

積分法1

2022.8.29

復習 (微分)

微分と導関数

- a における微分係数 $f'(a) =$ 接線の傾き

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

- 導関数

- 微分係数を x の関数 $f'(x)$ としたもの

$$y' = f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

- 導関数を求めることを「微分する」

課題 0829-1 次の関数の導関数はどうなるか.

[1] $y = x^2 - 2x$

[2] $y = \sin x$

x^n の微分

- $(c)' = 0$ (c は定数)
- $(x)' = 1$
- $(x^2)' = 2x$
- $(x^3)' = 3x^2$
- 一般に $(x^n)' = nx^{n-1}$
 - n は負の整数でも分数 (実数) でもよい

微分の性質

- $(f + g)' = f' + g'$

和の微分

- $(cf)' = cf'$ (c は定数)

定数倍の微分

- $(fg)' = f'g + fg'$

積の微分

- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

商の微分

- $(f(ax + b))' = af'(ax + b)$ $ax + b$ 型の微分

課題 (微分の性質)

課題 0829-2 微分せよ.

$$[1] \ y = x^4 + x^3 - x^2$$

$$[2] \ y = 3x^5$$

$$[3] \ y = (x + 1)\sqrt{x}$$

$$\text{ヒント : } (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$[4] \ y = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$$

$$[5] \ y = (2x + 3)^5$$

$$\text{ヒント : } (\boxed{}^5)' = 5\boxed{}^4$$



三角関数の微分

- $y = \sin x, \cos x, \tan x$
角 x の単位はラジアン
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

課題 0829-3 次の関数を微分せよ.

$$[1] y = x + \cos x \quad [2] y = x \sin x \quad [3] y = \sin 4x$$

指数関数 $y = e^x$ の微分

- e はネピアの定数

課題 0829-4 e の値を小数点以下 5 位まで書け.

- $(e^x)' = e^x$

課題 0829-5 次の関数を微分せよ.

[1] $y = e^x + x^2$

[2] $y = e^{2x}$

[3] $y = e^{-x}$

自然対数 $y = \log x (= \ln x)$ の微分

- ネピア数 e を底とする対数

$$y = \log x \iff e^y = x$$

- $(\log x)' = \frac{1}{x}$

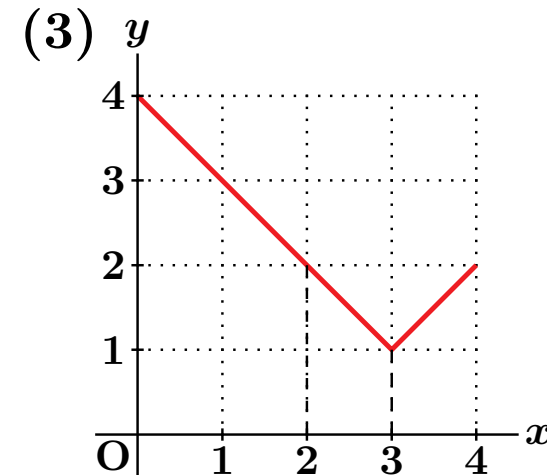
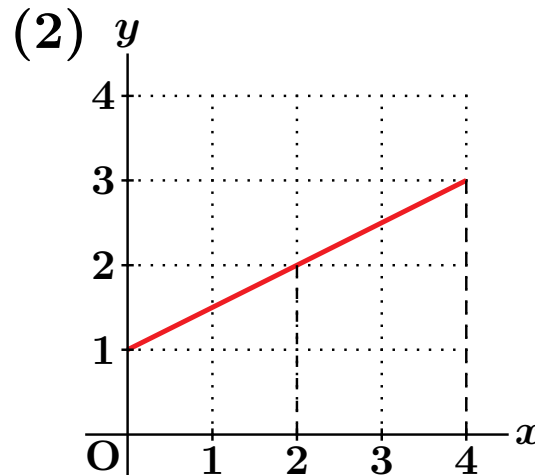
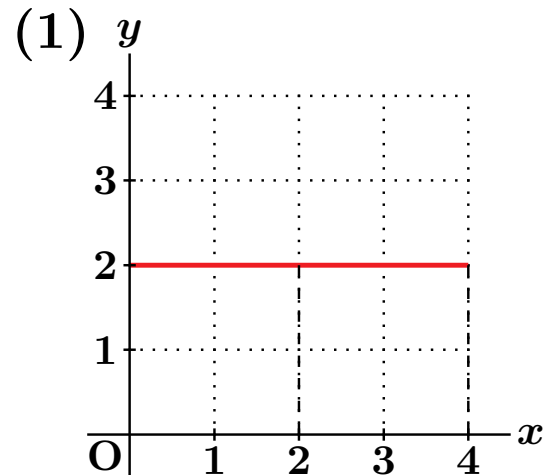
課題 0829-6 次の関数を微分せよ.

$$[1] y = \log x + e^x \quad [2] y = \log 2x \quad [3] y = \log(x + 2)$$

不定積分

微分と積分

- 関数の特徴を調べる
- 微分：各点での値の変化を見る
- 積分：個別の値より全体の値 (合計) を見る



- $x = 2$ での傾きと全体の面積は？

定積分と不定積分

- 定積分：全体の面積
それ自体は微分と無関係
- 不定積分：微分の逆計算
微分と密接な関係
- 微分と定積分は関係なさそうだが
実は密接に関係する (17 世紀に発見)

$f(x)$ の不定積分

- 微分したら $f(x)$ になる関数
- $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ のこと
- $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を $\int f(x) dx$ と書く

例) $(\frac{1}{2}x^2)' = x$ より $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$

- C が定数のとき $(\frac{1}{2}x^2 + C)' = x$

したがって, $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ でもある.

不定積分の書き方

- 不定積分には $+C$ の任意性がある.
- この C を積分定数という.
- $f(x)$ の不定積分を求めるには
 - (1) 微分して $f(x)$ になる関数を求める.
 - (2) それに $+C$ をつけて \int で表せばよい.

不定積分の例と課題

例 $\int 1 \, dx$

微分して1になる関数 $(\boxed{x})' = 1$

したがって $\int 1 \, dx = x + C$

例 $\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

課題 0829-7 $\int x^2 \, dx$ はどうなるか.

不定積分の公式 (べき関数)

- $\int 1 \, dx = x + C$

- $\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

- $\int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

- $\int x^3 \, dx = \boxed{\frac{1}{4}x^4 + C}$

- $\int x^n \, dx = \boxed{\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$

不定積分の性質

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
- $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$ (c は定数)

注) 定数の違いがあっても, $=$ と考える

不定積分の計算例

$$\begin{aligned}\text{例 1 } & \int (3x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int 1 dx \\ &= x^3 + x^2 + x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例 2 } & \int x(x - 2) dx \\ &= \int (x^2 - 2x) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

不定積分の計算 (課題)

課題 0829-8 次の不定積分を求めよ.

TextP19 問 1

$$[1] \int (x^3 - 5x^2 + 1) dx \quad [2] \int (1 - x - x^2) dx$$

$$[3] \int (3x^2) dx \quad [4] \int (-3x^2 + 2x + 3) dx$$

$$[5] \int (4x^3 - 8x + 3) dx \quad [6] \int (2x^3 + 4x - 3) dx$$

不定積分の公式 (三角関数)

- $\int \cos x \, dx = \boxed{\sin x + C} \quad (\boxed{\sin x})' = \cos x$
- $\int \sin x \, dx = \boxed{-\cos x + C} \quad (\boxed{-\cos x})' = \sin x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \boxed{\tan x + C} \quad (\boxed{\tan x})' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$
- $\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$

不定積分の計算 (三角関数)

$$\text{例 1)} \quad \int (\sin 3x + \cos 4x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + C$$

$$\begin{aligned} \text{例 2)} \quad \int \tan^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C \end{aligned}$$

課題 0829-9 次の不定積分を求めよ.

$$[1] \quad \int (3 \sin x + \cos 3x) dx$$

$$[2] \quad \int \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) dx$$

不定積分の公式 (指数対数)

$$\bullet \int e^x dx = \boxed{e^x + C} \quad (\boxed{e^x})' = e^x$$

$$\bullet \int e^{ax} dx = \boxed{\frac{1}{a}e^{ax} + C} \quad (e^{ax})' = \boxed{ae^{ax}}$$

$$\bullet \int \frac{1}{x} dx = \boxed{\log x + C} \quad (\boxed{\log x})' = \frac{1}{x}$$

注) $x < 0$ のとき $\int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + C$
 $(\log(ax))' = \frac{1}{x}$

合わせて $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$

不定積分の計算 (指数対数)

$$\text{例 1)} \quad \int (e^{2x} + e^{-x}) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^{-x} + C$$

$$\text{例 2)} \quad \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \log |x| + C \quad (x < 0 \text{ も含む})$$

$$\begin{aligned} \text{例 3)} \quad \int (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int ((e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2) dx \\ &= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C \end{aligned}$$

課題 0829-10 次の不定積分を求めよ.

$$[1] \quad \int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx \quad [2] \quad \int (e^x + 1)^2 dx$$