2変数関数

2022.09.30

2 変数関数

1 変数関数と 2 変数関数

- これまでの関数 $y = f(x)$（1 変数関数）

  1 つの値 x を与えると，y の値が決まる

  例）$y = x^2$

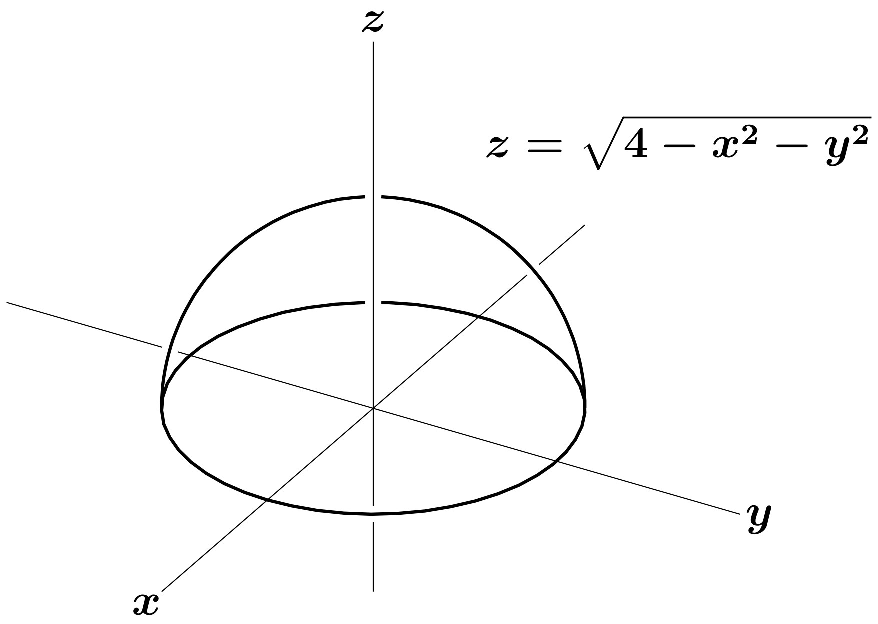
- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$

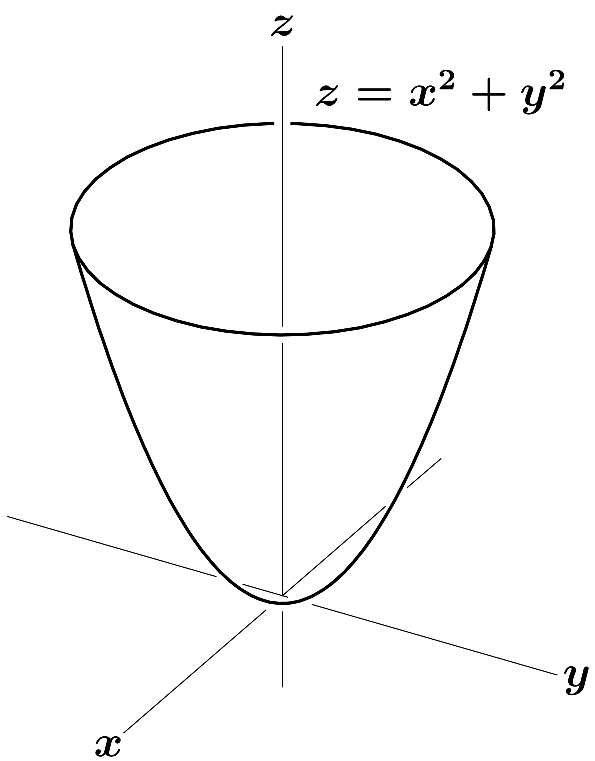
  2 つの値 $x,\ y$ を与えると，z の値が決まる

  例）$z = x^2 + y^2$

2 変数関数のグラフ

- 1 変数関数のグラフは曲線
- 2 変数関数のグラフは曲面になる





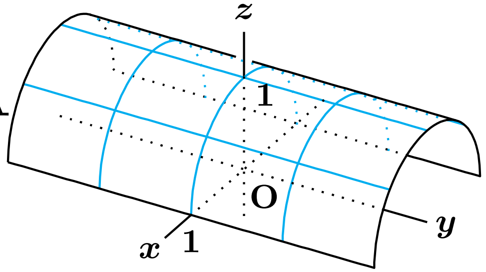
2 変数関数のグラフ (課題)

課題 0930-1 次のグラフとなる 2 変数関数を選べ

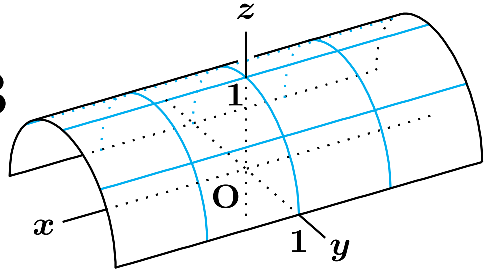
1 $z = \sqrt{1 - y^2}$　　2 $z = \sqrt{1 - x^2}$

3 $z = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$　　4 $z = \sqrt{1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}}$

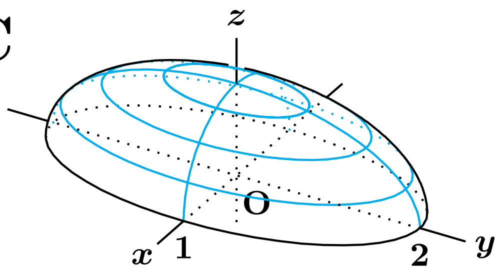
A



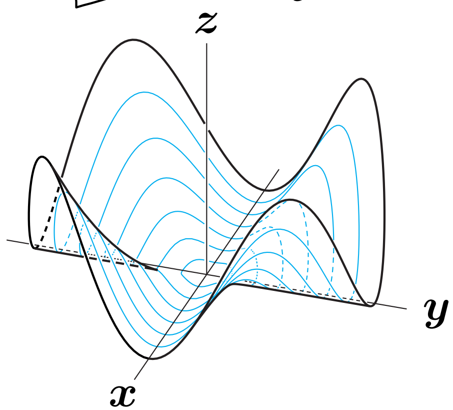
B



C



D



2 変数関数の微分

- 2 変数関数 $z = f(x,\ y)$
  例えば　$z = x^2 + 3y$

- x だけを変数と考えて（y は定数とみて）
  z を x で微分したものを x についての**偏微分**といい
  $$\frac{\partial z}{\partial x}$$
  と書く.

- y についての偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ も同様

注) $z_x,\ z_y$ とも書く.

注) z' とは書かない.

偏微分の計算

例) $z = x^3 + y^2 + x^4y^5$

- $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4y^5)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(x^4y^5)$$
$$= 3x^2 + 4x^3y^5$$

- $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 + x^4y^5)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^4y^5)$$
$$= 2y + 5x^4y^4$$

課題 (偏微分)

課題 0930-2 次の 2 変数関数の偏微分 z_x, z_y を求めよ．

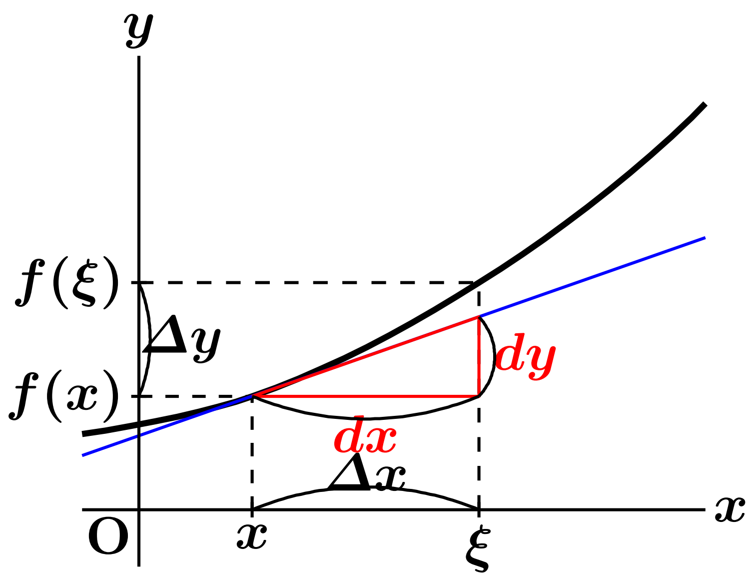
[1] $z = x^3 + 2y^3$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$

[2] $z = x^3 + 2y^3$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

[3] $z = x^2 + xy - y^2$ のとき，z_x

[4] $z = x^2 + xy - y^2$ のとき，z_y

1 変数関数の微分

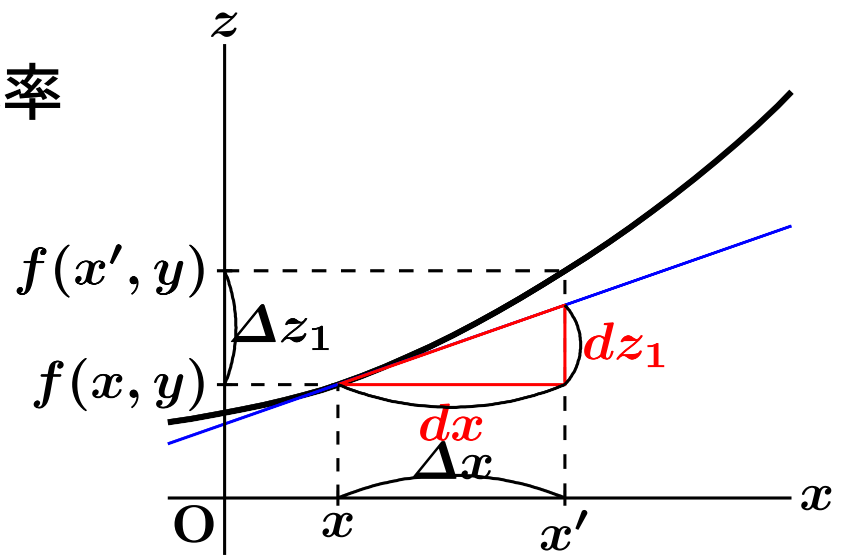


- x の変化量 $\Delta x = z - x$
- y の変化量 $\Delta y = f(\xi) - f(x)$
- $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- これは図の接線の傾き
- 赤の直角三角形の底辺と高さを dx, dy と書く
- $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$ より $dy = \dfrac{dy}{dx}dx$ （dx, dy の意味付け）

$$\Delta x = dx$$

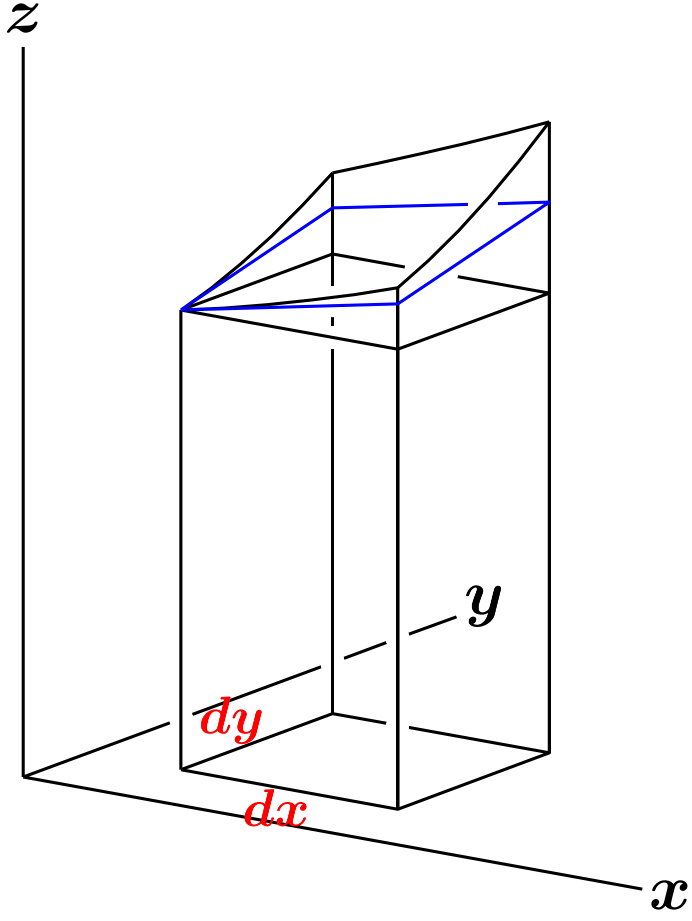
2 変数関数の偏微分

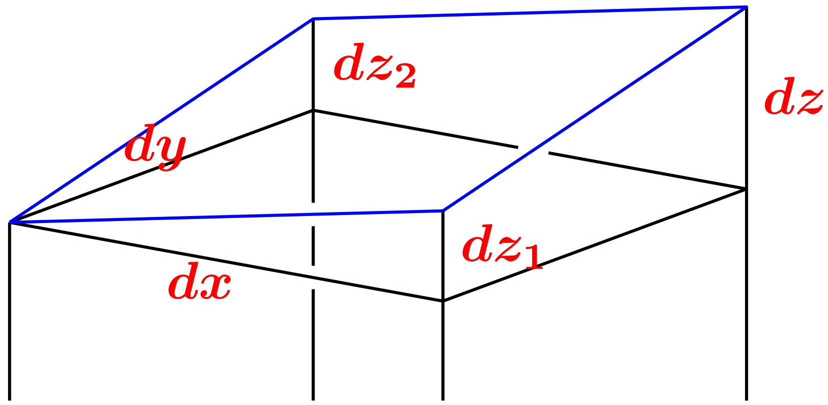
- 2 変数関数 $z = f(x, y)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ は x だけが変化したときの変化率
  変化量 $\Delta z_1 = f(x', y) - f(x, y)$
  $$\Longrightarrow \quad dz_1 = \frac{\partial z}{\partial x} dx \text{ で近似}$$
- y についても同様 $\quad dz_2 = \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$



全微分

x，y の両方を dx，dy だけ変えたとき，z の変化量 dz は？





$$dz = dz_1 + dz_2$$

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

全微分

例 $z = x^2 + 5y^3$ の全微分

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 15y^2$$

$$dz = 2x\,dx + 15y^2\,dy$$

課題 0930-3 次の関数の全微分を求めよ．

[1] $z = 2x+y$ [2] $z = xy$