

三角関数の性質

2022.05.16

三角関数のグラフ

$y = \sin x$ のグラフ

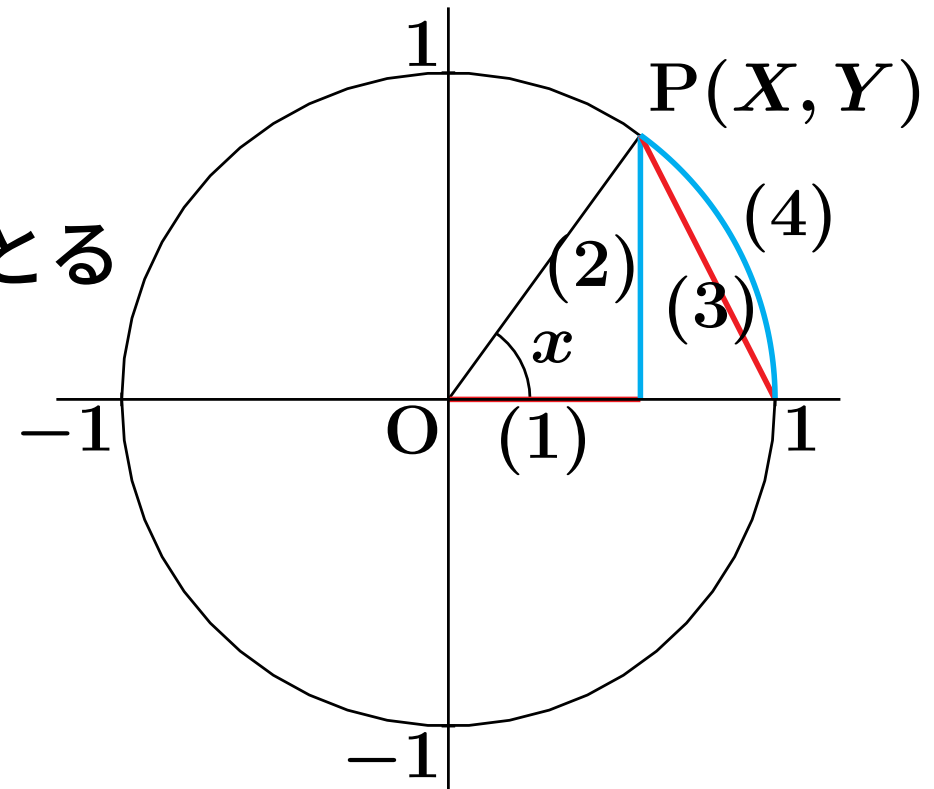
- 角 x はラジアンで測る
- 半径 1 の円に点 $P(X, Y)$ をとる

$$\sin x = \frac{Y}{\textcircled{r}} = Y$$

- また弧の長さを ℓ とすると

$$x = \frac{\ell}{\textcircled{r}} = \ell$$

- x は弧 (4) の長さ, $\sin x$ は (2) の長さ



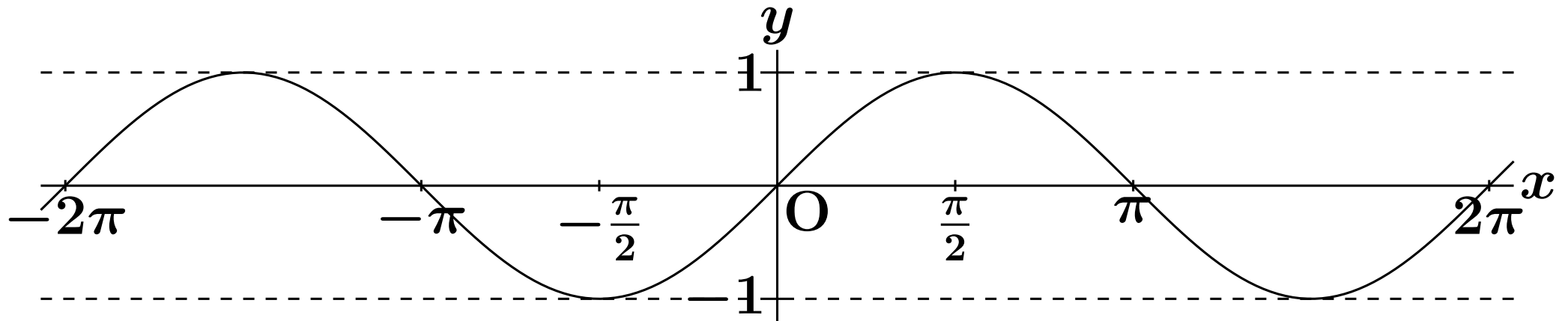
正弦曲線を描く

アプリ「 $y = \sin x$ のグラフ」を動かしてみよう

- (1) 学生番号を入れて OK を押す
- (2) 赤い点を動かして x を決め、「点を打つ」
=>長さが x の弧を表示, $(x, \sin x)$ に点が打たれる
- (3) いくつかの点を打って「点を結ぶ」
正弦曲線との誤差が表示される
さらに「点を打つ」,「点を結ぶ」を繰り返す.

課題 0516-1 違いをできるだけ小さくして, **点を結ぶ** を押してから Rec を押し, 回答にコピペせよ.

正弦曲線の特徴



- **振幅**は 1 (値の範囲は -1 から 1)
- **周期**は 2π (2π で元に戻る)
- 原点对称

正弦曲線

- 関数のグラフで振幅と周期を求めよう

$$[1] \ y = 2 \sin x \qquad [2] \ y = \frac{1}{3} \sin x$$

$$[3] \ y = \sin 2x \qquad [4] \ y = 4 \sin \frac{x}{2}$$

$$[1] \text{ 振幅 } 2, \text{ 周期 } 2\pi \qquad [2] \text{ 振幅 } \frac{1}{3}, \text{ 周期 } 2\pi$$

$$[3] \text{ 振幅 } 1, \text{ 周期 } \pi \qquad [4] \text{ 振幅 } 4, \text{ 周期 } 4\pi$$

課題 0516-2 $y = a \sin bx$ の振幅と周期を求めよ
ただし, a, b は正の定数である.

$y = \cos x$ のグラフ

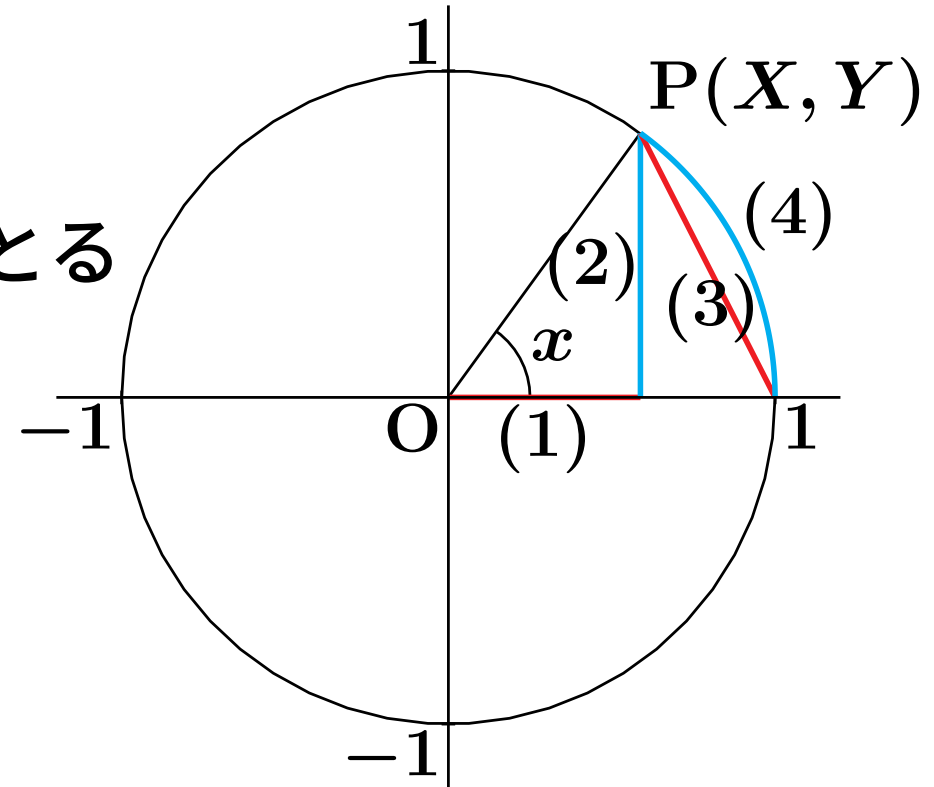
- 角 x はラジアンで測る
- 半径 1 の円に点 $P(X, Y)$ をとる

$$\cos x = \frac{X}{\textcircled{r}} = X$$

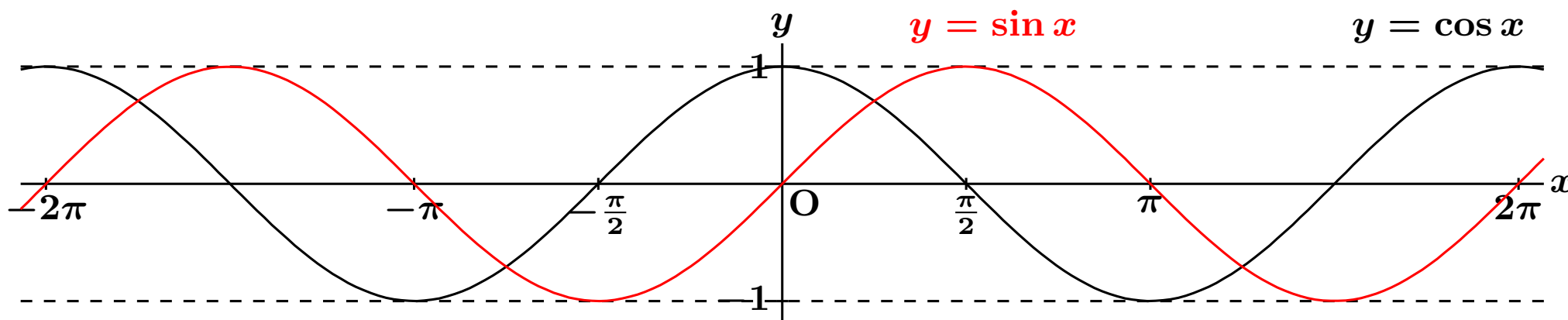
- また弧の長さを ℓ とすると

$$x = \frac{\ell}{\textcircled{r}} = \ell$$

- x は弧 (4) の長さ, $\cos x$ は (1) の長さ



$y = \cos x$ のグラフ (余弦曲線)



- 振幅は 1 (値の範囲は -1 から 1)
- 周期は 2π (2π で元に戻る)
- $\cos x$ は y 軸対称
- $\cos x$ は $\sin x$ を左に $\frac{\pi}{2}$ 平行移動 (位相が $\frac{\pi}{2}$ 進む)

位相のずれ

(1) $y = \sin x$ (2) $y = \cos x$ をもとにする

課題 0516-3 次の関数のグラフは (1) からどのくらい位相がずれているか (左にずれるときプラスとせよ)

[1] $y = \sin(x - 1)$ [2] $y = \sin(x + 2)$

[3] $y = \sin(x - \pi)$ [4] $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

課題 0516-4 以下では, a を定数とする

[1] $y = \sin(x - a)$ の (1) からの位相のずれを求めよ

[2] $y = \cos(x + a)$ の (2) からの位相のずれを求めよ

角度の和の三角関数

- 2つの角を A , B とする (通常はギリシャ文字 α , β)
- $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ が成り立つかを考えよう
- $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ$ になるかを調べる
- $\sin 90^\circ = 1$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

課題 0516-5 $\sqrt{3} = 1.732$ を用いて答えよ.

[1] $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ を計算せよ

[2] $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ は成り立つと言えるか

加法定理

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

具体例 (テキスト P181)

- $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

- $\sin 75^\circ$
 $= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

課題 0516-6 次を求めよ

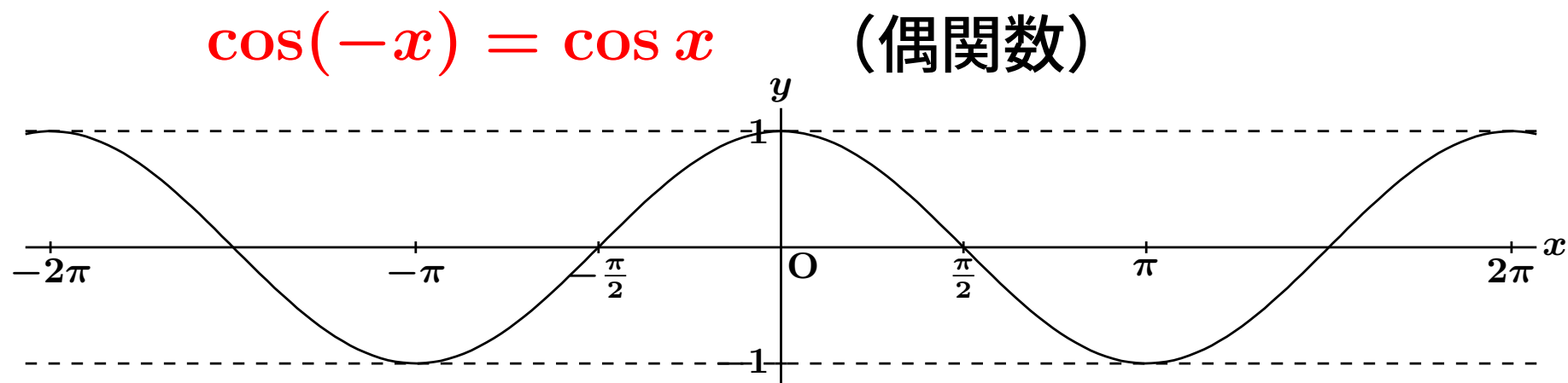
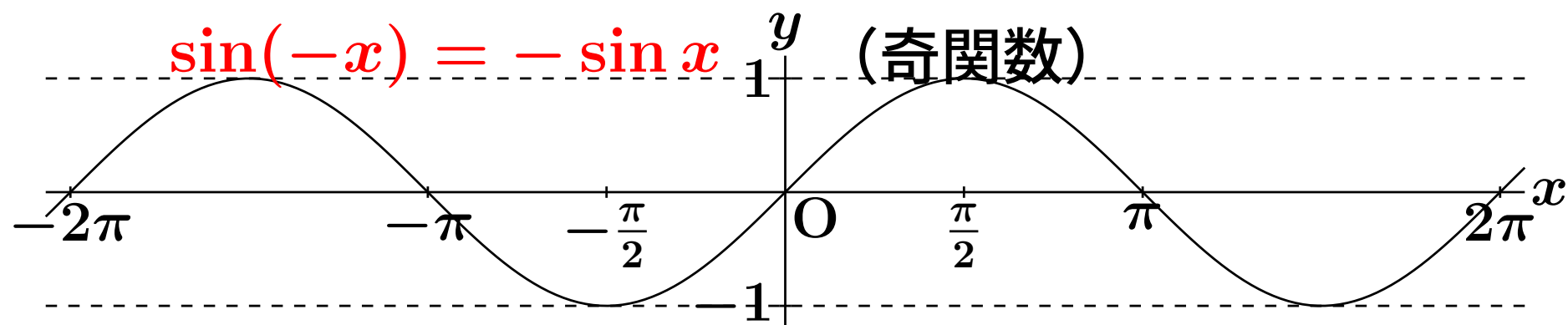
[1] $\sin 15^\circ$

[2] $\cos 75^\circ$

加法定理による等式証明 ($-x$)

- $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin \pi = 0, \cos \pi = -1$
- $\sin(-x)$
 $= \sin(0 - x) = \sin 0 \cos x - \cos 0 \sin x = -\sin x$
- $\cos(-x)$
 $= \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = \cos x$

グラフでの意味



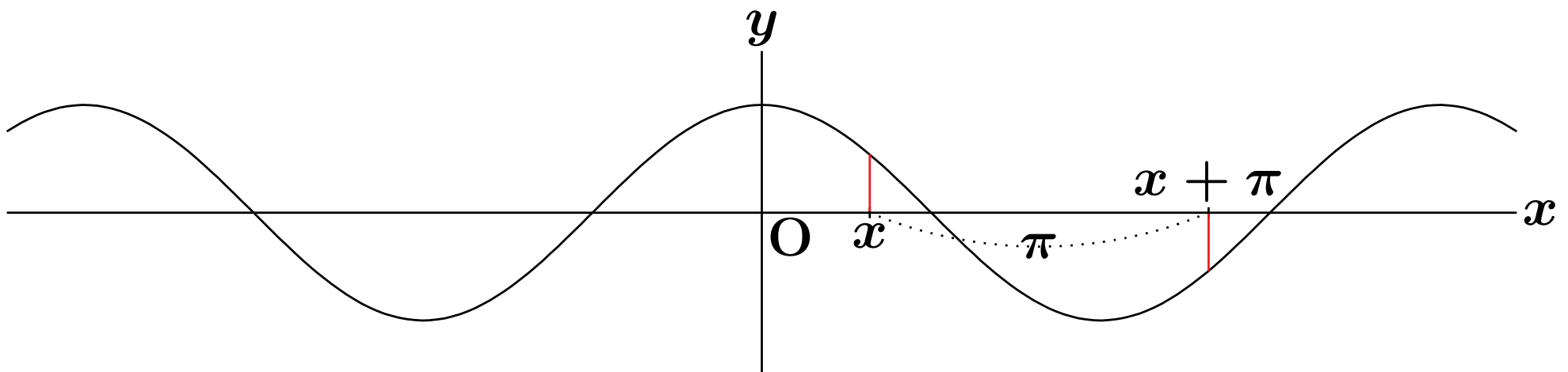
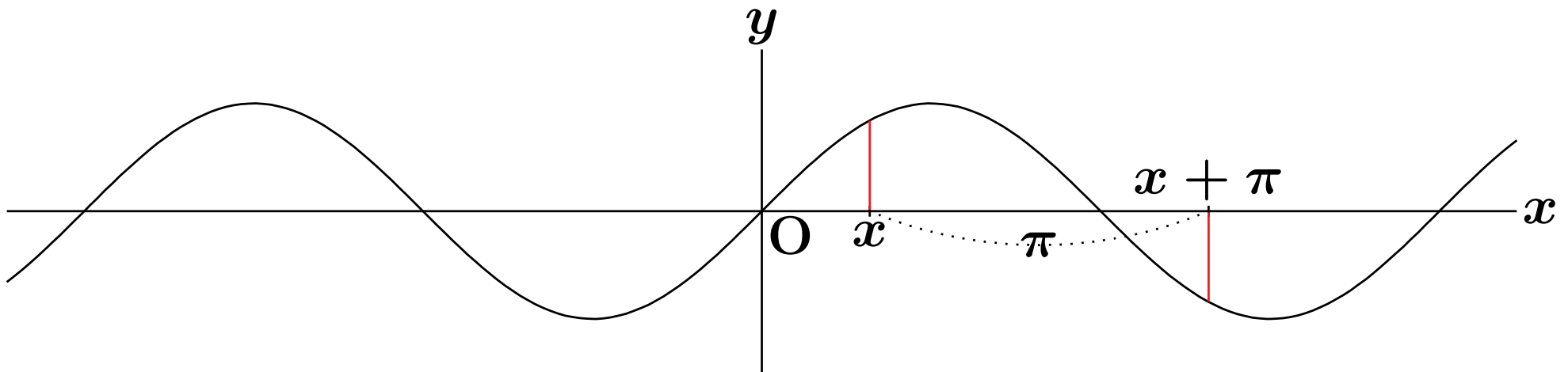
加法定理による等式証明 ($x + \pi$)

- 以下，角をラジアンで表す
- $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin \pi = 0, \cos \pi = -1$
- $\sin(x + \pi) = \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi = -\sin x$
- $\cos(x + \pi) = \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi = -\cos x$

課題 0516-7 次はどうなるか

$$[1] \sin(\pi - x) \qquad [2] \cos(\pi - x)$$

グラフでの意味 $x + \pi$



単振動の合成

- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x)\end{aligned}$$

両辺に $\sqrt{2}$ を掛けて左辺と右辺を入れかえると

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

周期の等しい単振動を足すと1つの単振動になる

単振動の合成 (課題)

課題 0516-8 次の単振動の和 (差) を 1 つの単振動で表せ.

$$[1] \quad \sqrt{3} \sin x + \cos x \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ を展開せよ}$$

$$[2] \quad \sin x + \sqrt{3} \cos x \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ を展開せよ}$$

$$[3] \quad \sin x - \cos x \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ を展開せよ}$$

● 一般に

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + A)$$

$$\text{角 } A : \cos A = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin A = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

三角関数のグラフ (課題)

課題 0516-9 アプリで次の関数のグラフをかけ．また，特徴を1つあげよ．

$$[1] \ y = \cos x + \sin x \quad [2] \ y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$[3] \ y = \sin x + \sin 2x \quad [4] \ y = \cos^2 x = (\cos x)^2$$

KeTMath では $\cos(2,x)$ と書けばよい