

# KETpic の改良と教育利用

山下 哲<sup>1</sup>      阿部 孝之<sup>\*1</sup>      金子 真隆<sup>\*1</sup>

関口 昌由<sup>\*1</sup>      田所 勇樹<sup>\*1</sup>

深澤 謙次<sup>2</sup>      高遠 節夫<sup>3</sup>

## Improvement of KETpic and its Availability for Education

Satoshi YAMASHITA<sup>\*1</sup>   Takayuki ABE<sup>\*1</sup>   Masataka KANEKO<sup>\*1</sup>

Masayoshi SEKIGUCHI<sup>\*1</sup>   Yuuki TADOKORO<sup>\*1</sup>

Kenji FUKAZAWA<sup>\*2</sup>   Setsuo TAKATO<sup>\*3</sup>

**Abstract:** Since  $\text{\LaTeX}$  has the advantages of beautiful and rich mathematical expressions, many mathematicians and mathematics teachers make use of it. But it requires some effort to insert pictures into  $\text{\LaTeX}$  documents appropriately. Many  $\text{\LaTeX}$  users will do so with the data of pictures formatted into the style of EPS file. This method is not satisfactory for us. The reasons are that the size of EPS file is large, that mathematical expressions are poor, etc. The authors have been developing *KETpic* as a macro package of Maple, a Computer Algebra System (CAS), to insert fine pictures in  $\text{\LaTeX}$  documents. Using  $\text{\LaTeX}$ , Maple and KETpic together, we can provide teaching materials with figures which are effective for mathematical education. In this paper, we illustrate the educational effect of using teaching materials with figures drawn with KETpic. Also we introduce three improvements of KETpic, the reinforcement of hatching, the reinforced expression of solid figures, and the transplantation of KETpic to a CAS besides Maple.

## 1 はじめに

組み版ソフト  $\text{\TeX}$  は数式表現に優れており、自然科学系の研究者や教育関係者によく用いられている。木更津高専数学科では全員が  $\text{\TeX}$  を利用しており、各人の論文や教材作成のみならず、共通試験や編入試験を作成する場合においても  $\text{\TeX}$  ファイルをやりと

---

<sup>1</sup>木更津工業高等専門学校 千葉県   Kisarazu National College of Technology

<sup>2</sup>呉工業高等専門学校 広島県   Kure National College of Technology

<sup>3</sup>東邦大学薬学部 千葉県   Toho University

りしながら作業を進めており、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  を用いることのメリットは大きい。一方、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  の短所は、文書に図を挿入するのにかなり手間がかかることである。現在、図を挿入するのによく用いられる手法の 1 つは、図を画像ファイル (EPS, JPEG, JIF, BMP など) で出力し、コマンド  $\backslash\text{includegraphics}$  で挿入するというものである。しかし、この方法では、画像ファイルの容量が大きいことや、図の修正がしづらいなどの欠点がある。また、 $\text{wintpic}$  (Windows 用の  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  図作成ソフト) や  $\text{emath}$  (数学教育用の  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  マクロ) を利用するという方法もあるが、前者の場合は、複雑な関数のグラフが描きにくい、精度が粗い、正確な空間図形が描けない、等の問題があり、後者の場合は、コマンド入力しにくい、関数のグラフが描きにくい、斜線塗りに決定的なバグがある、等の欠点のため、使いにくく教材作成には不十分であった。

そこで、これらの欠点を改善するために、著者らは  $\text{KETpic}$  (Kisarazu Educational Tpic の略) を開発した。 $\text{KETpic}$  は数式処理システム (以下、CAS) の  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  描画用マクロパッケージであり、CAS としては、著者らが当初から用いている Maple を使用した。

$\text{KETpic}$  を用いると、次の手順で描画入り  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  文書を作成できる。

(1-1) CAS に  $\text{KETpic}$  を読み込む。

(1-2) CAS を用いて、描画を作成する。

(1-3)  $\text{KETpic}$  を用いて、作成した描画を描画用  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ファイルに保存する。

(1-4)  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  文書に描画用  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ファイルをコマンド  $\backslash\text{input}$  で挿入する。

描画用  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ファイルは容量が小さく、(1-2)～(1-4) を繰り返し行うことにより、ファイルを簡単に修正できる。 $\text{KETpic}$  を利用することにより、 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  文書に図を挿入することが容易になった。 $\text{KETpic}$  開発の経緯や  $\text{KETpic}$  の詳細な使用方法については [2], [3], [4] に記されている。また、 $\text{KETpic}$  は次のホームページにアップロードされているので、Windows の場合は  $\text{ketpicw.m}$ 、Macintosh の場合は  $\text{ketpic.m}$  (Linux の場合はいずれでも可) をダウンロードして作業用フォルダに保存することにより、 $\text{KETpic}$  を利用することができる。

<http://www.kisarazu.ac.jp/~masa/math/>

本論文の第 2 章では、 $\text{KETpic}$  を用いて作成した印刷教材を配付した教育実践について報告する。第 3 章と第 4 章では、より美しい図を描くために  $\text{KETpic}$  を改良した点について紹介する。第 3 章では、複雑なハッチング (斜線塗り) ができるように追加した  $\text{KETpic}$  コマンドについて述べる。第 4 章では、空間の奥行きを明確にしたスケルトンという手法を紹介する。最後に、第 5 章では、 $\text{KETpic}$  の今後の課題についてまとめる。

## 2 $\text{KETpic}$ の教育利用

数学の授業で概念を把握させるためには、正確で美しい図を示すことが重要である。例えば、複雑な関数を扱う場合や空間図形を扱う場合である。ところが、数学の授業で用いるプリントなどの印刷教材には、図を挿入したものが少ない。その理由には、図を自在にカスタマイズできないこと、図を挿入するのに手間がかかることなどが挙げられる。結局、

印刷教材に美しい図を挿入する手間を考えると、きれいに版書してノートに写させるほうを選んでしまう。このような状況を打開するために、CAS と KETpic を併用した L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 文書の作成を薦めている。KETpic は、美しい描画入り印刷教材を簡単に作成することを可能にした。

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X は数式表現に優れているため、数学の印刷配付教材を作成するのに適している。一方、L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X には、図を挿入するのに手間がかかるという欠点がある。しかし、CAS と KETpic を併用すれば、この欠点を補うことができる。CAS は正確な図を描くことができるが、その図は美しいとは限らず、自在にカスタマイズすることも難しい。そこで、KETpic を併用すると、CAS で作成した図を自在にカスタマイズし、正確で美しい図を L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 文書に容易に挿入できる。

図 1～図 4 は、応用数学「フーリエ級数」の授業で配付した印刷教材の図である。図 1 は、周期  $2\pi$  の関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x < \pi) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

のグラフである。

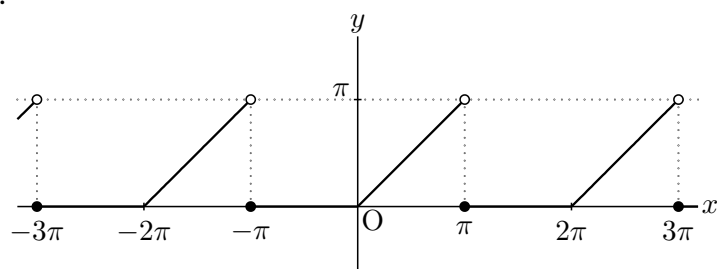


図 1

図 1 は、周期関数  $f(x)$  の式からグラフをイメージさせるのに役立つ。

はじめに、定積分を用いたフーリエ係数の計算式を使用して、周期関数  $f(x)$  の有限フーリエ級数が

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^N \left( -\frac{1}{n^2\pi} (1 - (-1)^n) \cos nx - \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right)$$

になることを計算させた。次に、級数の項数  $N$  を 5 項、10 項、50 項と増やしながら、そのグラフを示した。それらのグラフが図 2～図 4 である。

$N = 5$  のとき

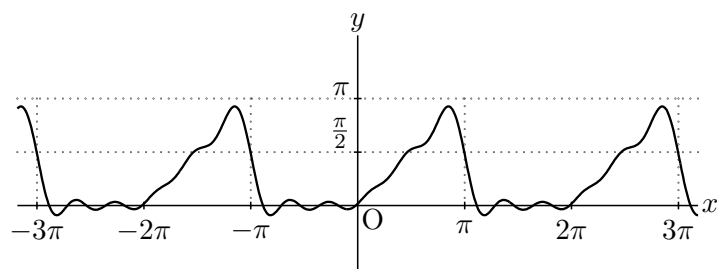


図 2

$N = 10$  のとき

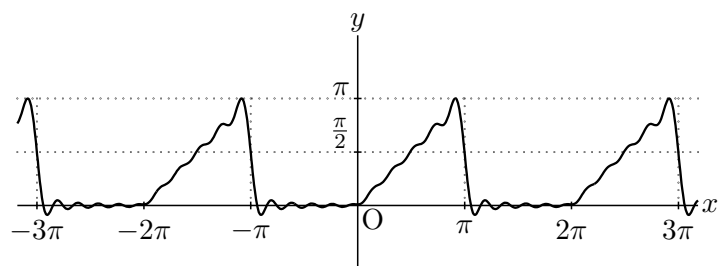


図 3

$N = 50$  のとき

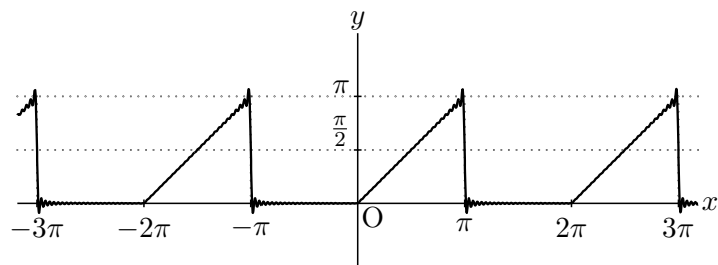


図 4

図 1～図 4 を見せながら，フーリエ級数がもとの関数  $f(x)$  の値に収束していく様子や， $f(x)$  の不連続点  $a = (2n - 1)\pi$  ( $n$  は整数) では  $\frac{f(a - 0) + f(a + 0)}{2}$  の値をとるとい  
うフーリエ級数の収束定理が成り立つことを解説した．ここで， $f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x)$ ，  
 $f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a + 0} f(x)$  のことである．

次週の授業で，上述の授業に対する学生の反応を調べてみた．木更津高専では，学生による授業評価アンケートを実施している．アンケート項目に，設問「描画入り印刷教材を使用したほうがよいですか．」を入れて，「大変よい」～「全く必要ない」の 5 段階評価で選択させたところ，約 60 % が「よい」，その他は「どちらでもよい」という結果になった．この結果からわかるように，描画入り印刷教材を配付することにより，フーリエ級数の収束について理解しやすくなったようである．このように，描画入り印刷教材を配付することから，次のような教育効果が見込まれる．

- (2-1) 図を見ることにより，概念を把握しやすくなる．
- (2-2) 図をじっくり眺めることにより，問題解決の糸口を発見しようと考察するようになる．
- (2-3) 正確な長さで描かれた図を測ることにより，概念を確認することや，問題解決の糸口を発見することが実際に体験できる．

今後は，KETpic で作成した印刷教材を用いると，このような教育効果が発揮できるかどうかについて比較検討し，評価していく必要がある．

次章から、より美しい描画を簡単に作成するために、KETpic を改良した点について紹介する。

### 3 ハッチング（斜線塗り）の強化

今まで、ハッチングを作成するために、境界となる閉曲線とその内／外部を指定していた。図 5 は、微分積分「定積分で面積を求める」授業で用いられる印刷教材の図である。授業では、問題「曲線  $y = x^2$  と直線  $y = x + 2$  で囲まれた図形の面積を求めよ。」を解かせる。図 5 を見ながら、曲線  $y = x^2$  と直線  $y = x + 2$  の交点の  $x$  座標を求めさせ、定積分を用いて斜線部分の面積を求めさせる。

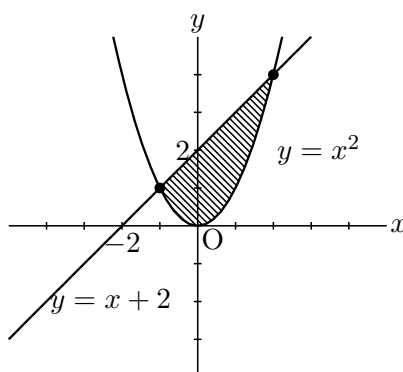


図 5

図 5 の斜線部分を作成するためには、次のように、曲線  $y = x^2$  と直線  $y = x + 2$  の交点の  $x$  座標を Maple で計算させ、KETpic コマンドを入力すればよい。

```
> solve(x^2=x+2,x);
      2, -1
> bd1:=plot(x^2,x=-1..2):
  bd2:=plot(x+2,x=-1..2):
  h1:=hatchdata("i",[bd1,bd2],-45):
```

ここで、bd1 は曲線  $y = x^2$  上にある斜線部分の境界の一部で、bd2 は直線  $y = x + 2$  上にある境界の一部であるから、[bd1,bd2] は斜線部分の境界の閉曲線を表している。"i" は、境界の閉曲線 [bd1,bd2] の内部を表している。また、-45 はオプションで、斜線の傾きを  $-45^\circ$  にすることを表している。

この方法には、交点の  $x$  座標 2, -1 を求めることや、斜線部分の境界である閉曲線を指定することなどの手間がかかる。これらの手間を省くために、次のようなオプションを追加した。

- (3-1) 斜線を引く領域を、曲線から見た方向"e", "w", "s", "n"（東西南北）の"i", "o"（内部／外部）で指定できる。
- (3-2) 斜線を引く領域を、指定した点の座標の"i", "o"で指定できる。

(3-1) を用いると、図5の斜線部分を作成するためには、次のように KETpic コマンドを入力すればよい。

```
> g1:=plot(x^2,x=XMIN..XMAX):
> g2:=plot(x+2,x=XMIN..XMAX):
> h1:=hatchdata("ii",[g1,"n"],[g2,"s"],-45):
```

ここで、 $[g1,"n"]$  は曲線  $y = x^2$  の北側の領域を表しており、 $[g2,"s"]$  は直線  $y = x + 2$  の南側の領域を表している。 $"ii"$  は、領域  $[g1,"n"]$  の内部で、かつ、領域  $[g2,"s"]$  の内部である共通部分の領域を表している。(3-1) を使うことにより、交点の  $x$  座標 2, -1 を求めることや、斜線部分の境界である閉曲線を指定することが必要なくなった。

ところが、(3-1) を用いても斜線部分を指定できない場合がある。線形代数「2次形式」の授業で、問題「不等式  $x^2 - 2xy + y^2 \geq \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$  の表す領域を図示せよ。」を解かせる。まず、境界である2次曲線  $x^2 - 2xy + y^2 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$  を作図させる。2次形式の対角化の理論を用いると、曲線  $y^2 = x$  を原点のまわりに  $45^\circ$  回転してできる曲線であることがわかる。図6の左図は曲線  $y^2 = x$  のグラフであり、右図は2次曲線  $x^2 - 2xy + y^2 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$  のグラフである。

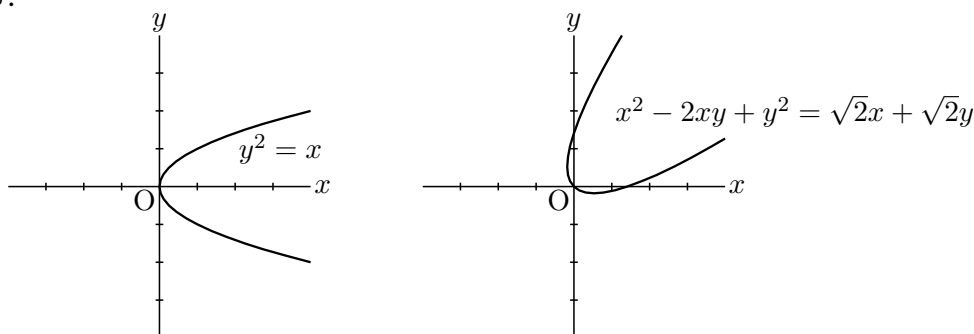


図 6

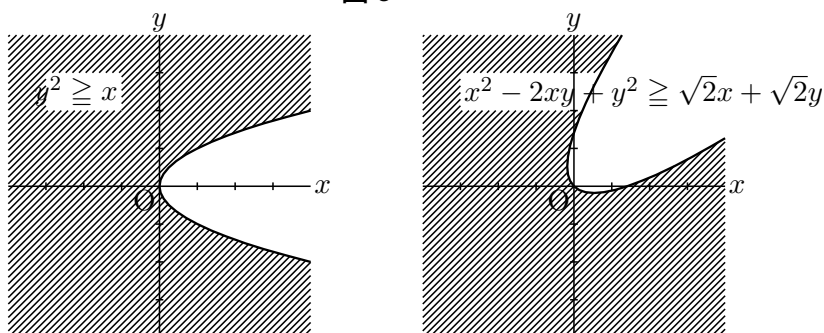


図 7

図6の左図を作成するためには、Maple の plottools パッケージのコマンド rotate を用いて、次のように入力すればよい。

```
> g1:=plot([t^2,t,t=YMIN..YMAX]):
> g2:=rotate(g1,Pi/4):
```

次に、不等式  $x^2 - 2xy + y^2 \geq \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$  の表す領域は、不等式  $y^2 \geq x$  の表す領域を原点のまわりに  $45^\circ$  回転してできることがわかるから、求める図は図7の左図のようにな

る。ここで、(3-1)を用いて、ハッチングを作成しようとすると、図8のようになる。

```
> h1:=hatchdata("i",[11,"w"]):
> h2:=hatchdata("i",[12,"w"]):
```

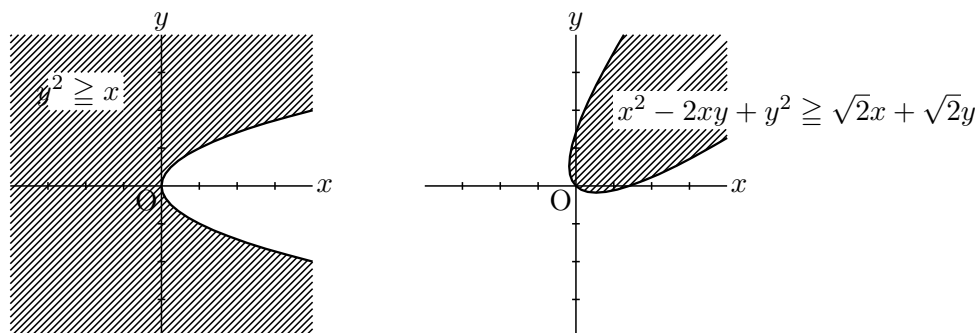


図 8

h2 のハッチングは正しく機能していないことがわかる。このような場合、(3-2)を用いて、h2 を次のように書き換えると、図7の左図のようになる。

```
> h2:=hatchdata("i",[12,[-1,0]]):
```

ここで、[-1,0] は斜線部分の領域に含まれる点の座標を表している。以上のように、(3-1)と(3-2)を用いれば、複雑な領域のハッチングを簡単に作成できる。

図5のように凸領域に斜線を引くことは難しくないが、凸でない領域に斜線を引くのに手間がかかる。図9は、微分積分「定積分で面積を求める」授業で用いられる印刷教材の図である。

図 9

曲線  $y = 2 - x^2$  と 2 直線  $y = x$ ,  $y = -x$  で囲まれた部分の面積を求める問題である。面積を求める領域を斜線部分として表すと、定積分の式が立てやすくなる。今までの手法でこの領域に斜線部分を引くには、境界線の交点の座標を求め、境界を指定しなければならない。そこで、境界の交点の座標を求めることなく、境界を指定できる KETpic コマンド `enclosing` を追加した。これを用いると、次のようになる。

```
> g1:=plot(x,x=XMIN..XMAX):
> g2:=plot(-x,x=XMIN..XMAX):
> g3:=plot(2-x^2,x=XMIN..XMAX):
> bd:=enclosing([0,1],[g1,g2,invert(g3)]):
> h3:=hatchdata("i",[bd]):
```

KETpic コマンド `enclosing` を用いて、斜線部分の境界  $bd$  を作成している。曲線  $g3$  は、斜線部分の境界  $bd$  上で 2 直線  $g1$ ,  $g2$  と逆向きであるので、KETpic コマンド `invert` で向きを反転させている。[0,1] は、斜線部分の領域内の点の座標を表している。この手法により、複雑な境界をもつ領域に斜線を引くことができるようになった。

## 4 空間の描画におけるスケルトンの導入

線形代数「空間ベクトル」の授業で、空間図形をイメージすることが難しい。図 10 は、正 8 面体 ABCDEF を表している。

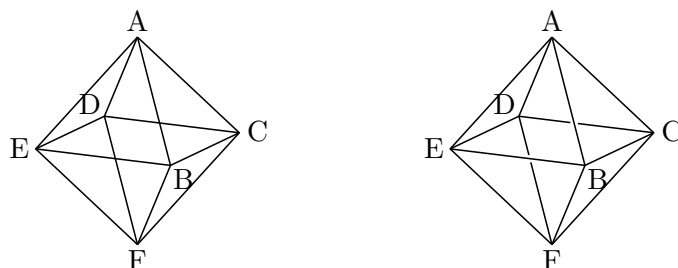


図 10

図 10 の左図では、中央の正方形の 2 頂点 B, D のどちらでも手前に見ることができる。そこで、ねじれの位置にある 2 直線を射影したときに、交差点で下側の直線を切って表す。この手法をスケルトンと呼んでいる。図 10 の右図は、スケルトンを用いて、作成したものである。中央の正方形の頂点 B が手前で、頂点 D が奥にあることがはっきり見えるようになった。

```
> f1:=Pi/2+2*sum(1/(2*k-1)*sin((2*k-1)*x),k=1..10,numpoints=400):
> g1:=plot(f1,x=XMIN..XMAX):
```

図 11 は、スケルトンの手法をステレオグラムの作成に用いたものである。Maple の plots パッケージにある polyhedra\_supported の中に、種々の多面体の例がある。図 11 の多面体は TridiminishedRhombicosidodecahedron と呼ばれるもので、これを crosseyed view によるステレオグラムにした。スケルトンによって、より立体感が増して見えるようになった。

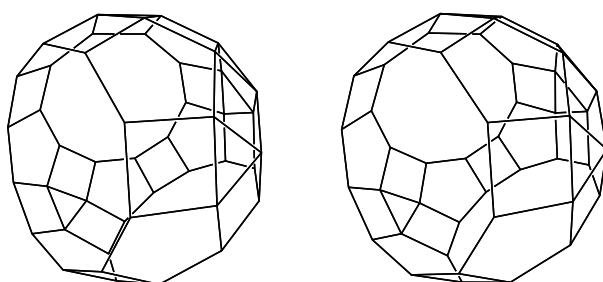


図 11

## 5 他の CAS への KETpic の移植

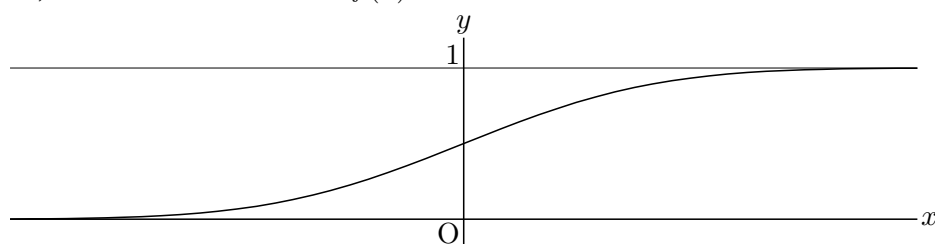
Maple 以外の CAS にも KETpic が使えるようにするためには、CAS が次のような条件を満たす必要がある。



- (5-1) KETpic を CAS にロードできる.
- (5-2) データや文字列をテキストファイルに書式付書き出しが可能である.
- (5-3) 2次元／3次元データを取り出せる.
- (5-4) グラフィックコードを生成するために、数値や文字列を操作できる.

よく利用されている CAS の中で、これを満たすものに Mathematica がある. そこで、今まで用いてきた Maple 用 KETpic を見ながら、Mple コマンドを Mathematica コマンドに置き換える作業を行い、Mathematica 用の KETpic である ketpicmath.m を作成した.

図 12 は、積分で定義された関数  $f(x)$  のグラフである.



Mathematica のワークシートで ketpicmath.m を用いて、図 12 を描くと次のようになる.

```
Get["ketpicmath.m"];
setwindow[{-3,3},{-0.2,1.2}];
fg1=plotdata[{f[x],{x,XMIN,XMAX}}];
fg2=plotdata[{1,{x,XMIN,XMAX}}];
openfile["figdistr.tex"];
openpicture["2cm"];
drwline[{fg1}];
drwline[{fg2,0.5}];
expr[{{0,1},"nw","1"}];
closepicture[1];
closefile[];
```

使い方は、Maple の場合とほとんど同じである. このように、(5-1)～(5-4) を満たす CAS であれば、Maple 用に作成した KETpic を必ず移植できる.

## 6 今後の課題

第 2 章で述べたように、KETpic で作成した描画入印刷教材を配付すると、教育効果がありそうであることがわかった. 今後、作成した印刷教材をどのような方法で用いるのか、どのような教育効果がどれくらい発揮できるのか、などについて比較検討を行っていく必要がある.

第 3 章で述べたハッチングの改良については、かなり整備されてきた. しかし、複雑なハッチングについて、完全に描画できるとは言いきれない. ハッチングについて、完全な

描画手法を開発したい．また，KETpic ユーザに様々なハッチングを試してもらいながら，ユーザが使いやすいハッチングを目指していくつもりである．

第 4 章で述べたスケルトン手法は，空間図形の描画に奥行きを与えると同時に，裏側を見せる描画であることが注目に値する．CAS の描画は，陰線処理を施したり，面を色分けしたりして，立体感を生み出しているが，裏側を見ることはできない．確かに，図を回転させて裏側を見ることができるようになっている．ところが，印刷教材として配付されるものは，図を回転させて裏側を見ることはできない．スケルトンの手法は，原始的な印刷教材に裏側を見せることを可能にした．今後は，陰線処理に限らず，どのような手法が空間図形の立体感を生み出すか模索していく必要がある．

第 5 章で述べたように，Maple 以外の CAS に KETpic が移植できることがわかった．今回は Mathematica への移植を試みたが，今後，Maxima, Matlab, Scilab, Risa/Asir などの CAS への移植を進めていく予定である．様々な CAS のユーザに  $\text{\LaTeX}$  を使用しても簡単に図を挿入できることを理解していただき，KETpic ユーザになってもらえるよう伝えていきたい．KETpic ユーザが増えれば，ユーザからの指摘により，KETpic の改良が促進される．今後も KeTpic の普及を進めていきたいと考えている．

注) eepicemu は，直線が滑らかでないなど tpic specials と比べて図の精密さが劣る．

## 参考文献

- [1] 奥村晴彦，『改訂第 4 版  $\text{\LaTeX}$  2<sub>ε</sub> 美文書作成入門』，技術評論社，2007 年  
<http://oku.edu.mie-u.ac.jp/~okumura/texwiki/>
- [2] M. Sekiguchi, S. Yamashita, S. Takato, Development of a Maple Macro Package Suitable for Drawing Fine  $\text{\TeX}$ -Pictures, ICMS 2006, LNCS 4151, pp.24-34, Springer-Verlag, 2006.
- [3] 山下哲，関口昌由，高遠節夫，Maple による図形描画用  $\text{\TeX}$  ファイルの作成について，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.13, No.1, pp.31-40, 2006.
- [4] 山下哲，関口昌由，高遠節夫，Maple による KETpic プログラムの概要，木更津工業高等専門学校紀要，第 40 号，pp.63-72, 2007.
- [5] M. Sekiguchi, M. Kaneko, Y. Tadokoro, S. Yamashita, S. Takato, A New Application of CAS to  $\text{\LaTeX}$  Plottings, ICCS 2007, LNCS 4488, pp.178-185, Springer-Verlag, 2007.