

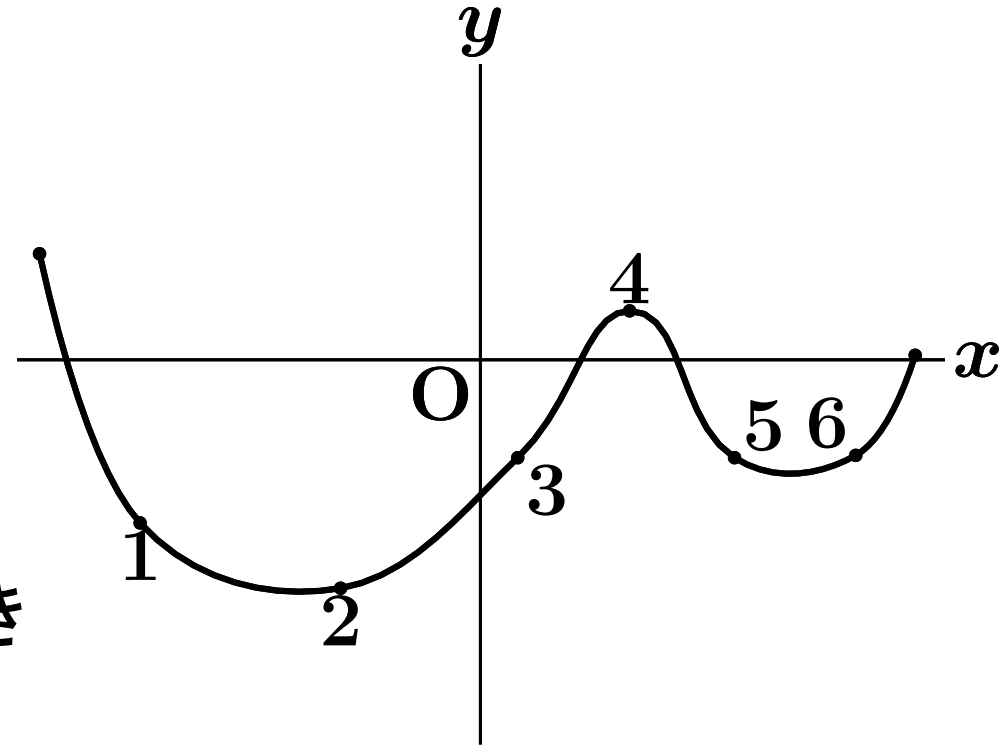
微分積分の応用

2022.9.26

微分の応用

関数の増減

- 関数 $y = f(x)$
- x が右に動くにつれて
 - (i) y の値が増えていくとき
増加の状態
 - (ii) y の値が減っていくとき
減少の状態



課題 0926-1 図で次の状態である点の番号をすべてあげよ.

- [1] 増加の状態 [2] 減少の状態 [3] どちらでもない

関数の増減と微分

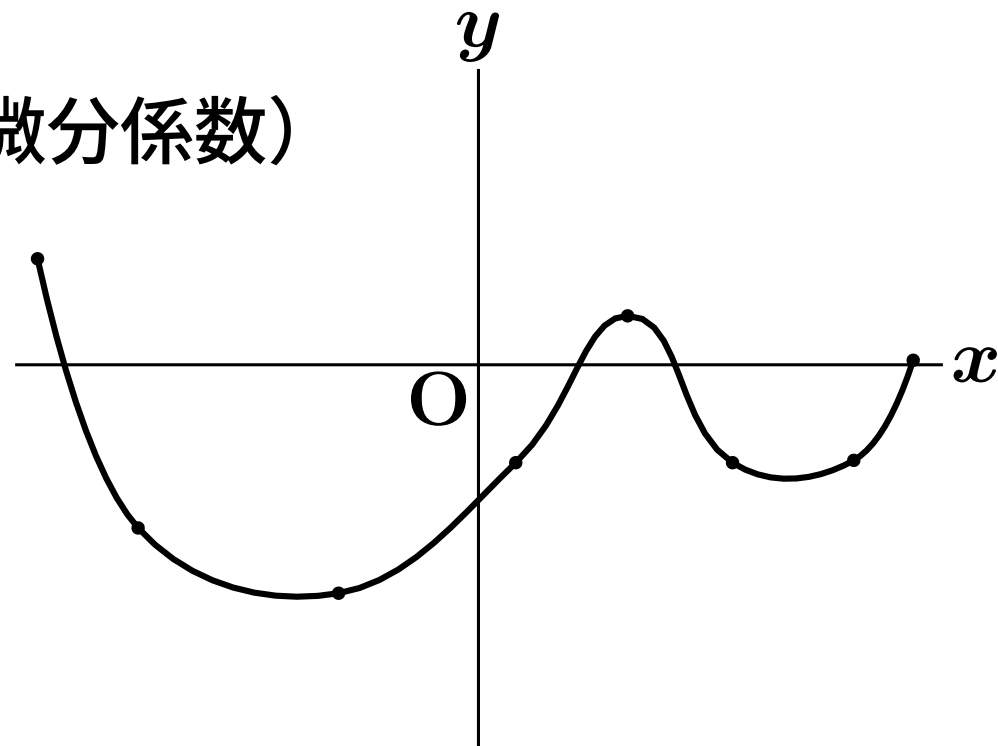
- 接線の傾きは導関数の値（微分係数）

(i) 増加の状態のとき

接線の傾きは正 $y' > 0$

(ii) 減少の状態のとき

接線の傾きは負 $y' < 0$



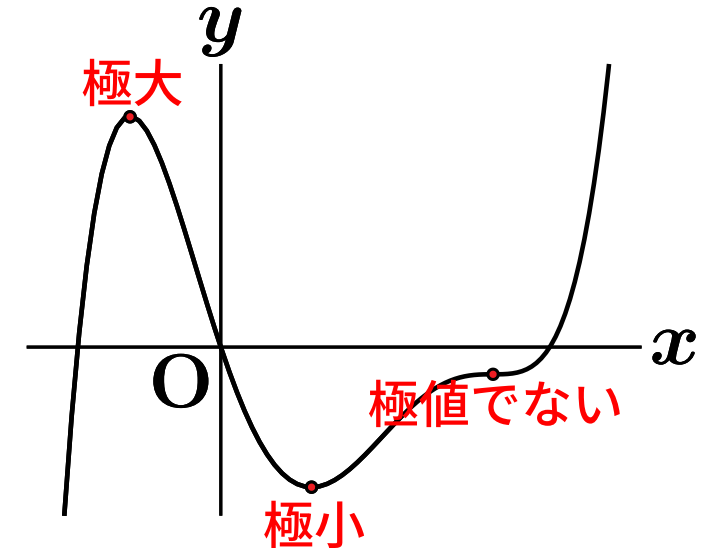
- 増加減少が変化する点

(i) 増加から減少に変わるとき **極大** その近くでは最大

(ii) 減少から増加に変わるとき **極小** その近くでは最小

極値点と y' の値

- 極大 (極小) となる点を極値点
- 極値点では $y' = 0$
 - 極大点 増加から減少に変わる
 - 極小点 減少から増加に変わる
- $y' = 0$ でも極値点でない点もある



例 $y = x^3 - 3x^2$

「導関数の意味」を用いてグラフを描けばよい。

計算では $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$y' = 0$ となる点は, $x(x - 2) = 0$ より $x = 0, 2$

極値点（課題 1）

アプリ「導関数の意味」を用いよ

課題 0926-2 次の関数について，極値点を求めよ．

$$[1] \ y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$[2] \ y = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$[3] \ y = x^2 e^x$$

極値点 (課題 2)

アプリ「導関数の意味」を用いよ

課題 0926-3 次の関数について，極値点を求めよ．

$$[1] \ y = \log x - x \ (0 < x \leq 3)$$

入力書式 $\log(x)-x^{(2)}x=+,5$

$$[2] \ y = \sin x + \cos x \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

入力書式 $\sin(x)+\cos(x)x=0,2pi$

$$[3] \ y = \sin^2 x \ (0 \leq x \leq \pi)$$

入力書式 $\sin(2,x)x=0,pi$

[2] [3] 解は π を整数で割った形



増減表

- $y' = 0$ となる点と間の範囲での増減の様子を書いた表

例 $y = x^3 - 3x^2$

- (1) y' を求める. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$
- (2) $y' = 0$ となる点を求める. $y' = 0$ より $x = 0, 2$
- (3) 増減表を書き, $y' = 0$ となる点を書き入れる
- (4) (3) の x の下に 0 を書く
- (5) 各範囲の y' の符号を書く

$$x = -1, y' > 0, \dots$$

- (6) $+$ は増加, $-$ は減少

x	\dots	0	\dots	2	\dots
y'	+	0	-	0	+
y	\nearrow		\searrow		\nearrow

増減表 (課題)

課題 0926-4 関数 $y = x^4 - 4x^3$ について, 問いに答えよ.

[1] $y' = 4x^2(x - 3)$ となることを示せ

[2] $y' = 0$ となる x を求めよ

[3] 増減の 1 行目に入れる数式記号を左から順に書け

[4] 増減の 2 行目に入れる数式記号を左から順に書け

[5] 増減の 3 行目に入れる矢印記号を左から順に書け

... 点々 $\{\backslashnearrow\}$

\nearrow 右上 $\{\backslashnearrow\}$

\searrow 右下 $\{\backslashsearrow\}$

x					
y'					
y					

積分の応用

定積分と面積

面積 S ，定積分 $I = \int_a^b f(x) dx$

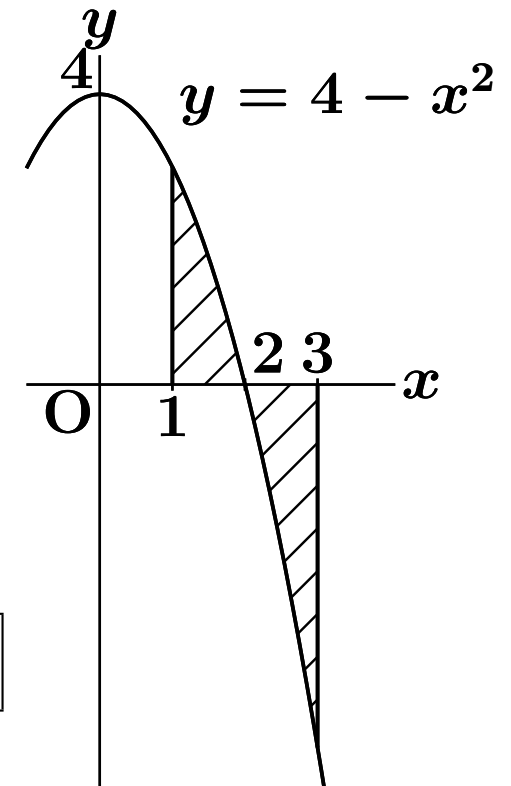
- $a \leq x \leq b$ で $f(x)$ が正のとき $S = I$

$$S = \int_1^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{5}{3}$$

- $a \leq x \leq b$ で $f(x)$ が負のとき $S = -I$

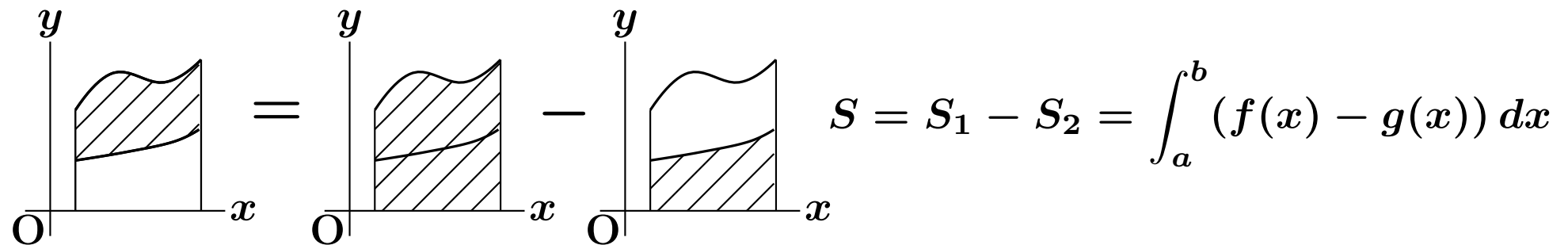
$$I = \int_2^3 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_2^3 = -\frac{7}{3}$$

$$S = -I = \frac{7}{3}$$

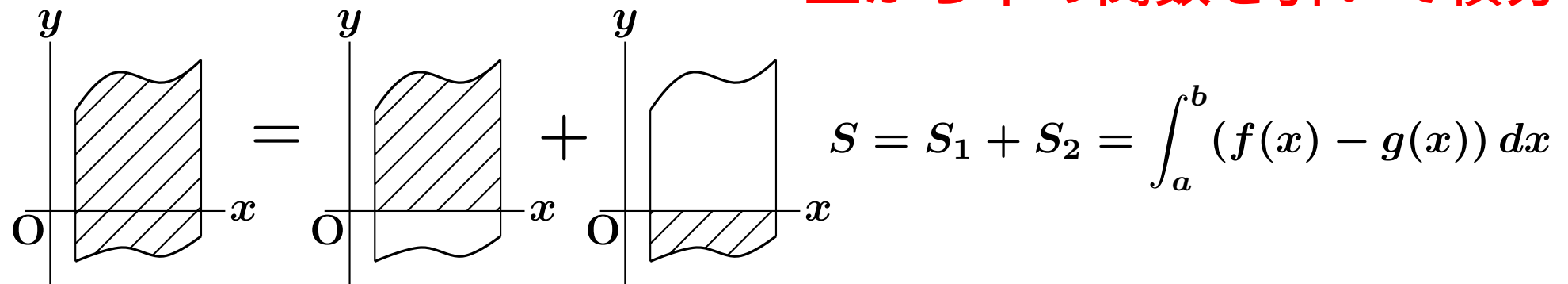


2 曲線で囲まれる図形の面積

区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq g(x)$ とする



上から下の関数を引いて積分



例題 (2 曲線で囲まれる図形)

例題) $y = x^2 - 2x$ と $y = 2x - 3$ で囲まれる図形

解) 交点を求める

$$x^2 - 2x - (2x - 3) = 0 \text{ より}$$

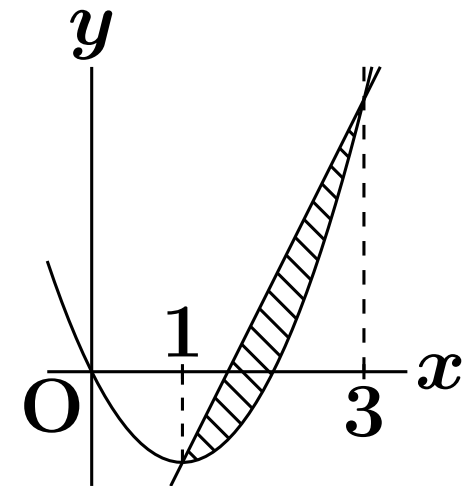
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

これから $x = 1, 3$

図より, $1 \leq x \leq 3$ のとき $2x - 3 \leq x^2 - 2x$

$$\text{したがって } S = \int_1^3 (2x - 3 - x^2 + 2x) dx = \frac{4}{3}$$



課題 (曲線で囲まれる図形の面積 1)

アプリ「関数のグラフ」を用いよ.

課題 0926-5 曲線 $y = x^2 - 4x$ について, 問いに答えよ

- [1] 曲線と x 軸との交点の x 座標を求めよ
- [2] 曲線と x 軸で囲まれる図形の面積 S を求めよ

課題 0926-6 $y = -x^2 + 2$ と $y = x$ で囲まれる図形を考える

- [1] 曲線と直線の交点の x 座標を求めよ
- [2] 面積 S を積分で表せ
- [3] 面積 S を求めよ

課題 (曲線で囲まれる図形の面積 2)

アプリ「関数のグラフ」を用いよ.

課題 0926-7 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ で囲まれる図形を考える. ただし, $0 \leq x \leq 2\pi$ とする.

- [1] 2 曲線の交点の x 座標を求めよ
- [2] 面積 S を積分で表せ
- [3] 面積 S を求めよ

注) 次の積分公式とアプリ「三角関数の値」を用いよ

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x$$



課題 (曲線で囲まれる図形の面積 3)

アプリ「関数のグラフ」を用いよ.

課題 0926-8 曲線 $y = e^x$, $y = e^{-x}$ と y 軸に平行な直線 $x = 1$ で囲まれる図形を考える.

- [1] 2 曲線の交点の x 座標を求めよ
- [2] 面積 S を積分で表せ
- [3] 面積 S を求めよ

注) 次の積分公式を用いよ

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$