

KETpic の拡張と教育における有用性

高遠 節夫* 山下 哲 阿部 孝之 金子 真隆

東邦大学薬学部

木更津工業高専

木更津工業高専

木更津工業高専

関口 昌由 田所 勇樹 深澤 謙次

木更津工業高専

木更津工業高専

木更津工業高専

1 はじめに

高専や大学初年級で数学・数理科学の教育を担当する者が、印刷配付教材をワープロなどを用いて自作するに当たって、数式が容易に入力できることは欠かせない条件である。また、関数のグラフなど適切な図を挿入することも、内容の説明や理解のためには必要不可欠といってよい。数式入力については、ワープロ（Word など）と数式エディタ（MathType など）の組み合わせも考えられるが、頻繁に現れる数式入力の手間と出来上がりの数式の美しさという点で $\text{T}_\text{E}\text{X}$ が格段に優れており、日常的に馴染んでいさえすれば、 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ の利用が最善の選択といってよく、実際上も用いられることが多い。しかし従来 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ で図を挿入するにはかなりの作業量を要し、苦勞することが多く、教材作成において挿図を躊躇または断念することも少なくなかった。通常は、eps ファイルを作成し `\includegraphics` で読み込むという手順がとられるが、

1. フォントが異なるなど本文との統一性が失われる。
2. 授業に即応した柔軟な可変性が求められる教材作成のためには、eps ファイルの作成と読み込みに手間がかかり過ぎる。
3. eps ファイルのサイズが一般には大きくなり、また dvi ファイルと別に保存しなければならない。

などの問題がある。これとは別に、picture 環境を開き作図コマンドを直接書き込む方法もあるが、コマンド自体がわかりにくい上に、プリミティブな図形要素しか作図できないため、関数のグラフなどを描くには不向きである。また、初等数学プリント作成 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ マクロ集 `emath` は使いやすい優れたソフトであるが、グラフ描画については、基本的な関数しかなく関数記述が面倒である点で大差はない。Windows 上で動くソフト WinTpic は、画面上で作図して得られるデータから Tpic コード列からなるファイルを作成し、`\input` により、ソースファイルに読み込む、と

*takato@phar.toho-u.ac.jp

いう方法を取り、WYSWYG であることや関数のグラフが描画できる点で、長い間バージョンアップされていないにも関わらず、現在でも利用者が多い優れたソフトである。しかし、

$$\sum_{n=1}^{50} \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2}, \int_0^x \sin(\sin t) dt$$

など、和記号や積分で表される関数のグラフは描けないこと、空間曲線に未対応、節点数が少なく不正確、などの点から、教材作成にとってはやはり不十分であった。そこで、著者らは数式処理システム (CAS) のマクロパッケージ KETpic の開発を進め、2006 年に Maple 版 (version 1) を完成させた。また、2007 年には、Maple 版の改良とともに、Mathematica への移植を進め、9 月に Maple 版、Mathematica 版とも version 2 として次の web サイトに公開した。

<http://www.kisarazu.ac.jp/~masa/math/>

KETpic は CAS で得られるグラフィックデータから Tpic コマンド列からなる T_EX 図ファイルを生成する。また、グラフィックデータ作成のためのコマンドや文字書き込みのコマンドが組み込まれている。T_EX のソースファイルには `\input` で読み込み、dvi での表示結果を見ながら CAS と T_EX (コンパイラ, dvi ビューア) を行き来して図を仕上げていくことになる。そのため、図の作成・修正が容易である上に、次のような特徴を持っている。

1. 図が違和感なく入る (本文との統一性が保たれる)。
2. Tpic を用いている関係で、モノクロ線画だが正確できれいな図ができる。
3. CAS の豊かな表現力を生かした図の作成が可能である。
4. Tpic コマンドの pn, pa, fp, ip, sh のみを使用しているため、dvi に依存することが少ない。

KETpic を用いれば、臨機応変な教材作成ばかりでなく、以上のような特徴により、挿図の効果をより的確に生かした教材の作成が可能になると言ってよい。以下、KETpic の基本的な用例から始め、教育で有用と思われる挿図の作成例のいくつかを紹介したい。

2 図の作成手順

KETpic は Windows, Macintosh, Unix のいずれでも使用できるが、本稿では、使用環境は Windows と Mathematica、作業フォルダを `c:/work` として作成手順を説明する。

1. Mathematica を立ち上げ、KETpic を読み込む

```
Get["c:/work/ketpic5.m"]; (* v6 の場合は ketpic6.m *)
```
2. Mathematica でグラフィックデータを作成する

```
setwindow[{-5,5},{-1,3}];  
f:=Integrate[Sin[Sin[t]],{t,0,x}];  
gd1=plotdata[f,{x,XMIN,XMAX}];  
gd2=listplotdata[{{XMIN,2},{XMAX,2}}];
```
3. グラフィックデータを T_EX の図ファイルとして書き出す

```
openfile["c:/work/fig.tex"];
```

```

openpicture["1cm"];
drwline[gd1,gd2];
htickmark[Pi, "\\pi", -Pi, "-\\pi"];
vtickmark[2,"nw","2"];
closepicture[1];
closefile[];

```

4. $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ソースファイルに読み込む

```

\documentclass[a4]{article}
\newlength{\Width}
\newlength{\Height}
\newlength{\Depth}
\begin{document}
\input{fig.tex}
\end{document}

```

以上により、次のグラフが作成される。

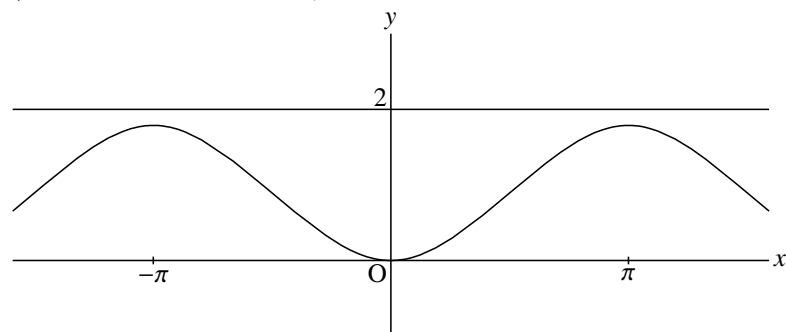


図 1: $\int_0^x \sin(\sin t) dt$ のグラフ

上記の手順 2, 3 で, Mathematica のコマンドは大文字で始まるのに対して, 小文字で始まるものはすべて KETpic のコマンドである。まず, 手順 2 の setwindow は描画領域を設定している。また, 手順 3 のコマンドについては

openpicture	picture 環境を始める (unitlength=1cm とする)
drwline	グラフィックデータを実線で描く
htickmark	横軸に目盛りを書き入れる ($\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ コマンドは \backslash で始める)
vtickmark	縦軸に目盛りを書き入れる ("nw" により位置を左上に指定)
closepicture	picture 環境を終える (座標軸を描く)

である。なお, KETpic では $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ の距離変数 $\backslash\text{Width}$, $\backslash\text{Height}$, $\backslash\text{Depth}$ を文字書き込みに使用するため, 手順 4 のように ソースファイルのプリアンブルに宣言しておく必要がある。

KETpic で図の修正が容易なのは, CAS ファイルと $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ファイルを同時に立ち上げておいて, (1) 手順 2 または 3 で必要な修正を施して実行し, (2) $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ に切り替えてコンパイルする, とい

う 2 つのステップで済むことによる。すなわち、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 文書ファイルについては修正の要はなく、CAS ファイルの修正後は単に `shift-return` を押していけばよいからである。実際の使用感からすれば、CAS と $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ が一体化して、`dvi` ビューアがあたかも CAS の描画ソフトとして動いているかのようである。また、`Tpic` の基本単位が 1 ミリインチ (すなわち 1000dpi) であることと、コマンド `openpicture` が $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ のすべての長さ単位をサポートしていることで、正確で美しい図を描くことができる。

3 教育における応用例

数学・数理科学教育の観点からすれば、`KETpic` はモノクロ印刷配付教材の作成に適していることが最大の利点であり、次のような教育効果が期待される。

1. 配付された図を見てじっくり考えることにより、反復によるイメージの定着が図られる。
2. 学生自身の想像力を刺激して、より発展的な内容につながる自由な発想を生む。
3. 正確な図を実測することで概念の理解、法則性の発見につながる。

以下、そのような挿図の例を `KETpic` のコマンドともに紹介する。

3.1 ベクトルの内積

ベクトルの授業では、和・実数倍などの後に内積を導入するが、初学者にとっては内積がどんな量を表すのかがとらえにくく、理解させるのに苦労することが多い。そこで、図 2 の教材を配付して作図によって内積を求めさせた。ただし、垂線 (破線) と定規は学生の作業であり、当然ながら印刷されていない。単位長を 1cm にしてあるので、実測により $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1.6 \times 5 = 8$ と求めることができる。なお、図 2 の作成には `dashline` (破線) と `arrowline` (矢印) が用いられている。

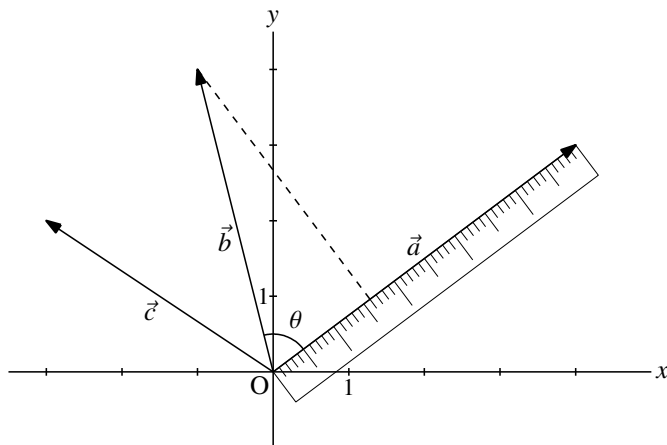
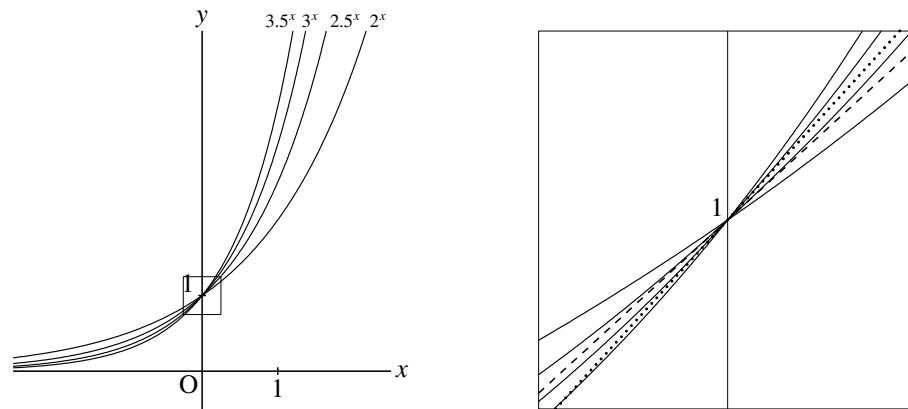


図 2: 作図による内積の計算

3.2 指数関数

図 3 は $x = 0$ での接線の傾きが 1 になることから定数 e を導入する方法を採用したときの教材である。 2^x から 3.5^x のグラフを描いているが、左図では線が密集しているためわかりにくい。

そこで、右図では $(0, 1)$ 付近だけを 10 倍に拡大して実際に接線を引かせた。dashline (破線) と dottedline (点線) は学生の描くべき接線であるが、丁寧に描くと 2.5^x , 3^x の接線が正方形の頂点で分たれる。右図の作成のためには、setwindow (描画領域の指定) と openpicture["10cm"] (単位長の指定) を変更するだけでよく、図の修正が容易である KETpic の特徴が活かされている。

図 3: 指数関数と e

3.3 フーリエ級数

フーリエ級数は工学系の応用数学で必ずとり上げられるが、図 4 は次の周期関数の有限フーリエ級数 $f_N(x)$ の $N = 5, 20$ の場合についてのグラフを描いて、収束のようすを示したものである。

$$f(x) = \begin{cases} -2 - x & (-1 < x < 0) \\ 2 - x & (0 < x < 1) \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{2(2 - (-1)^n)}{n\pi} \sin n\pi x$$

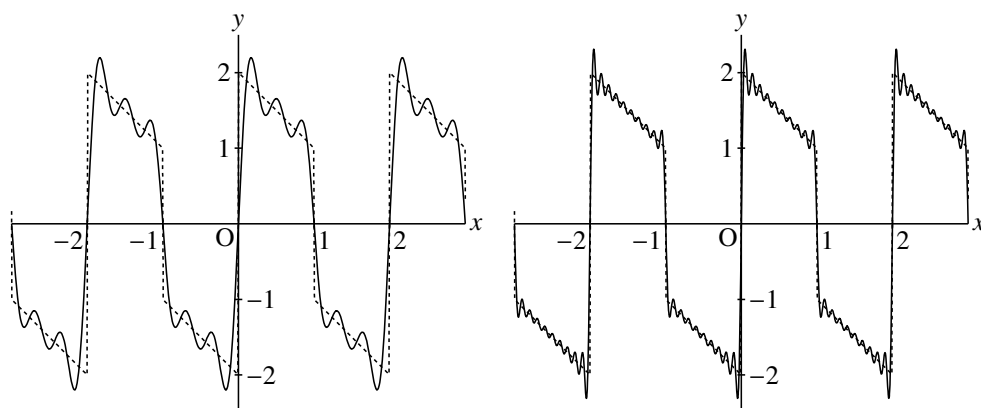


図 4: フーリエ級数の収束

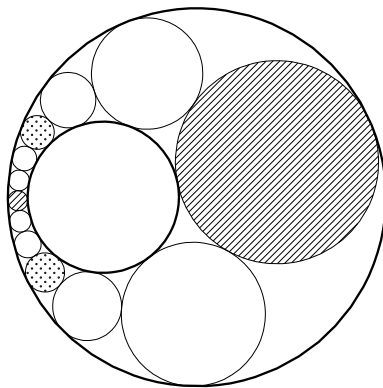
このように和記号で表される関数のグラフは CAS が得意とするところである。

3.4 和算の環円問題

江戸時代の和算家は円が相接する問題を好んで扱っており、複雑な計算により、きれいな結果を得ている。図 5 の環円問題はその代表的な例で、2 個の円の間に相接する円を次々に描いていき、最初の円と再び接するようにする問題である。そのための条件として、2 円の半径を R, r 、中心間の距離を p 、環円の個数を N とおくと

$$\frac{(R-r)^2 - p^2}{4Rr} = \tan^2 \frac{\pi}{N}$$

という Steiner の公式がほぼ同時期に得られているが、和算家たちは、「 N が偶数のとき、正対する円の半径の逆数の和は一定」との驚くべき定理を発見している。ここで、「正対する」とは図 8 で内部を斜線またはドットで描かれている 2 円の関係である。図の右にある表は逆数の和を実際に求めたもので、KETpic では hatchdata (斜線塗り), dotfilldata (ドット塗りつぶし) ができる上に、このような数式、表などをコマンド openphr, closephr (複数行からなる数式等の定義) により図の中に直接書き入れることができる。また、著者らは、CAS により円の半径と中心を求める一般公式を得ており、それを用いて描いているため、接円が正確である。この問題は、実際の教材というよりも数学史の話題の 1 つとして好適である。



$$\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+6}} = \text{constant}$$

i	r_i	r_{i+6}	$1/r_i + 1/r_{i+6}$
0	1.343486	0.131361	8.356922
1	0.736085	0.142890	8.356922
2	0.366523	0.177665	8.356922
3	0.222881	0.258383	8.356922
4	0.162273	0.455695	8.356922
5	0.136862	0.952112	8.356922

図 5: 環円に関する定理

4 空間図形の描画

KETpic には既に version 1 において空間曲線（または点）の平行投影 projpara と一点投影 projpers があったが、version 2 ではさらに、2 曲線を射影したとき交差点で下側の曲線を切って表す方法（以下、この方法により作成された図をスケルトン図という）のコマンド skeletondata, skeletonpersdata を組み入れた。スケルトン図は空間の奥行きを与えると同時に裏側を見せることができ、空間図形の描画に有効である。図 6 の左図、右図はそれぞれ非スケルトン図、スケルトン図であり、右図の方が遥かに豊かな立体表現を持っている。

図 7 は全微分の説明で頻繁に描かれるもので、従来は板書した図を学生がノートに写すことをしていたが、特に接平面を描くのに苦勞していた。また、図 8 は 2 重積分の応用として体積を求

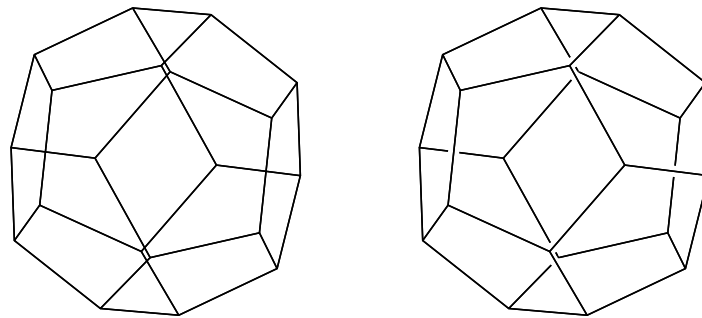


図 6: 四方六面体のスケルトン図

める代表的な問題で、これも正確に描くことは難しく、現行の微積分のテキストでもしばしば誤りの図が掲載されている。いずれの図も単色で少数の線でのみ構成されているにもかかわらず、十分な表現力をもつ。実際の授業では、学生は配付した印刷教材をノートに挟んでなぞることができる。そのことにより理解が深まることが期待され、教育的意義は大きいと考えている。

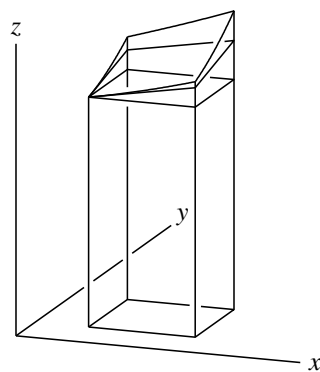


図 7: 全微分の説明

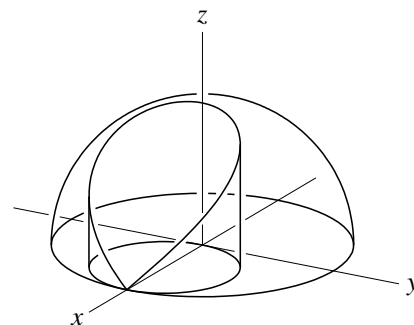


図 8: 2重積分の応用問題

本節の最後にスケルトン技法を用いたステレオグラムを掲載する (図 9)。交差法で眺めることにより生じる立体感は豊かである。

5 まとめ

KETpic を利用することにより、自作の印刷教材に出版図書にあるものと同程度以上の高品質の図を自在に挿入することができるようになった教育的意義は大きいと考える。従来の挿図の作業からくるストレスから解放され、どんな図がより高い授業効果を期待できるかを考えることに集中できるようになったのである。初期の Maple 版のみの状態から発展して改良を繰り返す、加えて Mathematica 版が完成したことにより、幅広いユーザーが KETpic を利用できるようになった。実践例や応用例、さらには新たな利用法の蓄積も進み、その一部は著者らの Web サイトに公開している。KETpic では CAS の利用は本質的であり、今後は、Risa/Asir, Maxima などへの移植を進める予定である。また、現在の出力コード Tpic は単色線画にほぼ限定されるに

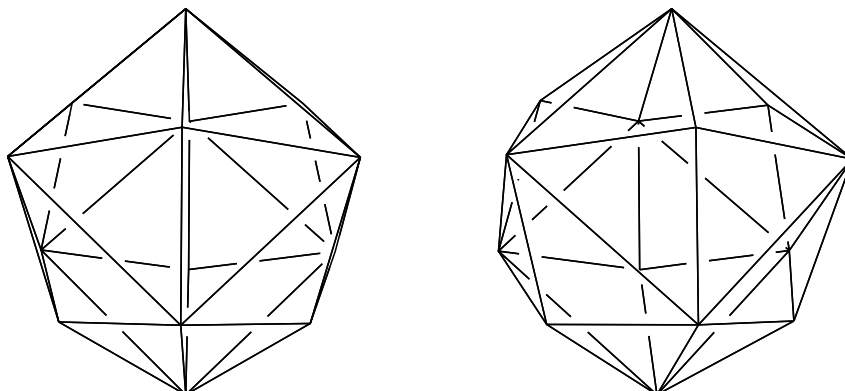


図 9: 12 面体のスケルトンステレオグラム

もかわらず、美しい線描ができる点で教育利用には必要十分といえるが、カラー化などのニーズに応じて PSTrics, pict2e の利用を検討したい。さらに、より豊かな空間曲面の表現方法を模索すること、挿図教材に対するニーズを探ること、KETpic を用いて効果的な教材を作成すること、および挿図教材の教育効果を検証すること、などにより KETpic が多くのユーザーにとって使いやすいソフトに育つことが著者らの望みである。

参 考 文 献

- [1] M. Sekiguchi, S. Yamashita, S. Takato, Development of a Maple Macro Package Suitable for Drawing Fine $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Pictures, ICMS 2006, LNCS 4151, pp.24-34, Springer-Verlag, 2006.
- [2] 山下哲, 関口昌由, 高遠節夫, Maple による図形描画用 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ファイルの作成について, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.13, No.1, pp.31-40, 2006.
- [3] 山下哲, 関口昌由, 高遠節夫, Maple による KETpic プログラミングの概要, 木更津工業高等専門学校紀要, 第 40 号, pp.63-72, 2006.
- [4] 金子真隆, 関口昌由, 田所勇樹, 山下哲, 高遠節夫, 計算幾何の一応用—数式処理による $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 描画, 日本数学会 2007 年度年会, 応用数学分科会講演アブストラクト, pp.64-65, 2007.
- [5] 山下哲, 関口昌由, 金子真隆, 田所勇樹, 高遠節夫, 図を活用した印刷教材の作成—数式処理ソフトと $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ による KETpic の開発—, 日本高専学会誌 第 1 回論文特集号, 第 12 巻 第 2 号, pp.81-86, 2007.
- [6] M. Sekiguchi, M. Kaneko, Y. Tadokoro, S. Yamashita, S. Takato, A New Application of CAS to $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ Plottings, ICCS 2007, LNCS 4488, pp.178-185, Springer-Verlag, 2007.
- [7] M. Kaneko, T. Abe, K. Fukazawa, M. Sekiguchi, Y. Tadokoro, S. Yamashita, S. Takato, CAS-aided Visualization in $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ documents for Mathematical Education, to appear in Teaching Mathematics and Computer Science.
- [8] 山下哲, 阿部孝之, 金子真隆, 関口昌由, 田所勇樹, 深澤謙次, 高遠節夫, KETpic の改良と教育利用, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.14, No.1, pp.51-60, 2007.