

微分係数と導関数

2022.6.27

平均変化率

平均変化率の意味

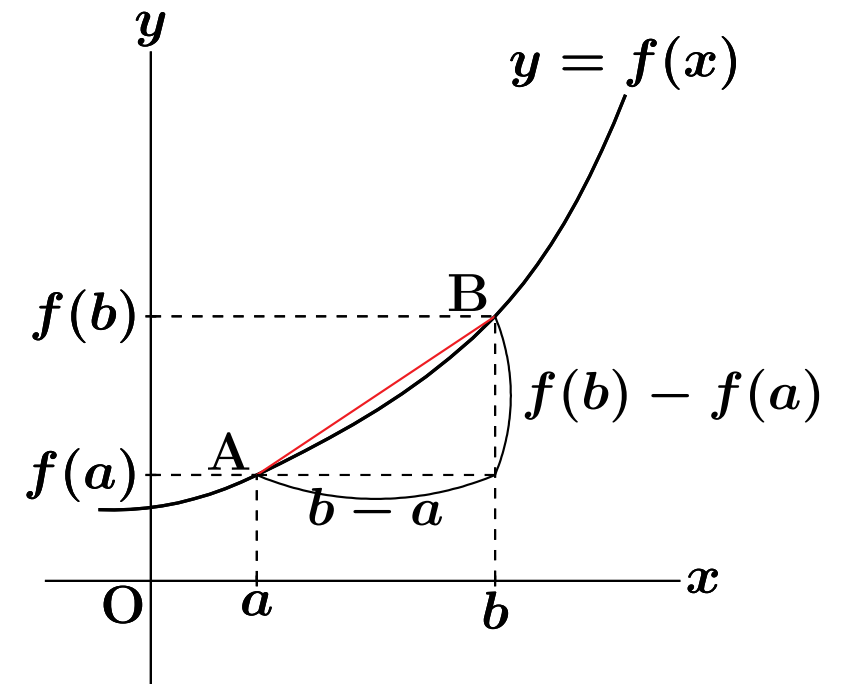
- 関数 $y = f(x)$, 区間 $[a, b]$
- $f(x)$ の $[a, b]$ での変化量は
 $f(b) - f(a)$

区間幅 $b - a$ で割る

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

これを平均変化率という

- 平均変化率は直線 AB の傾き



平均変化率の計算例

- $f(x) = x^2$ の $[1, 3]$ での平均変化率 (r とおく)

$$r = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$$

- $f(x) = x^2$ の $[a, b]$ での平均変化率

$$r = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{b - a} = b + a$$

b を a に近づけたときの変化率

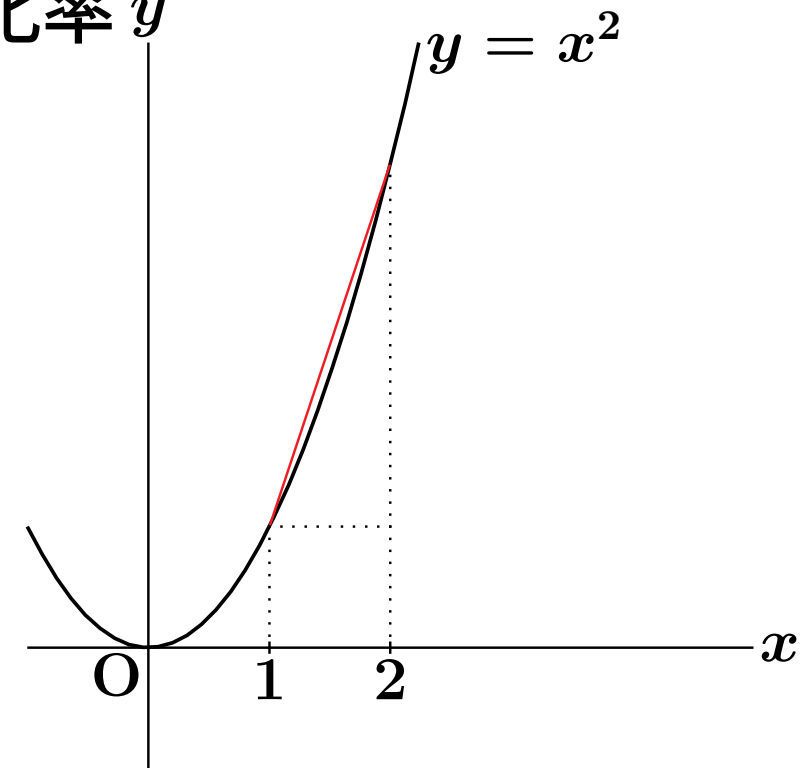
- 関数 $y = x^2$ の $[a, b]$ での平均変化率 y

$$r = \frac{b^2 - a^2}{b - a}$$

$[1, b]$ のとき

$$r = \frac{b^2 - 1}{b - 1}$$

- $b = 2$ のとき $r = \boxed{3}$



課題 0627-1 1点における変化率を動かして答えよ

- $b = 1$ における r はどうなるか

割り算（分数）の意味

- $a \div b \left(\frac{a}{b} \right)$ とは

例) $x = \frac{6}{2} \iff 2x = 6$ となる x のこと

例) $x = \frac{3}{5} \iff 5x = 3$ となる x のこと

- $x = \frac{a}{b} \iff bx = a$ となる x のこと

分母が0になると？

(1) $\frac{1}{0}$ は 求まらない

(2) $\frac{0}{0}$ は 決まらない

$$x = \frac{1}{0} \iff \boxed{0} \quad x = \boxed{1}$$

$$x = \frac{0}{0} \iff \boxed{0} \quad x = \boxed{0}$$

- 分母が0となる分数は考えない

1点における変化率

- 区間 $[a, b]$ の平均変化率 $r = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- 1点 a における変化率 $r = \frac{f(a) - f(a)}{a - a}$

分母が0になってしまう

- 1点における変化率はどうやって求めればいいか

微分係数

関数の極限

- x が a に限りなく近づくとする ($x \rightarrow a$)
 a に等しくはないが、いくらでも近くなること

- $f(x)$ が α に近づくとき、 α を**極限值**という

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \text{ と書く}$$

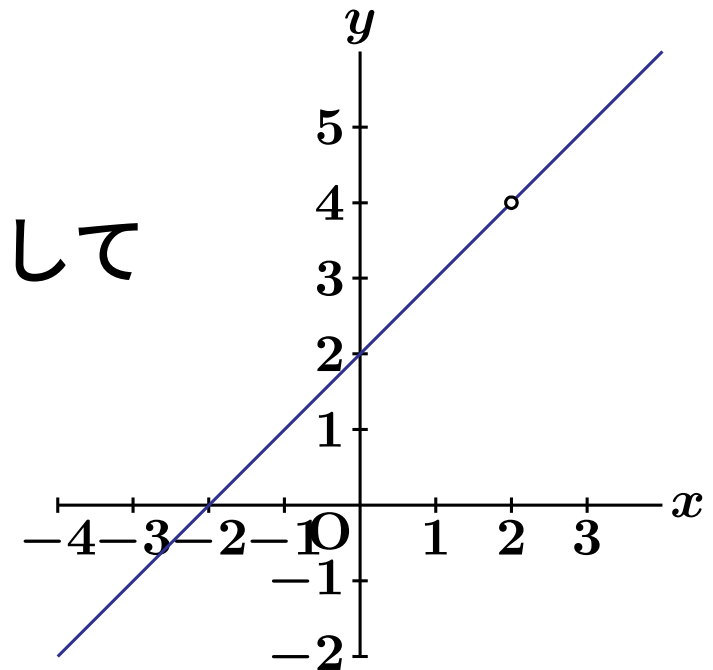
例 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ のグラフ}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad y &= \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= x + 2 \end{aligned}$$

課題 0627-2 $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ のグラフとして
図は正しくない．理由を述べよ．

• 正しくは \Rightarrow



分母が0に近づくときの極限

例 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

- $x \rightarrow 2$ とすると，分母も分子も0に近づく
- そのままでは極限值がわからない
- $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ と因数分解して

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{1} = \boxed{4}$$

a における変化率

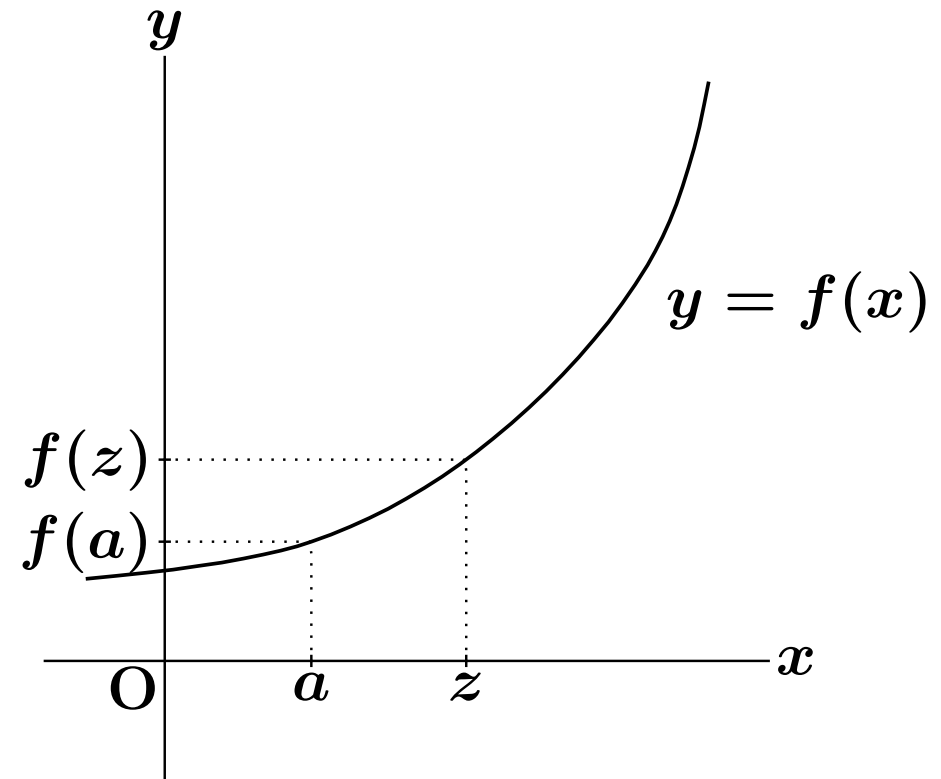
- a の近くに z をとる
- $[a, z]$ での平均変化率は

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

- $z \rightarrow a$ の極限值

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

- これを a における微分係数といい, $f'(a)$ と書く



微分係数の計算例

例 $f(x) = x^2$ の 1 における微分係数 $f'(1)$

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z + 1)(z - 1)}{z - 1} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (z + 1) = 2
 \end{aligned}$$

課題 0627-3 次を求めよ

[1] $f(x) = 2x^2$ のとき, $f'(1)$

[2] $f(x) = 3x$ のとき, $f'(2)$

微分係数の図形的意味

課題 0627-4 微分係数の意味を動かせ

- a における微分係数の値 $f'(a)$ を求めよ
- 微分係数 $f'(a)$ は
A における接線の傾き

微分係数の定義式の別形

- $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad (1)$

- $z - a = h$ とおくと $z = a + h, h \rightarrow 0$

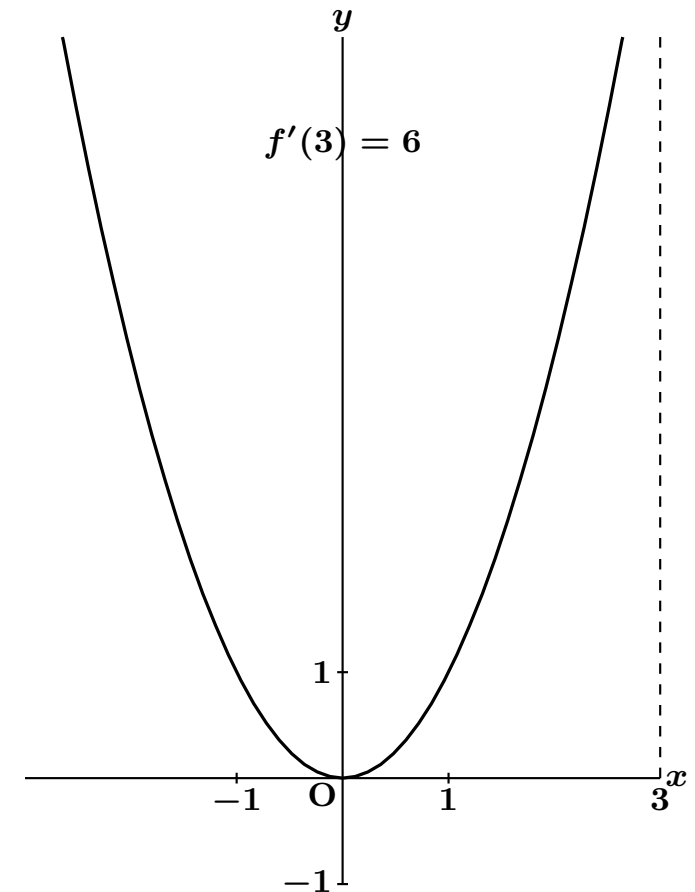
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

- (2) はよく用いられるが, (1) がおすすめ

導関数

導関数

- 微分係数 $f'(a)$
- a を動かすと, $f'(a)$ も変わる
 $\implies f'(a)$ は a の関数



導関数 2

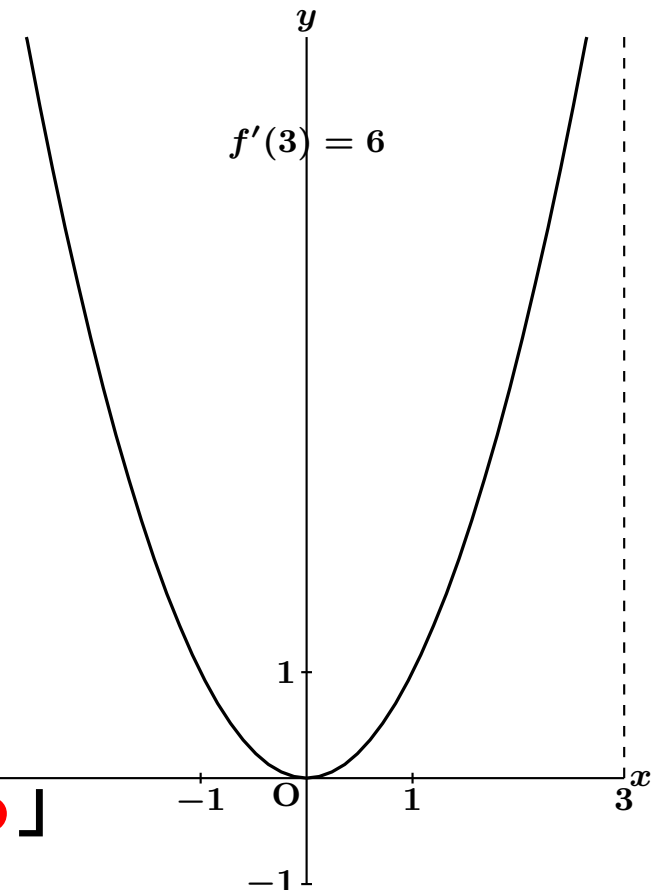
- s-takato.github.io/polytech/n107/doukansuumainoff.html

- 微分係数 $f'(a)$

- a を動かすと, $f'(a)$ も変わる
 $\implies f'(a)$ は a の関数

- a を x と置き換えて
 $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数という

- 導関数を求めることを「微分する」



導関数の定義式

- $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$
- a を x で置き換える

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

導関数の意味 (課題)

課題 0627-5 「導関数の意味」を実行して導関数を求めよ.

[1] $y = x^2 - x$

[2] $y = x^2 - 3$

[3] $y = x^3 - x$

[4] $y = x^3 + 2x^2 + x$

導関数の計算

例) $f(x) = x^2$ を微分する

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^2 - x^2}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{(z + x)(z - x)}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} (z + x) = 2x \end{aligned}$$

$$(x^2)' = 2x$$

導関数の計算 2

例) $f(x) = x^3$ を微分する

- 因数分解 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ を用いる

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= a^2(a - b) + a^2b - b^3 \\ &= (a - b)a^2 + (a^2 - b^2)b \\ &= (a - b)a^2 + (a - b)(a + b)b \\ &= (a - b)(a^2 + (a + b)b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

導関数の計算 2(続)

例) $f(x) = x^3$

- 因数分解 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ を用いる

- $$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^3 - x^3}{z - x}$$

$$= \lim_{z \rightarrow x} \frac{(z - x)(z^2 + zx + x^2)}{z - x}$$

$$= \lim_{z \rightarrow x} (z^2 + zx + x^2) = 3x^2$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

導関数の定義式の別形

- $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- $z - x = \Delta x$ とおく (x の変化量でデルタ x と読む)
- $f(z) - f(x) = \Delta y$ とおく (y の変化量)
- $z \rightarrow x$ より $\Delta x \rightarrow 0$
- $z = x + \Delta x$ より

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{教科書})$$

微分の公式

- 定数関数 $f(x) = c$ (c は定数)

$$(c)' = 0$$

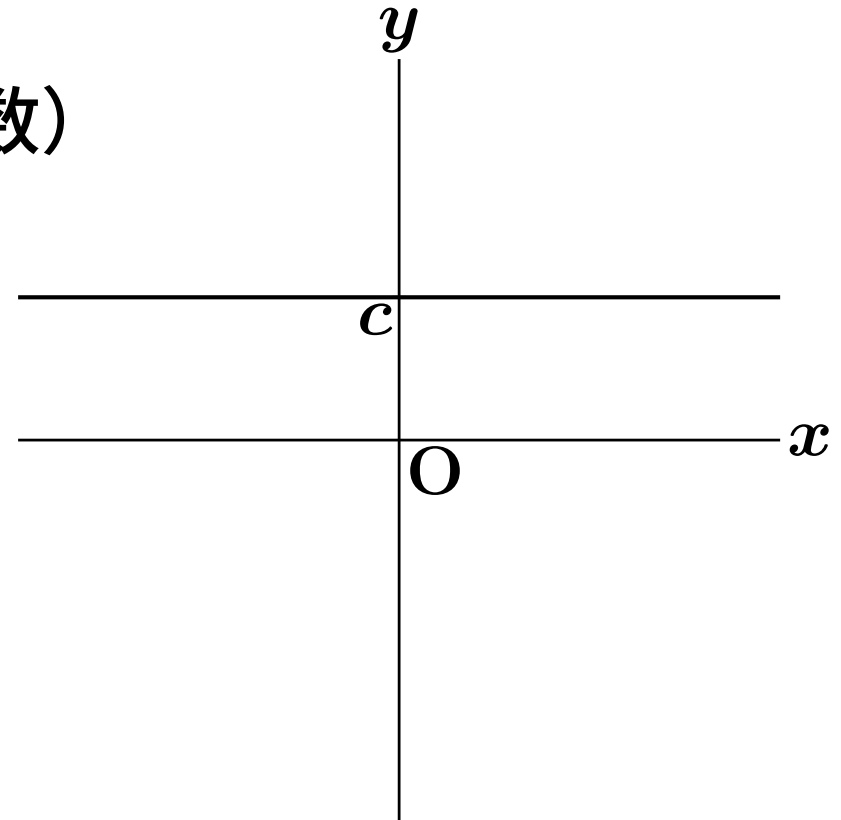
- $f(x) = x$

$$(x)' = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z - x}{z - x} = 1$$

- $(x^2)' = 2x$

- $(x^3)' = 3x^2$

- 一般に $(x^n)' = \boxed{nx^{n-1}}$



微分の性質

$f(x)$, $g(x)$ と定数 c について

- $(f + g)' = f' + g'$, $(f - g)' = f' - g'$
- $(cf)' = cf'$

例) $(x^2 + 3x + 4)' = (x^2)' + (3x)' + (4)' = 2x + 3$

課題 0627-6 次を微分せよ

TextP7

[1] $y = 3x^2 + 3x - 3$ [2] $y = 2x^2 - 5x + 4$

[3] $y = -4x^2 + 3x - 2$ [4] $y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x$

導関数の書き方

- 関数 $y = f(x)$ を変数 x で微分する

$$y', f'(x), f', (f(x))' \quad (\text{ラグランジュ})$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x)) \quad (\text{ライプニッツ})$$

例) $y = f(x) = x^3$

$$y' = f'(x) = f' = (x^3)' = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$