定積分

2022.9.05

復習 (微分と不定積分)

微分と不定積分

- 微分

  関数の変化率（変化の割合）

$$(x^2)' = 2x$$

  導関数の定義式

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

- 不定積分

  微分の逆（微分したら，そうなる関数）

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \text{（} C \text{ は積分定数）}$$

不定積分 (課題 1)

課題 0905-1 次の $\boxed{}$ に公式を入れよ．

[1] $\displaystyle \int 1\,dx = \boxed{} + C$

[2] $\displaystyle \int x\,dx = \boxed{} + C$

[3] $\displaystyle \int x^2\,dx = \boxed{} + C$

[4] $\displaystyle \int x^3\,dx = \boxed{} + C$

不定積分 (課題 2)

課題 0905-2 次の不定積分を求めよ．

[1] $\displaystyle\int (x^2 + 4x)\,dx$ [2] $\displaystyle\int (x^3 - 1)\,dx$

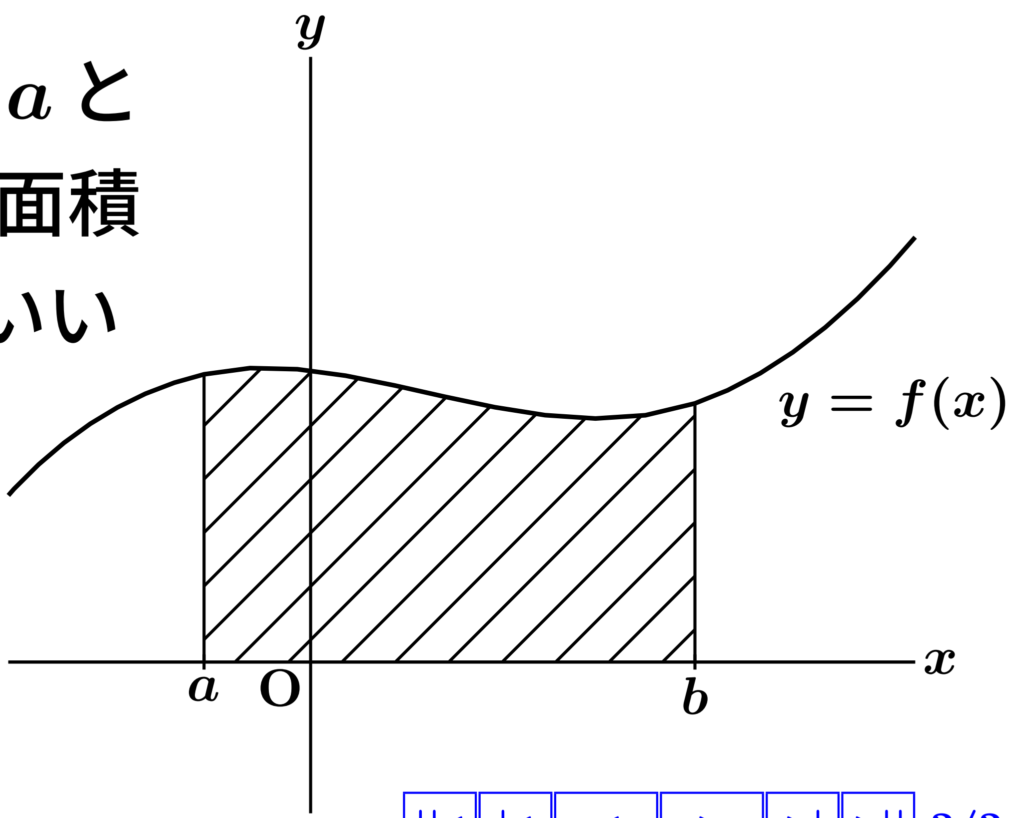
課題 0905-3 次の不定積分を求めよ．

[1] $\displaystyle\int (x+1)^2\,dx$ [2] $\displaystyle\int (x+1)(x+2)\,dx$

定積分

$f(x)$ の区間 $[a,\ b]$ での定積分

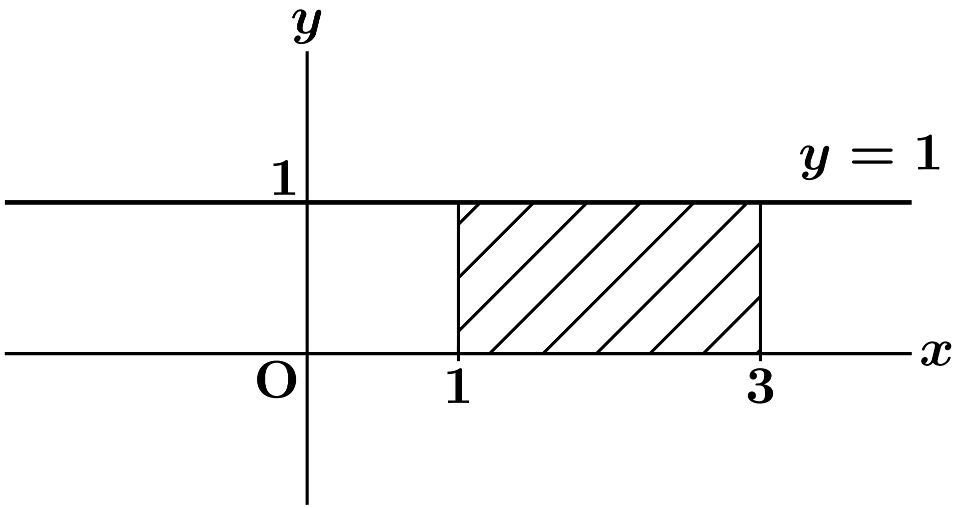
- しばらく，$f(x) \geqq 0$ とする．
- $y = f(x)$ と x 軸と $x = a$ と $x = b$ で囲まれた部分の面積 S を $[a,\ b]$ での**定積分**といい
  $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書く

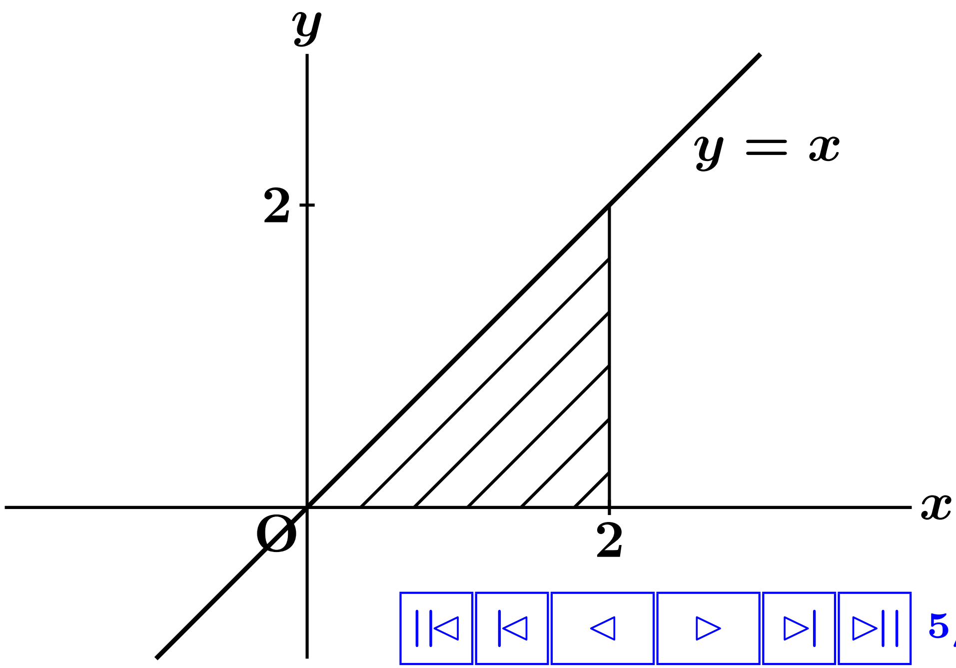


簡単な定積分の例

(1) $\displaystyle\int_1^3 1\,dx = \boxed{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^2 x\,dx = \boxed{2}$





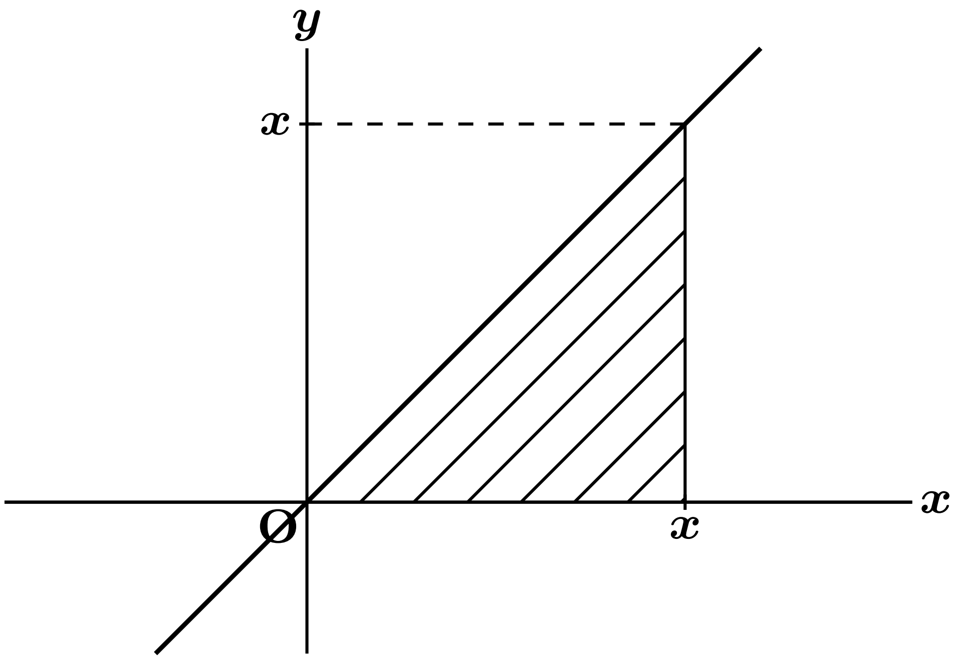
課題 0905-4 次の値を求めよ．

[1] $\displaystyle\int_0^3 1\,dx =$

[2] $\displaystyle\int_0^1 x\,dx =$

定積分と不定積分

- $\displaystyle\int_0^2 x\,dx = 2$
- 右端の値を変化させる
  それを x と書く
  $$\int_0^x x\,dx = \boxed{\frac{1}{2}x^2}$$



注) 積分の中の x と右端の x が重なるが
積分の中の x は気にせず，右端の x の関数と考える．

定積分と不定積分 2

(1) $\displaystyle\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$

(2) 一方，不定積分では $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

(3) 定積分 (1) は不定積分 (2) の 1 つ

$$\boxed{\left(\int_0^x x\,dx\right)' = x}$$

微分積分の基本定理

- $\left(\int_0^{\boxed{x}} x\,dx\right)' = x$ だった

  0 から $\boxed{x}$ までの定積分を微分すると元の関数になる

- これは，一般の関数 $f(x)$ についても成り立つ

$$\boxed{\left(\int_a^x f(x)\,dx\right)' = f(x)} \qquad (a \text{ は定数})$$

- 微分積分において，最も重要な定理である

基本定理の証明

- $S(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ とおく $\Rightarrow S'(x) = f(x)$ を示す

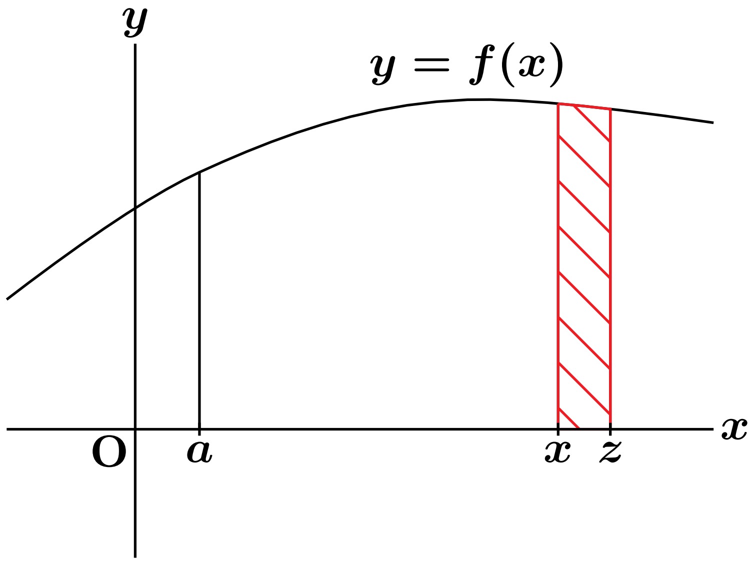
  $S(x)$ は黒斜線の面積

- $S'(x) = \lim_{z \to x} \dfrac{S(z) - S(x)}{z - x}$

- $S(z) - S(x)$ は？

  $S(z)$ は赤斜線の面積

  $S(z) - S(x)$ は赤斜線の面積

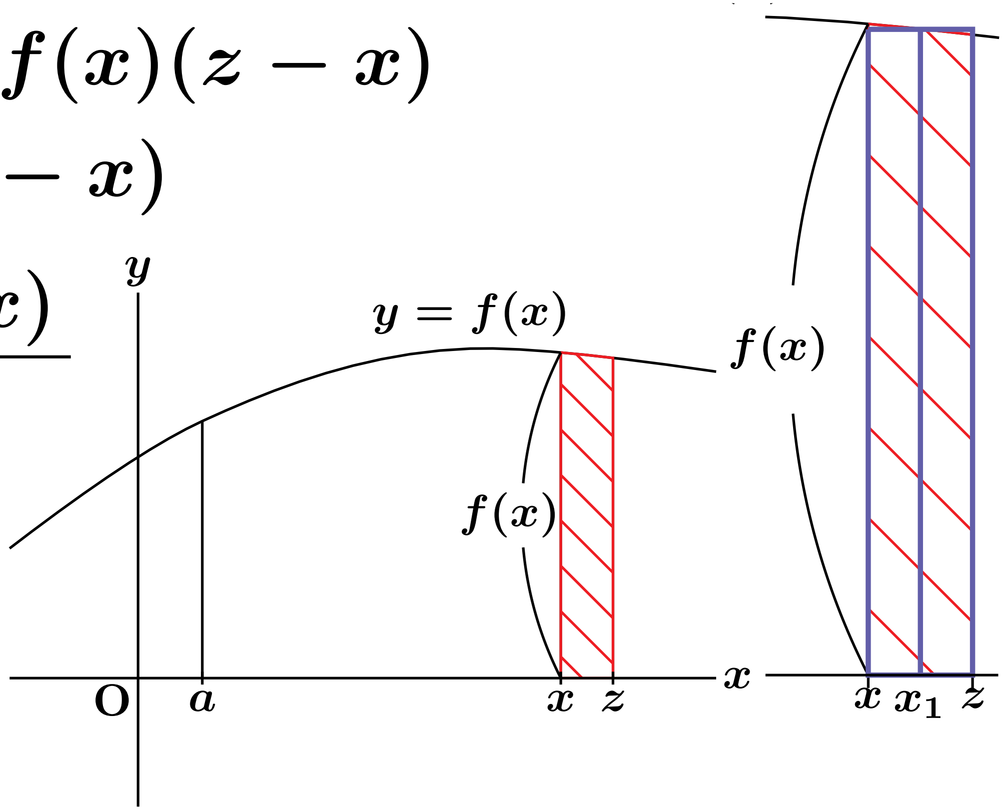


基本定理の証明 (続)

- 図より $S(z) - S(x) \fallingdotseq f(x)(z - x)$

  $S(z) - S(x) = f(x_1)(z - x)$

- $$S'(x) = \lim_{z \to x} \frac{S(z) - S(x)}{z - x}$$
  $$= \lim_{z \to x} \frac{f(x_1)(z - x)}{z - x}$$
  $$= \lim_{z \to x} f(x_1) = f(x)$$



- したがって $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ は $f(x)$ の不定積分

定積分の計算公式

- $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とおく
- 基本定理より　$S(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ も不定積分
- したがって　$S(x) = F(x) + C$（C は積分定数）
- x に a を代入すると　$S(a) = F(a) + C$
- $S(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ より　$F(a) + C = 0$

定積分の計算公式 (続)

- これから $\quad C = -F(a)$
- したがって $\quad S(x) = F(x) + C = F(x) - F(a)$
- x に b を代入すると $\quad S(b) = F(b) - F(a)$
- よって $\quad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

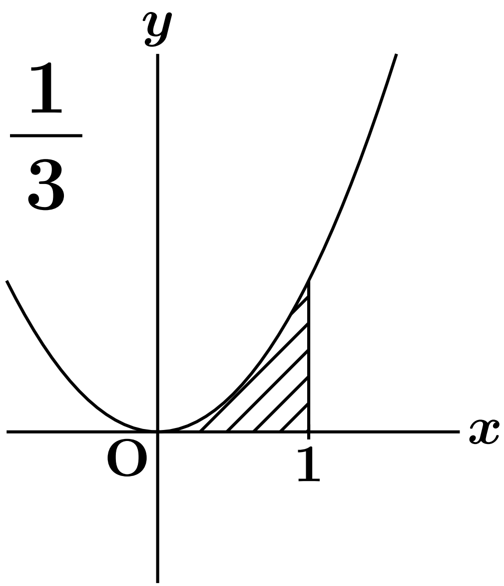
$$F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く}$$

定積分の計算 1

(例) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

不定積分の公式より $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$$



課題 0905-5 次の定積分を計算せよ.

[1] $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$ [2] $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$

定積分の性質

- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$（$c$ は定数）

(注) 最初に不定積分を求めてから計算した方がいい

定積分の計算 2

(例 1) $$\int_1^2 (2x+3)\,dx = \Big[x^2+3x\Big]_1^2 = (2^2+3\cdot 2)-(1^2+3\cdot 1) = 6$$

(例 2) $$\int_0^1 (3x^2+x)\,dx = \Big[x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = (1+\frac{1}{2})-(0+0) = \frac{3}{2}$$

定積分の計算 (課題)

課題 0905-6 次の定積分を計算せよ．

[1] $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+1)\,dx$

[2] $\displaystyle\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)\,dx$

[3] $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)\,dx$

[4] $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^4+x^3+2x^2)\,dx$