微分積分の応用

2022.9.26

微分の応用

関数の増減

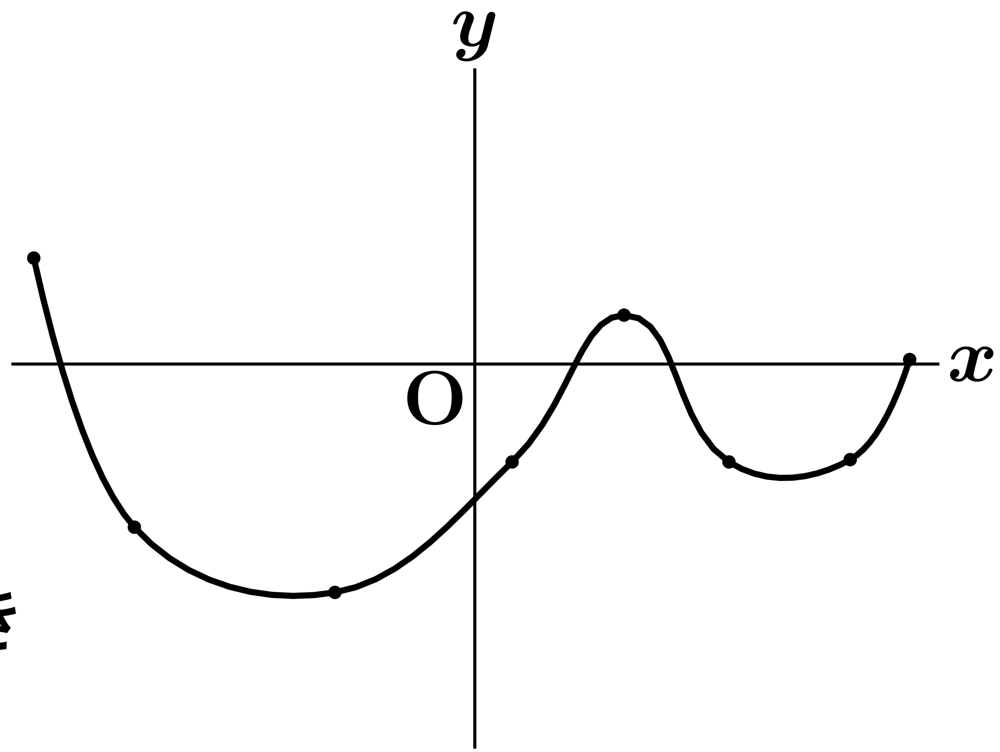
- 関数 $y = f(x)$
- x が右に動くにつれて

  (i) y の値が増えていくとき

  増加の状態

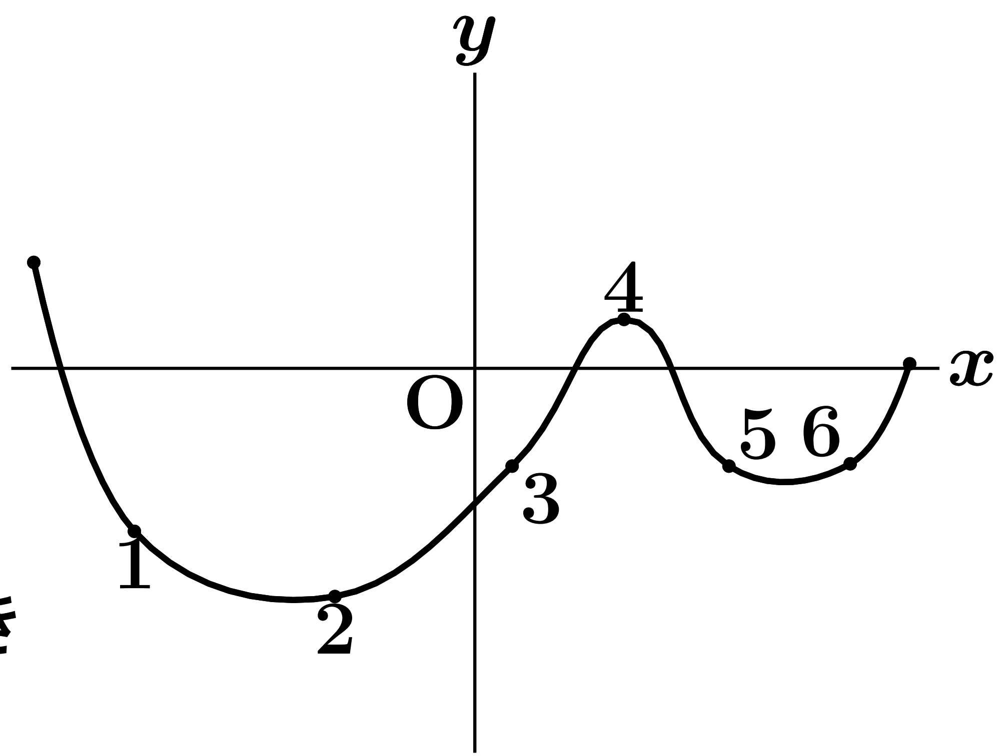
  (ii) y の値が減っていくとき

  減少の状態



関数の増減

- 関数 $y = f(x)$
- x が右に動くにつれて
  (i) y の値が増えていくとき
  増加の状態
  (ii) y の値が減っていくとき
  減少の状態

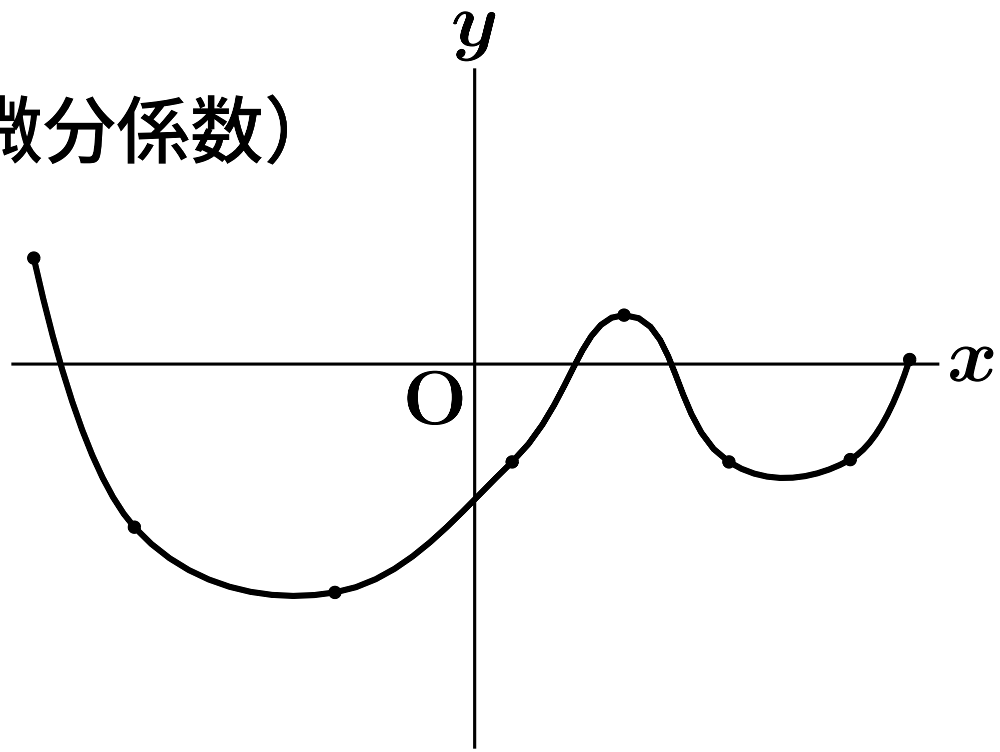


課題 0926-1 図で次の状態である点の番号をすべてあげよ．

[1] 増加の状態　[2] 減少の状態　[3] どちらでもない

関数の増減と微分

- 接線の傾きは導関数の値（微分係数）

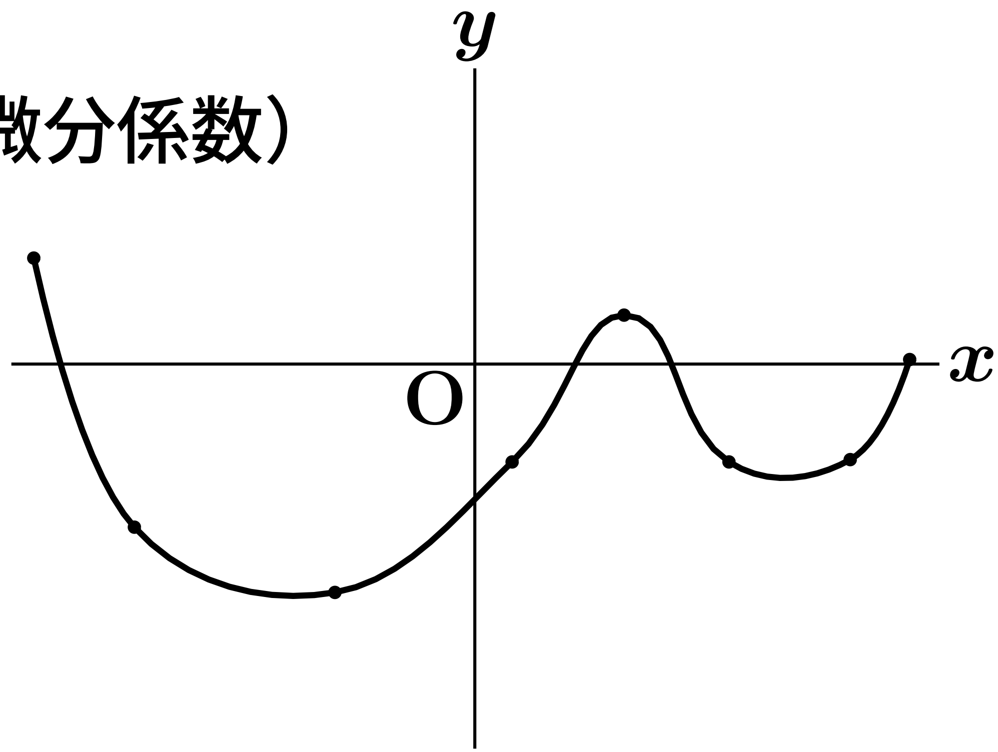


関数の増減と微分

- 接線の傾きは導関数の値（微分係数）

  (i) 増加の状態のとき

  (ii) 減少の状態のとき



関数の増減と微分

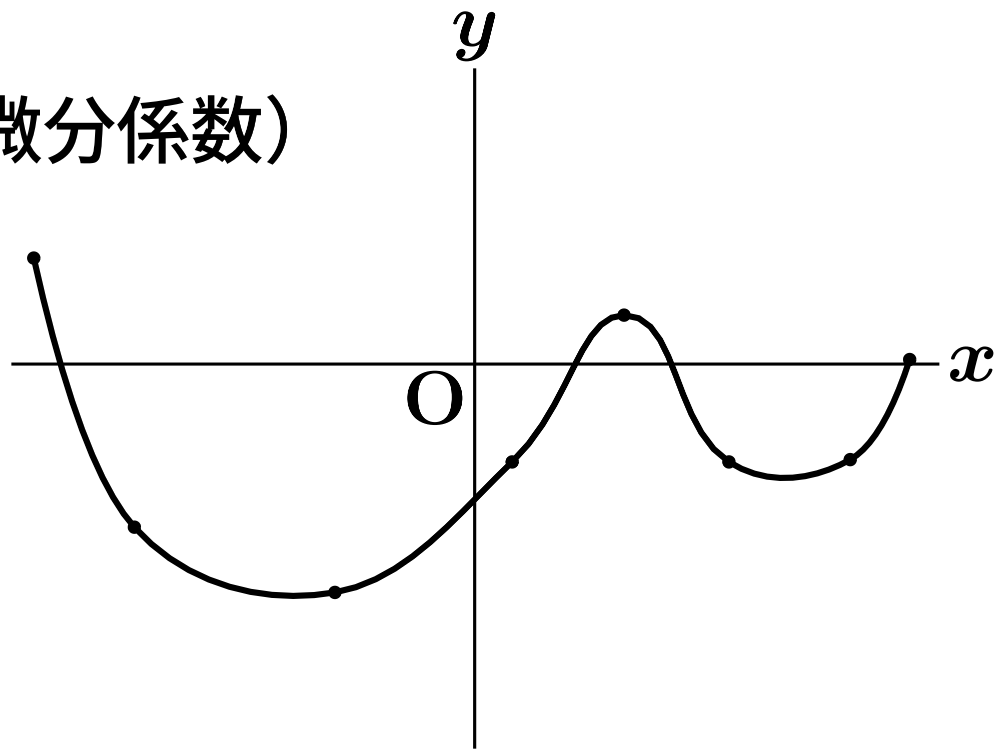
- 接線の傾きは導関数の値（微分係数）

  (i) 増加の状態のとき

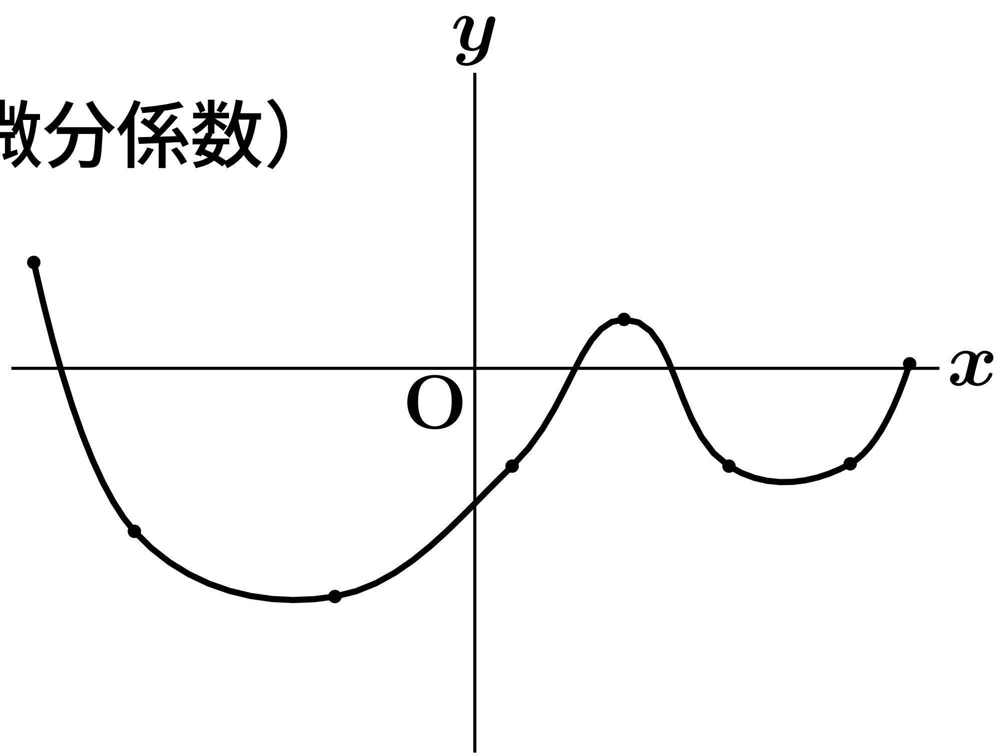
  接線の傾きは正 $y' > 0$

  (ii) 減少の状態のとき

  接線の傾きは負 $y' < 0$



関数の増減と微分



- 接線の傾きは導関数の値（微分係数）
  (i) 増加の状態のとき
  接線の傾きは正 $y' > 0$
  (ii) 減少の状態のとき
  接線の傾きは負 $y' < 0$
- 増加減少が変化する点
  (i) 増加から減少に変わるとき　極大
  (ii) 減少から増加に変わるとき　極小

関数の増減と微分

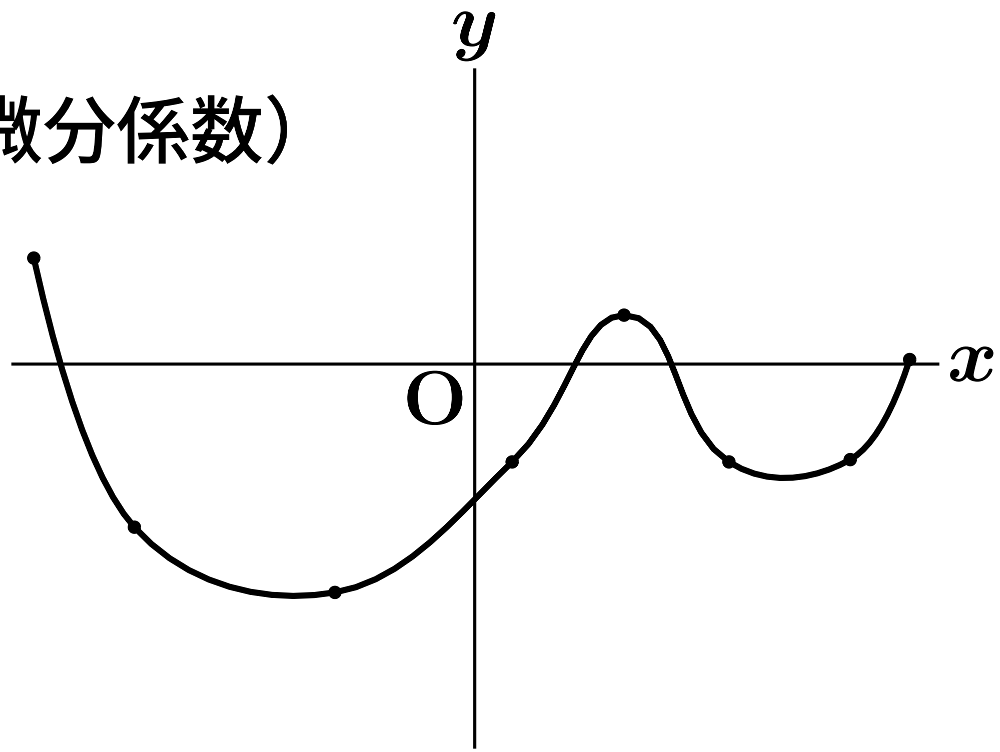
- 接線の傾きは導関数の値（微分係数）

  (i) 増加の状態のとき

  接線の傾きは正 $y' > 0$

  (ii) 減少の状態のとき

  接線の傾きは負 $y' < 0$

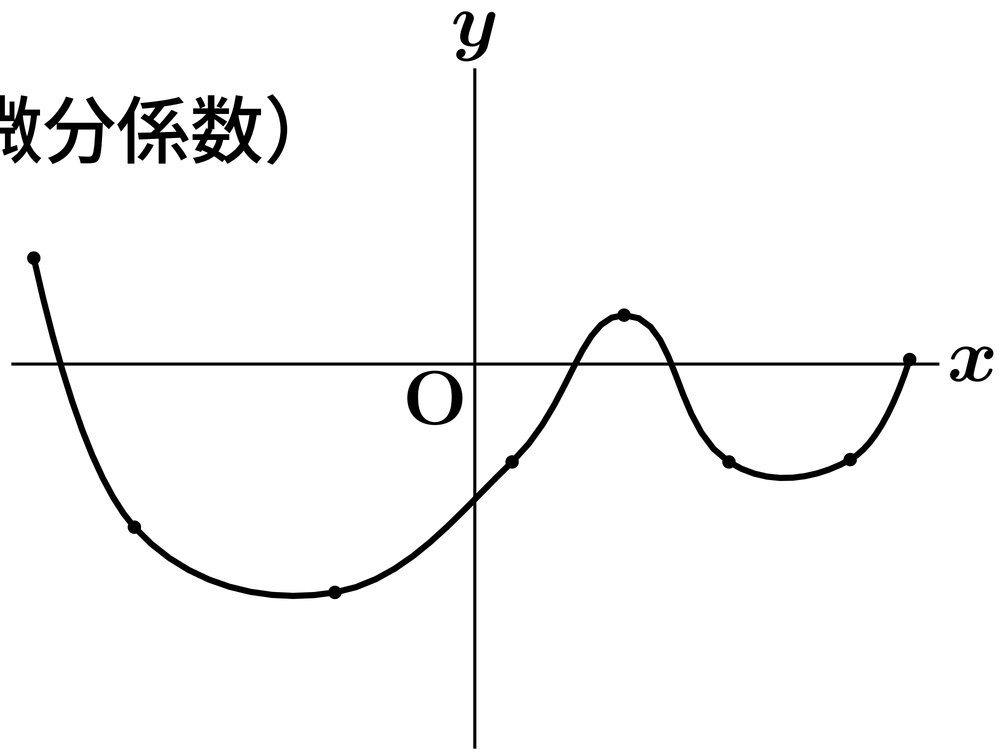


- 増加減少が変化する点

  (i) 増加から減少に変わるとき　極大　その近くでは最大

  (ii) 減少から増加に変わるとき　極小

関数の増減と微分



- 接線の傾きは導関数の値（微分係数）

  (i) 増加の状態のとき

  接線の傾きは正 $y' > 0$

  (ii) 減少の状態のとき

  接線の傾きは負 $y' < 0$

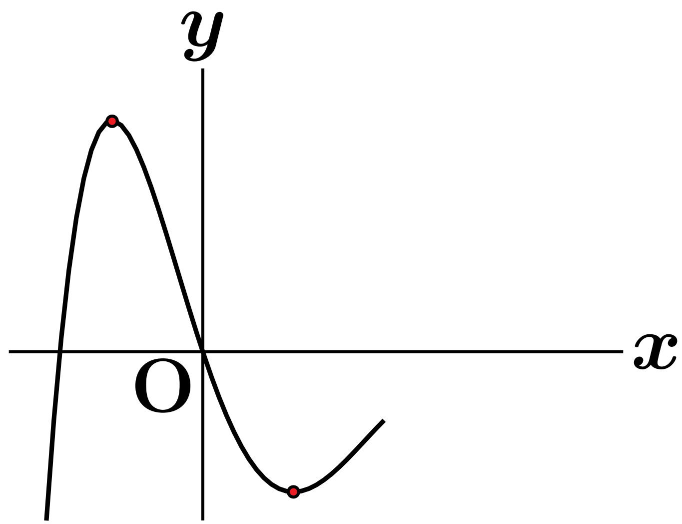
- 増加減少が変化する点

  (i) 増加から減少に変わるとき　極大　その近くでは最大

  (ii) 減少から増加に変わるとき　極小　その近くでは最小

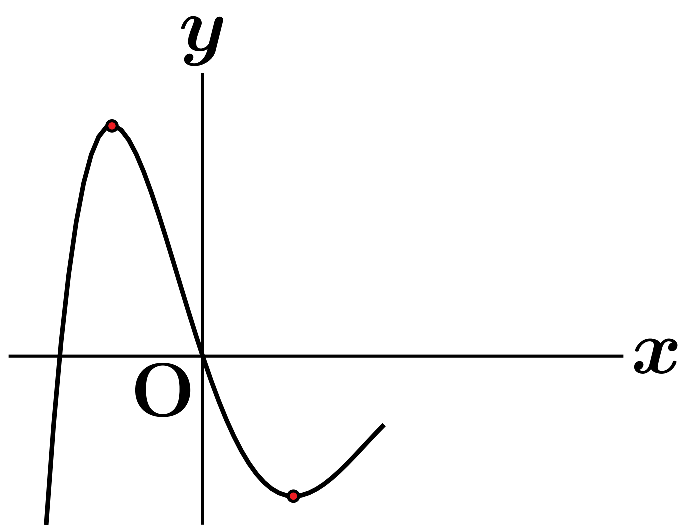
極値点と y' の値

- 極大 (極小) となる点を極値点



極値点と y' の値

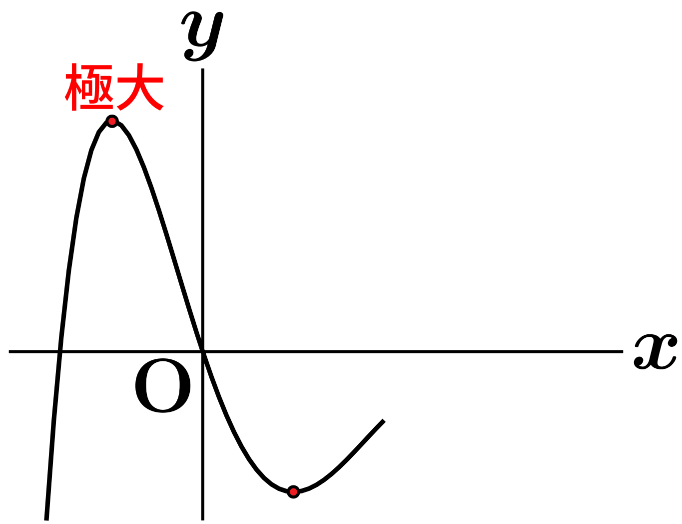
- 極大 (極小) となる点を極値点
- 極値点では　$y' = 0$



極値点と y' の値

- 極大 (極小) となる点を極値点
- 極値点では　$y' = 0$

  極大点　増加から減少に変わる

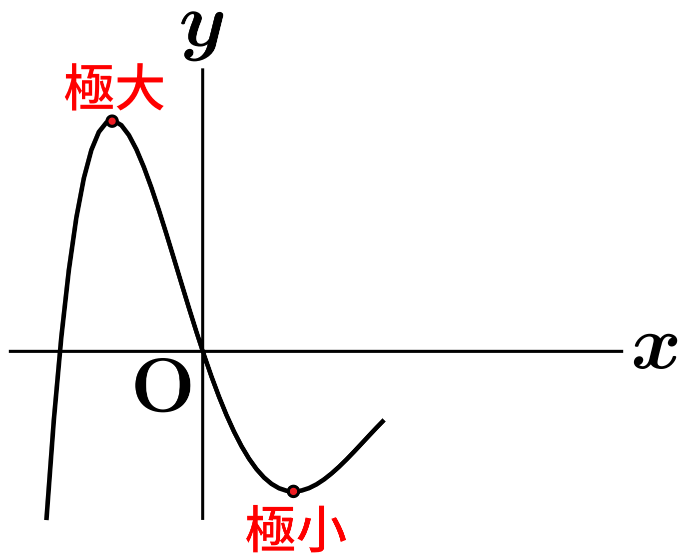


極値点と y' の値

- 極大 (極小) となる点を極値点
- 極値点では　$y' = 0$

　極大点　増加から減少に変わる

　極小点　減少から増加に変わる

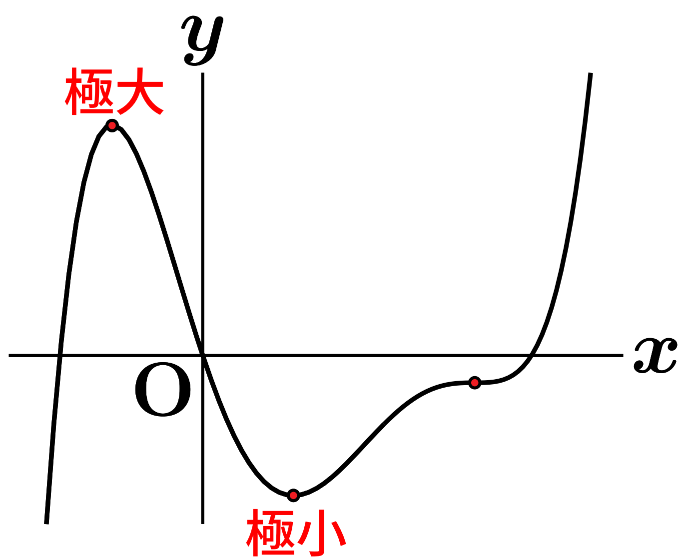


極値点と y' の値

- 極大 (極小) となる点を極値点
- 極値点では　$y' = 0$

  極大点　増加から減少に変わる

  極小点　減少から増加に変わる
- $y' = 0$ でも極値点でない点もある

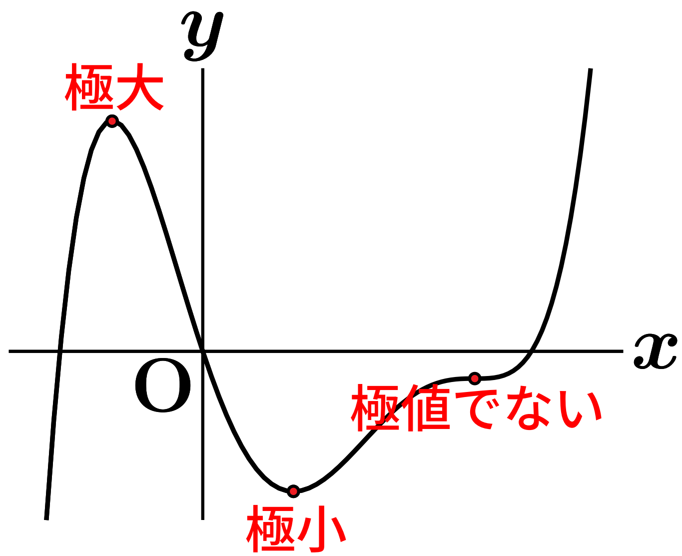


極値点と y' の値

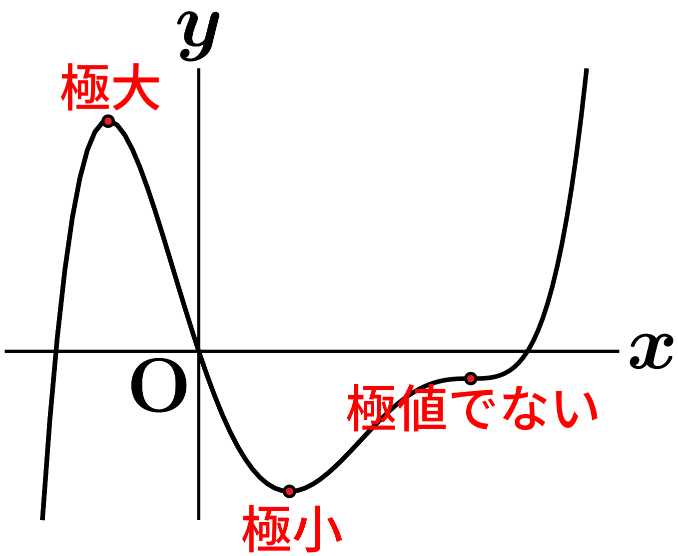
- 極大 (極小) となる点を極値点
- 極値点では　$y' = 0$

  極大点　増加から減少に変わる

  極小点　減少から増加に変わる
- $y' = 0$ でも極値点でない点もある



極値点と y' の値



- 極大 (極小) となる点を極値点
- 極値点では　$y' = 0$

  極大点　増加から減少に変わる

  極小点　減少から増加に変わる
- $y' = 0$ でも極値点でない点もある

例 $y = x^3 - 3x^2$

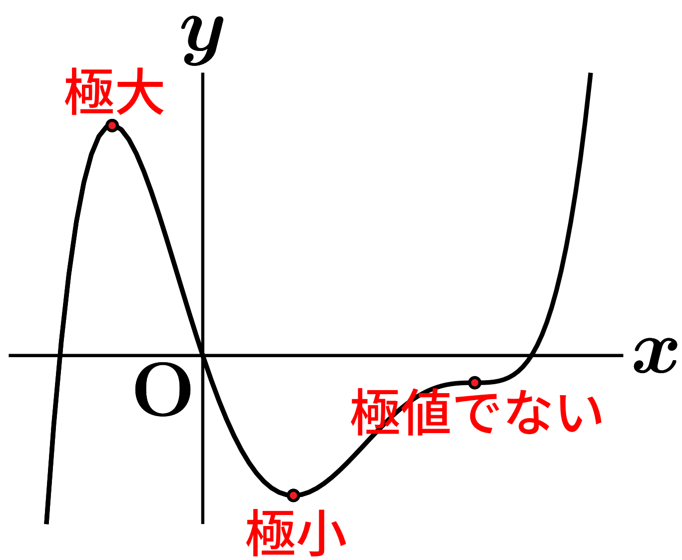
「導関数の意味」を用いてグラフを描けばよい．

極値点と y' の値

- 極大 (極小) となる点を極値点
- 極値点では　$y' = 0$

  極大点　増加から減少に変わる

  極小点　減少から増加に変わる
- $y' = 0$ でも極値点でない点もある

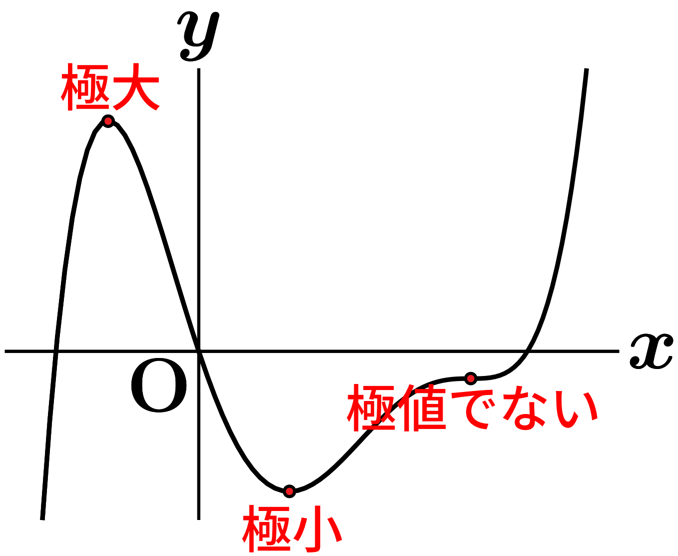


例 $y = x^3 - 3x^2$

「導関数の意味」を用いてグラフを描けばよい．

計算では　$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

極値点と y' の値



- 極大 (極小) となる点を極値点
- 極値点では　$y' = 0$

  極大点　増加から減少に変わる

  極小点　減少から増加に変わる
- $y' = 0$ でも極値点でない点もある

例 $y = x^3 - 3x^2$

「導関数の意味」を用いてグラフを描けばよい.

計算では　$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$y' = 0$ となる点は, $x(x-2) = 0$ より　$x = 0,\ 2$

極値点（課題 1）

アプリ「導関数の意味」を用いよ

課題 0926-2 次の関数について，極値点を求めよ．

[1] $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

[2] $y = x^4 - 2x^2 + 1$

[3] $y = x^2 e^x$

極値点（課題 2）

アプリ「導関数の意味」を用いよ

課題 0926-3 次の関数について，極値点を求めよ．

[1] $y = \log x - x \ (0 < x \leqq 3)$

入力書式　`log(x)-x^(2)x=+,5`

[2] $y = \sin x + \cos x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

入力書式　`sin(x)+cos(x)x=0,2pi`

[3] $y = \sin^2 x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$

入力書式　`sin(2,x)x=0,pi`

[2] [3] 解は π を整数で割った形

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

(1) y' を求める． $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

(1) y' を求める．$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

(2) $y' = 0$ となる点を求める．$y' = 0$ より $x = 0, 2$

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

(1) y' を求める．$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
(2) $y' = 0$ となる点を求める．$y' = 0$ より $x = 0, 2$
(3) 増減表を書き，$y' = 0$ となる点を書き入れる

x					
y'					
y					

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

(1) y' を求める．$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
(2) $y' = 0$ となる点を求める．$y' = 0$ より $x = 0, 2$
(3) 増減表を書き，$y' = 0$ となる点を書き入れる

x		0		2	
y'					
y					

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

(1) y' を求める．$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
(2) $y' = 0$ となる点を求める．$y' = 0$ より $x = 0, 2$
(3) 増減表を書き，$y' = 0$ となる点を書き入れる

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'					
y					

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

(1) y' を求める．$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
(2) $y' = 0$ となる点を求める．$y' = 0$ より $x = 0, 2$
(3) 増減表を書き，$y' = 0$ となる点を書き入れる
(4) (3) の x の下に 0 を書く

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		0		0	
y					

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

(1) y' を求める． $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
(2) $y' = 0$ となる点を求める． $y' = 0$ より $x = 0, 2$
(3) 増減表を書き，$y' = 0$ となる点を書き入れる
(4) (3) の x の下に 0 を書く
(5) 各範囲の y' の符号を書く

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		0		0	
y					

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

(1) y' を求める．$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

(2) $y' = 0$ となる点を求める．$y' = 0$ より $x = 0, 2$

(3) 増減表を書き，$y' = 0$ となる点を書き入れる

(4) (3) の x の下に 0 を書く

(5) 各範囲の y' の符号を書く

$x = -1,\ y' > 0,\ \ldots$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

(1) y' を求める．$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
(2) $y' = 0$ となる点を求める．$y' = 0$ より $x = 0, 2$
(3) 増減表を書き，$y' = 0$ となる点を書き入れる
(4) (3) の x の下に 0 を書く
(5) 各範囲の y' の符号を書く

$$x = -1,\ y' > 0,\ \ldots$$

(6) $+$ は増加，$-$ は減少

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表 (課題)

課題 0926-4 関数 $y = x^4 - 4x^3$ について，問いに答えよ．

[1] $y' = 4x^2(x-3)$ となることを示せ

[2] $y' = 0$ となる x を求めよ

[3] 増減の 1 行目に入れる数式記号を左から順に書け

[4] 増減の 2 行目に入れる数式記号を左から順に書け

[5] 増減の 3 行目に入れる矢印記号を左から順に書け

$\cdots$ 点々 {\nearrow}

hspace*2zw $\nearrow$ 右上 {\nearrow}

$\searrow$ 右下 {\searrow}

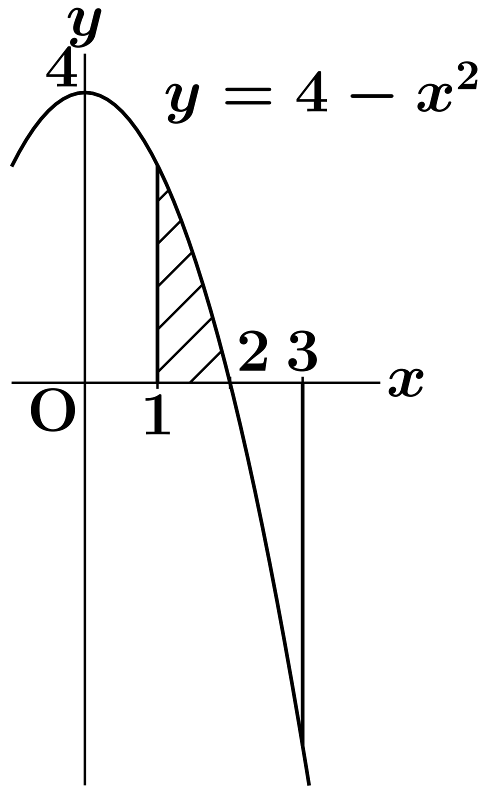
x					
y'					
y					

積分の応用

定積分と面積

面積 S，定積分 $I = \int_a^b f(x)\,dx$

- $a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ が正のとき $\boxed{S = I}$

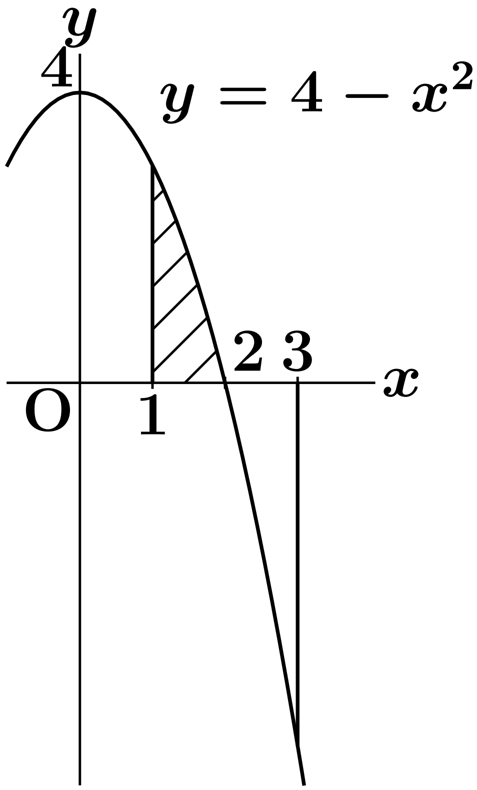


定積分と面積

面積 S，定積分 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

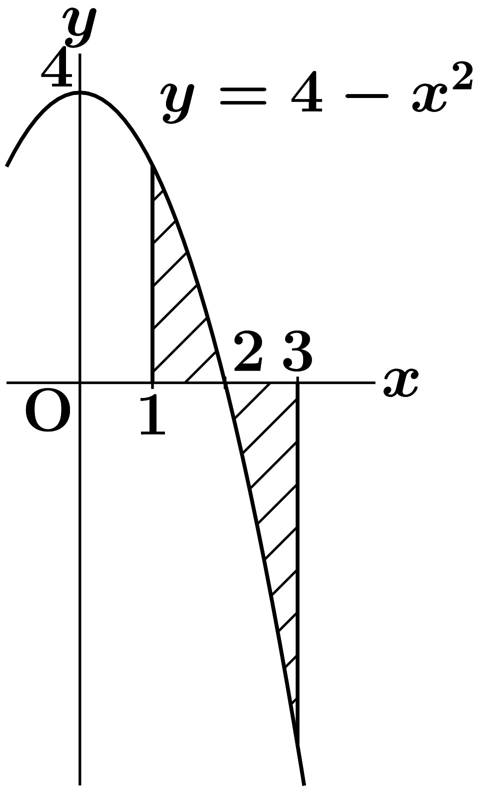
- $a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ が正のとき $\boxed{S = I}$

$$S = \int_1^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{5}{3}$$



定積分と面積

面積 S，定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



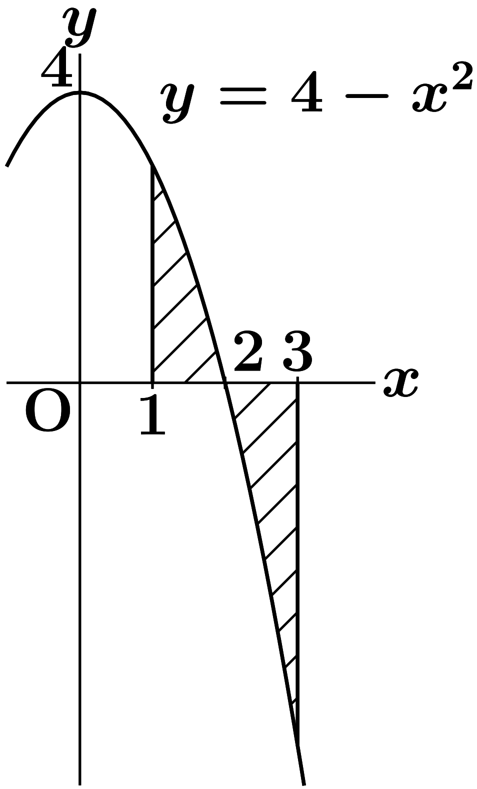
- $a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ が正のとき $\boxed{S=I}$

$$S=\int_1^2 (4-x^2)\,dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{5}{3}$$

- $a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ が負のとき $\boxed{S=-I}$

定積分と面積

面積 S，定積分 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



- $a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ が正のとき $\boxed{S = I}$

  $$S = \int_1^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{5}{3}$$

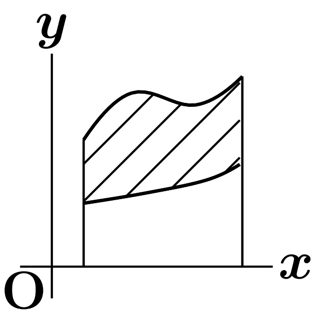
- $a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ が負のとき $\boxed{S = -I}$

  $$I = \int_2^3 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_2^3 = -\frac{7}{3}$$

  $$S = -I = \frac{7}{3}$$

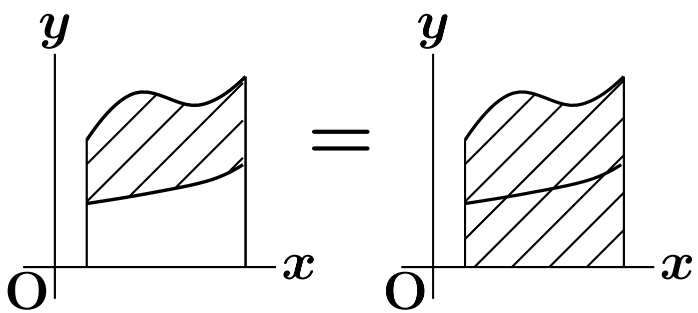
2 曲線で囲まれる図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする



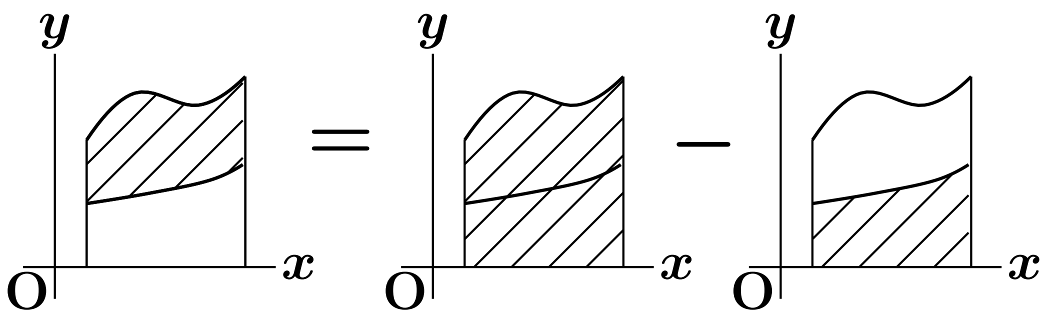
2 曲線で囲まれる図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする



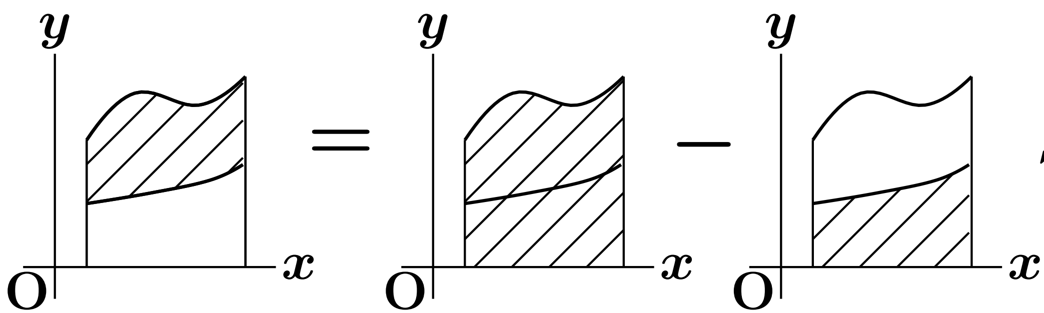
2 曲線で囲まれる図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする



2 曲線で囲まれる図形の面積

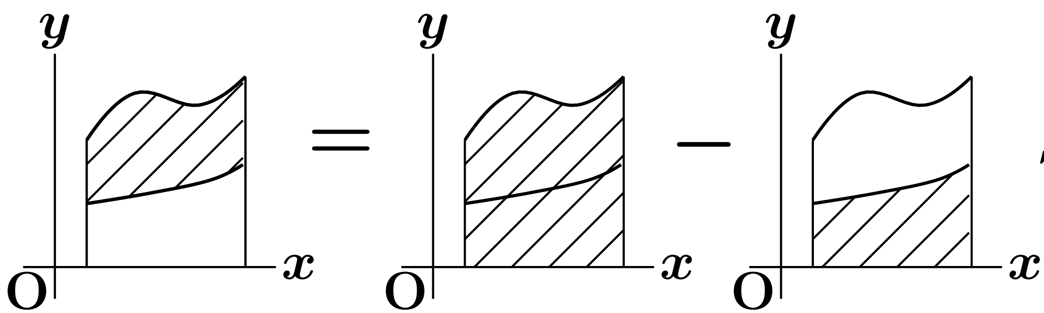
区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする



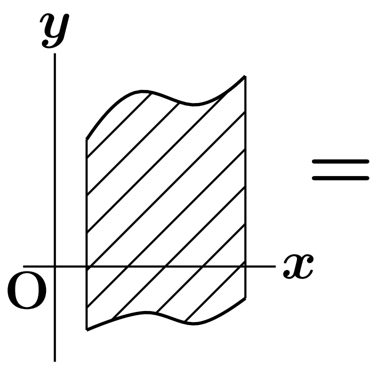
$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

2 曲線で囲まれる図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする

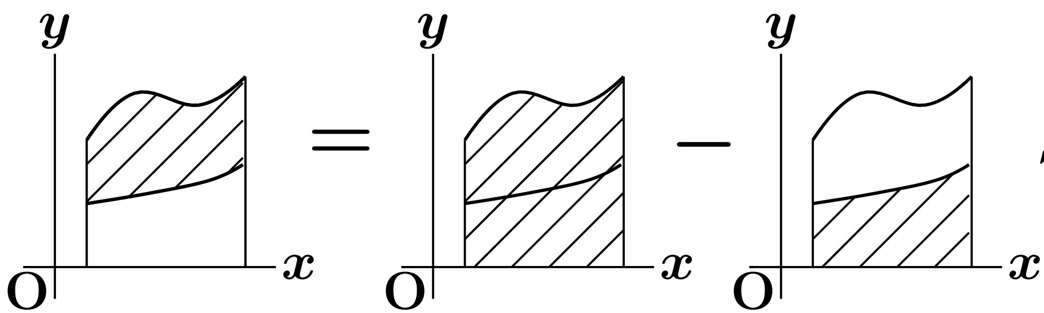


$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

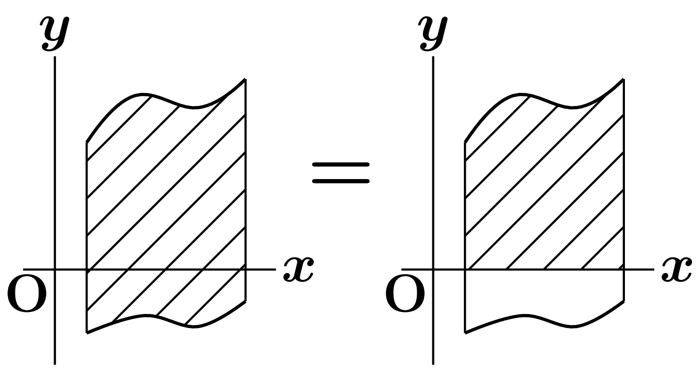


2曲線で囲まれる図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする

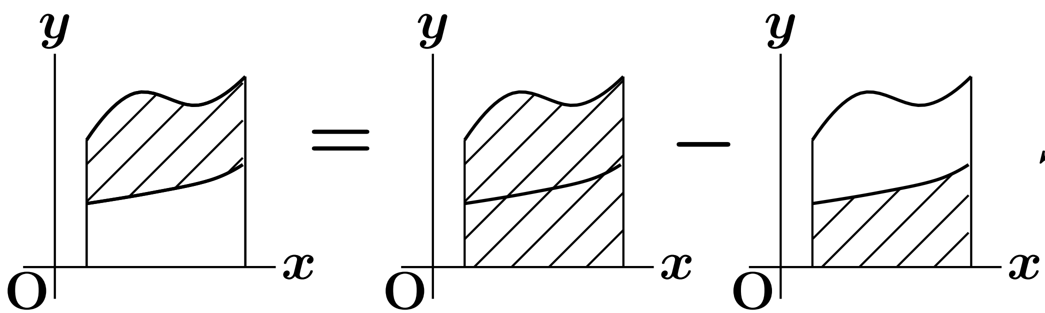


$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

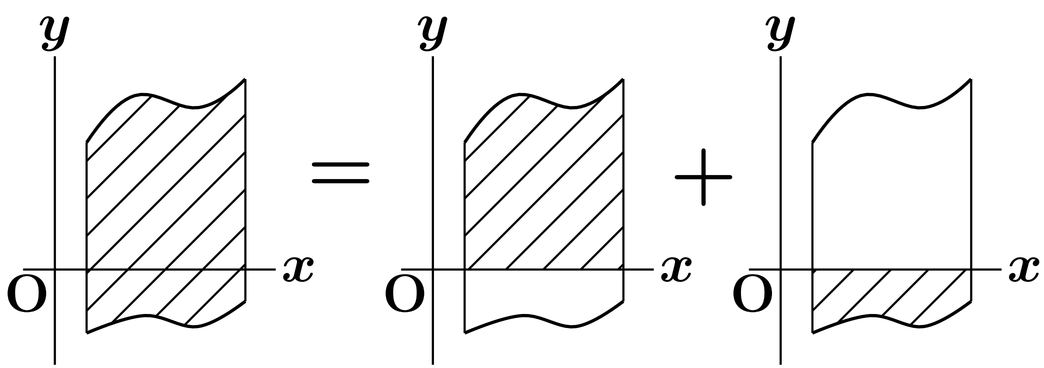


2 曲線で囲まれる図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする

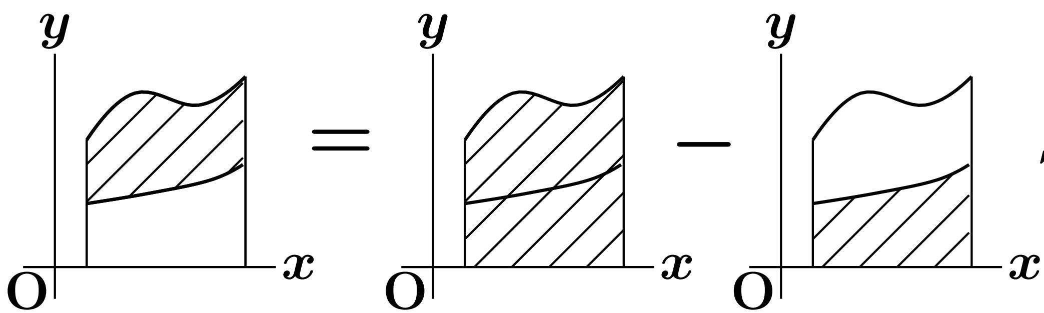


$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

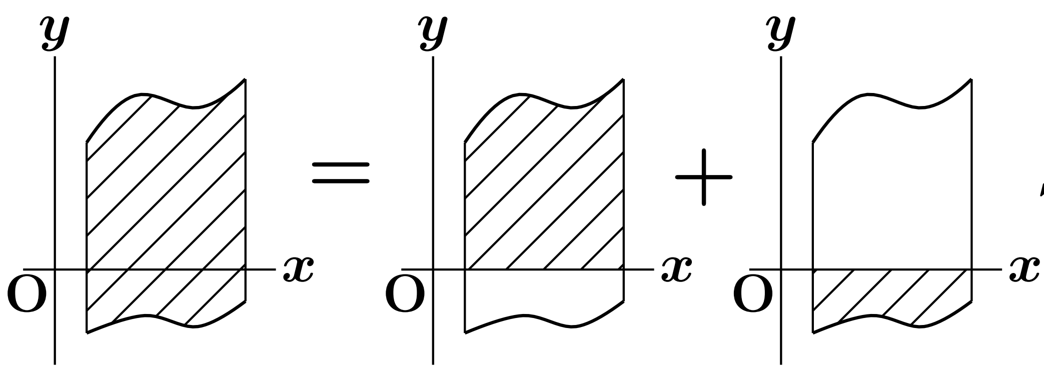


2曲線で囲まれる図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする



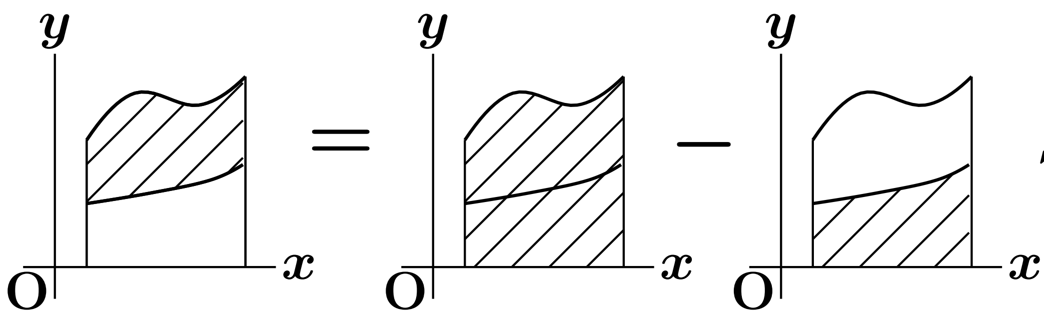
$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



$$S = S_1 + S_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

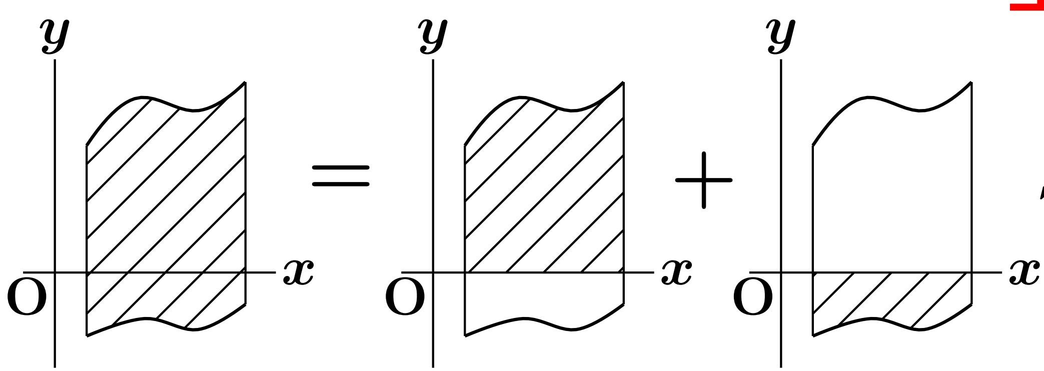
2 曲線で囲まれる図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする



$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

上から下の関数を引いて積分

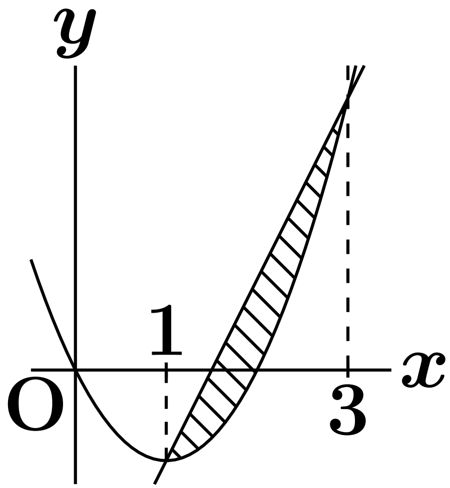


$$S = S_1 + S_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

解) 交点を求める



$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

これから　$x = 1,\ 3$

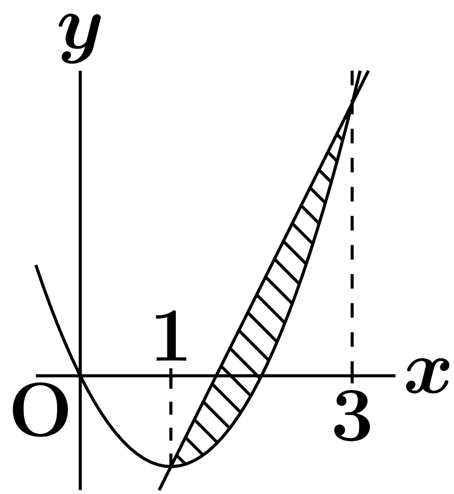
図より，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$2x - 3 \leqq x^2 - 2x$

したがって　$S = \displaystyle\int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

解) 交点を求める



$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

これから　$x = 1,\ 3$

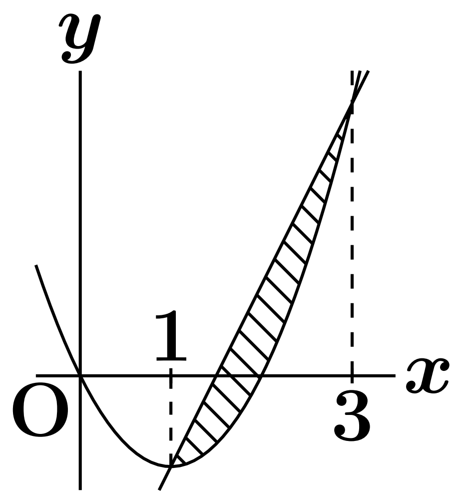
図より，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$2x - 3 \leqq x^2 - 2x$

したがって　$S = \displaystyle\int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

解) 交点を求める



$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

これから　$x = 1,\ 3$

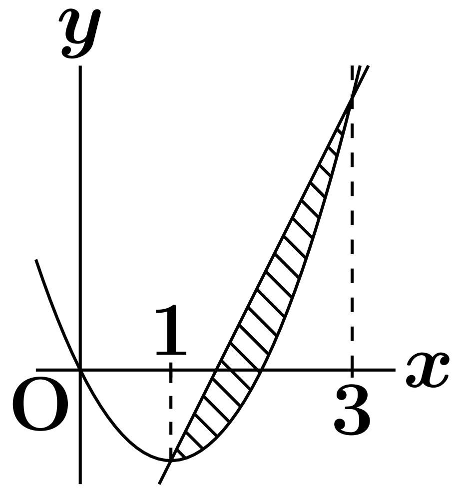
図より，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$2x - 3 \leqq x^2 - 2x$

したがって　$S = \displaystyle\int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

解) 交点を求める



$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

これから　$x = 1,\ 3$

図より，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$2x - 3 \leqq x^2 - 2x$

したがって　$S = \displaystyle\int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

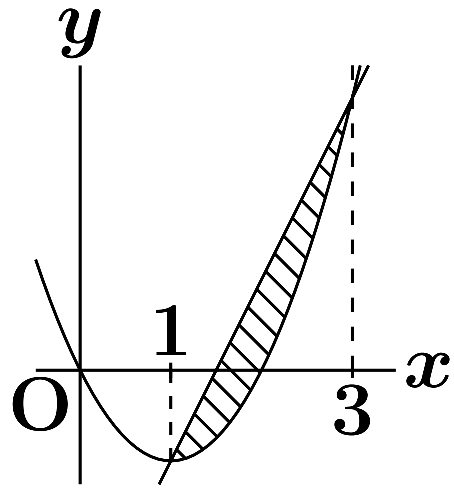
解) 交点を求める

$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

これから　$x = 1,\ 3$



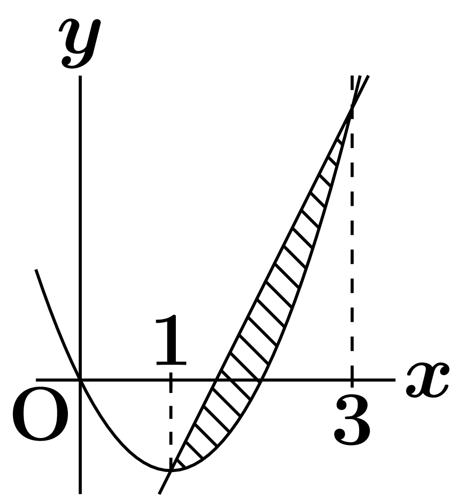
図より，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$2x - 3 \leqq x^2 - 2x$

したがって　$S = \displaystyle\int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

解) 交点を求める



$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

これから　$x = 1,\ 3$

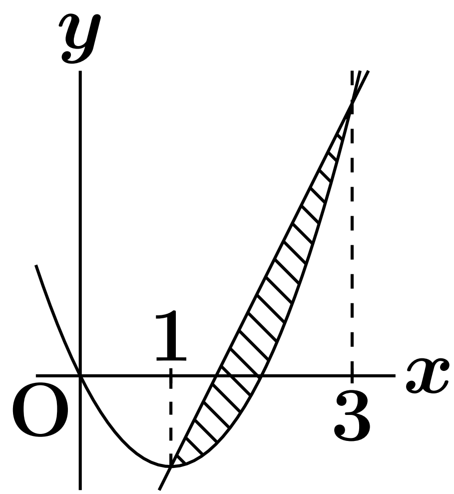
図より，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$2x - 3 \leqq x^2 - 2x$

したがって　$S = \displaystyle\int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

解) 交点を求める



$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0$ より

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

これから　$x = 1,\ 3$

図より，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$2x - 3 \leqq x^2 - 2x$

したがって　$S = \displaystyle\int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

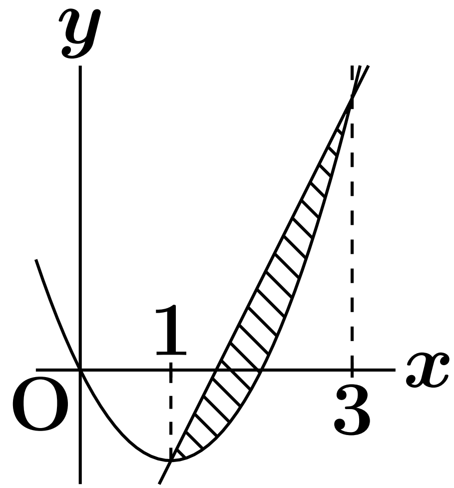
解) 交点を求める

$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

これから　$x = 1,\ 3$



図より，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$2x - 3 \leqq x^2 - 2x$

したがって　$S = \displaystyle\int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

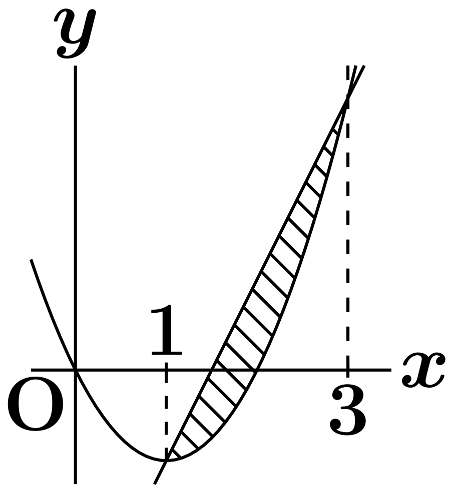
解) 交点を求める

$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

これから　$x = 1,\ 3$



図より，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$2x - 3 \leqq x^2 - 2x$

したがって　$S = \displaystyle\int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x)\,dx = \frac{4}{3}$

課題 (曲線で囲まれる図形の面積 1)

アプリ「関数のグラフ」を用いよ.

課題 0926-5 曲線 $y = x^2 - 4x$ について，問いに答えよ

[1] 曲線と x 軸との交点の x 座標を求めよ

[2] 曲線と x 軸で囲まれる図形の面積 S を求めよ

課題 0926-6 $y = -x^2 + 2$ と $y = x$ で囲まれる図形を考える

[1] 曲線と直線の交点の x 座標を求めよ

[2] 面積 S を積分で表せ

[3] 面積 S を求めよ

課題 (曲線で囲まれる図形の面積 2)

アプリ「関数のグラフ」を用いよ．

課題 0926-7 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ で囲まれる図形を考える．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

[1] 2 曲線の交点の x 座標を求めよ

[2] 面積 S を積分で表せ

[3] 面積 S を求めよ

注) 次の積分公式とアプリ「三角関数の値」を用いよ

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x$$

課題 (曲線で囲まれる図形の面積 3)

アプリ「関数のグラフ」を用いよ.

課題 0926-8 曲線 $y = e^x$, $y = e^{-x}$ と y 軸に平行な直線 $x = 1$ で囲まれる図形を考える.

[1] 2 曲線の交点の x 座標を求めよ

[2] 面積 S を積分で表せ

[3] 面積 S を求めよ

注) 次の積分公式を用いよ

$$\int e^x\,dx = e^x, \quad \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$$