

# Maximaによる幾何問題の解法

—日本の定理IIを中心に—

高遠 節夫

KeTCindy センター

日本数学教育学会名誉会員

データ数理学研究会

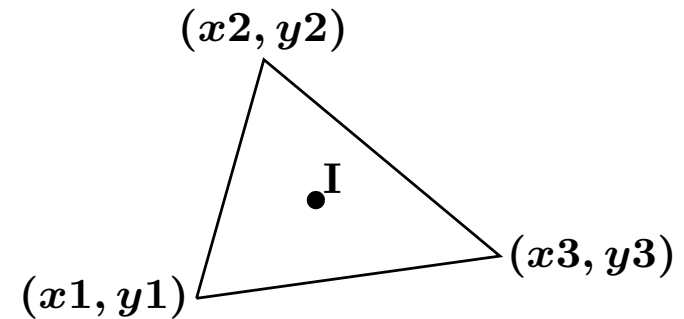
2025.07.05

# 和算と数式処理



# 数式処理で解く試み

- 以下，Maxima を使う
- 例として内心を求めてみる
- 座標幾何で連立方程式を作成



点と直線の距離  $d = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

```

tmp1:((y2-y1)*x-(x2-x1)*y-(y2-y1)*x1+(x2-x1)*y1)^2;
tmp2:(y2-y1)^2+(x2-x1)^2;
tmp3:((y3-y1)*x-(x3-x1)*y-(y3-y1)*x1+(x3-x1)*y1)^2;
tmp4:(y3-y1)^2+(x3-x1)^2;
tmp5:((y3-y2)*x-(x3-x2)*y-(y3-y2)*x2+(x3-x2)*y2)^2;
tmp6:(y3-y2)^2+(x3-x2)^2;
eq1:factor(tmp1*tmp4-tmp2*tmp3);
eq2:factor(tmp1*tmp6-tmp5*tmp2);
sol:algsys([eq1,eq2],[x,y]);

```

⇒ 解が求まらない

# Gemini に質問 1

Q 和算の問題を数式処理で解くにはどうしたらいいですか

- いくつかのステップを踏む必要があります
  - (1) 和算の問題を現代の数学記法に翻訳する
  - (2) 問題から方程式を立てる
  - (3) 数式処理システムに入力する
  - (4) 解釈と検証
- このプロセスにおいて、最も難しいのは 1 と 2 のステップです。特に、和算特有の図形的な問題や、現代の数学とは異なるアプローチで問題を解いているケースでは、翻訳に専門的な知識と洞察が必要になります

## Gemini に質問 2

Q 連立方程式が長大になって解けないのですが、どうしたらいいですか

- 数式処理システムに入力しても時間がかかりすぎる、メモリ不足になるなどの問題が発生した場合、いくつかの対処法があります

- (1) 問題の構造を理解し、簡略化の可能性を探る
- (2) 数値計算手法の利用
- (3) 数式処理システムの高度な機能や設定
- (4) 問題の再確認と根本的な見直し
- (5) 専門家への相談

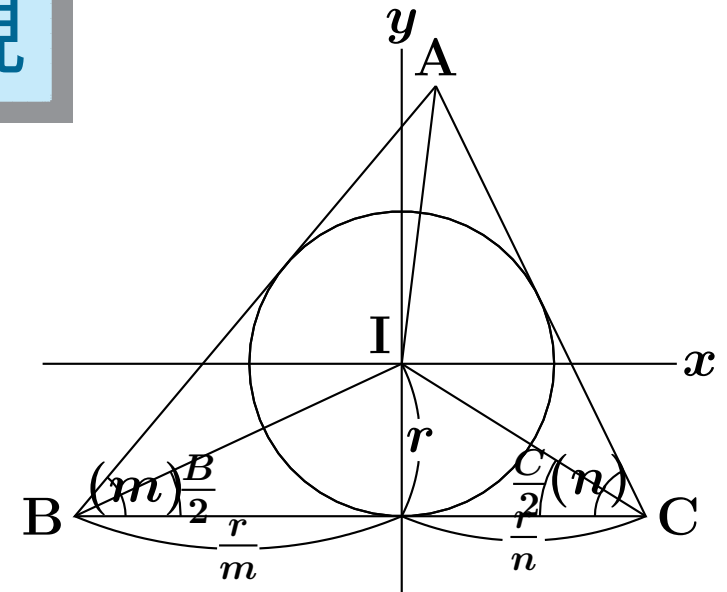
上記の方法を試しても解決しない場合は、その分野の数学者、計算科学者、あるいは数式処理システムの専門家など、より深い知識を持つ人に相談することも有効です

# MNR 法による諸量の表現

- $m = \tan \frac{B}{2}, n = \tan \frac{C}{2}$

$r$  = 内接円の半径

$$\angle B = (m), \angle C = (m)$$



- 三角形の諸量は  $m, n, r$  の有理式で表される

vtx  $B(-\frac{r}{m}, -r), C(\frac{r}{n}, -r), A\left(\frac{r(n-m)}{1-mn}, \frac{1+mn}{1-mn}\right)$

edg  $BC = \frac{r}{m} + \frac{r}{n}, AB = \frac{r(1+m^2)}{m(1-mn)}, AC = \frac{r(1+n^2)}{n(1-mn)}$

内心 inC, inR, 外心 cirC, cirR

傍心傍接円 exCa, exRa, exCb, exRb, exCc, exRc

# MNR 法のコマンド 1(基本, 式変形)

- 基本コマンド

`putT(m,n,r)` 原点を内心として三角形をおく

`slideT(pt1,pt2)` `pt1` が `pt2` に来るように平行移動

`rotateT(m,pt)` `pt` を中心に (`m`) 回転

- 式変形の主なコマンド

`numer(f),denom(f)` 分子分母を簡単化

`frfactor(f)` 分数式を簡単化

`frev(eq,rep)` 代入して簡単化



## MNR 法のコマンド 2(図形)

- 図形に関する主なコマンド

$\text{supA}(m), \text{comA}(m)$  補角, 余角

$\text{dotProd}(v1, v2), \text{crossProd}(v1, v2)$  内積, 外積

$\text{lenSeg2}(p1, p2)$  2点の距離の平方

$\text{comTan1}, \text{comTan1C}$   $C1, r1$  と  $C2, r2$  の共通接線

# MNR 法の実践

## 全体の流れ

- (1) ketcindy ファイルをとって名称変更
- (2) ketlib スロットに Readmnr(1,1,1); を書いて実行
- (3) (file+)ketlib.txt を ketlib スロットにコピー
- (4) (file+)figures.txt を figures スロットにコピー
- (5) ラフスケッチを描く
- (6) (file+)mkcmd.txt にスクリプトを記述
- (7) figures の//を外す
- (8) 画面の実行ボタン 1,2,... を押す

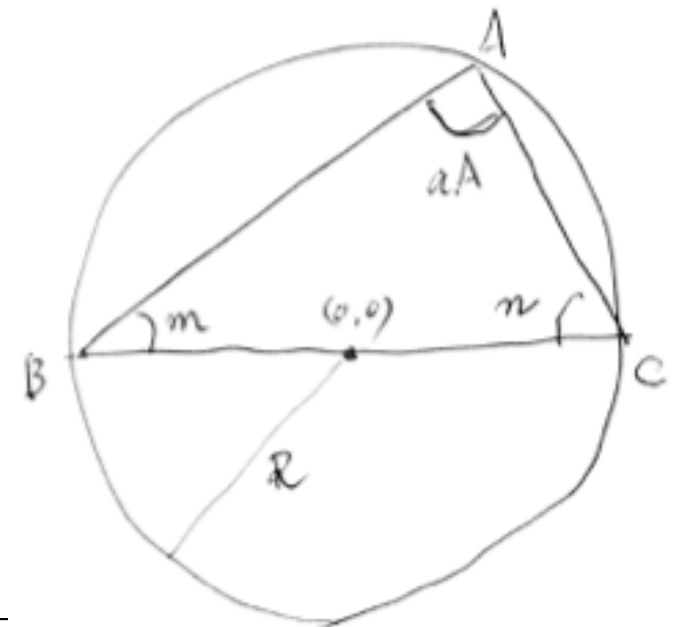
# 直径の上の円周角

Demo:1circularangle.cdy

```

1 mkcmd1():=(
2   cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
3     "putT(m,n,r)",
4     "eq:vtXL[2]-cirC[2]",
5     "sol:solve(eq,m)",
6     "fe:frevL([vtXT,vtXL,vtXR,cirC,cirR,angT],sol[1])",
7     "A:fe[1]; B:fe[2]; C:fe[3]; O:fe[4]; R:fe[5]; aA:fe[6]",
8     "end"
9   ]);
10  var1="sol::A::B::C::O::R::aA";
11  Pos=NE.xy+[0.5,-0.5]; Dy=1;
12 );
13 Dispfig1(r,n):=(
14   Setwindow([-5,5],[-5.5,3]);
15   // r=1.5; n=tanhalf(40);
16   Parsevv(var1);
17   Listplot("1",[A,B,C,A]);
18   Circledata("1",[0,R]);
19   Letter([A,"n","A",B,"w","B",C,"e","C"]);
20 );

```



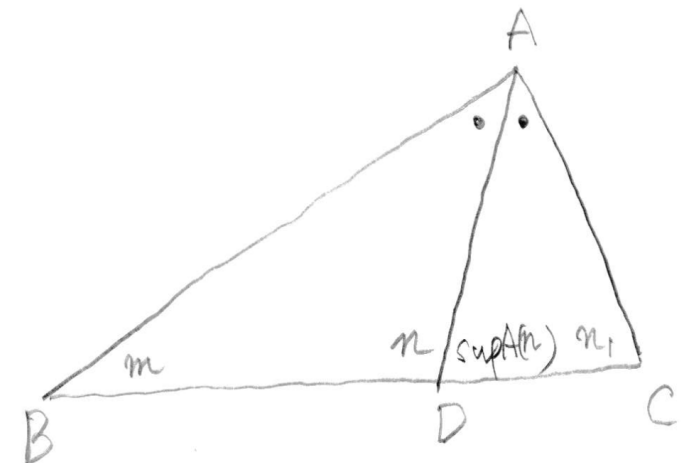
# 角の二等分線の定理

Demo:2bisector.cdy

```

1 mkcmd1():=(↓
2   cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[↓
3     "D:[0,0]",↓
4     "putT(m,n,r); slideT(vtxR,D)",↓
5     "B:vtxL; A:vtxT; AB:edgL; BD:edgB; aA:angT",↓
6     "putT(supA(n),n1,r1); slideT(vtxL,D)",↓
7     "C:vtxR; A1:vtxT; AC:edgR; DC:edgB; aA1:angT",↓
8     "eq1:numer(A[2]-A1[2])",↓
9     "eq2:numer(aA-aA1)",↓
10    "sol:solve([eq1,eq2],[n1,r1])",↓
11    "fe:frevL([A,C,AC,DC,n,r2],sol)",↓
12    "A:fe[1]; C:fe[2]; AC:fe[3]; DC:fe[4]; n:fe[5]; r2:fe[6]",↓
13    "ABdAC:frfactor(AB/AC); BDdDC:frfactor(BD/DC)",↓
14    "end"↓
15  ]);↓
16  var1="eq1::eq2::sol::A::B::C::D::AB::AC::BD::DC::ABdAC::BDdDC";
17  var1d="eq1::eq2::sol::AB::AC::BD::DC::ABdAC::BDdDC";↓
18 );↓

```



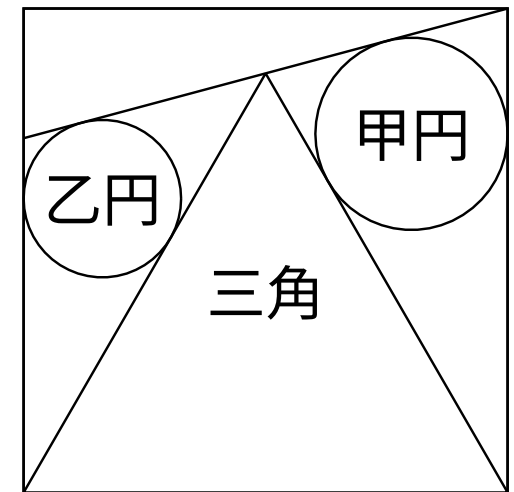
# 中尊寺地蔵院の算額

牧下英世，数学史を取り入れた授業実践——算額の教材化と総合的な学習——，  
筑波大学附属駒場論集 40 集,145-171,2000

問 図のように，正方形の中に正三角形と甲乙の2円を入れる．その円径差を与えたとき，正方形の辺の長さはいくらか．

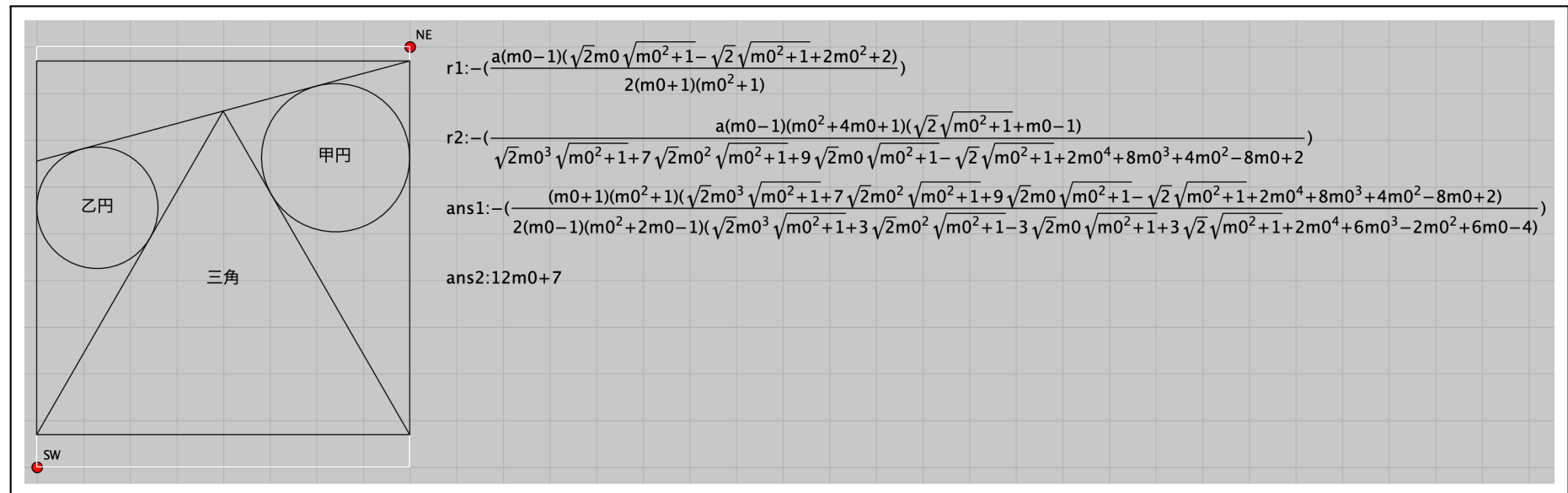
答 術文の通りである．

術 48 の平方根に 7 を加えて円径差を掛けると辺の長さを得る．





# 中尊寺地蔵院の完成画面



- ans1 も解には違いないが，長大な式である
- 分母分子を  $m_0^2 - \frac{1}{3}$  で割った余りを求めればよい
  - ・  $\sqrt{m_0^2 + 1}$  は別の変数と見る
- 分母分子とも  $m_0$  の 1 次式だから分母を有理化できる
- これを実行する関数 ratden を追加した



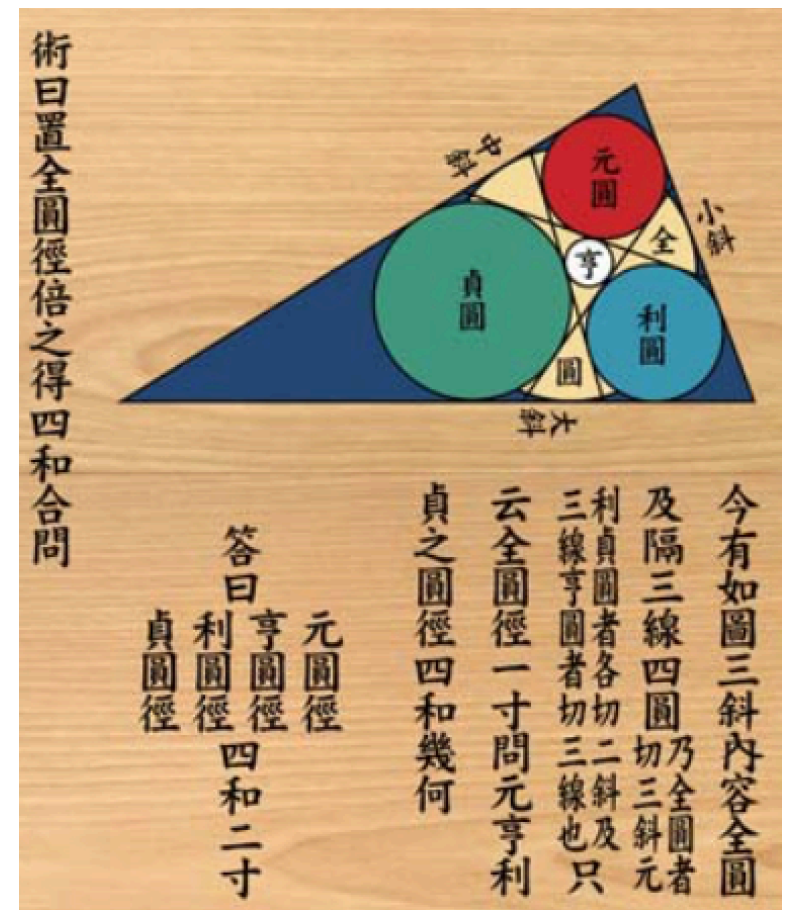
# 日本の定理 II の解法

# 白山神社算額の問, 答, 術

問 三角形の中に全円, 及び 3 線を隔てて 4 円 (元, 亨, 利, 貞) を入れる. ここで全は三角形に接し, 元, 利, 貞は三角形の 2 辺と 3 線に接し, 亨は 3 線に接する. 全径が 1 寸のとき元, 亨, 利, 貞の円径の和はいくらか

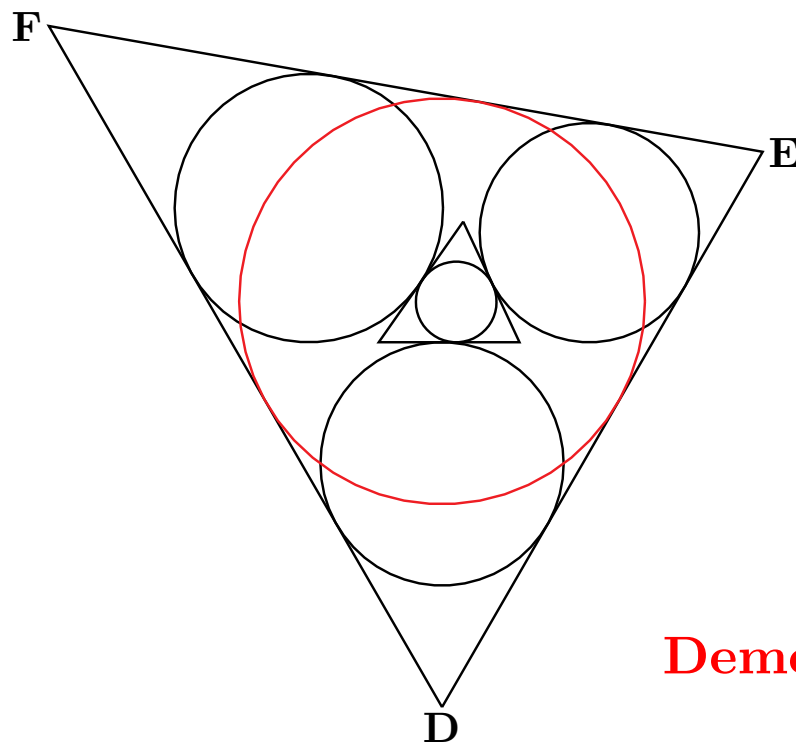
答 元, 亨, 利, 貞 4 円径の和は 2 寸

術 全径を 2 倍すると 4 円の和を得て問に合う



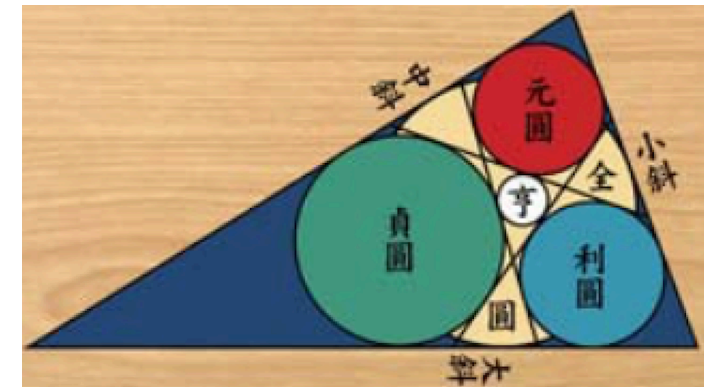
# MNR 法の解法 (中から)

- (1) 亨は中の三角形の内接円
- (2) 元, 利, 貞は傍接円
- (3) 外の三角形は 3 共通外接線からできる
- (4) 全はその内接円

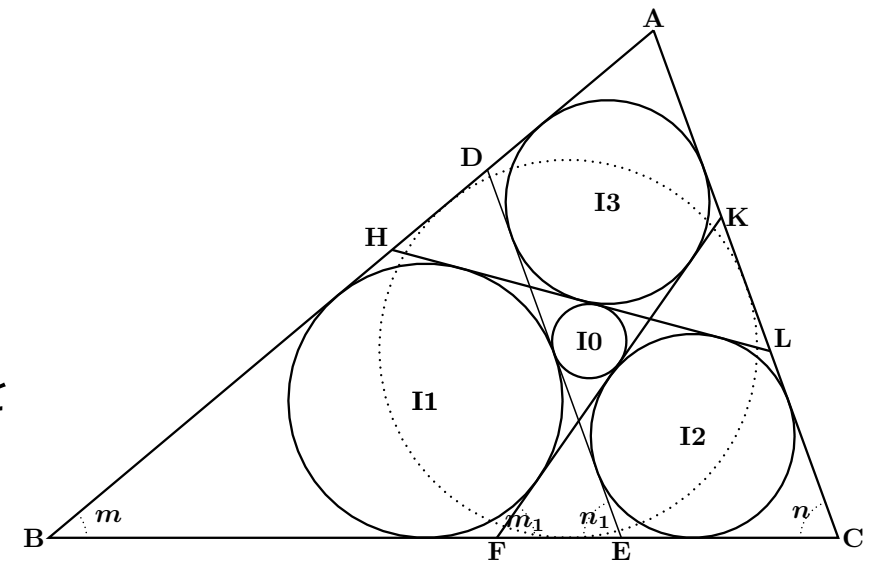


# MNR 法の解法 (外から)

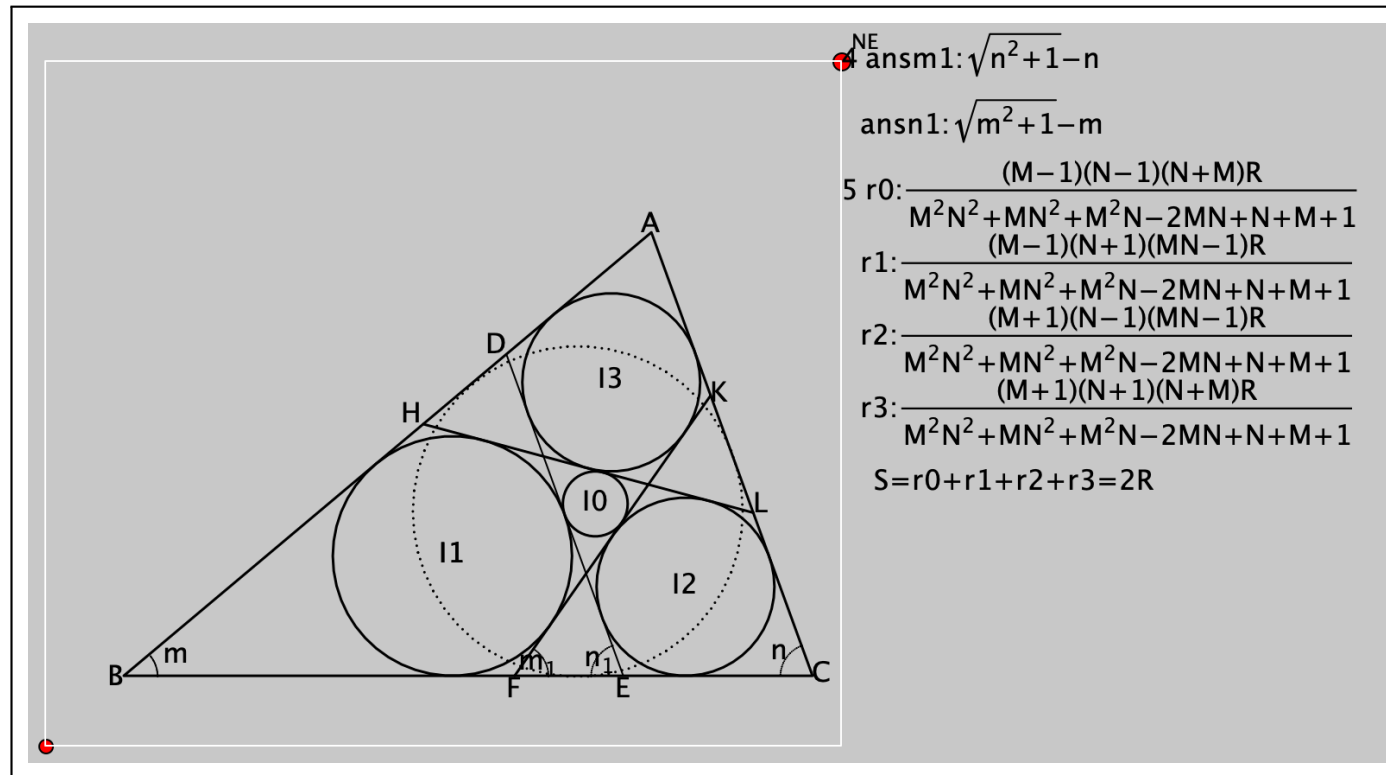
問 三角形の中に全円, 及び 3 線を隔てて 4 円 (元, 亨, 利, 貞) を入れる. ここで全は三角形に接し, 元, 利, 貞は三角形の 2 辺と 3 線に接し, 亨は 3 線に接する. 全径が 1 寸のとき元, 亨, 利, 貞の円径の和はいくらか



- (1) 外の三角形 ABC と全円をおく
- (2) DE,FK,HL と円 I1 をおく
- (3) 円 I2 をおく
- (4) 円 I3 をおく
- (5) 円 I3 を FK に接するようにする. 円 I0 をおく



# 日本の定理 II(外から) の完成画面



- $m_1 = \sqrt{n^2 + 1} - n$  などは有理式でないから, Maxima での計算は破綻
- しかし,  $\sqrt{n^2 + 1} = \frac{1}{\cos \frac{C}{2}}$  だから, 四半角の正接  $M, N$  の有理式で表される
- $r_0, r_1, r_2, r_3$  はそのように表すことで有理式計算ができる
- これから  $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 2R$  が証明される

## 結論 (Gemini に質問 3)

Q 和算の問題を数式処理で解く MNR 法について教えてください

- 特に和算で扱われた図形問題、特に円やその他の曲線が絡む求積問題を数式処理システムを用いて解くための強力な手法です
- MNR 法は、特に和算で扱われた図形問題、特に円やその他の曲線が絡む求積問題を数式処理システムを用いて解くための強力な手法です。和算では、高度な幾何学的洞察と代数的な計算を組み合わせ問題解いていましたが、MNR 法は、これらの問題を現代の数式処理の枠組みで表現し、自動的に解を導き出すことを目指します
- 残念ながら、「MNR」という略語が具体的に何を指すのか、その正式名称や提唱者について明確な情報を見つけることはできませんでした。しかし、得られた情報から MNR 法の考え方や特徴を推測し、説明することができます

## 結論 (Gemini に質問 4)

- MNR 法の主な特徴とアプローチ
  - (1) 図形要素の代数化
  - (2) 連立方程式の構築
  - (3) 数式処理システムによる解法
  - (4) 幾何学的制約の考慮
  - (5) 可視化との連携
- MNR 法は、和算の図形問題を現代の数式処理技術で解くためのアプローチであり、図形要素の代数化、連立方程式の構築、数式処理システムによる解法、そして幾何学的制約の考慮がその主要な要素であると考えられます。これにより、和算の複雑な問題を効率的に解き、その背後にある数学的な構造を明らかにすることが可能になります

## 謝辞

- ACA (Application of Computer Algebra) にたびたび参加
- ACA2018 6/18-22
  - SANTIAGO DE COMPOSTELA
  - 三宅さん，山下さんと参加
  - 昼食時，杉野さんに Skype で電話
- ご清聴ありがとうございました