第4章　KETCindyによる和算問題の解法

4.1　はじめに

序章で述べたように，MNR 法は，三角形について 2 底角の半角の正接と内接円の半径で諸量を表す方法である．すなわち，図 4.1 の三角形において，$m = \tan\frac{B}{2}, n = \tan\frac{C}{2}$ および内接円の半径を r とおく．

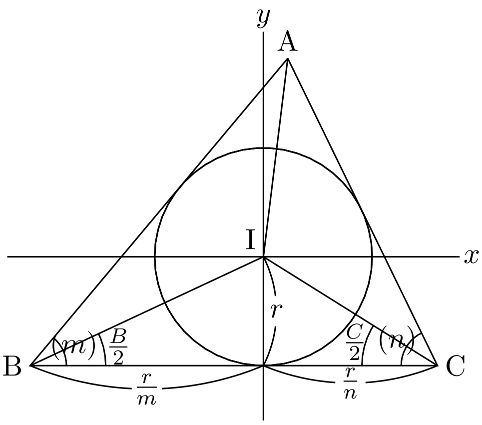

図 4.1: MNR 法

このとき，B$(-\frac{r}{m},\ -r)$，C$(\frac{r}{n},\ -r)$ となる．頂角 A については

$$\tan\frac{A}{2} = \tan\frac{\pi - B - C}{2} = \cot\frac{B+C}{2} = \frac{1-mn}{m+n}$$

となる．また，頂点 A の座標も直線 AB, AC の交点としてやはり $m,\ n$ の有理式で求められる．

$$\left(\frac{r(n-m)}{1-mn}, \frac{1+mn}{1-mn}\right)$$

なお，通常は底辺を下側にとるが，その場合は $1 - mn > 0$ となる．

辺 BC の長さは $\frac{r}{m} + \frac{r}{n}$ であり，他の辺も同様に計算される．

$$\mathrm{AB} = \frac{r(1+m^2)}{(m(1-mn)},\ \mathrm{AC} = \frac{r(1+n^2)}{(n(1-mn)}$$

外心，外接円，重心，垂心，傍心，傍接円，三角形の面積なども，同様に $m,\ n$ の有理式で表される．このことから，著者は Maple のライブラリを作成して，セミナー形式の授業において「和算の問題を解く」をテーマとして学生に使わせていた ([12],[8],[9]).

しかし，Maple はすべての学生が継続的に利用できるものではなかった．そこで，KETCindy がオープンソースの数式処理システム Maxima を呼び出す機能を持っていることを利用して，Maxima の MNR 法パッケージ `mnr.max` を作成することにした ([18]).

4.2　MNR 法のライブラリ

三角形の頂点 A,B,C の座標と辺 AB,BC,AC の長さおよび頂角 A をそれぞれ

vtxT(vertexTop), vtxL(vertexLeft), vtxR(vertexRight)

edgL(edgeLeft), edgB(edgeBottom), edgR(edgeRight), angT(angleT)

とおく．また，MNR 法では半角の正接が重要となる．そこで，α $(-\pi < \alpha < \pi)$ について，$\tan\frac{\alpha}{2} = t$ となる α を (t) と表すことにする．すなわち，$\alpha = 2\tan^{-1} t$ である．例えば,

$$(1) = \frac{\pi}{2},\ (\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

である．

$\alpha = (t)$ の補角 $\pi - \alpha$ は $\tan\frac{\pi-\alpha}{2} = \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{t}$ より $(\frac{1}{t})$ と表される．同様に．余角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ は $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1-t}{1+t}$ となる．これらのことを用いて，補角および余角を求める関数 supAng, comAng を

supAng(t) := $1/t$　　(省略形は supA)

comAng(t) := $(1-t)/(1+t)$　　(省略形は comA)

と定義した．加えて，角の和と差も組み込んだ．

plusA(t1,t2) := ratsimp($(t1+t2)/(1-t1*t2)$)

minusA(t1,t2) := ratsimp($t1-t2)/(1+t1*t2)$)

それ以外にも，以下のような汎用的な関数が定義されている．

numer(f)	方程式 (=0) の分子を因数分解 :=factor(num(ratsimp(f)))
frev(eq,rep)	eq に rep を代入して分数式を簡単化
frfactor(eq,rep)	eq に rep を代入して分数式を因数分解して簡単化
nthfactor(pol,k)	多項式の k 番目の因子を返す　望む結果にならない場合もある．
dotProd(v1,v2)	内積
crossProd(v1,v2)	外積
lenSeg2(p1,[p2])	p1 [p2-p1] の長さの平方
meetLine(pts1,pts2)	2 線分の交点 (pts は 2 点のリスト)
edge(A,B)	辺 AB(frfactor で簡単化)
edg2m(c,a,b)	三角形 ABC において，頂点 C の m の値
cos2m(c)	cos の値が c である角の m の値

MNR 法では，最初に `putTriangle(m,n,r)` (省略形 putT) によって，角 B, C がそれぞれ (m), (n) で内心が原点である三角形 ABC と内接円をおく．putT を実行すると，頂点，辺の長さ，５心などが次の大域変数に代入される．

種類	変数名	省略形
頂点	vertexTop,vertexLeft,vertexRight	vtxT,vtxL,vtxR
頂角	angleT	angT
辺	edgeBottom,edgeLeft,edgeRight	edgB,edgL,edgR
内心外心	inCenter,inR,cirCenter,cirR	inC,inR,cirC,cirR
垂心重心	ortCenter,baryCenter	ortC,barC
傍心傍接円	exCa,exRa,exCb,exRb,exCc,exRc	
面積 S,s	area,halfPer	

(注) 以下，putT, slideT, rotateT などの省略形を用いることにする．