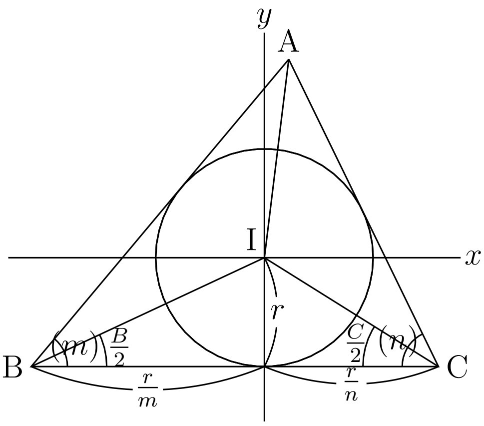
MNR 法の使い方

2025 年 2 月 14 日

MNR 法は，三角形について 2 底角の半角の正接 m, n と内接円の半径 r で諸量を m, n, r の有理式で表す方法である．すなわち，$m = \tan\frac{B}{2}, n = \tan\frac{C}{2}$ および内接円の半径を r とおく．



このとき，$\mathrm{B}(-\frac{r}{m},\ -r),\ \mathrm{C}(\frac{r}{n},\ -r)$ となる．頂角 A については

$$\tan\frac{A}{2} = \tan\frac{\pi - B - C}{2} = \cot\frac{B+C}{2} = \frac{1-mn}{m+n}$$

となる．また，頂点 A の座標も直線 AB, AC の交点としてやはり $m,\ n$ の有理式で求められる．

$$\left(\frac{r(n-m)}{1-mn}, \frac{1+mn}{1-mn}\right)$$

なお，通常は底辺を下側にとるが，その場合は $1 - mn > 0$ となる．

辺 BC の長さは $\frac{r}{m} + \frac{r}{n}$ であり，他の辺も同様に計算される．

$$\mathrm{AB} = \frac{r(1+m^2)}{(m(1-mn)},\ \mathrm{AC} = \frac{r(1+n^2)}{(n(1-mn)}$$

外心，外接円，重心，垂心，傍心，傍接円，三角形の面積なども $m,\ n$ の有理式で表される．

MNR 法では半角の正接が重要となる．そこで，$\alpha\ (-\pi < \alpha < \pi)$ について，$\tan\frac{\alpha}{2} = t$ となる α を (t) と表すことにする．すなわち，$\alpha = 2\tan^{-1} t$ である．例えば，

$$(1) = \frac{\pi}{2},\ (\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3},\ (\sqrt{2}) =$$

1 MNR 法のライブラリ

1.1 3 つの基本関数と大域変数

putT(m,n,r)	角 $B,\ C$ がそれぞれ $(m),\ (n)$ で内心が原点の三角形をおく．
slideT(pt1,pt2)	pt1 が pt2 に一致するように平行移動する．
rotateT(m,pt)	pt を中心に (m) だけ回転する．

これらを実行すると，頂点，辺の長さ，５心などが次の大域変数に代入または変更される．

頂点	vtxT, vtxL, vtxR

辺	edgB, edgL, edgR
内心, 外心	inC, inR, cirC, cirR
垂心, 重心	ortC, barC
傍心, 傍接円	exCa,exRa,exCb,exRb,exCc,exRc
面積 S と s	area, halfPer ($s = \frac{a+b+c}{2}$)

これらのうち，頂点以外は putT だけによって決定される．

1.2 汎用変数

$\alpha = (t)$ の補角 $\pi - \alpha$ は $\tan\frac{\pi-\alpha}{2} = \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{t}$ より $(\frac{1}{t})$ と表される．同様に．加法定理によって，余角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ は $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1-t}{1+t}$ となることなどから，次の関数を定義する．

補角	supA(t) (:=1/t)
余角	comA(t) (:=(1-t)/(1+t)
角の和	plusA(t1,t2) (:=(t1+t2)/(1-t1*t2))
角の差	minusA(t1,t2) (:=(t1-t2)/(1+t1*t2))

それ以外にも，以下のような汎用的な関数が定義されている．

頂角	angT(m,n)
numer(f)	方程式 (=0) の分子を因数分解 :=factor(num(ratsimp(f)))
frev(eq,rep)	eq に rep を代入して分数式を簡単化
frevL(eqL,rep)	リスト eqL に rep を代入して分数式を簡単化
frfactor(eq,rep)	eq に rep を代入して分数式を因数分解して簡単化)
nthfactor(pol,k)	多項式の k 番目の因子を返す (望む結果にならない場合も)
dotProd(v1,v2)	内積
crossProd(v1,v2)	外積
lenSeg2(p1,[p2])	p1 [p2-p1] の長さの平方
meetLine(pts1,pts2)	2 線分の交点 (pts は 2 点のリスト)
edge(A,B)	辺 AB(frfactor で簡単化)
edg2m(c,a,b)	三角形 ABC において，頂点 C の m の値
cos2m(c)	cos の値が c である角の m の値

2 Maxima のコマンドと関数

- 代入はコロン (= ではない)　(ex) A:vtxT
- リストは [ ] で囲む．(ex) eqL:[s1,s2]; eqL[1] (=s1)
- 方程式を解く
  単独の方程式　solve(eq,x)　(注) 方程式に=はつけない
  連立方程式　algsys(eqL,[x,y])　(solve でも解けることもある)
  解は　sol:[x=a1, x=a2], [[x=a, y=b] など
  解を代入するには，frev や frevL を用いる
  eq:x-a; sol:solve(eq,x); x:frev(sol)
- partfrec　部分分数分解

3 Cindyのスクリプト例

```
 cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[ //mnrライブラリを読み込む
      //以前のスクリプト，例えば，cmdL1に追加する場合は，concat(cmdL1,[
 "putT(m,n,r); slideT(cirC,[0,0])",
 "aA:angT(m,n)", //頂角 (これが定数であることを示す)
 "eq1:edgB-a; eq2:cirR-R",
 "sol:solve([eq1,eq2],[n,r])",
 "v:frevL([vtxT,vtxL,vtxR,n,aA],sol[2])",
 "A:v[1]; B:v[2]; C:v[3]; n:v[4]; aA:v[5]",
 "end"
]);
var1="sol::A::B::C::n::aA"; //値が返される変数文字列(リストに変換される)
if(contains(Ch,1), //Ch=[1]の場合(画面のボタンで選択)
 Nchoice(1,0..4);Setfiles(Namecdy+"1"); // 画面に進行のボタンをおいた場合
 CalcbyMset(var1,"mxans1",cmdL1,[""]); // Maximaを実行
       //var1の各変数に結果の数式(文字列)が代入される
 R=3; a=4; m=tanhalf(80); //仮の値
 v=Parsev("A::B::C"); //A,B,Cを評価して，リストにする
 Listplot("1",v_[1,2,3,1]); //三角形を描く
 Circledata("1",[[0,0],R]); //外接円を描く
);
```