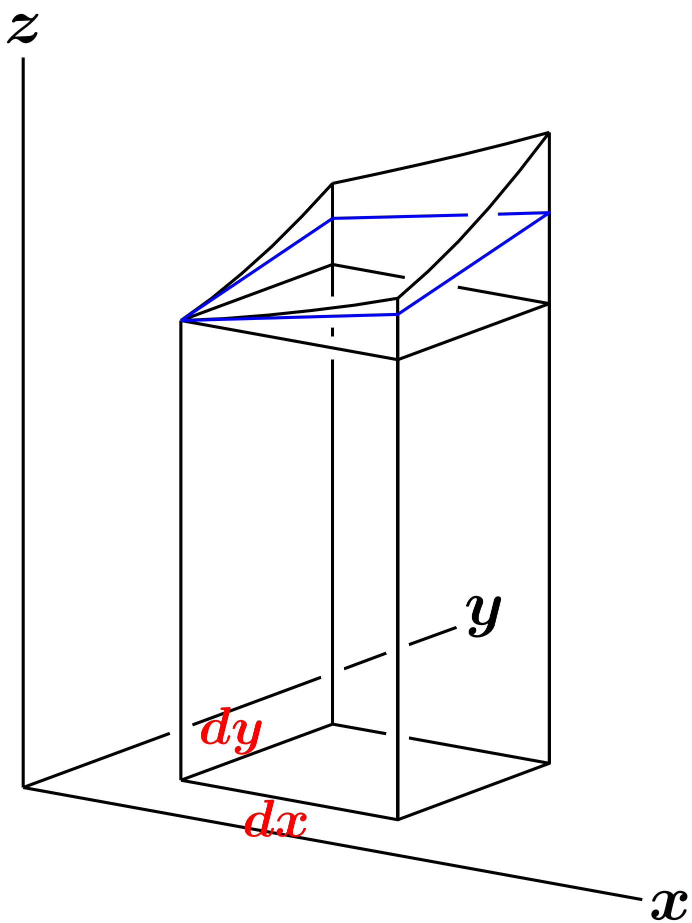
x，y の両方を dx，dy だけ変えたとき，z の変化量 dz は？

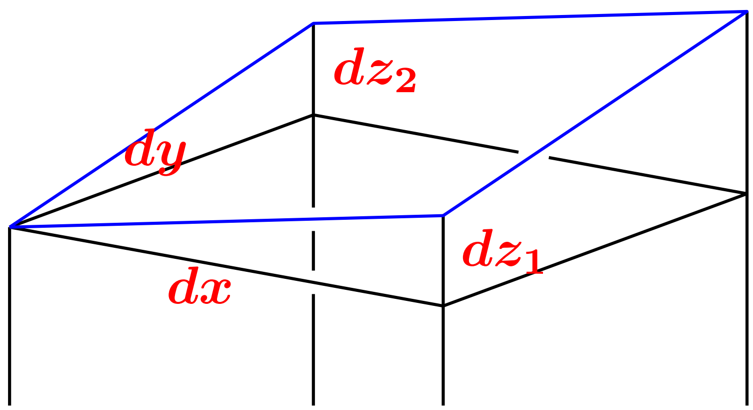




全微分

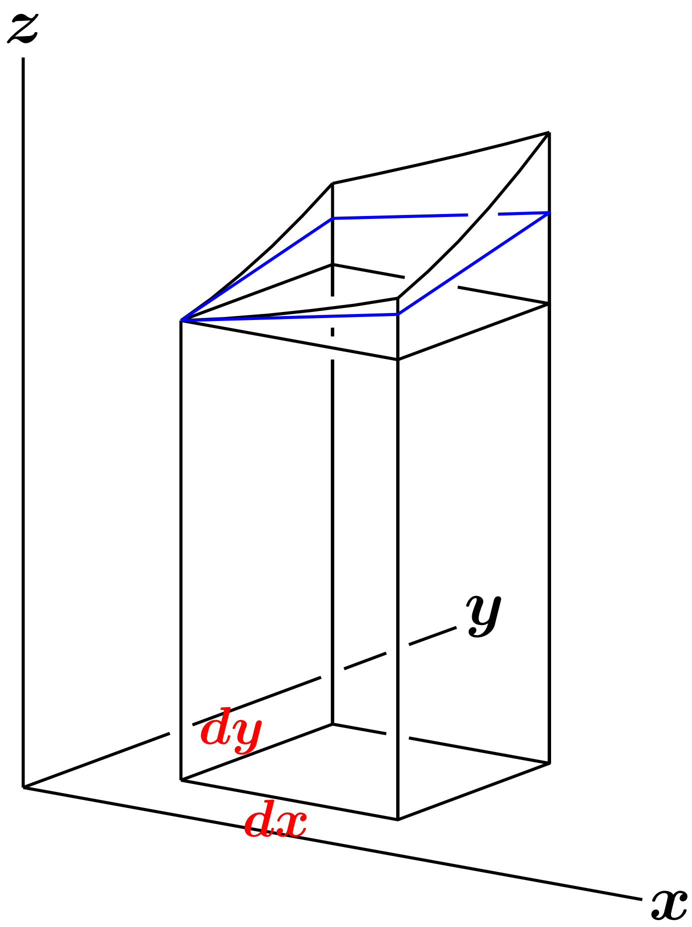
x，y の両方を dx，dy だけ変えたとき，z の変化量 dz は？

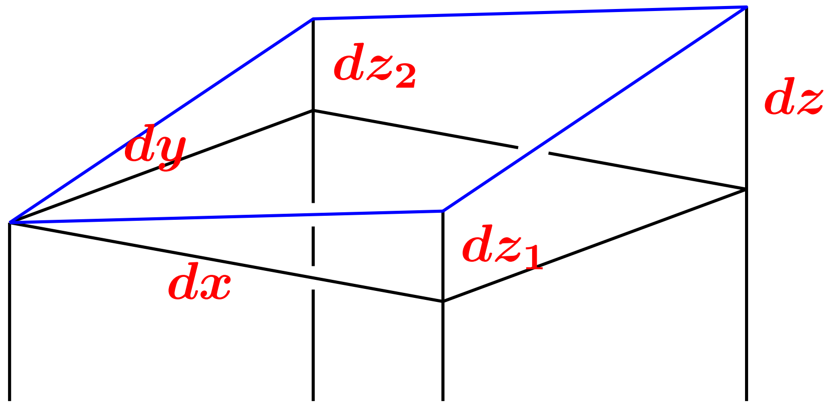




全微分

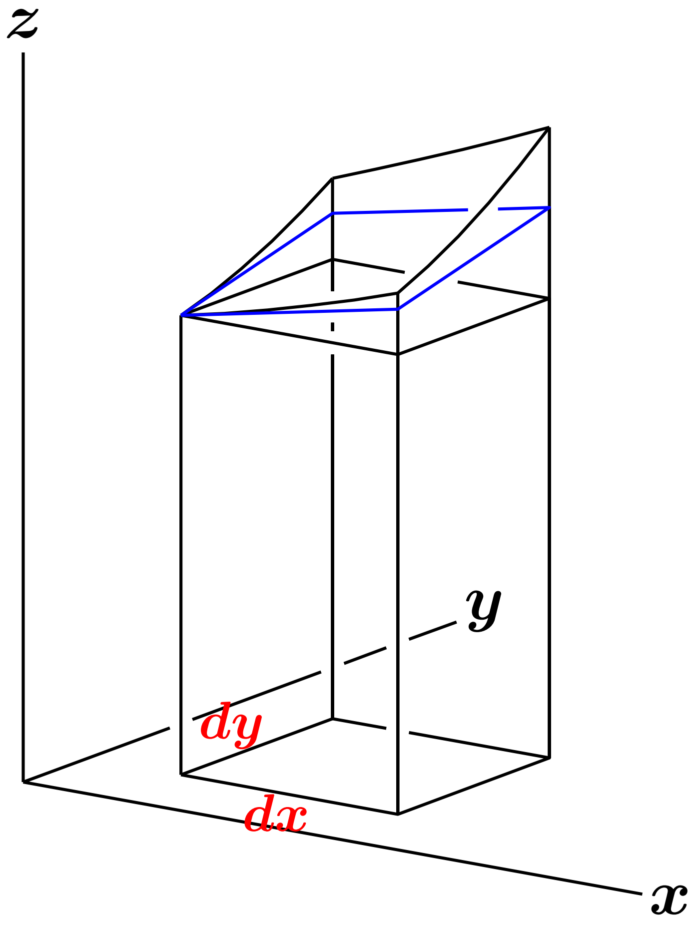
x，y の両方を dx，dy だけ変えたとき，z の変化量 dz は？

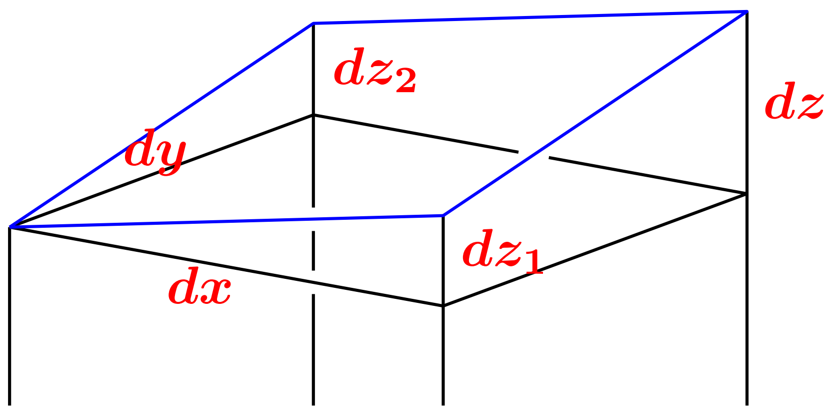




全微分

x，y の両方を dx，dy だけ変えたとき，z の変化量 dz は？

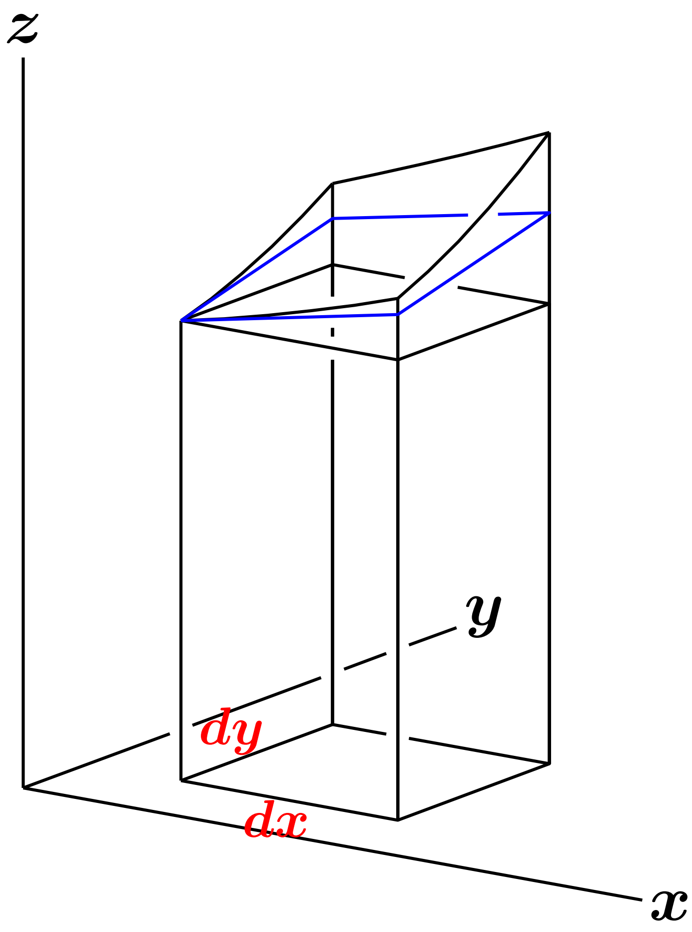


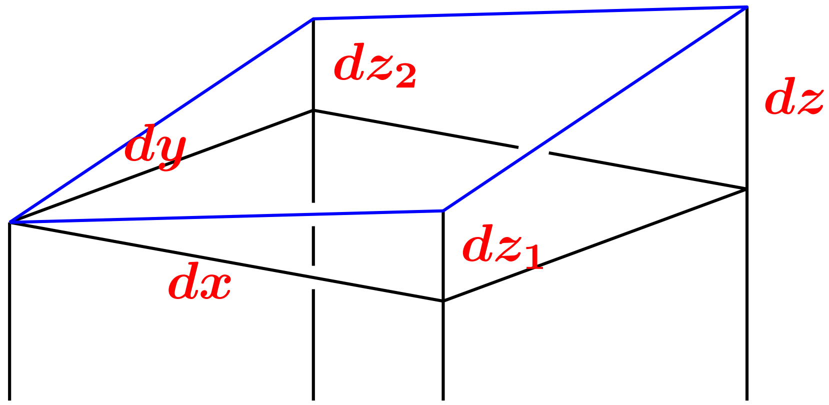


$$dz = dz_1 + dz_2$$

全微分

x，y の両方を dx，dy だけ変えたとき，z の変化量 dz は？





$$dz = dz_1 + dz_2$$

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

全微分

例 $z = x^2 + 5y^3$ の全微分

全微分

例 $z = x^2 + 5y^3$ の全微分

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$

全微分

例 $z = x^2 + 5y^3$ の全微分

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 15y^2$$

全微分

例 $z = x^2 + 5y^3$ の全微分

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 15y^2$$

$$dz = 2x\,dx + 15y^2\,dy$$

全微分

例 $z = x^2 + 5y^3$ の全微分

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 15y^2$$

$$dz = 2x\,dx + 15y^2\,dy$$

課題 0930-3 次の関数の全微分を求めよ.

[1] $z = 2x+y$ [2] $z = xy$