三角比と三角関数

2022.05.09

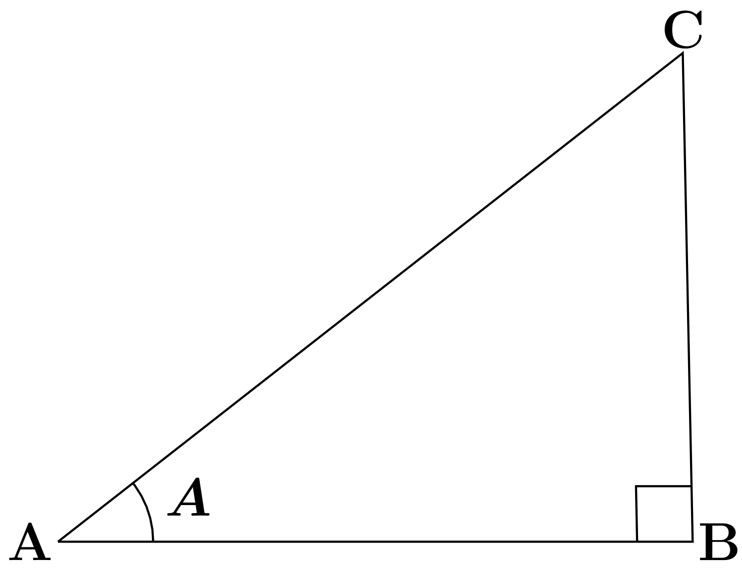
三角比から三角関数へ

三角比 (復習)

$$\cos A = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$$

$$\sin A = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}$$

$$\tan A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}$$



- 辺の比だから，三角形の大きさによらない．

課題 0509-1 問題図の三角形で以下を求めよ．

[1] $\cos A$ [2] $\sin A$ [3] $\tan D$ [4] $\sin D$

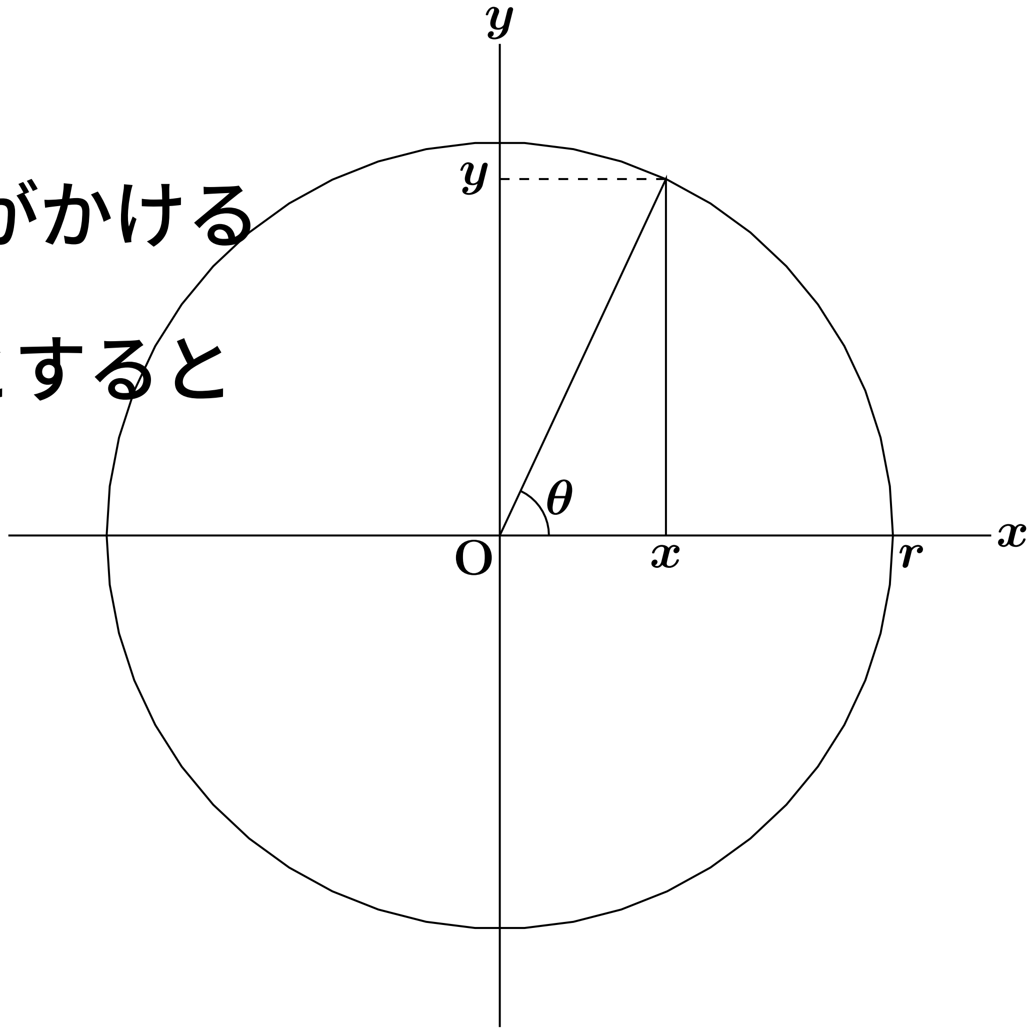
角が 90° より小さい場合 (鋭角)

- 角を θ とおく
- 左の角が θ の直角三角形がかける
- 斜辺 r，底辺 x，高さ y とすると

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



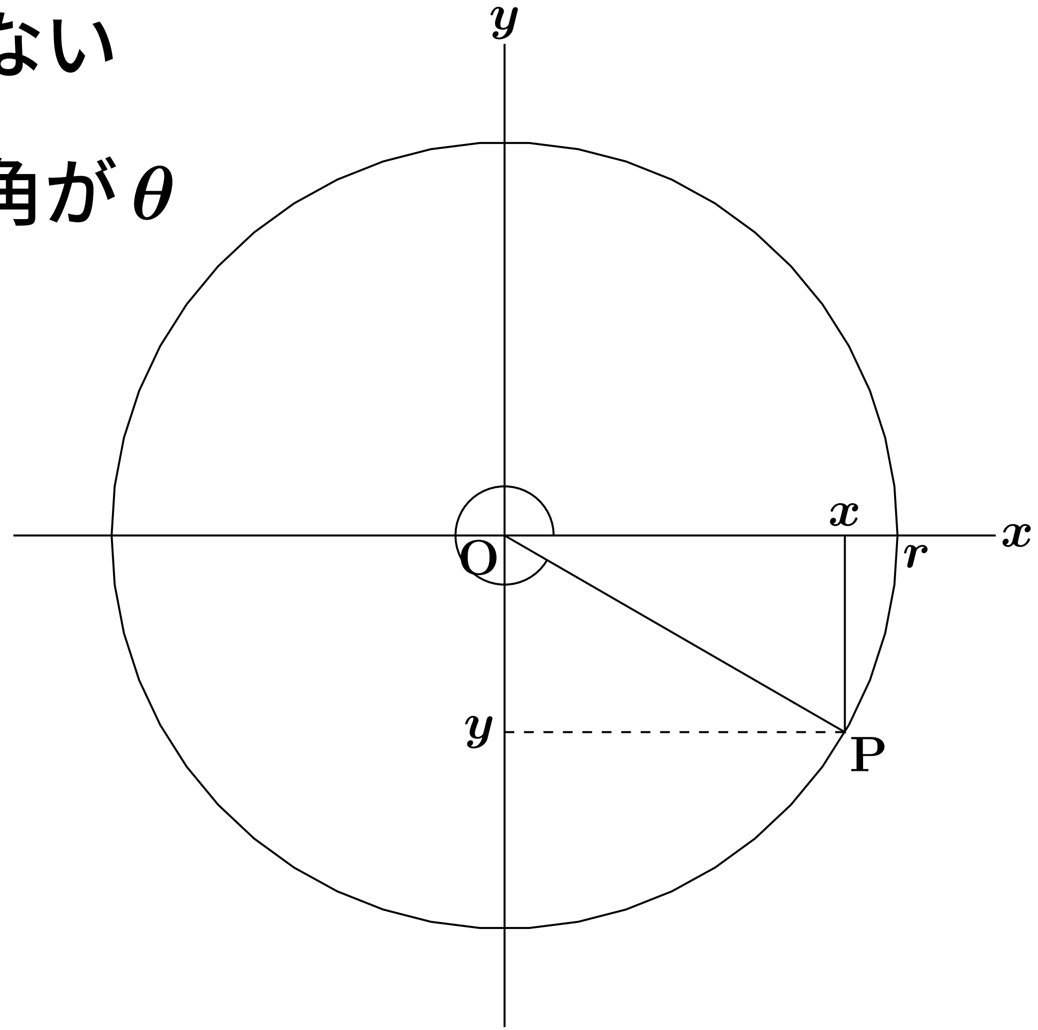
角が 90° より大きい場合

- 角 θ の直角三角形がかけない
- 半径 r の円上に x 軸との角が θ である点 P はとれる
- P の x 座標は底辺
  y 座標は高さに対応

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



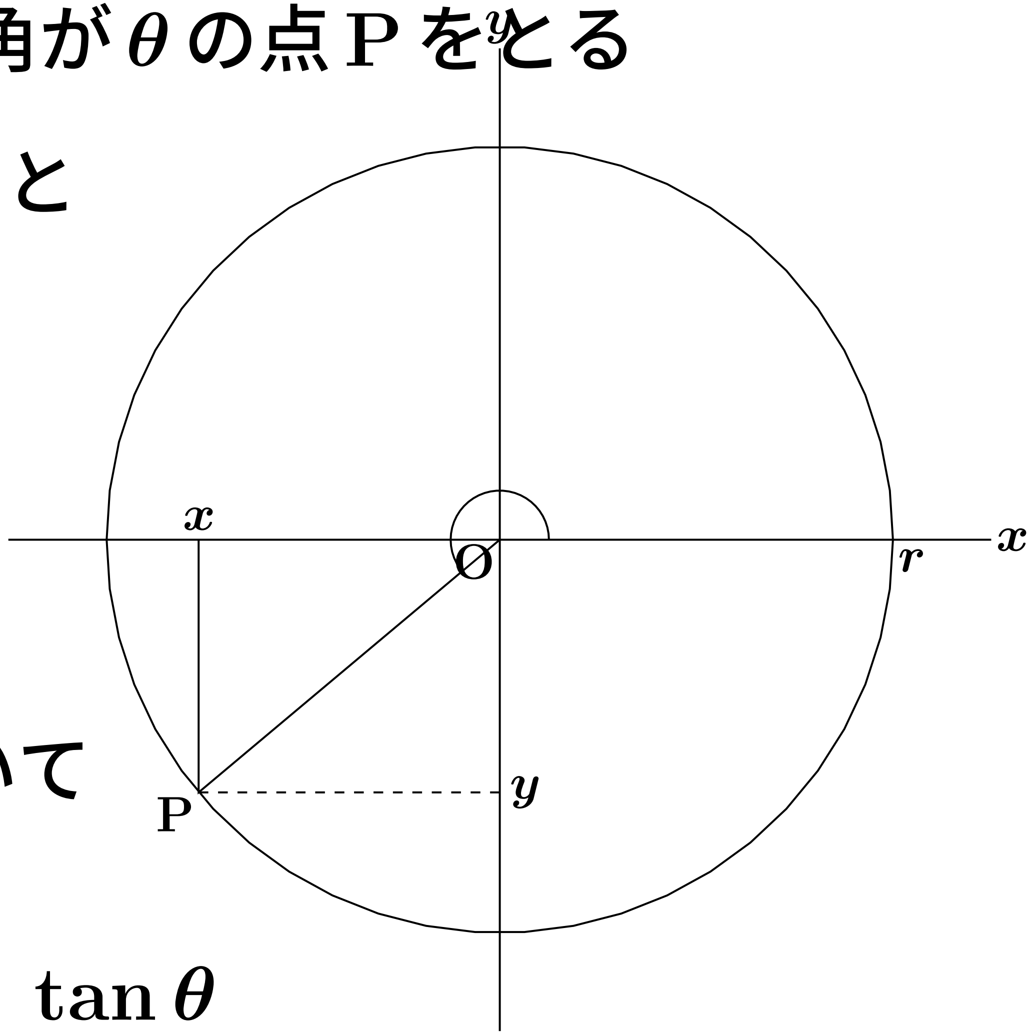
三角関数の定義 $(0 \leqq \theta \leqq 360)$

- 半径 r の円上に x 軸との角が θ の点 P をとる
- P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

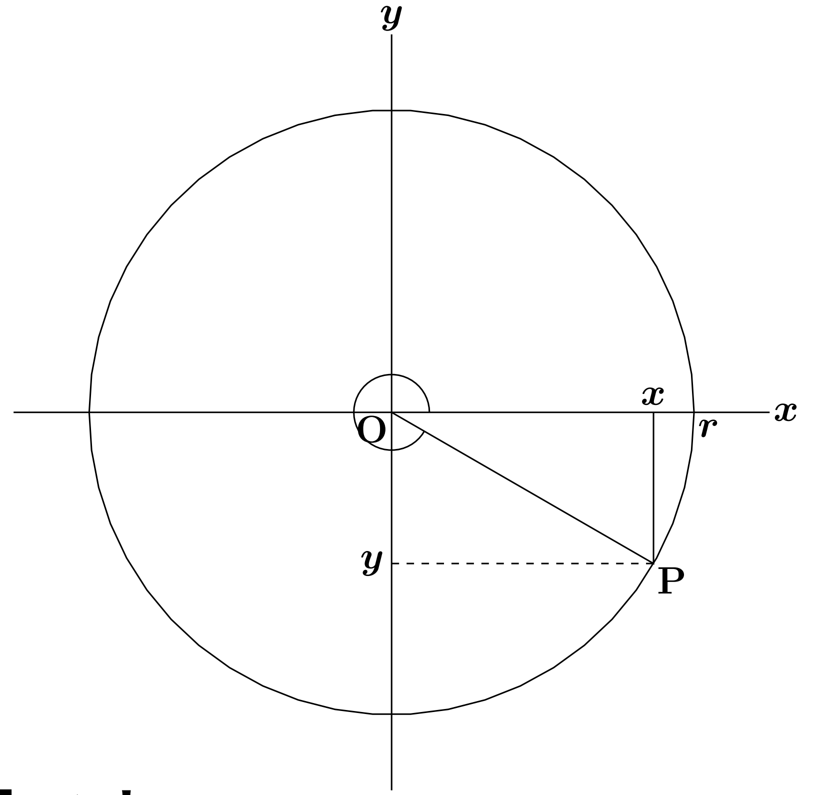


課題 0509-2 問題図の θ について以下を求めよ

[1] $\cos\theta$　[2] $\sin\theta$　[3] $\tan\theta$

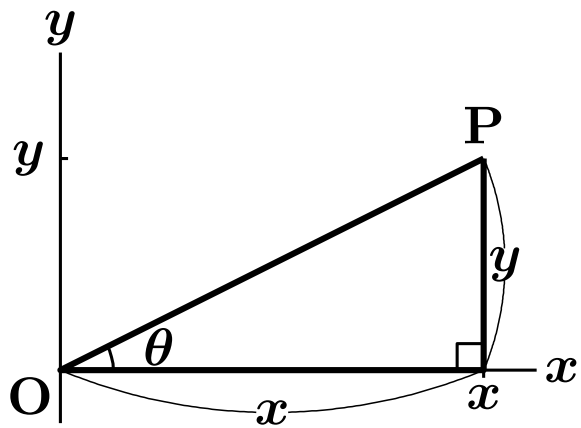
三角関数の値の符号

	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
• 第 1 象限	$+$	$+$	$+$
• 第 2 象限	$-$	$+$	$-$
• 第 3 象限	$-$	$-$	$+$
• 第 4 象限			



課題 0509-3 第 4 象限での符号を調べよ

三角関数の相互関係



(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

以下の証明では $\mathrm{OP} = r$ とおく

証) $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\quad$ $\big(\cos(\theta)\big)^2$ を $\cos^2\theta$ と書く

証) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{x^2+y^2}{r^2} = 1$

一般角

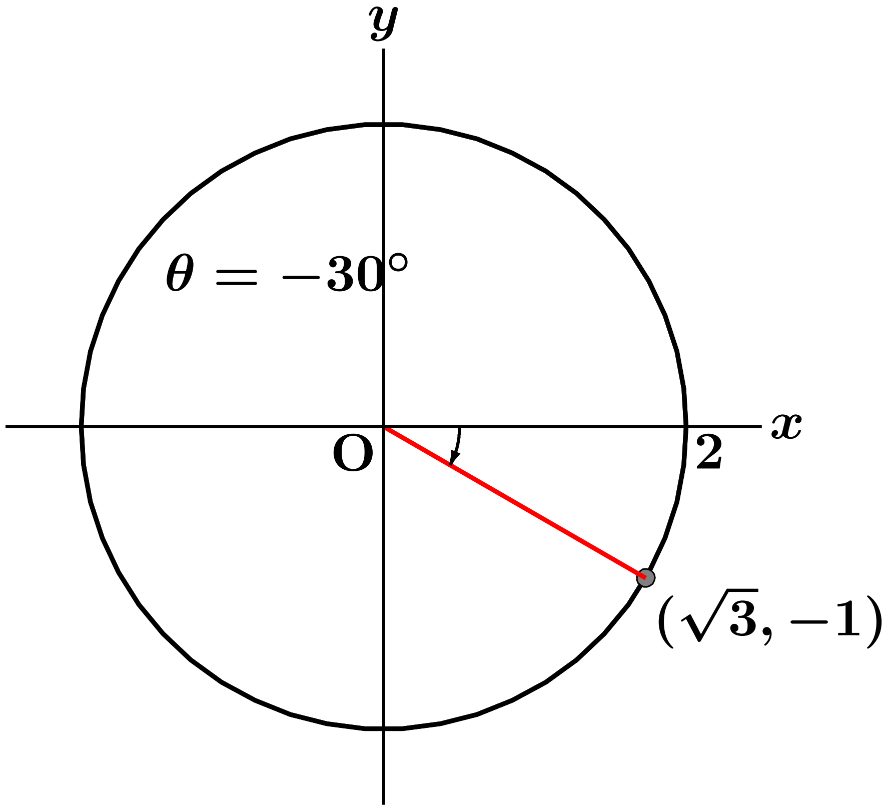
一般角

- これまで，角 θ は 2 つの線分の間の角だった

$$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$$

- 角を回転を表す量とすると
θ はどんな実数でもよい．

  - $\cdot$ x 軸を始線とする
  - $\cdot$ $\theta > 0^\circ$ のとき，反時計回り
  - $\cdot$ $\theta < 0^\circ$ のとき，時計回り



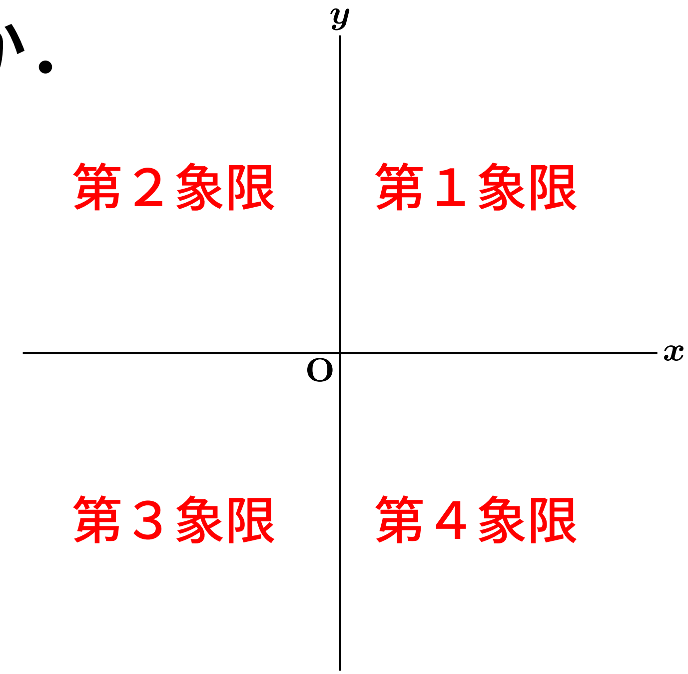
一般角

アプリ「一般角」で一般角を見てみよう

課題 0509-4 次の角は第何象限にあるか.

[1] 400°　　[2] 600°

[3] -550°　　[4] -750°



一般角の三角関数

- 座標を使う (鈍角の場合と同じ)

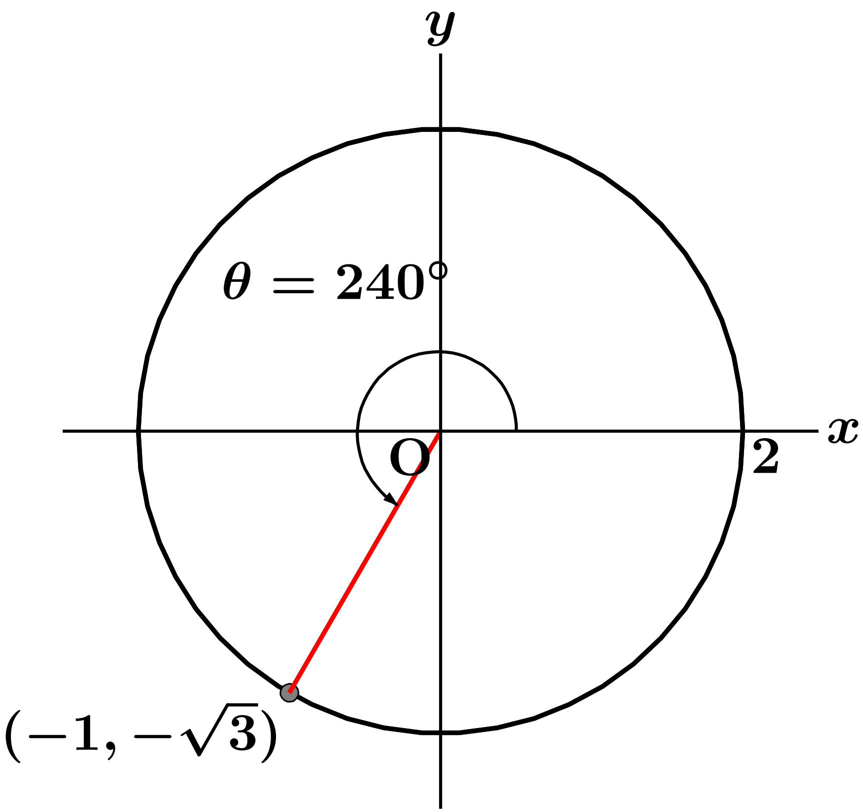
例 $\theta = 240^\circ$

$$r = 2, x = -1,\ \ y = -\sqrt{3}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$



一般角の三角関数

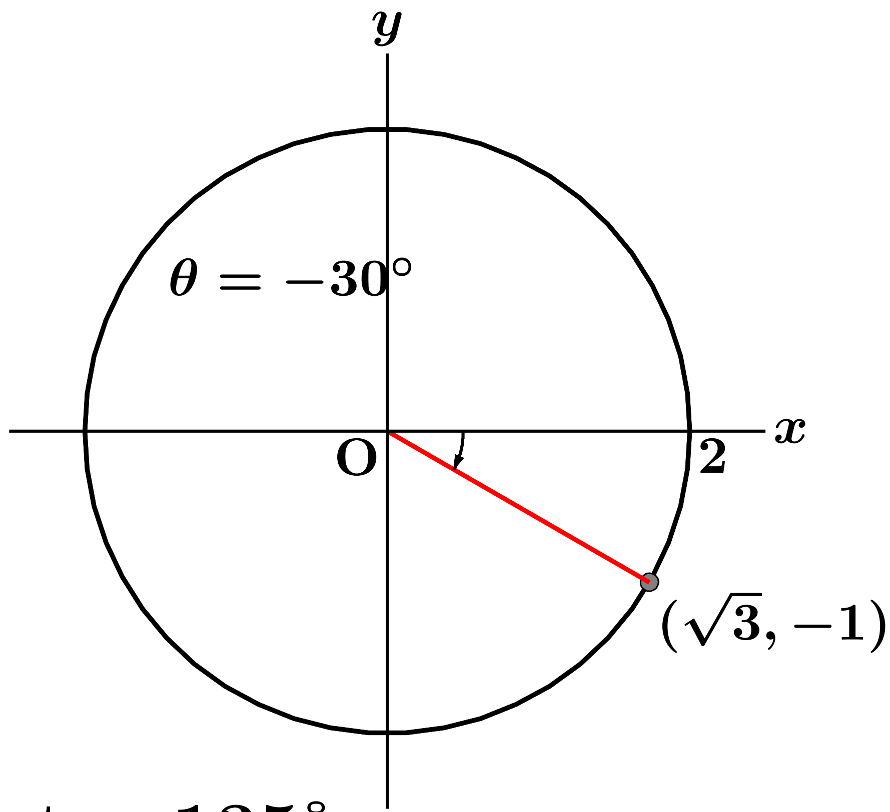
例 $\theta = -30^\circ$

$$r = 2, x = \sqrt{3},\ \ y = -1$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



課題 0509-5 次を求めよ

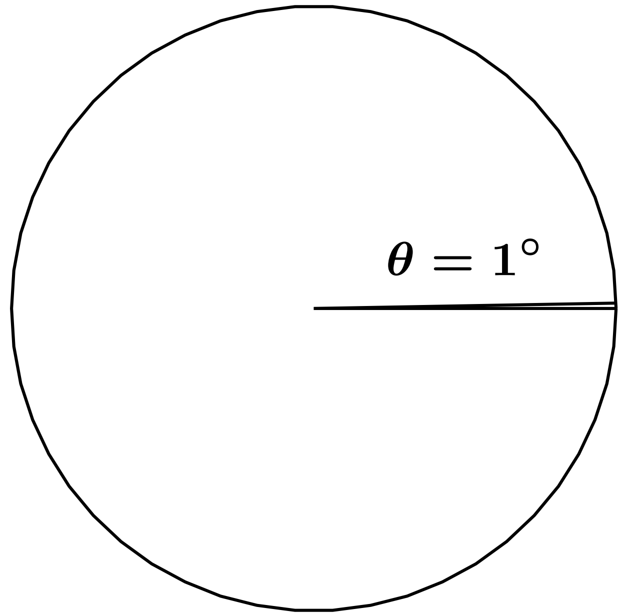
[1] $\cos 135^\circ$ [2] $\sin 135^\circ$ [3] $\tan 135^\circ$

弧度法（radian）

角度の測り方１

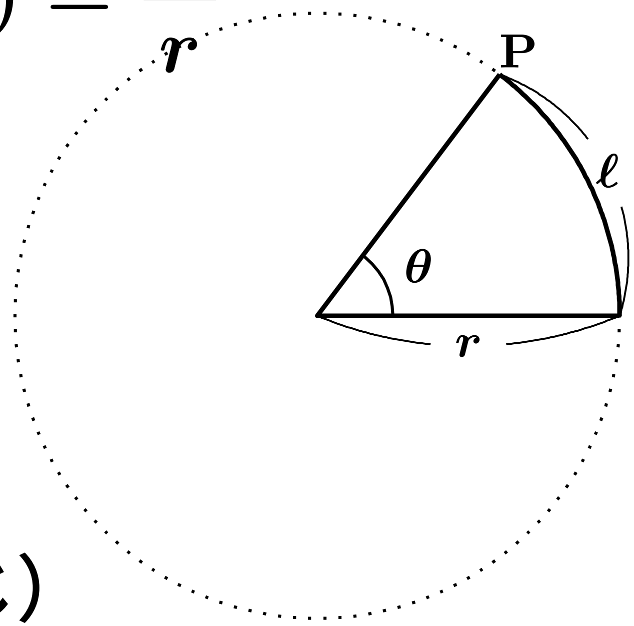
度　°

- １周を 360° とする
- 半周は 180° とする
- 一周の $\dfrac{1}{360}$ を 1° とする
- 数学的な意味は余りない
- 日常的には使いやすい



角度の測り方２（弧度法）

- 弧の長さ ℓ と半径 r の比 θ(ラジアン) $= \dfrac{\ell}{r}$
- 半径 r の円周は $2\pi r$ だから
  1 周の角 $(360^\circ) = \dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$
- 半周の角 $(180^\circ) = \pi$
- 比なので単位はない（sin などと同じ）
  度と区別するときは，ラジアン (rad) を付ける



弧度法による角度の例

- 90° は 180° の $\frac{1}{2}$，したがって　$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
- 60° は 180° の $\frac{1}{3}$，したがって　$60^\circ = \frac{\pi}{3}$

課題 0509-6 次の角をラジアンで表せ．

[1] 30°　　[2] 45°　　[3] 120°

換算式

1 つの角について，$x^\circ = y$(ラジアン) とする

比例関係 $\dfrac{y}{\pi} = \dfrac{x}{180}$

これから $\boxed{y = \dfrac{\pi}{180} x}$ (ラジアンを求める式)

$\boxed{x = \dfrac{180}{\pi} y}$ (度を求める式)

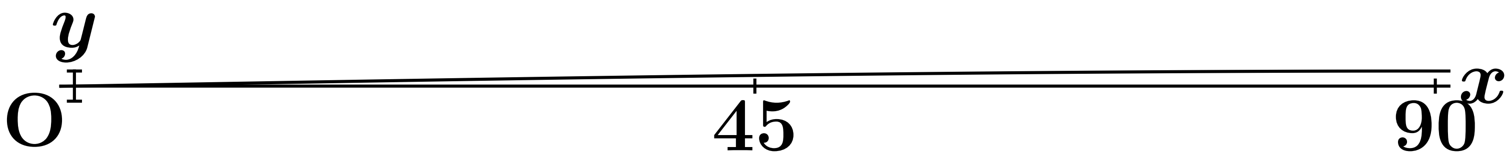
課題 0509-7 次の角を変換せよ (小数でよい)

[1] 3.1416 [2] 70° [3] 10 [4] 10°

正弦関数と正弦曲線

- 一般角を x とおく．
- 任意の x に対して，$y = \sin x$ の値が定まる．
- これを正弦関数という (三角関数の１つ)．
- $y = \sin x$ のグラフを正弦曲線という．
- x はラジアンとする．

  横軸を度とすると



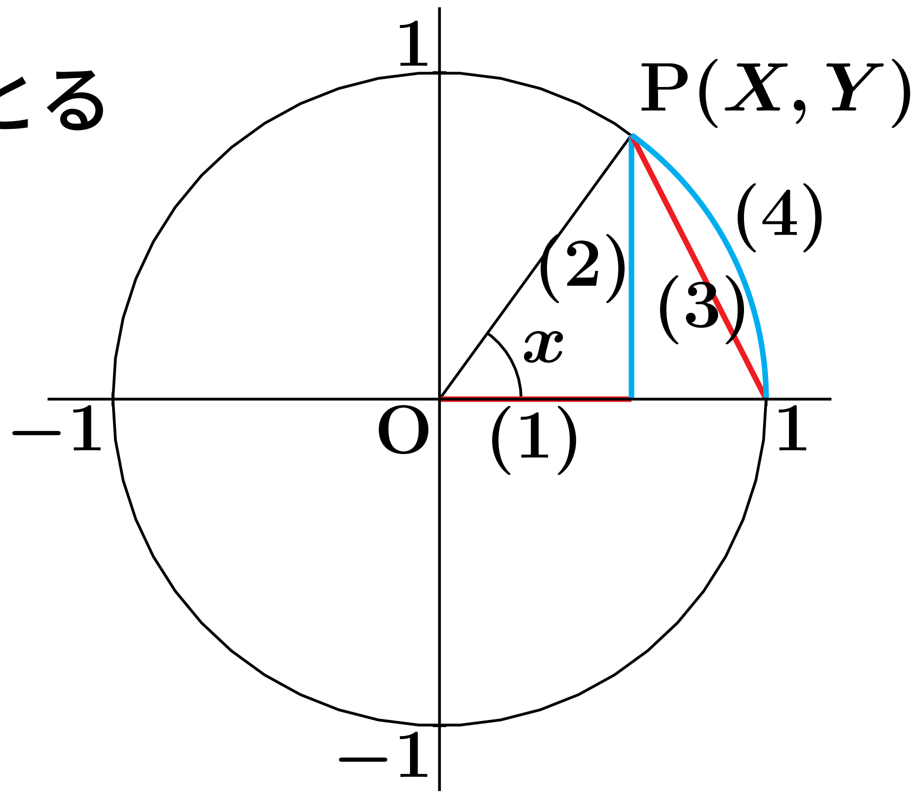
$y = \sin x$ のグラフ

- 半径 1 の円に点 P(X, Y) をとる

$$\sin x = \frac{Y}{r} = Y$$

- また弧の長さを ℓ とすると

$$x = \frac{\ell}{r} = \ell$$



課題 0509-8 x, $\sin x$ は

(1)-(4) のどの長さで表されるか.

[1] x は　　　　[2] $\sin x$ は

正弦曲線を描く

- アプリ「$y = \sin x$ のグラフ」を動かしてみよう
- 使い方

(1) 学生番号を入れる

(2) 赤い点を動かして x を決め,「点を打つ」

長さが x の弧を表示して $(x, \sin x)$ に点を打つ.

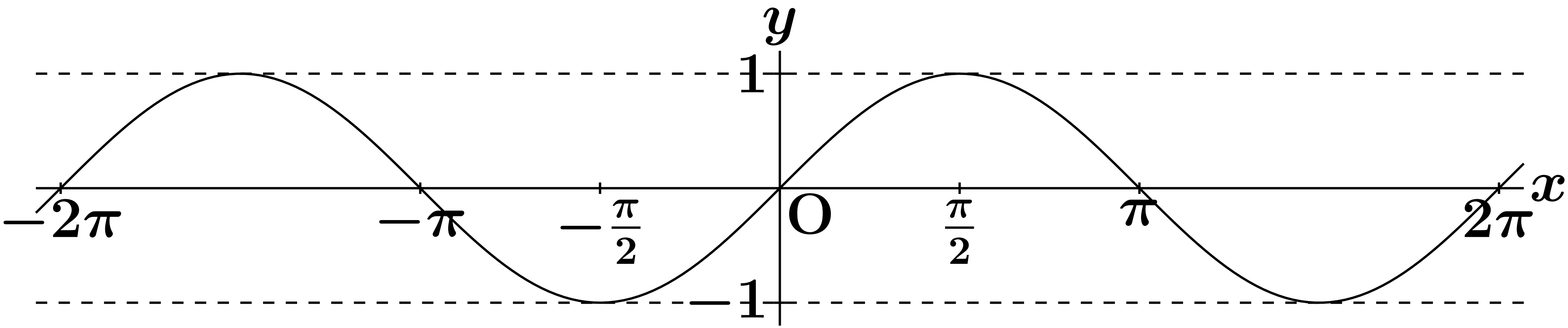
(3) いくつかの点を打って「点を結ぶ」

正弦曲線との違いが表示される

さらに「点を打つ」,「点を結ぶ」を繰り返す.

課題 0509-9「REC」を押して表示されるデータを提出せよ.

正弦曲線の特徴



- 周期は 2π（2π で元に戻る）
- 振幅は 1（値の範囲は -1 から 1）
- 原点対称

正弦曲線 (課題)

課題 0509-10 アプリ「関数のグラフ」で次の関数のグラフをかき，周期と振幅を答えよ．

[1] $y = 2\sin x$　　[2] $y = \dfrac{1}{3}\sin x$

[3] $y = \sin 2x$　　[4] $y = 4\sin\dfrac{x}{2}$