



# 数学ソフトウェアの プログラミングと教育利用

—KeTpic, KeTCindy, KetCindyJS の開発—

高遠節夫

大学院理工学研究科

2025.01.25

# 今日の内容

(1) 序論

KeT=Kisarazu Educational Takato  
and his happy friends

(2) K<sub>E</sub>Tpic の開発

(3) K<sub>E</sub>TCindy の開発

(4) K<sub>E</sub>TCindyJS の開発

(5) K<sub>E</sub>TCindy による和算問題の解法

(6) 結論

# 序論

# 数学ソフトウェアの利用

## (1) 数式処理システム

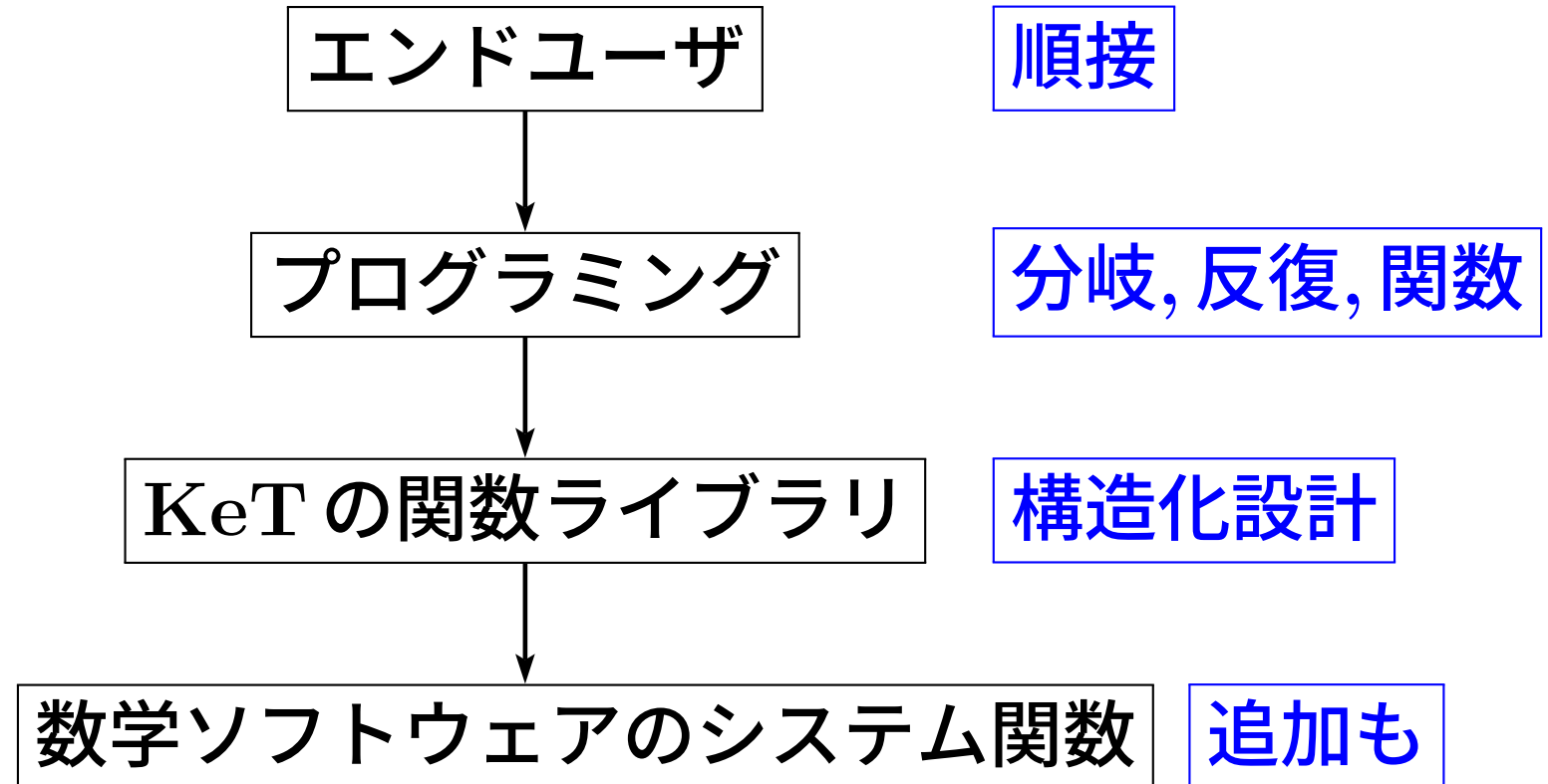
- 数式をそのまま計算処理
- Maple, Mathematica, Maxima, Risa/Asir など
- 当初は Maple をセミナー形式の授業で利用

## (2) その他の数学的ソフトウェア

- Scilab(行列計算), R(統計), Cinderella(動的幾何)

## (2) これらはいずれも構造化プログラミングとリスト処理 (+再帰呼び出し) に対応

# 構造化プログラミング



## プログラミング力の伸長

1980 代まで BASIC を使用

- 構造化されていないので 1000 行程度が上限

1990 代前半 Turbo Pascal 5.0 を使用

- 構造化されていて関数定義が可能

1990 代後半 Maple を購入

- セミナーで千葉県算額の問題解
- 三角形だと無理式の連立方程式
- そこで MNR 法という解法の Maple ライブラリを作成

構造化プログラ  
ミング力を向上

# KE<sub>E</sub>Tpic の開発と利用

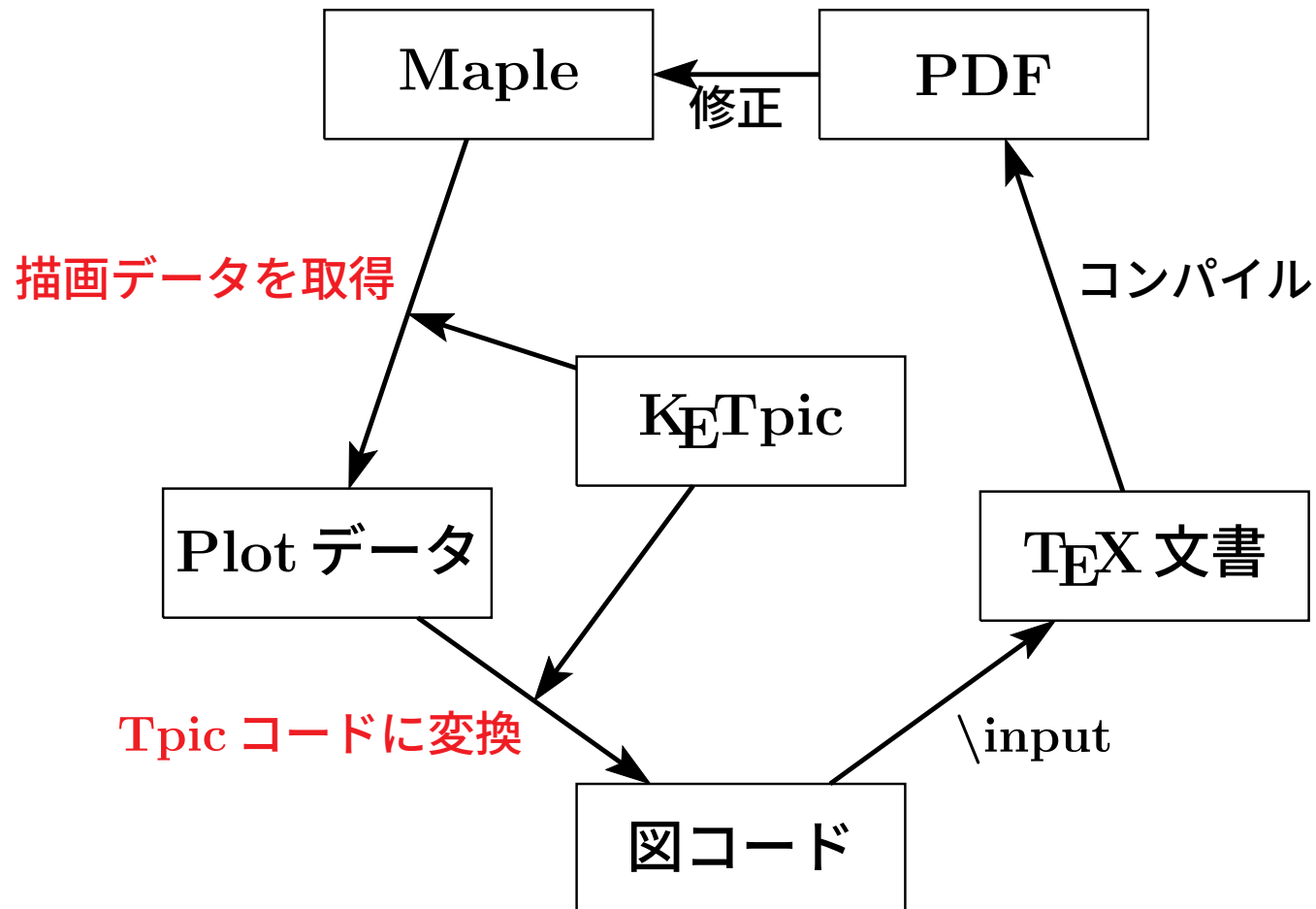
# T<sub>E</sub>X と Maple の利用

International Congress on  
Mathematical Software

- (1) 高専教科書シリーズの編集に継続して参加
- (2) 2003 年からのシリーズで T<sub>E</sub>X を使用
- (3) 当初は図を WinTpic で作成
- (4) しかし空間図形などは正確に描けなかった
- (5) Maple で tpic コードを書き出すことを考えた
  - Maple の plot データを取得
  - tpic コードに変換して出力
- (6) ICMS2006 で発表 [14]

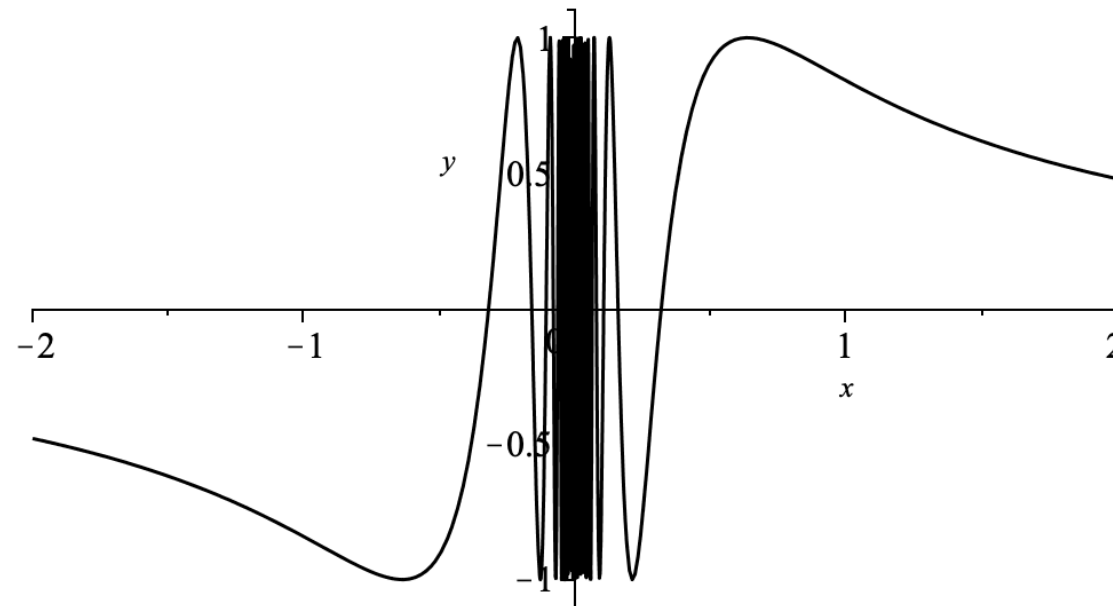


# K<sub>E</sub>Tpic による作図の流れ



## 描画データの作成例

```
with(plots):  
read cat(folder, 'ketpic.m'):  
setwindow(-2..2, -1.1..1.1):  
g1:=plotdata(sin(1/x),  
             x=XMIN..XMAX, numpoints=200):  
windisp(g1):
```



# 図コードと図の作成例

## Maple の続き

```

openfile("f1.tex"):
beginpicture("1cm"):
dashline(g1,0.5,0.5):
endpicture():
closefile():

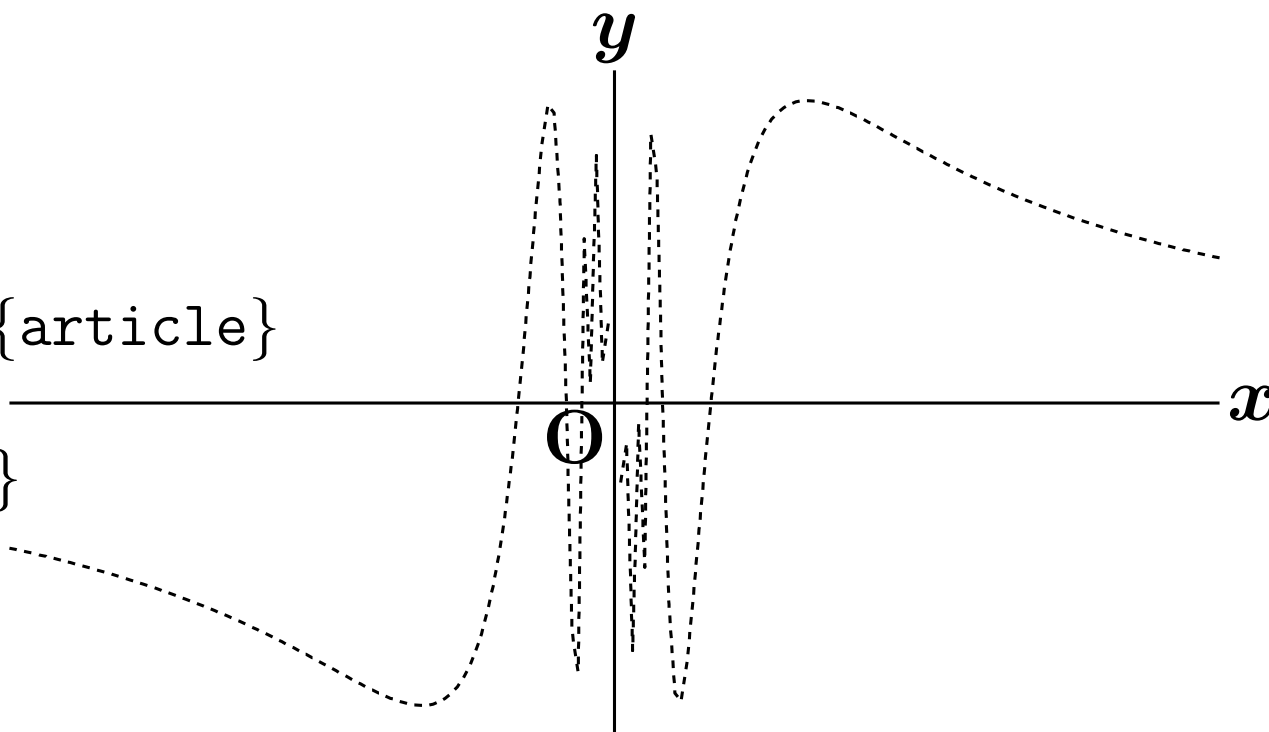
```

## T<sub>E</sub>X コード

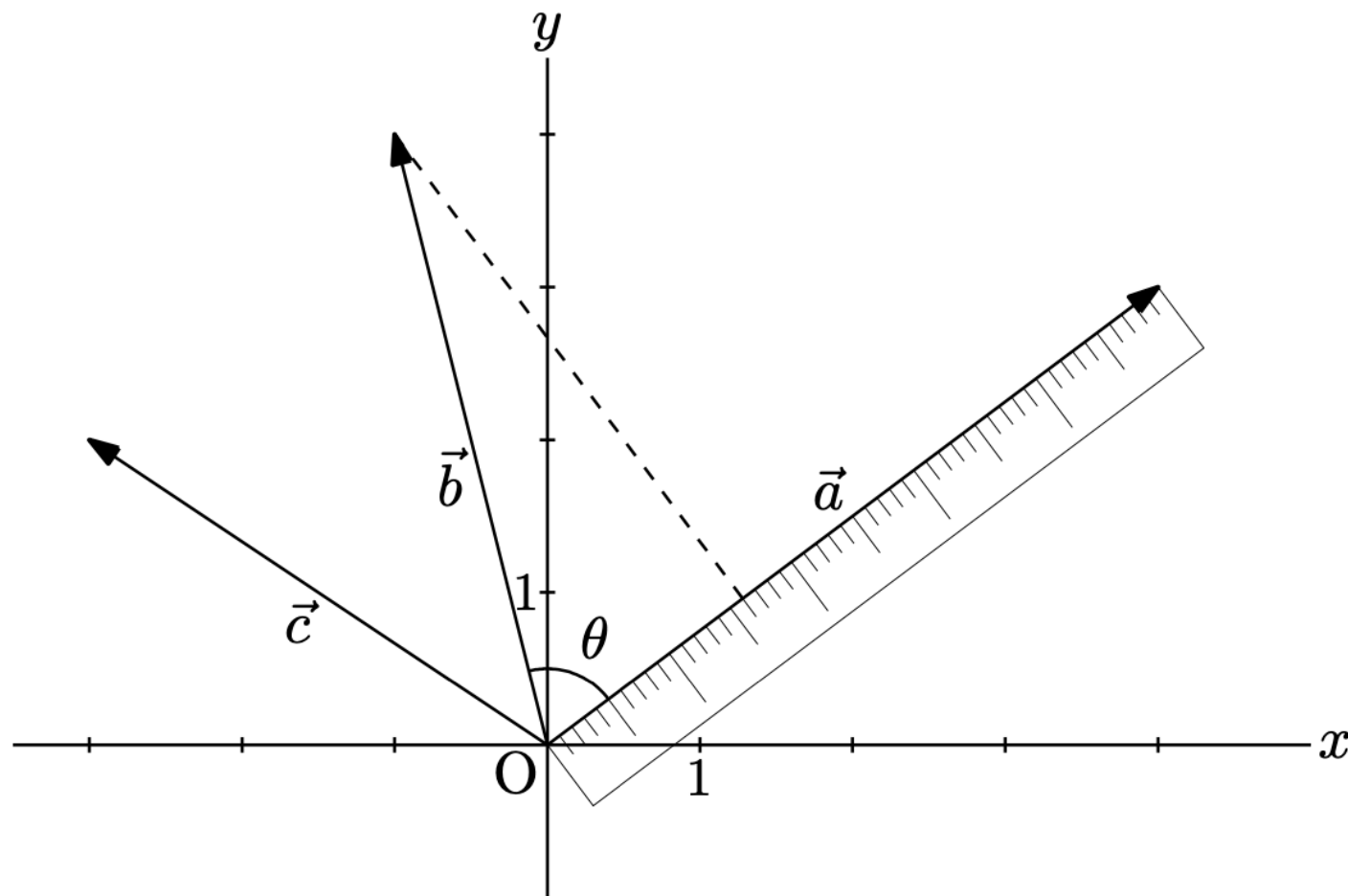
```

\documentclass[a4]{article}
\newlength{\width}
\newlength{\Height}
\newlength{\Depth}
\begin{document}
\input{f1.tex}
\end{document}

```



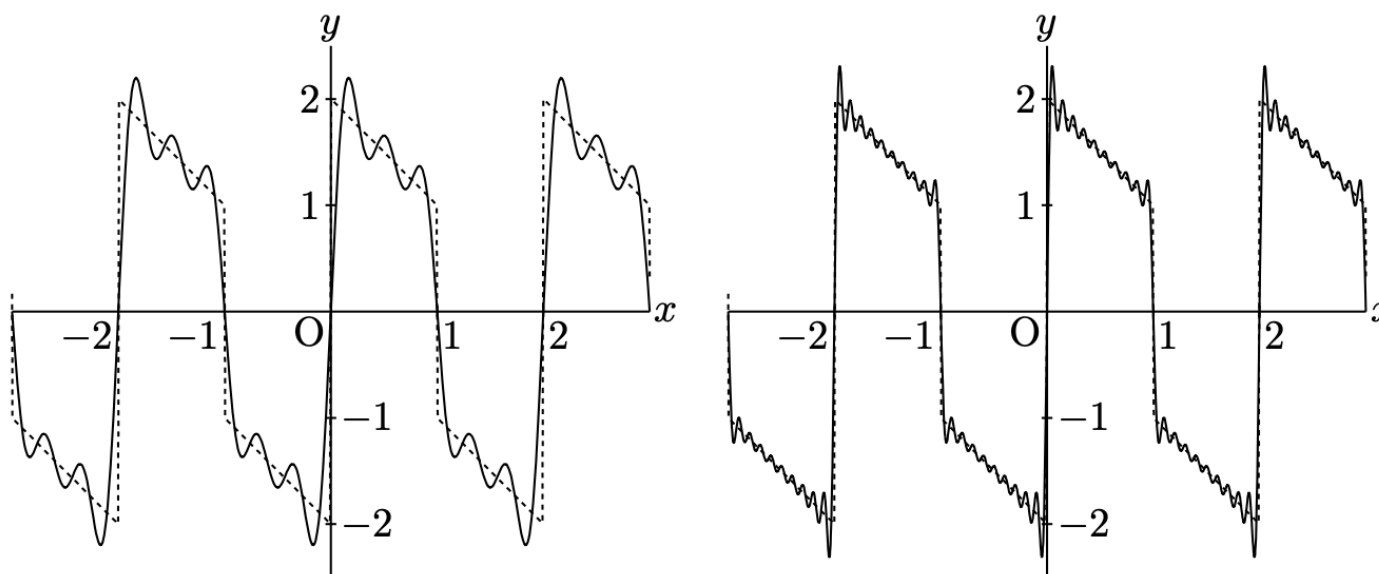
# KETpic の教材例 (1) 内積の意味



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = |\vec{a}| \times \vec{b} \text{の正射影}$$

# KETpic の教材例 (2) フーリエ級数

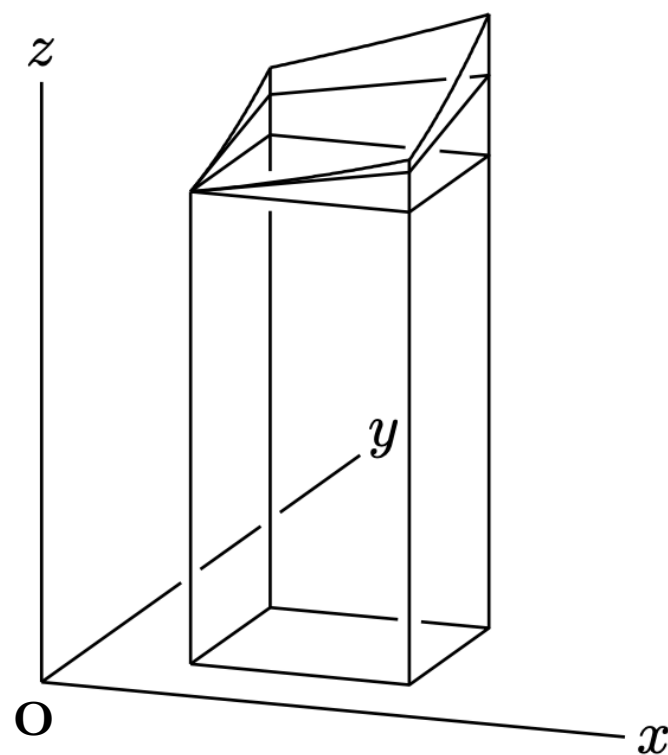
$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{2(2 - (-1)^n)}{n\pi} \sin n\pi x$$



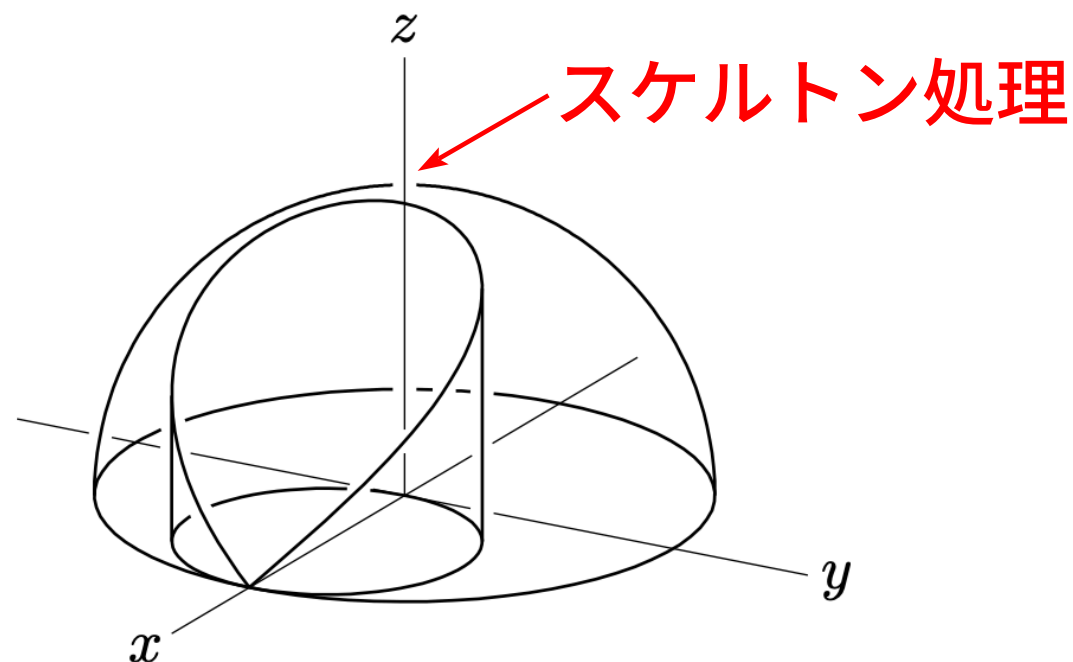
Gibbs 現象

# KETpic の教材例 (3) 空間図形

モノクロ線画で描きたい

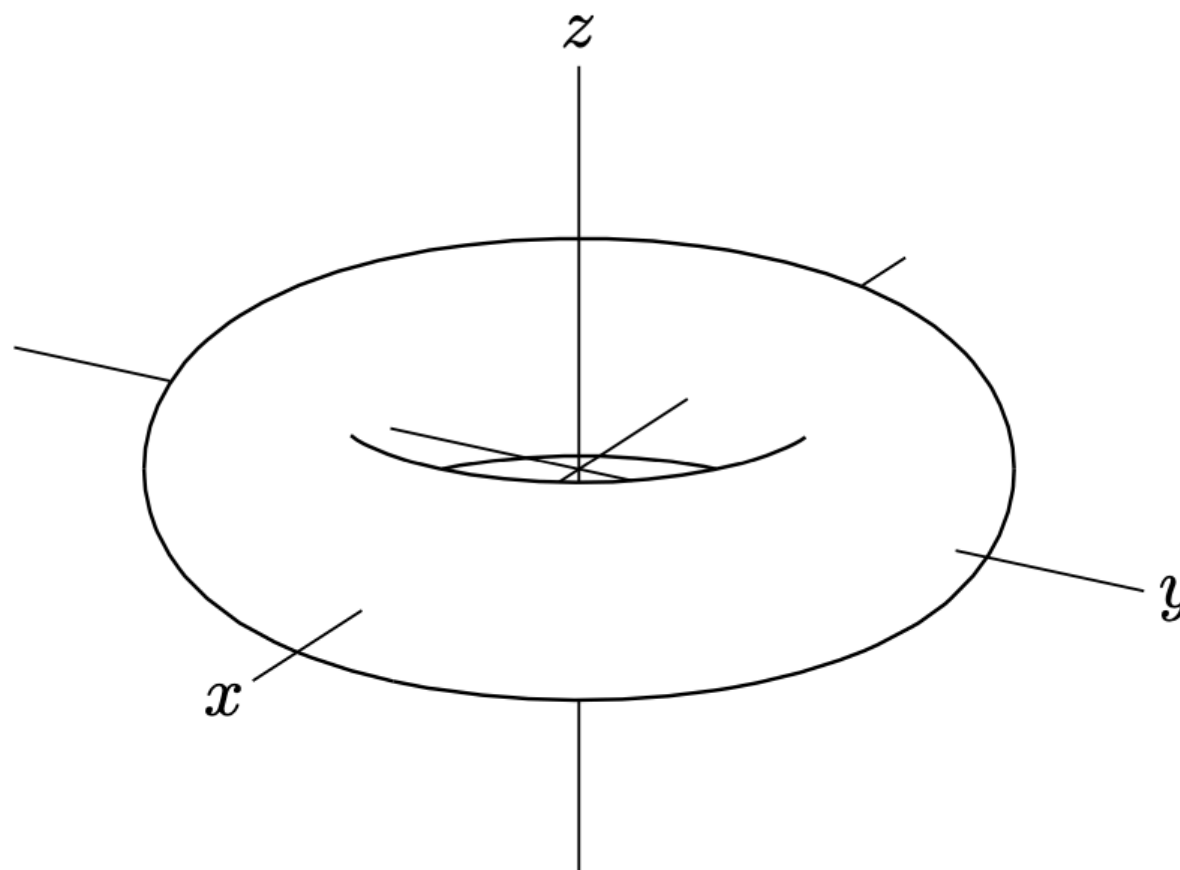


全微分の意味



Viviani 曲線

## KETpic の教材例 (3) 空間曲面 (トーラス)



座標軸追加

## K<sub>E</sub>Tpic の機能追加

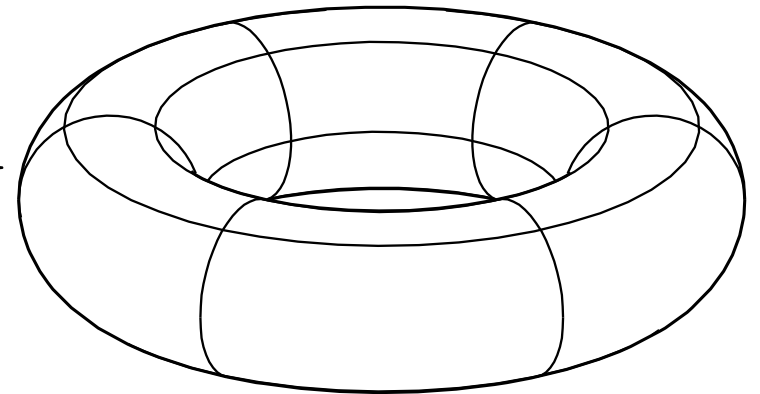
(1) Maple, Mathematica  $\Rightarrow$  Scilab[1], R[2]

関数渡しから文字列渡しへ

(2) T<sub>E</sub>X マクロの作成 (T<sub>E</sub>X プログラミング)[4][6][5]

特に layer 環境 (紙面上の自由配置)

```
\begin{layer}{130}{0}  
\putnотесе{75}{5}{  
  \input{fig/figtorus_2_2}}  
\end{layer}
```



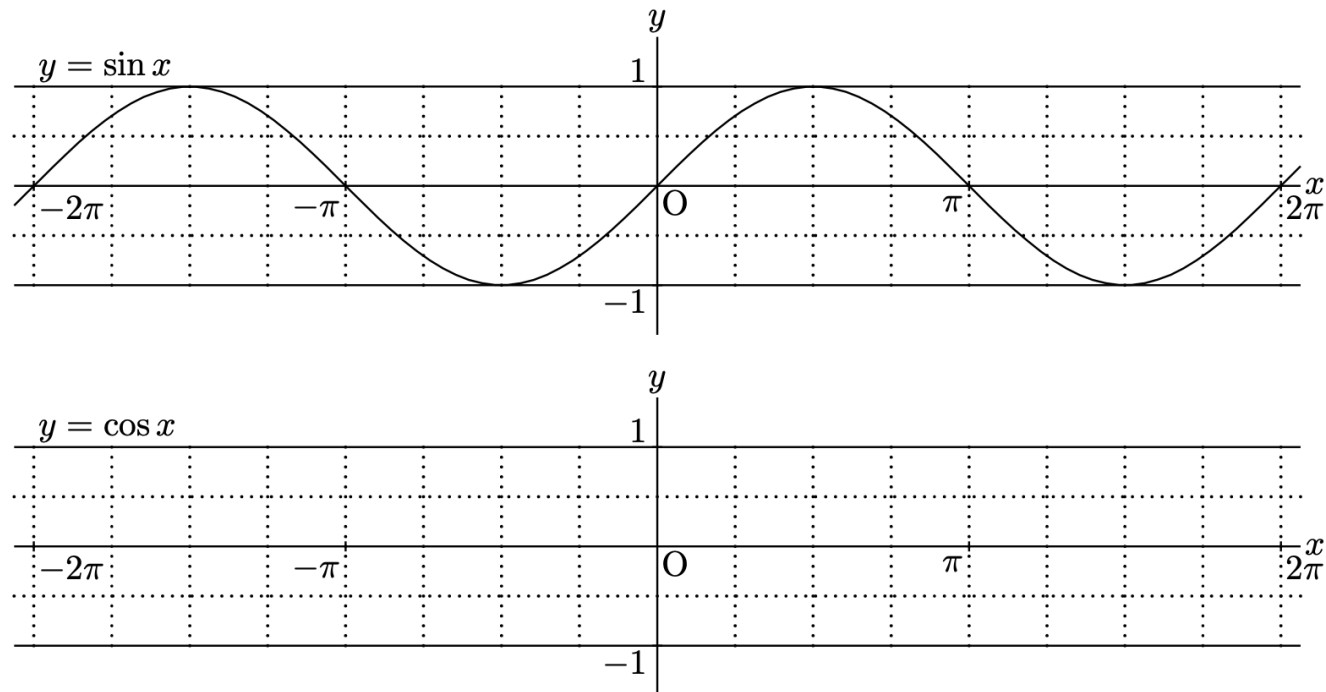


## 授業での配付教材

- 単色線画で美しい図が作成できる
  - ・ 印刷コストを軽減
  - ・ 正確な図は学生の想像力を刺激
  - ・ 空きスペースにコメントや計算などが書き込める
- 文と図を紙面上に自由に配置することが重要
  - ・  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  のスタイルファイル `ketpic`, `ketlayer` は不可欠なツール
- 著者はほぼ毎回の授業でプリントを配付

# 配付教材例 (2012 微積分)

日 付	科 目	学 科	学 年	番 号	名 前
/					



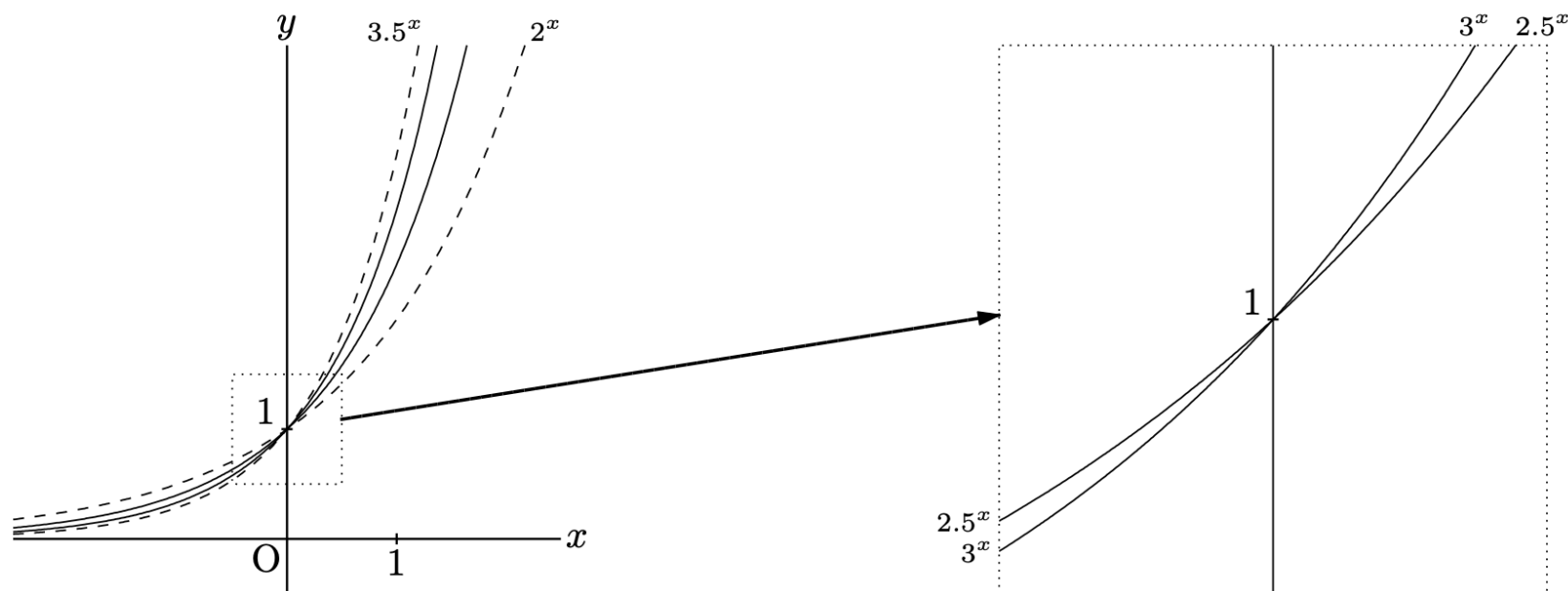
1. 次の関数を微分せよ.

(1)  $y = \sin x \cos x$

(2)  $y = x \tan x$

# 配付教材例 (2012 微積分)

## 指数関数・対数関数



1. 微分せよ.

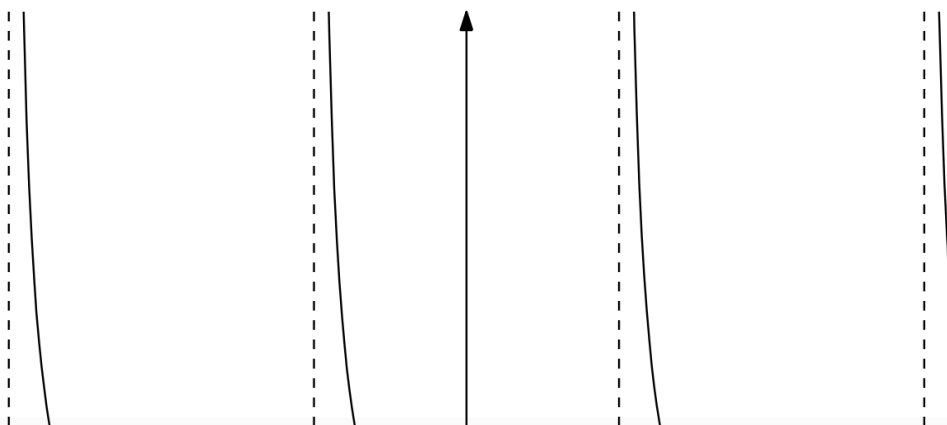
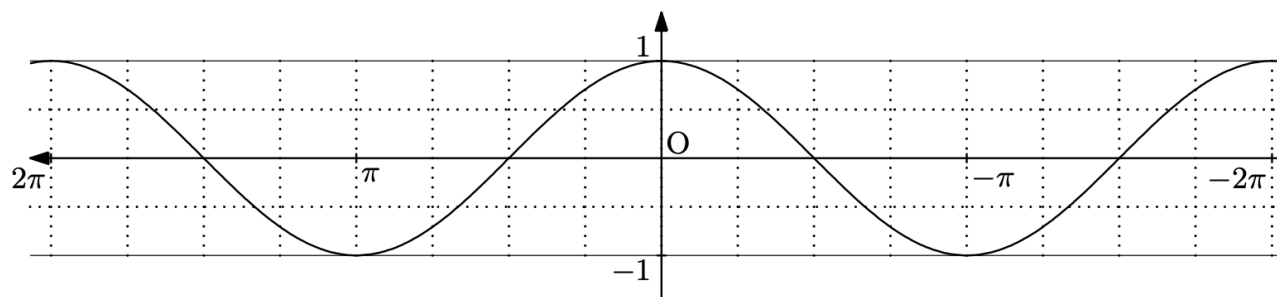
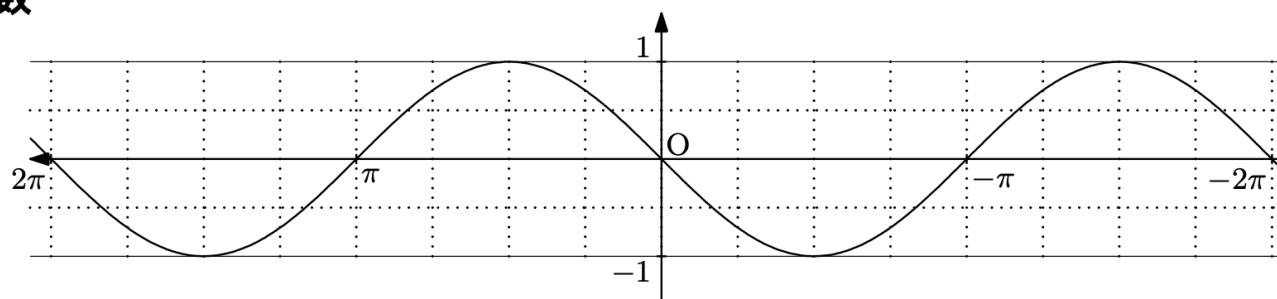
(1)  $y = e^{2x}$

(2)  $y = x^3 e^{-x}$

(3)  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

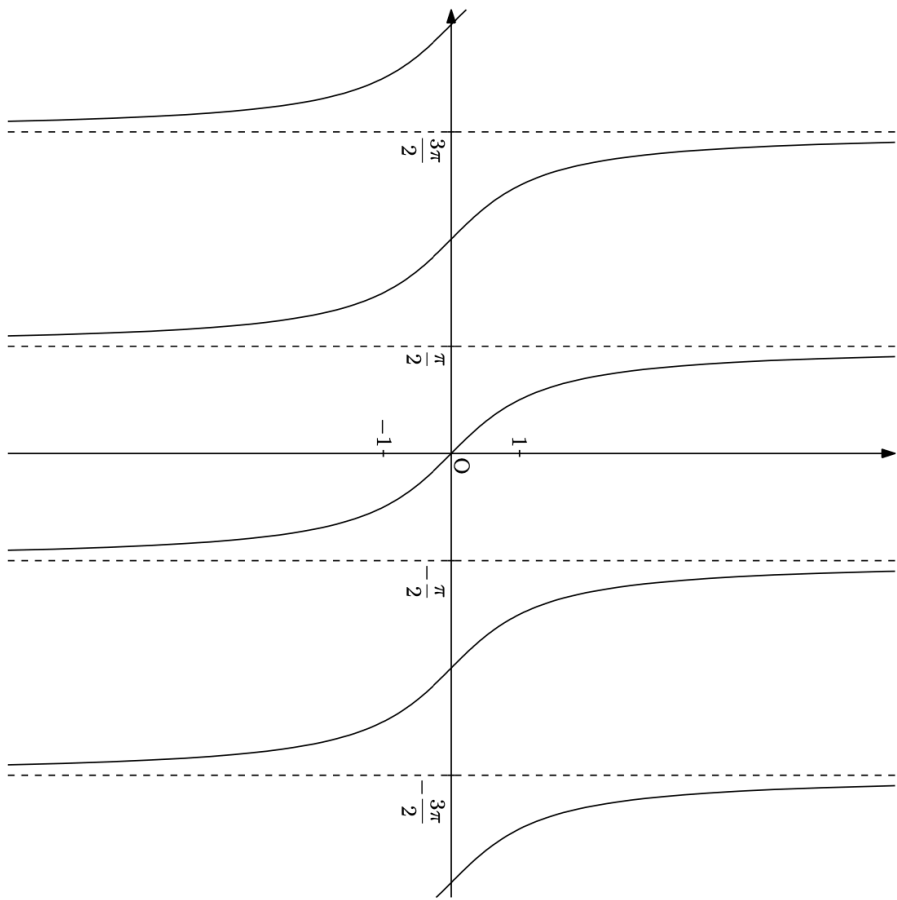
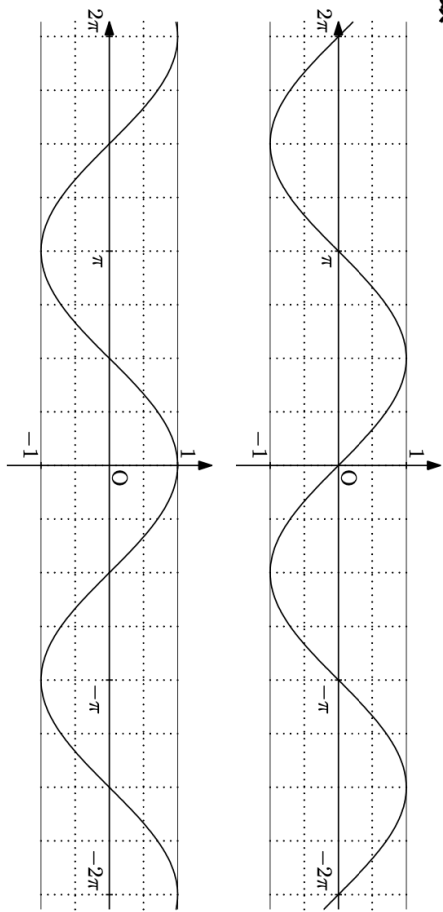
# 配付教材例 (2012 微積分)

## 逆三角関数



# 配付教材例 (2012 微積分)

## 逆三角関数



1. 微分せよ. ただし,  $a$  は正の定数とする.

(1)  $y = \sin^{-1} \frac{x}{a}$

(2)  $y = \tan^{-1} \frac{x}{a}$

# 配付教材例 (2012 微積分)

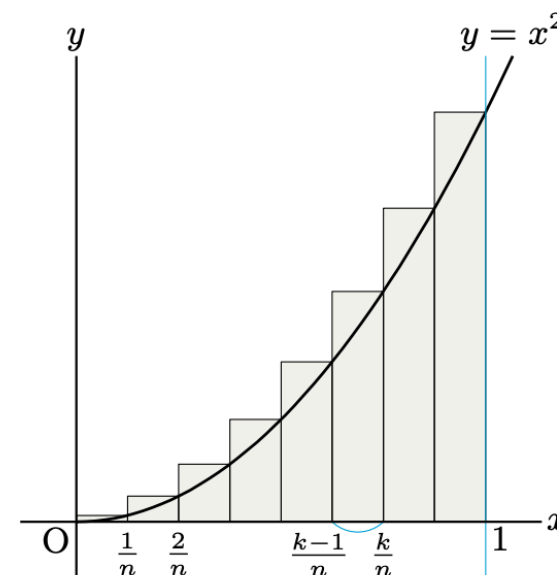
## 定積分の定義

1. 定義に従って  $\int_0^1 x^2 dx$  の値を求めたい. 教科書 49 ページの例題 3.3 と同様に, 区間  $[0, 1]$  を  $n$  等分して考えるとき, 次の各問いに答えよ.

(1)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  を用いて  $S_\Delta$  を求めよ.

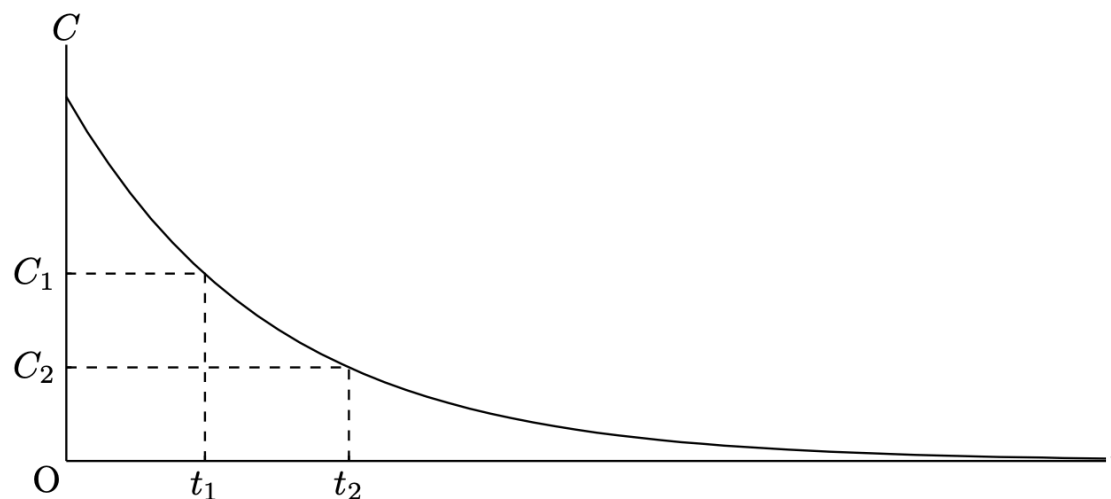
ただし,  $S_\Delta = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$  である.

(2)  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$  となることを示せ.



## 配付教材例 (2012 微積分)

4. 初期条件「 $t = 0$  のとき  $C = C_0$ 」を満たす解



5. 半減期

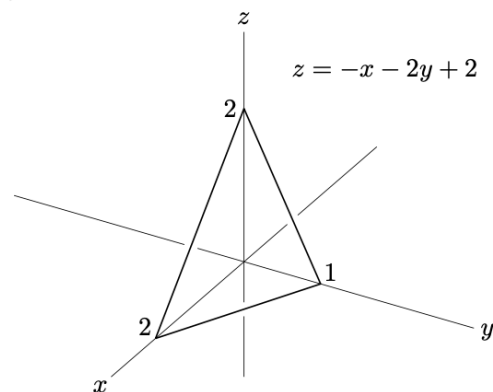
$$\log C_1 = -kt_1 + \log C_0$$

$$\log C_2 = -kt_2 + \log C_0$$

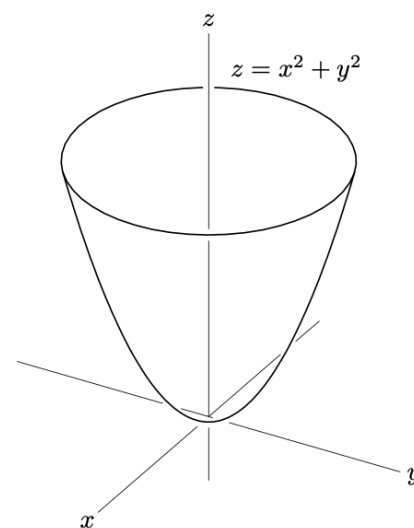
辺々を引いて,  $C_2 = \frac{C_1}{2}$  を用いると

# 配付教材例 (2012 微積分)

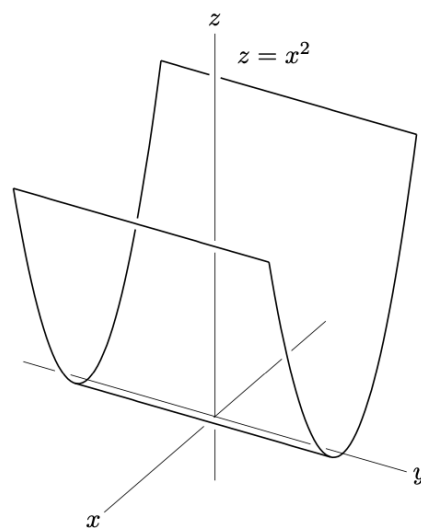
(1)



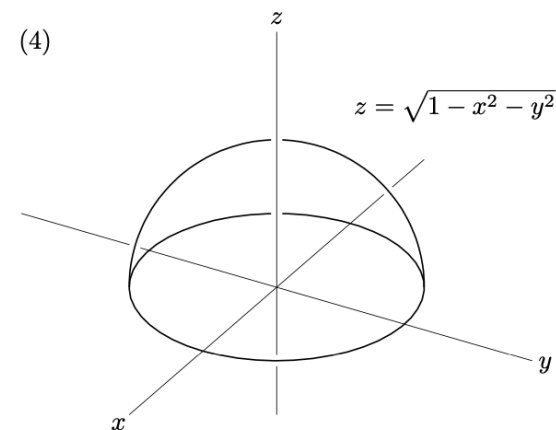
(2)



(3)



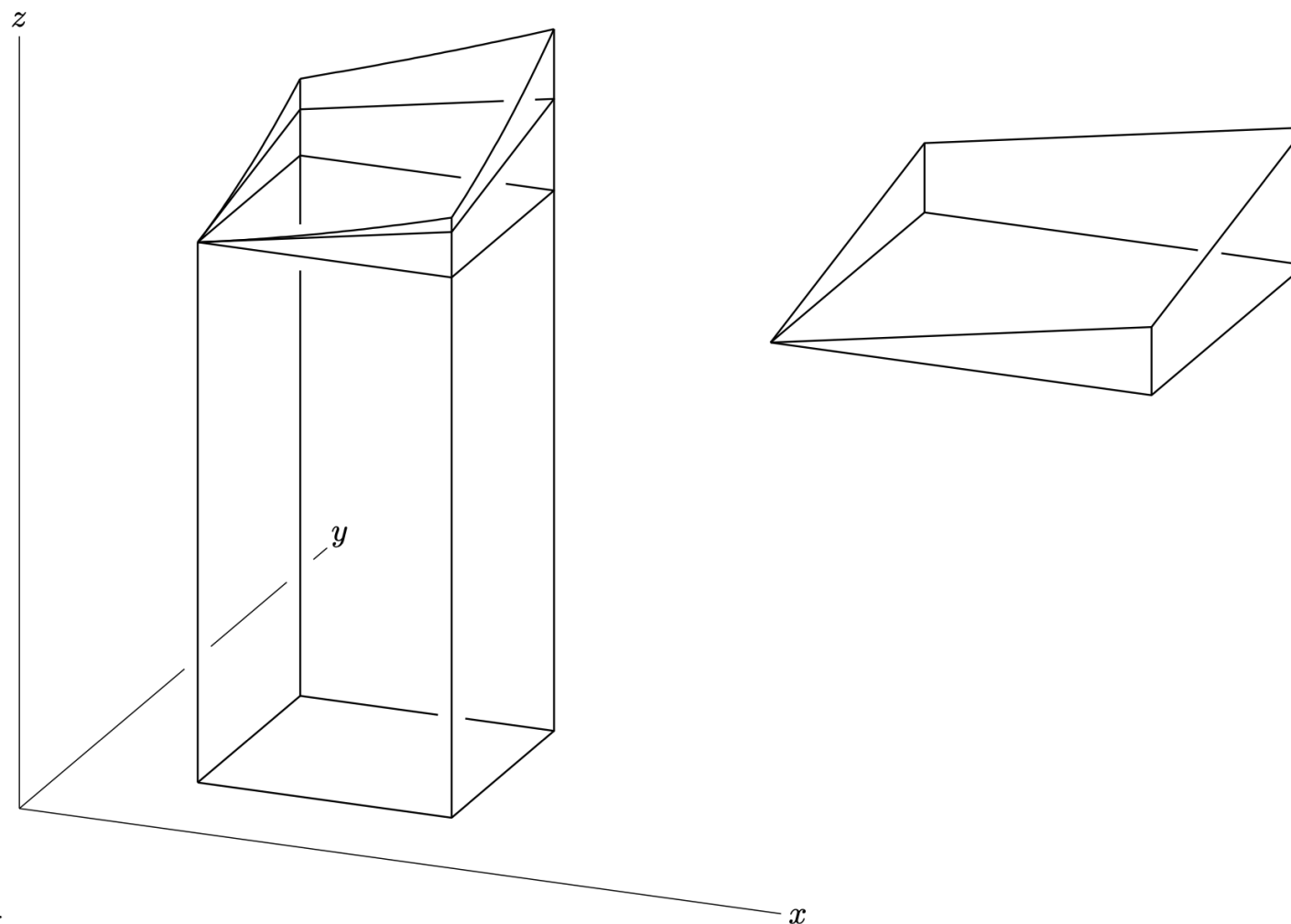
(4)



1. 上の各関数について,  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  を求めよ.



# 配付教材例 (2012 微積分)



1. 偏微分せよ.

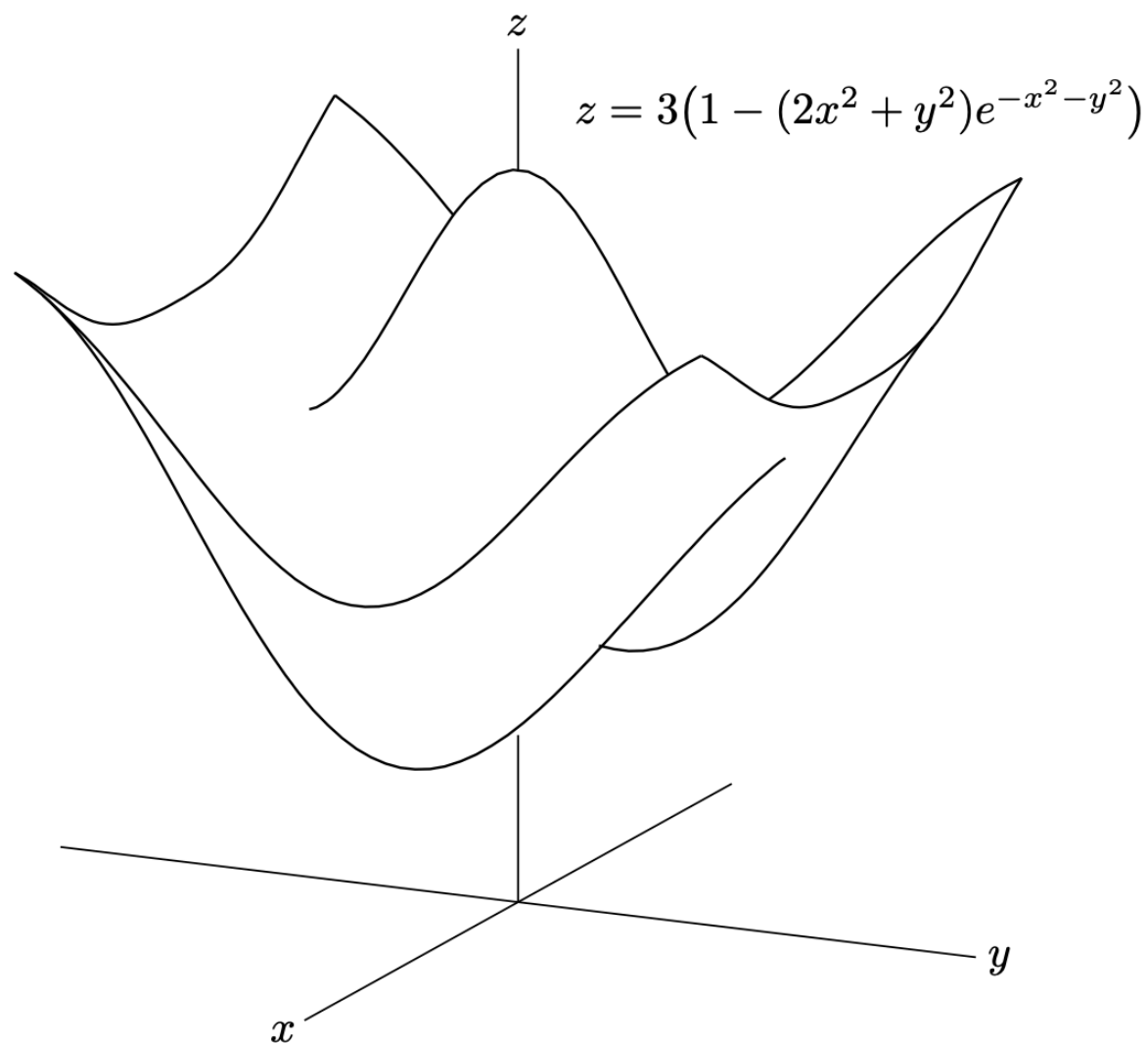
(1)  $z = \sin(x - 3y)$

(2)  $z = \frac{x}{x - y}$

(3)  $z = \sqrt{x^2 + 3xy + 2y^2}$

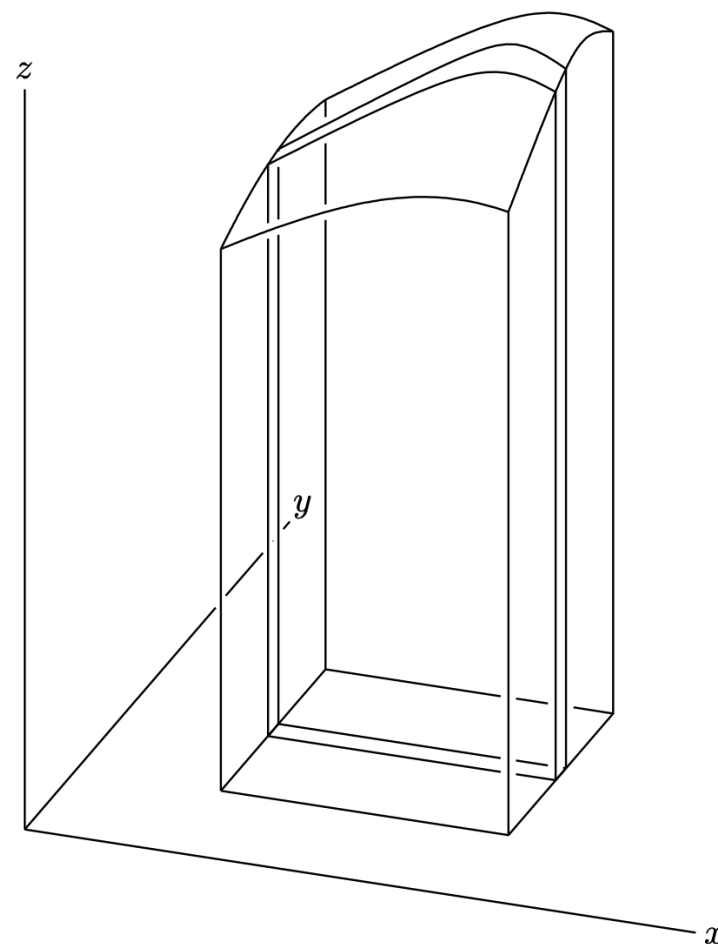
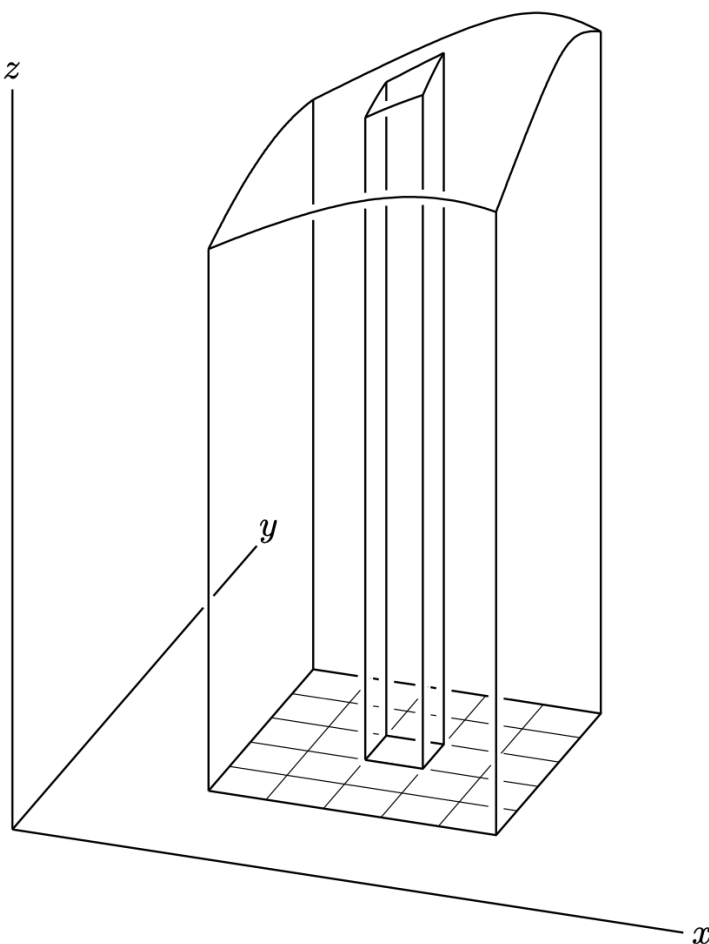
# 配付教材例 (2012 微積分)

極大・極小



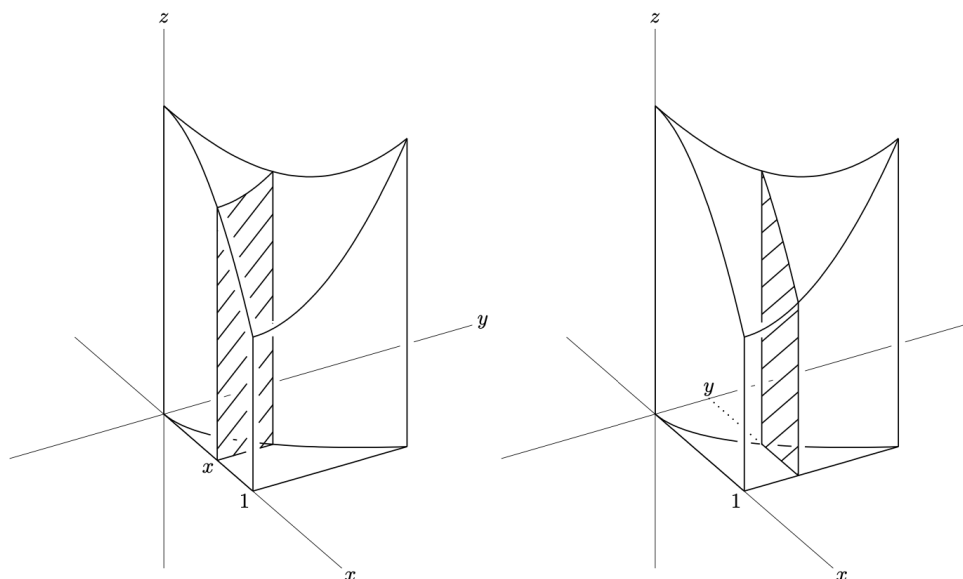
# 配付教材例 (2012 微積分)

## 重積分の定義と計算



# 配付教材例 (2012 微積分)

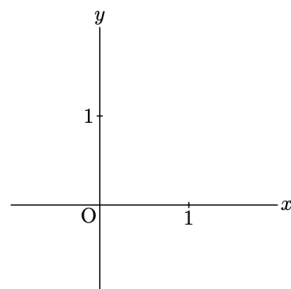
$$\iint_D (2 - x^2 + y^2) dx dy \quad (D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2)$$



1. (左の図)

積分領域  $D$  は

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$$



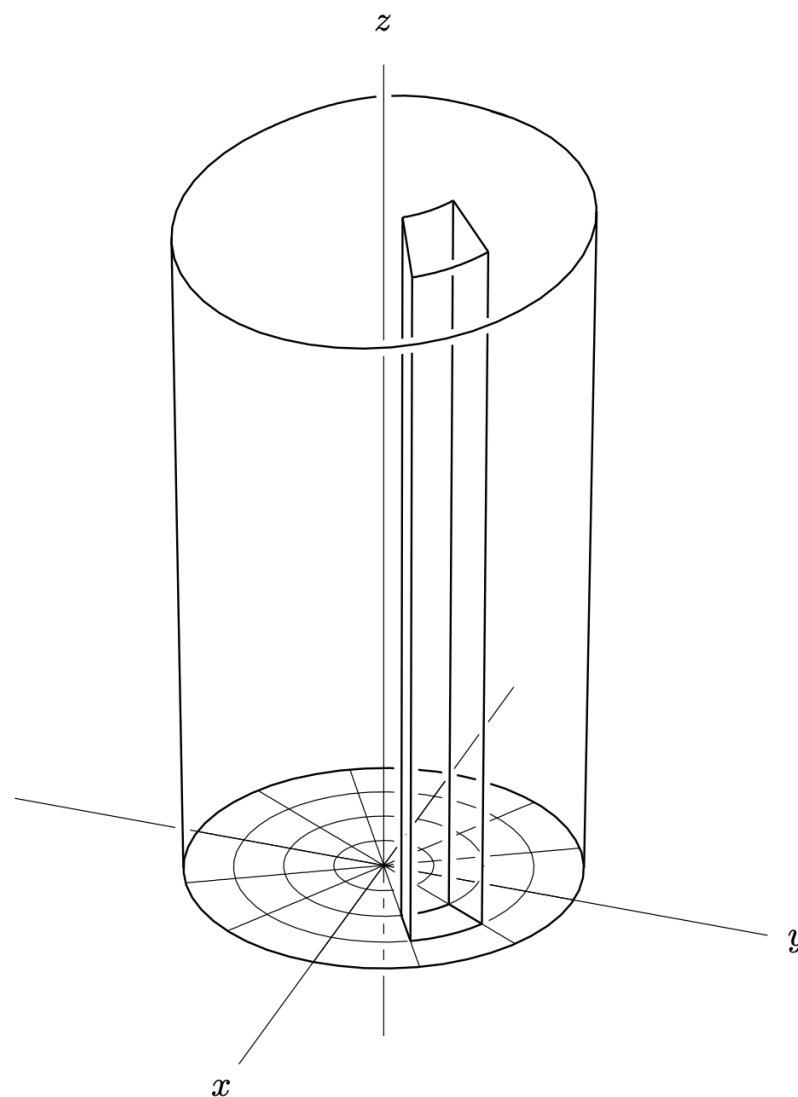
したがって

$$\iint_D (2 - x^2 + y^2) dx dy = \int \left( \int (2 - x^2 + y^2) dy \right) dx$$

=

# 配付教材例 (2012 微積分)

極座標変換



## K<sub>E</sub>Tpic のまとめ

- 高専や大学等の授業担当者がいろいろな利用法について発表 ([15],[16],[17],[18],[19],[20],[21],[22])
- 図を修正する場合には少し手間がかかる
  - (1) ソースコードを修正して実行
  - (2) 表示された図を確認してファイルを書き出す
  - (3) T<sub>E</sub>X 文書をコンパイルして図を確認
- 一連の作業をより対話的にかつ容易に実行できないかを模索するようになった

# KETCindyの開発と利用

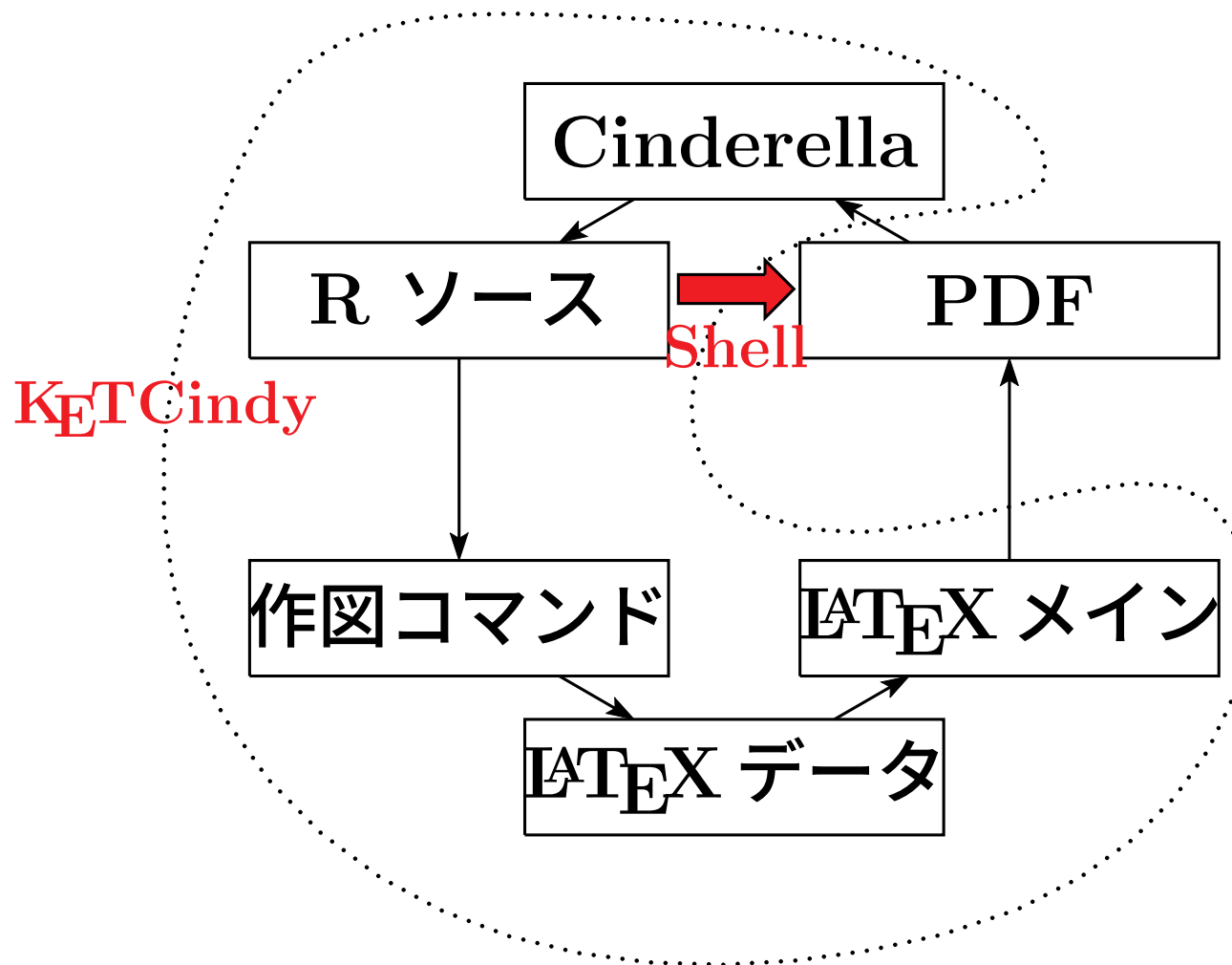
# K<sub>E</sub>T Cindy の開発経緯

Computer Algebra and Dynamic Geometry in Mathematics Education

- 簡単にかつ対話的に T<sub>E</sub>X の図を作りたい
- 2006 年動的幾何 Cinderella2 がリリースされた  
汎用的なプログラム言語 CindyScript を追加
- 2007 年から毎回 CADGME に参加発表  
Kortenkamp の WS(CADGME2012) に参加
  - ・ Cinderella の主開発者の一人
- 2014 年に彼を日本に招聘  
東邦大でセミナー, K<sub>E</sub>T Cindy が誕生

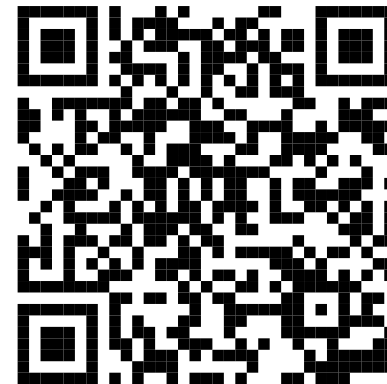


# K<sub>E</sub>T Cindy による作図の流れ



# KETCindy(デモ)

- <https://s-takato.github.io/specialclass/shibaura25/index1.html>



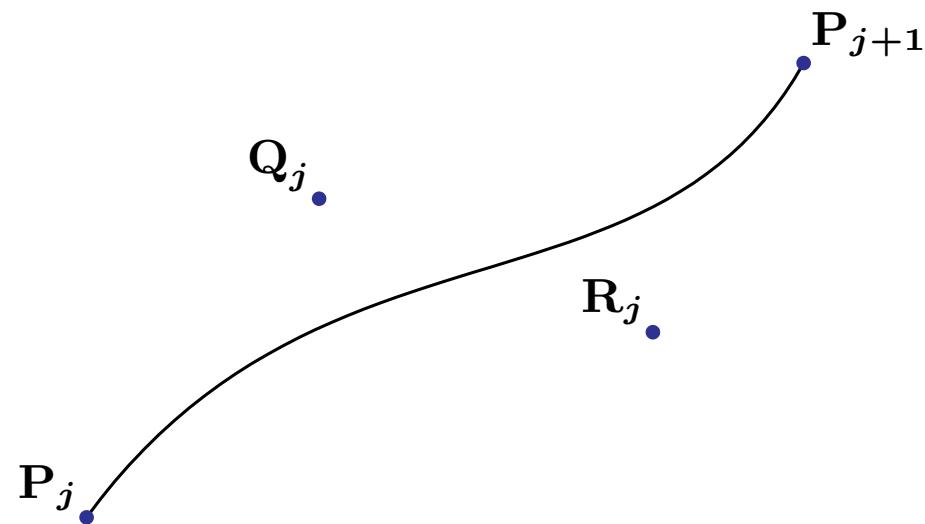
## K<sub>E</sub>T Cindy の特徴と機能拡張

- 対話的に作図できる
  - ・ 動的幾何の幾何要素を利用
  - ・ ボタンを押すだけで図コードファイル作成
- ketcindyplugin.jar を最初に読み込み
  - ・ バッチ処理により外部プログラムが実行可能
- いろいろなベジェ曲線をサポート
- 描画コード Tpic $\Rightarrow$ pict2e,TikZ もサポート
  - TikZ については Texcom でも使用可能

## ベジエ曲線 (3 次)

- 節点  $P_j, P_{j+1}$ , 制御点  $Q_j, R_j$

$$P(t) = P_j(1 - t)^3 + 3Q_jt(1 - t)^2 + 3R_jt^2(1 - t) + P_{j+1}t^3$$

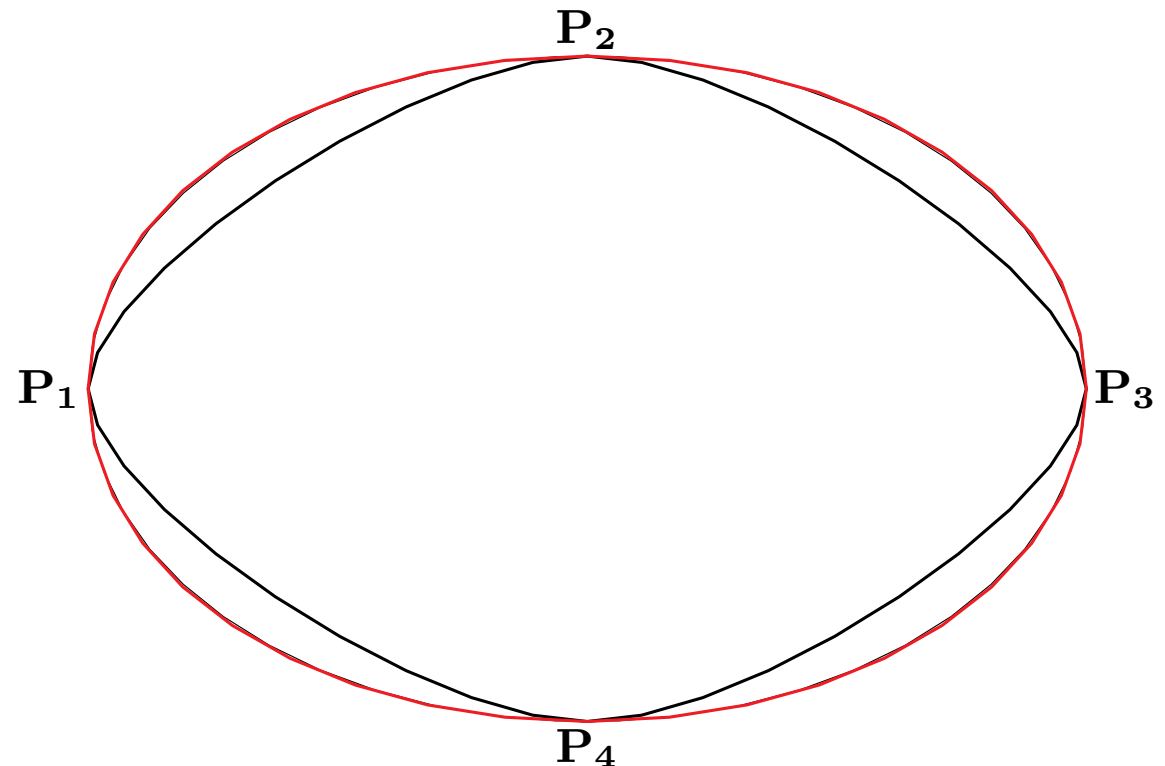


# 節点だけを指定する滑らかなベジエ曲線

楕円を近似

- Catmul-Rom スプライン (黒)
- 大島スプライン (赤)

文献 [24],[25]



# 大島スプラインの利用

文献 [29]

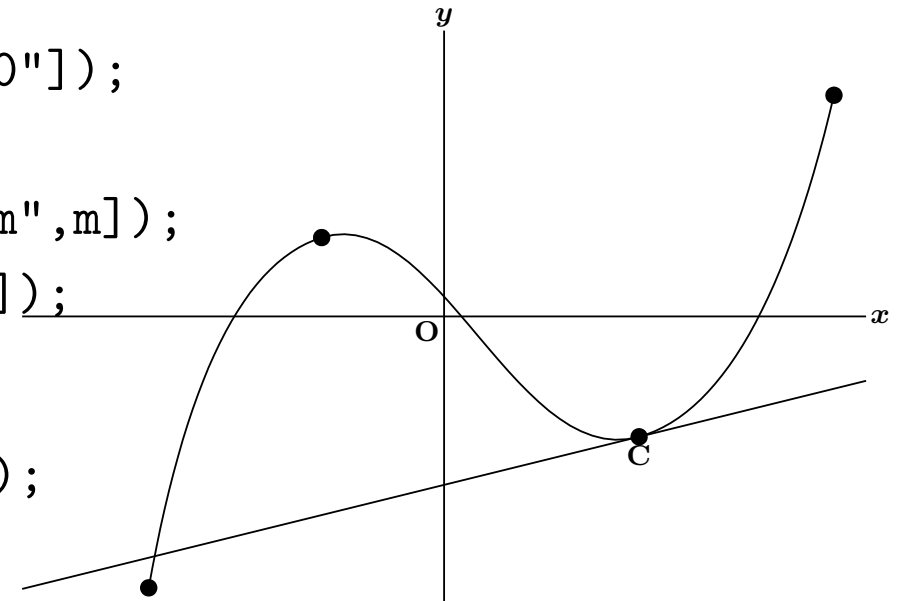
## (1) 自由曲線

```
Ospline("1", [A,B,C,D], ["Num=30"]);
m=Derivative("bzo1", "x=C.x");
fun=Assign("m*(x-C.x)+C.y", ["m",m]);
Plotdata("2", fun, "x", ["Num=1"]);
```

## (2) 曲線の交点と数値積分

```
pt=Intersectcrvs("bzo1", "gr2");
pt=[[-2.13,-1.76]]; 左側だけ
```

```
pt=Intersectcurves("bzo1", "gr2");
pt=[-2.13,-1.76],[1.43,-0.88],[1.45,-0.88]
ptx=pt_1_1;
S1=Integrate("bzo1", [ptx,C.x]);
S2=Integrate("gr2", [ptx,C.x]);
S1-S2=4.15;
```



$$\int y dx = \int y \frac{dx}{dt} dt$$

## 大島スプラインの利用 (デモ)

- 自由曲線
- 曲線の交点
- 数値積分
- <https://s-takato.github.io/specialclass/shibaura25/index2.html>



## K<sub>ET</sub>Cindy の外部呼び出し機能

- ソースファイル (スクリプト) を引数とするバッチ処理
- 結果をテキストとして書き出して K<sub>ET</sub>Cindy で利用

### (1) R

- 確率分布, ヒストグラム, 箱ひげ図

### (2) Maxima[33]

- 数式処理, 解答のチェック, 和算の解法

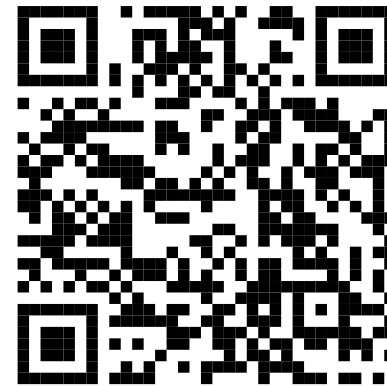
### (3) gcc[34]

- 曲面の陰線処理を高速化



## Cによる曲面描画の高速化(デモ)

- <https://s-takato.github.io/specialclass/shibaura25/index3.html>



## KeTCindy のまとめ (1)

- (1) KeTCindy は KeTpic と Cinderella の連携ツール
- (2) Github のページから無償でダウンロードできる
- (3) 大学や高専などの教員がいろいろな教材を作成
  - 「KeTCindy は、Cinderella2 を利用して図版を作るプラグインです。私は KeTpic の熱狂的なファンでしたが、とうとう KeTCindy に乗り換えることになりました」(矢野, 奈良高専)
  - 立体図形について OBJ ビューアのデータや実体モデルを作成 (濱口, 長野高専)
  - C 呼び出し機能を用いて曲線・曲面論の教材を作成 (野田, 東邦大)

## K<sub>E</sub>T Cindy のまとめ (2)

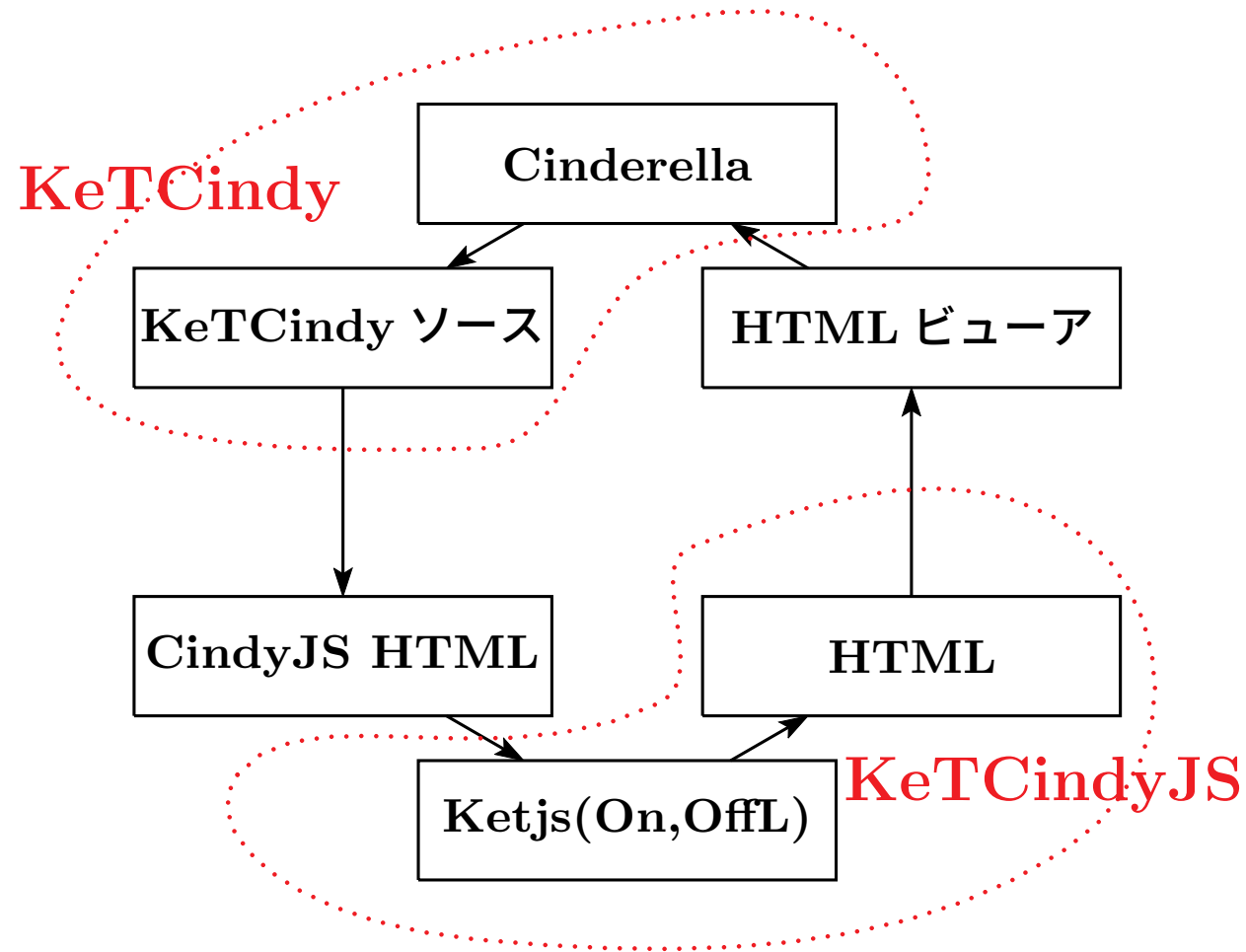
- (4) T<sub>E</sub>X を日常的に利用している教員にとっては、プリント教材やスライドを容易に作成できるツール
- (5) しかし、T<sub>E</sub>X をあまり用いないが教育経験を活かした効果的教材作成に意欲的な教員も少なくない
- (6) また、学生にとっては配付プリントの利用 (書き込みなど) はできるがやや受動的
- (7) (5) の教員や学生自身が教材を主体的に作成できるためのアプリの開発を模索するようになった

# KETCindyJSの開発

## 開発経緯

- 学生自身が対話的に動かせる教材もほしい
- 2016 年 Cindy 開発グループが CindyJS を公開 [26]
  - ・ Cindy にほぼ互換な Web フレームワーク
  - ・ 幾何要素やアニメーションも利用可
  - ・ テキスト入出力も可能 (Editable text)
- K<sub>E</sub>T Cindy コマンドが使えるようにした [27]
  - ・ CindyJS の HTML ファイルを読み込む
  - ・ K<sub>E</sub>T Cindy の関数を探し再帰的に埋め込む

# KeTCindyJS による作図の流れ



# KETCindyJS(デモ)

- <https://s-takato.github.io/specialclass/shibaura25/index4.html>



## K<sub>ET</sub>CindyJS の作成例

- T<sub>E</sub>X コンパイラは不要
  - CindyJS は KaTeX v0.8 をサポート
- ketcindy home(ketcindy sample) に多くのサンプルがある
  - 最速降下線 [31]

<https://s-takato.github.io/ketcindysample/s16ketjsmisc/offline/s1611brachistchrone2jsoffL.html>

- バーゼル問題  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2} = \frac{\pi}{6}$  [38]

<https://s-takato.github.io/ketcindysample/misc/offline/basel4mainoff.html>



## KE<sub>E</sub>TCindyJS のまとめ

- (1) KE<sub>E</sub>TCindy の主目的は T<sub>E</sub>X 文書の挿図の作成
  - (2) KE<sub>E</sub>TCindyJS は HTML を作成することが目的
  - (3) T<sub>E</sub>X に慣れていない教員や学生でも面白い教材を作成することができる
- 沼津高専生の KeTCindy 研究会が自主的に活動  
中谷財団主催の国際学会で, KE<sub>E</sub>TCindy(JS)  
で作成した HTML 教材について発表, 最優秀  
賞を受賞

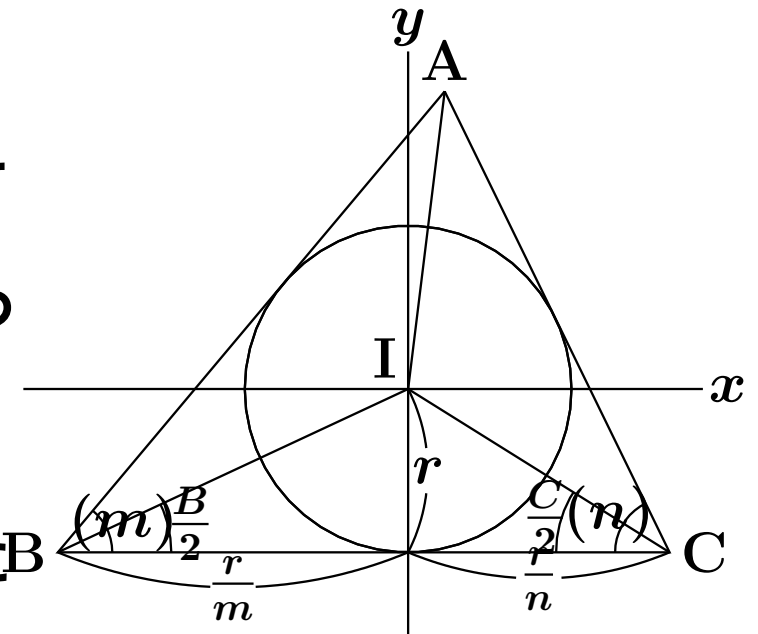
## K<sub>E</sub>T CindyJS のまとめ

- (4) 現在のところ，数式処理を用いることはできない
- K<sub>E</sub>T Cindy の Maxima 呼び出しで計算された結果を HTML に埋め込むことは可能
  - JavaScript で動く Algebrite などの利用が考えられる (今後の課題)

# $\text{KETCindy}$ による和算の解法

# MNR 法

- 和算 (算額) の問題は，結果は美しいが計算が複雑なものが多い
- 数式処理で解くことを試みた
- 三角形が含まれる問題については，根号が入る連立方程式になって，数式処理ではまず解けない
- そこで，MNR 法を考案したB  
[43]



# MNR 法による諸量の表現

- $m = \tan \frac{B}{2}, n = \tan \frac{C}{2}$ , 内接円の半径  $r$
- 三角形の諸量は  $m, n, r$  の有理式で表される

$$\text{vtxL} = B\left(-\frac{r}{m}, -r\right)$$

$$\text{vtxR} = C\left(\frac{r}{n}, -r\right)$$

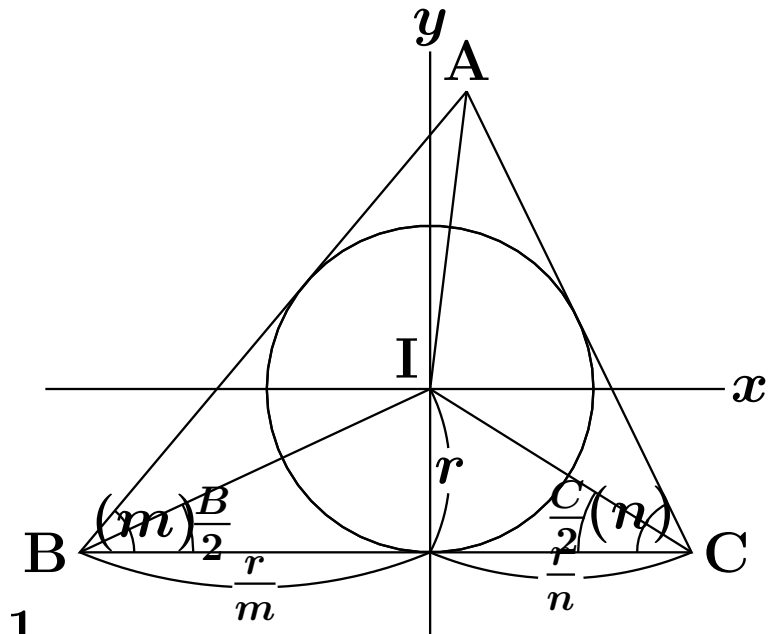
$$\text{edgB} = BC = \frac{r}{m} + \frac{r}{n}$$

$$\text{edgL} = AB = \frac{r(1+m^2)}{m(1-nm)}$$

- 角の演算

$$\text{補角 } \sup A(t) = \tan \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{1}{t}$$

$$\text{和 } \text{plusA}(t_1, t_2) = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 \cdot t_2}$$



# Maxima の MNR パッケージ

- 基本コマンド

`putT(m,n,r)`    三角形をおく

`slideT(p1,p2)`     $p1$  が  $p2$  に一致するように平行移動

`rotateT(m,p)`     $p$  を中心に  $(m)$  だけ回転

回転は  $\theta$  の正弦と余弦, よって  $\tan \frac{\theta}{2}$  で表される

- その他の汎用関数, 式の簡単化の関数などを組み込み
- Maxima のコマンド列の最初に `Mxbatch("mnr")` をおく      文献 [43]

# Japanese Theorem (II)



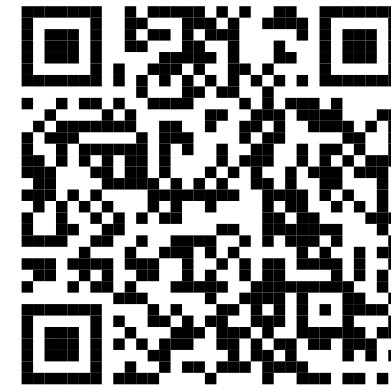
**問** 図のように三角形の中に全円, 及び 3 線を隔てて 4 円 (元, 利, 貞, 亨) を入れる. ここで全は三角形に接し, 元, 利, 貞は三角形の 2 辺と 3 線に接し, 亨は 3 線に接する. 全径が 1 寸のとき元, 亨, 利, 貞の円径の和はいくらか

**答** 4 円径の和は 2 寸

**術** 全を 2 倍すると 4 円径の和を得る

# Japanese Theorem II の証明 (デモ)

- <https://s-takato.github.io/specialclass/shibaura25/index5.html>



3 線を隔てて 4 円 (元, 利, 貞, 亨) を入れる．ここで元, 利, 貞は三角形の 2 辺と 3 線に接し，亨は 3 線に接する

5 角形に接する条件が要る



## MNR 法のまとめ

- (1) Maxima の MNR ライブラリは, K<sub>ET</sub>Cindy との組み合わせで対話性を向上
- (2) 和算は, 日本の数学史を語る上で不可欠の話題
  - ・ 数学教育でもよく取り上げられる
- (3) 実際に解くには相当の知識と計算力が必要
- (4) 数式処理の助けを借りたとしても, 自分の力で解くことで, より興味と関心を高めるだろう
- (5) MNR 法の導入として, 例えば円周角の定理の証明なども考えられる

結論

# KeTCindy

- (1) Cindy の幾何要素と CindyScript を利用
- (2) T<sub>E</sub>X 文書 (教材) に挿入する図を対話的に作成
- (3) バッチ処理で Cindy から T<sub>E</sub>X コンパイラ, 確認用 PDF 作成までを連続的に実行
- (4) 図の Cindy と T<sub>E</sub>X ファイルは本体と別に保存
- (5) 外部呼び出しが利用できる (MNR 法など)
- (6) フォルダ構成の整備 (Preining) や TeXLive のサブセット版 KeTTeX をリリース (山本) してもらった

# K<sub>E</sub>T CindyJS

## (1) 対話的な HTML 教材作成に有用

- T<sub>E</sub>X に不慣れでも多様な教材を作成できる
- 高専用教科書の Web コンテンツ

[https://www.dainippon-tosho.co.jp/college\\_math/index.html](https://www.dainippon-tosho.co.jp/college_math/index.html)

## (2) K<sub>E</sub>T CindyJS により，数式を含む課題データの送受システム KeTLTS を開発している [43]

- T<sub>E</sub>X をベースとした簡易数式表現ルールで送信
- 受信データを KaTeX で 2 次元数式に直し画面表示

## プログラミングと教育利用

- (1) 数学ソフトウェアはプログラミングによってより強力な教育ツールとなる
- (2) ライブラリ化することで汎用性が高められる
- (3) 分岐・反復 (・関数定義) が使えるようになれば、作りたい図をいろいろ作成することができる
- (4) 動的幾何は独特な動きをする (画面の状態変化があると自動的に最初に戻って変数が初期化される)
- (5) 生成 AI の応用によりプログラミングをより簡単に  
する可能性もあるが、今後の課題である

# ご清聴ありがとうございました



すべての人々に包摂的かつ公平で質の高い教育を提供し、生涯学習の機会を促進する

# 参考文献

- [1] Scilab <https://www.scilab.org>
- [2] U. リゲス, R の基礎とプログラミング技法, シュプリンガー・ジャパン, 2006
- [3] M.Goossens, LATEX グラフィックスコンパニオン, アスキー・アジソン・ウェスレイ, 2000
- [4] 藤田眞作, LATEX2 $\epsilon$  コマンドブック, S B クリエイティブ, 2003
- [5] 生田誠三, LATEX2e 文典, 朝倉書店, 1996
- [6] 奥村晴彦, LaTeX 美文書作成入門, 技術評論社, 1991
- [7] Maple V Learning Guide: for Release 5, Waterloo Maple Incorporated, 1997
- [8] J R-Gebert, U Kortenkamp, The Cinderella.2 Manual, 2006
- [9] 松崎利雄, 栃木県算額集, 1969
- [10] 平山諦, 千葉県の算額, 成田山資料館, 1970
- [11] 深川英俊, ダン・ペドー, 日本の幾何—何題解けますか, 1991
- [12] 上垣渉, Japanese Theorem の起源と歴史, 三重大大学教育学部研究紀要. 自然科学 / 三重大大学教育学部編 52, 23-45, 2001

- [13] 涌田和芳, 外川一仁, 新潟白山神社の紛失算額, 長岡高専研究紀要, 47 巻, 2011
- [14] M.Sekiguchi, S.Yamashita, S.Takato, Development of a Maple Macro Package Suitable for Drawing Fine KETPIC-Pictures, Lecture Notes in Computer Science 2006, 24-34, Springer
- [15] 山下哲, 関口昌由, 高遠節夫, Maple による図形描画用 TEX ファイルの作成について, 日本数学教育学会高専大学部会論文誌 13 巻 1 号, 31-40, 2006
- [16] 山下哲, 阿部孝之, 金子真隆, 関口昌由, 田所勇樹, 深澤謙次, 高遠節夫, KETpic の改良と教育利用, 日本数学教育学会高専大学部会論文誌 14 巻 1 号, 51-60, 2007
- [17] M.Sekiguchi, K.Kitahara, K.Fukazawa, S.Takato, A simple method of the TeX surface drawing suitable for teaching materials with the aid of CAS, Lecture Notes in Computer Science 5102, 35-45, Springer, 2008
- [18] M.Sekiguchi, T.Abe, H.Izumi, M.Kaneko, S.Yamashita, K.Fukazawa, K. Kitahara, S.Takato, A simple method of the TeX surface drawing suitable for teaching materials with the aid of CAS, Selected Papers of 6 International Conference on Computational Science and Application, IEEE, 277-283, 2008
- [19] 金子真隆, 阿部孝之, 関口昌由, 山下哲, 高遠節夫, KETpic による曲面描画と教育利用, 数理解析研究所講究録 1624, 1-10, 2009



- [20] Abe Takayuki, K.Fukazawa, M.Kaneko, K.Kitahara, H.Koshikawa, S.Yamashita, S.Takato, Migration of KETpic to Scilab and Comparison of Scilab with other CASs, 日本数学教育学会高専大学部会論文誌 16 巻 1 号, 97-106, 2009
- [21] S.Ouchi, S.Takato, High-Quality Statistical Plots in LaTeX for Mathematics Education Using an R-based Ketpic Plug-Ins, Proceeding of the 15th ATCM Conference-Kuala Lumpur, 265-275, 2010
- [22] M,Kaneko,,S.Takato, The effective use of LATEX drawing in linear algebra, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, vol.5-2, 129-148, 2011
- [23] 高遠節夫, KETCindy の開発について, 数理解析研究所講究録 1978, 173-182, 2015
- [24] 大島利雄, ベジエ曲線による曲線近似とその応用, 数理解析研究所講究録 2054, 96-104, 2017
- [25] Oshima T., Drawing Curves, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, edited by Y. Dobashi and H. Ochiai, Mathematics for Industry, 24, 95-106, Springer, 2016
- [26] Gagern M., Kortenkamp U., Gebart J., Strobel M., CindyJS—Mathematical Visualization on Modern Devices—, ICMS 2016, LNCS 9725, 319–334, Springer, 2016

- [27] 高遠節夫, KeTCindyJS の開発と教育利用, 数理解析研究所講究録 2142, 123-132, 2019
- [28] S.Takato, A.Vallejo, A.Prokopenya, KeTCindy/KeTCindyJS – a bridge between teachers and students, Computer Algebra Systems in Teaching and Research,ISSN 2300-7397.VIII,132-146, 2019
- [29] S.Takato, J.Vallejo, Using Oshima Splines to Produce Accurate Numerical Results and High Quality Graphical Output, Mathematics in Computer Science 14 (2), 399–413, Springer, 2020
- [30] S.Takato, What is and How to Use KeTCindy-Linkage Between Dynamic Geometry Software and Graphics Capabilities-, Mathematical Software-ICMS2016, 371–379, 2016
- [31] S.Takato, Brachistochrone Problem as Teaching Material-Application of KeTCindy with Maxima-, ICCSA, 251-261, Springer, 2017
- [32] 高遠節夫, TEX による教材作成環境の充実, 数理解析研究所講究録 2022, 118-127, 2017
- [33] S.Takato, A.McAndrew, J.Vallejo, M.Kaneko, Collaborative Use of KeTCindy and Free Computer Algebra Systems,Mathematics in Computer Science 11 (3-4), 503-514,Springer,2017
- [34] S.Takato, A.Vallejo, Interfacing free computer algebra systems and C with KETCindy, Computer Algebra Systems in Teaching and Research, ISSN 2300-7397.VI, 172-185, 2017

- [35] 西浦孝治, 高遠節夫, KetCindy による数学教材の作成とその教育効果の検証, 数理解析研究所講究録 2067 177-182, 2018
- [36] 野田健夫, 高遠節夫, KeTCindy の C 呼び出し機能と曲線・曲面論の教材の作成, 数理解析研究所講究録 2067, 132-141, 2018
- [37] 高遠節夫, 北本卓也, 濱口直樹, テキストをベースとした LMS の利用と HTML 教材の作成, 数理解析研究所講究録 2208, 58-67, 2021
- [38] 細谷大輔, 岡田裕紀, 鈴木雄大, Basel problem visualized by GeoGebra, 城西大学数学科数学教育紀要 2 巻, 1-7, 2021
- [39] 高遠節夫, 濱口直樹, Web 利用の理数教育に役立つ数式送受システム開発, 数理解析研究所講究録 2178, 67-76, 2021
- [40] 高遠節夫, 濱口直樹, 北本卓也, KeTMath による課題送受・採点処理・結果分析と授業実践, 数理解析研究所講究録 2236, 90-99, 2022
- [41] 高遠節夫, 濱口直樹, 北本卓也, 1 次元表現ルールに基づいた数式の送受と授業実践, 城西大学数学科数学教育紀要 4, 23-34, 2022

- [42] 西浦孝治, 高遠節夫, 数学教育における KeT-LMS の効果的活用 , 数理解析研究所講究録 2273, 192-201, 2023
- [43] S. Takato, Hideyo Makishita, A Method to Prove Japanese Theorems and Others Appeared in Wasan Using Maxima, SCSS 2024, LNAI 14991, 57-78, 2024
- [44] S. Takato, H. Makishita, Development of a Question Distribution and Answer Collection System for Mathematics Classes Using Only One Line of Text, ATCM2024, Invited paper, 67-78, 2024
- [45] 高遠節夫, 牧下英世, ブレンド型授業における KeTLMS の利用—多様で柔軟な出題形式を可能とするシステムの模索—, 2024 (数理解析研究所講究録に掲載予定)