指数対数関数の微分

2022.7.11

復習 (課題)

微分係数と導関数

- a における微分係数 $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

- 導関数
  - 微分係数 $f'(a)$ は a の関数
  - a を x と書き，導関数という
  - 導関数を求めることを「微分する」という

課題 0711-1 導関数の定義式をかけ

$$f'(x) =$$

x^p の微分

課題 0711-2 公式をかけ

$(x^p)' =$

課題 0711-3 微分せよ

[1] $y = x$　　[2] $y = x^3$　　[3] $y = x^6$

課題 0711-4 微分せよ

[1] $y = x^{\frac{1}{2}}$　　[2] $y = x^{-1}$　　[3] $y = \dfrac{1}{x^2}$

課題 0711-5 微分せよ

[1] $y = x + \dfrac{1}{x}$　　[2] $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

三角関数の微分

課題 0711-6 $\sin x, \cos x$ の微分公式を書け

[1] $(\sin x)' =$ [2] $(\cos x)' =$

課題 0711-7 $\cos^2 x$ の意味は次のどれか．番号を答えよ．

1 $\cos(x^2)$ 2 $(\cos x)^2$ 3 $(\cos)^2 x$

課題 0711-8 $\tan x$ の微分公式を書け

$(\tan x)' =$

積と商の微分

課題 0711-9 積の微分公式を書け

$$(fg)' =$$

課題 0711-10 商の微分公式を書け

$$\left(\frac{f}{g}\right)' =$$

課題 0711-11 次の関数を微分せよ．

[1] $y = x^2 \sin x$　[2] $y = \sin^2 x$　[3] $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$f(ax+b)$ の微分

- $\boxed{f(ax+b)' = a f'(ax+b)}$

そのまま微分

- $\left((2x+3)^5\right)' = 2\cdot 5(2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$

課題 0711-12 次の関数を微分せよ．

[1] $y = (-3x+4)^5$　　[2] $y = \sin(2x + \dfrac{\pi}{4})$

指数関数の微分

ネイピア数

- $y = a^x$ の $(0, 1)$ での接線の傾きがちょうど 1 になる a

ネイピア数

- $y = a^x$ の $(0, 1)$ での接線の傾きがちょうど 1 になる a

課題 0711-13 ネイピア数で a の値を求めよ

ネイピア数

- $y = a^x$ の $(0, 1)$ での接線の傾きがちょうど 1 になる a

課題 0711-13 ネイピア数で a の値を求めよ

- この a をネイピア数といい，e で表す

ネイピア数

- $y = a^x$ の $(0, 1)$ での接線の傾きがちょうど 1 になる a

課題 0711-13 ネイピア数で a の値を求めよ

- この a をネイピア数といい，e で表す

$$e = 2.7182818284\cdots$$

ネイピア数

- $y = a^x$ の $(0, 1)$ での接線の傾きがちょうど 1 になる a

課題 0711-13 ネイピア数で a の値を求めよ

- この a をネイピア数といい，e で表す

$$e = 2.7182818284\cdots$$

- e は微分で重要な定数

自然対数

- ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という

自然対数

- ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という

$$y = \log_e x \iff e^y = x$$

自然対数

- ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という

$$y = \log_e x \iff e^y = x$$

- $\ln x$ または底を略して $\log x$ と書くこともある．

自然対数

- ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という

$$y = \log_e x \iff e^y = x$$

- $\ln x$ または底を略して $\log x$ と書くこともある.

- 自然対数と常用対数の変換

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}, \quad \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

関数電卓

関数電卓—自然対数と常用対数

関数電卓—自然対数と常用対数

$\log_{10}$

関数電卓–自然対数と常用対数

関数電卓─対数の計算

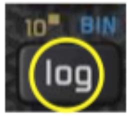
◆『基本計算』

6. 関数の計算 (3)対数の計算

■常用対数

(例) log2

(ログ)
[log] 2 [)] [=]



log(2)
0.3010299957

■自然対数

(例) ln2

(エル・エヌ)
[ln] 2 [)] [=]

ln(2)
0.6931471806

■底指定対数

(例)log₃2 ※底=3の場合

[SHIFT] [(−)] 3 [▶] 2 [=]

log■□

$\log_3(2)$
0.6309297536

[(−)] [log] [ln]

(15)

関数電卓–度とラジアン

◆『基本計算』

6. 関数の計算 (4)三角関数

■度数法での計算

(例) sin 30

① SHIFT MENU 2 (角度単位) 1 (度数法(D)) :角度単位を度数法に設定

1:入力/出力
2:角度単位
3:表示桁数
4:分数表示

1:度数法(D)
2:弧度法(R)
3:グラード(G)

② sin 3 0) =

sin(30)

$\frac{1}{2}$

■弧度法での計算

(例) sin $\frac{\pi}{6}$

① SHIFT MENU 2 (角度単位) 2 (弧度法(D)) :角度単位を弧度法に設定

② sin $\underbrace{\text{SHIFT}\ \times10^x}_{(\pi)}$ ▭ 6 ▶) =

sin$\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{1}{2}$

(16)

指数関数 e^x の微分

- $(e^x)' = \lim_{z \to x} \dfrac{e^z - e^x}{z - x}$

指数関数 e^x の微分

- $(e^x)' = \lim_{z \to x} \dfrac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \dfrac{e^{x+(z-x)} - e^x}{z - x}$

指数関数 e^x の微分

- $$(e^x)' = \lim_{z \to x} \frac{e^z - e^x}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{e^{x+(z-x)} - e^x}{z - x}$$
$$= \lim_{z \to x} \frac{e^x e^{z-x} - e^x}{z - x}$$

指数関数 e^x の微分

- $$(e^x)' = \lim_{z\to x}\frac{e^z - e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^{x+(z-x)} - e^x}{z-x}$$
$$= \lim_{z\to x}\frac{e^x e^{z-x} - e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^x(e^{z-x} - 1)}{z-x}$$

指数関数 e^x の微分

- $$(e^x)' = \lim_{z\to x}\frac{e^z - e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^{x+(z-x)} - e^x}{z-x}$$
$$= \lim_{z\to x}\frac{e^x e^{z-x} - e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^x(e^{z-x} - 1)}{z-x}$$
$$= e^x \lim_{z-x\to 0}\frac{e^{z-x} - 1}{z-x} =$$

指数関数 e^x の微分

- $$(e^x)' = \lim_{z\to x}\frac{e^z - e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^{x+(z-x)} - e^x}{z-x}$$
$$= \lim_{z\to x}\frac{e^x e^{z-x} - e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^x(e^{z-x}-1)}{z-x}$$
$$= e^x \lim_{z-x\to 0}\frac{e^{z-x}-1}{z-x} =$$

($z-x$ を z と考える)

指数関数 e^x の微分

- $$(e^x)' = \lim_{z\to x}\frac{e^z - e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^{x+(z-x)} - e^x}{z-x}$$
$$= \lim_{z\to x}\frac{e^x e^{z-x} - e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^x(e^{z-x} - 1)}{z-x}$$
$$= e^x \lim_{z-x\to 0}\frac{e^{z-x} - 1}{z-x} = e^x \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z}$$

($z - x$ を z と考える)

指数関数 e^x の微分

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1}$$

- $$(e^x)'=\lim_{z\to x}\frac{e^z-e^x}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{e^{x+(z-x)}-e^x}{z-x}$$
$$=\lim_{z\to x}\frac{e^xe^{z-x}-e^x}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{e^x(e^{z-x}-1)}{z-x}$$
$$=e^x\lim_{z-x\to 0}\frac{e^{z-x}-1}{z-x}=e^x\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}$$

($z-x$ を z と考える)

指数関数 e^x の微分

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1}$$

- $$(e^x)' = \lim_{z\to x}\frac{e^z-e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^{x+(z-x)}-e^x}{z-x}$$

$$= \lim_{z\to x}\frac{e^x e^{z-x}-e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^x(e^{z-x}-1)}{z-x}$$

$$= e^x \lim_{z-x\to 0}\frac{e^{z-x}-1}{z-x} = e^x \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = e^x$$

($z-x$ を z と考える)

指数関数 e^x の微分

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1}$$

- $$(e^x)'=\lim_{z\to x}\frac{e^z-e^x}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{e^{x+(z-x)}-e^x}{z-x}$$
$$=\lim_{z\to x}\frac{e^xe^{z-x}-e^x}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{e^x(e^{z-x}-1)}{z-x}$$
$$=e^x\lim_{z-x\to 0}\frac{e^{z-x}-1}{z-x}=e^x\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=e^x$$

($z-x$ を z と考える)

- よって

指数関数 e^x の微分

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$$

- $$(e^x)'=\lim_{z\to x}\frac{e^z-e^x}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{e^{x+(z-x)}-e^x}{z-x}$$
$$=\lim_{z\to x}\frac{e^xe^{z-x}-e^x}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{e^x(e^{z-x}-1)}{z-x}$$
$$=e^x\lim_{z-x\to 0}\frac{e^{z-x}-1}{z-x}=e^x\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=e^x$$
($z-x$ を z と考える)

- よって

$$\boxed{(e^x)'=e^x}$$

指数関数 e^x の微分

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1}$$

- $$(e^x)' = \lim_{z\to x}\frac{e^z-e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^{x+(z-x)}-e^x}{z-x}$$
$$= \lim_{z\to x}\frac{e^x e^{z-x}-e^x}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{e^x(e^{z-x}-1)}{z-x}$$
$$= e^x \lim_{z-x\to 0}\frac{e^{z-x}-1}{z-x} = e^x \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = e^x$$

($z-x$ を z と考える)

- よって

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

微分しても同じ関数になる

e^{ax+b} の微分

- $\boxed{(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}}$

e^{ax+b} の微分

- $\boxed{(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}}$

e^{ax+b} の微分

- $\boxed{(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}}$

そのまま

e^{ax+b} の微分

- $\boxed{(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}}$

そのまま

例 $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $(e^{-x+3})' = -e^{-x+3}$

e^{ax+b} の微分

- $\boxed{(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}}$

そのまま

例 $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $(e^{-x+3})' = -e^{-x+3}$

課題 0711-14 次を微分せよ.

[1] $y = e^{5x}$ [2] $y = e^{-2x}$

[3] $y = e^{3x+1}$ [4] $y = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

自然対数 $y = \log x$ の微分

- $\boxed{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$

自然対数 $y = \log x$ の微分

- $\boxed{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$

証明 $(\log x)' = \lim_{z \to x} \dfrac{\log z - \log x}{z - x}$

自然対数 $y = \log x$ の微分

- $\boxed{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$

証明 $(\log x)' = \lim_{z \to x} \dfrac{\log z - \log x}{z - x}$

$\log z = w,\ \log x = u$ とおくと

自然対数 $y = \log x$ の微分

- $\boxed{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$

証明 $(\log x)' = \lim_{z \to x} \dfrac{\log z - \log x}{z - x}$

$\log z = w,\ \log x = u$ とおくと　$z = e^w,\ x = e^u,\ w \to u$

自然対数 $y = \log x$ の微分

- $\boxed{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$

証明 $$(\log x)' = \lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$$

$\log z = w,\ \log x = u$ とおくと　$z = e^w,\ x = e^u,\ w \to u$

$$= \lim_{w \to u} \frac{w - u}{e^w - e^u}$$

自然対数 $y = \log x$ の微分

- $\boxed{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$

証明 $(\log x)' = \displaystyle\lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$

$\log z = w,\ \log x = u$ とおくと　$z = e^w,\ x = e^u,\ w \to u$

$$= \lim_{w \to u} \frac{w - u}{e^w - e^u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}$$

自然対数 $y = \log x$ の微分

- $\boxed{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$ $\boxed{(\log(ax+b))' = \dfrac{a}{ax+b}}$

証明 $(\log x)' = \displaystyle\lim_{z \to x} \frac{\log z - \log x}{z - x}$

$\log z = w,\ \log x = u$ とおくと $z = e^w,\ x = e^u,\ w \to u$

$$= \lim_{w \to u} \frac{w - u}{e^w - e^u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}$$

自然対数 $y = \log x$ の微分

- $\boxed{(\log x)' = \dfrac{1}{x}}$ $\boxed{(\log(ax+b))' = \dfrac{a}{ax+b}}$

証明 $(\log x)' = \lim\limits_{z \to x} \dfrac{\log z - \log x}{z - x}$

$\log z = w,\ \log x = u$ とおくと $z = e^w,\ x = e^u,\ w \to u$

$$= \lim_{w \to u} \frac{w - u}{e^w - e^u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}$$

課題 0711-15 次の関数を微分せよ．

[1] $y = \log(-x)$ [2] $y = \log 2x$ [3] $y = \log(x+5)$