微分の公式と性質

2024.06.26

復習（微分係数・導関数）

定義（質問）

- 微分係数 $f'(a)$ は定点 a における接線の傾き

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \boxed{}$$

問 0626-1 $f'(a)$ の定義式をかけ

- 導関数 $f'(x)$ は a を変数と考え，x とおいたもの

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \boxed{}$$

問 0626-2 $f'(x)$ の定義式をかけ

導関数の書き方

- 導関数 $f'(x)$ を求めることを「微分する」
- 関数 $y = f(x)$ を変数 x で微分する

y'，$f'(x)$（ラグランジュ）

$\dfrac{dy}{dx}$ （ライプニッツ）

[例] $y = f(x) = x^2$

$$y' = f'(x) = f' = \left(x^2\right)' = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

いろいろな関数の微分

c, ax, ax^2 の微分

- $(c)' = \lim_{z \to x} \dfrac{c - c}{z - x} = 0$
- $(ax)' = \lim_{z \to x} \dfrac{az - ax}{z - x} = \lim_{z \to x} \dfrac{a(z - x)}{z - x} = a$
- $(ax^2)' = \lim_{z \to x} \dfrac{az^2 - ax^2}{z - x} = \lim_{z \to x} \dfrac{a(z^2 - x^2)}{z - x}$

$$= \lim_{z \to x} \frac{a(z - x)(z + x)}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} a(z + x) = 2ax$$

x^3 の微分

- $$(x^3)' = \lim_{z \to x} \frac{z^3 - x^3}{z - x} \tag{1}$$
- 次の因数分解公式を用いる
$$z^3 - x^3 = (z - x)(z^2 + zx + x^2)$$
- $$(1) = \lim_{z \to x} \frac{(z - x)(z^2 + zx + x^2)}{z - x}$$
$$= \lim_{z \to x}(z^2 + zx + x^2) = 3x^2$$
$$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$$

問 0626-3 $(x^4)'$ を求めよ

微分の公式

- 定数関数 $f(x) = c$（c は定数）

  $$(c)' = 0$$

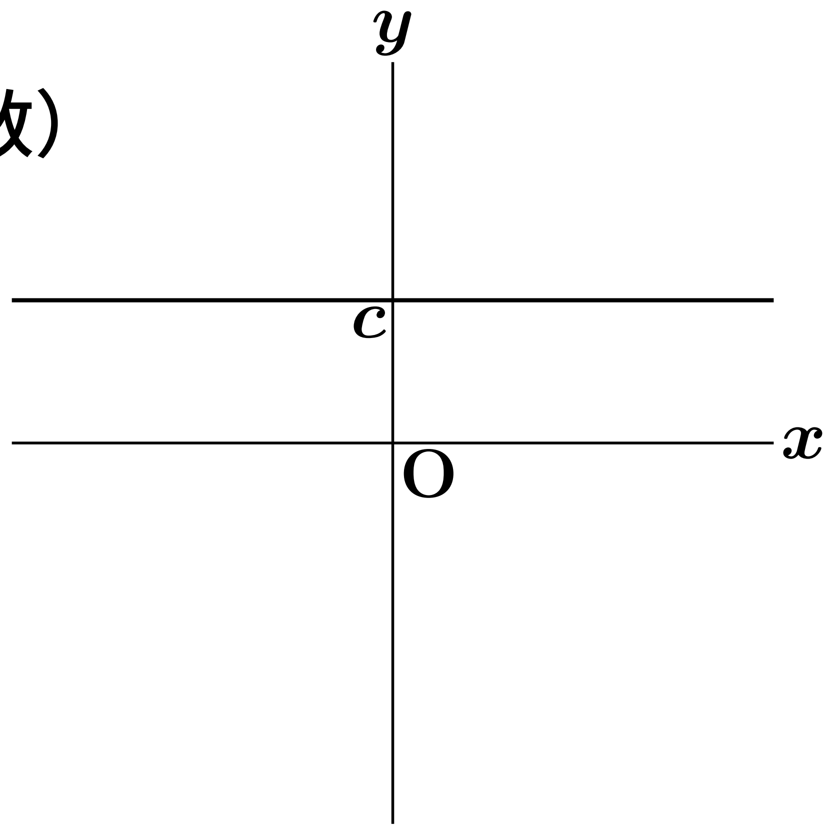
- $f(x) = x$

  $$(x)' = \lim_{z \to x} \frac{z - x}{z - x} = 1$$

- $(x^2)' = 2x$

- $(x^3)' = 3x^2$

- 一般に　$(x^n)' = \boxed{nx^{n-1}}$



微分の性質 (和と定数倍)

$f(x)$, $g(x)$ と定数 c について

- $(f+g)' = f' + g'$, $(f-g)' = f' - g'$
- $(cf)' = cf'$

例) $(x^2+3x+4)' = (x^2)' + (3x)' + (4)' = 2x + 3$

問 0626-4 微分せよ

[1] $y = 2x^2 - 3x + 2$

[2] $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

積と商の微分・記法

積の微分

- $\boxed{(f\,g)' = f'\,g + f\,g'}$ 積の微分公式

$$
\begin{aligned}
\bigl(f(x)g(x)\bigr)' &= \lim_{z\to x} \frac{f(z)g(z) - f(x)g(x)}{z-x} \\
&= \lim_{z\to x} \frac{\bigl(f(z)-f(x)\bigr)g(z) + f(x)\bigl(g(z)-g(x)\bigr)}{z-x} \\
&= \lim_{z\to x} \left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x} g(z) + f(x) \frac{g(z)-g(x)}{z-x} \right) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

積の微分の例

例
$$\begin{aligned} y' &= \bigl((x+1)(x^2+2x+3)\bigr)' \\ &= (x+1)'(x^2+2x+3)+(x+1)(x^2+2x+3)' \\ &= (x^2+2x+3)+(x+1)(2x+2) \\ &= 3x^2+6x+5 \end{aligned}$$

問 0626-5 積の微分公式で微分せよ．

[1] $y = (x+1)(x+3)$　　[2] $y = x^2(x+2)$

商の微分

- $$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$ 商の微分公式

[例 (1)] $\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)'$

$$= \frac{(2x+1)'(3x+1) - (2x+1)(3x+1)'}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{2(3x+1) - 3(2x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{-1}{(3x+1)^2}$$

[例 (2)] $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{(1)'(x) - 1(x)'}{x^2} = \dfrac{0-1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

問 0626-6 $y = \dfrac{x}{x+1}$ を微分せよ

x^p の微分

- n が正の整数のとき $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$
- 分数乗

$$(x^{\frac{1}{2}})' = (\sqrt{x})' = \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} = \lim_{w \to u} \frac{w - u}{w^2 - u^2}$$

$\sqrt{z} = w, \sqrt{x} = u$ とおくと　$z = w^2, x = u^2$

$$= \lim_{w \to u} \frac{1}{w + u} = \frac{1}{2u} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

問 0626-7 $y = x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$ を微分せよ．

x^p の微分公式

- $(x^p)' = \boxed{px^{p-1}}$
- マイナス乗も同じ

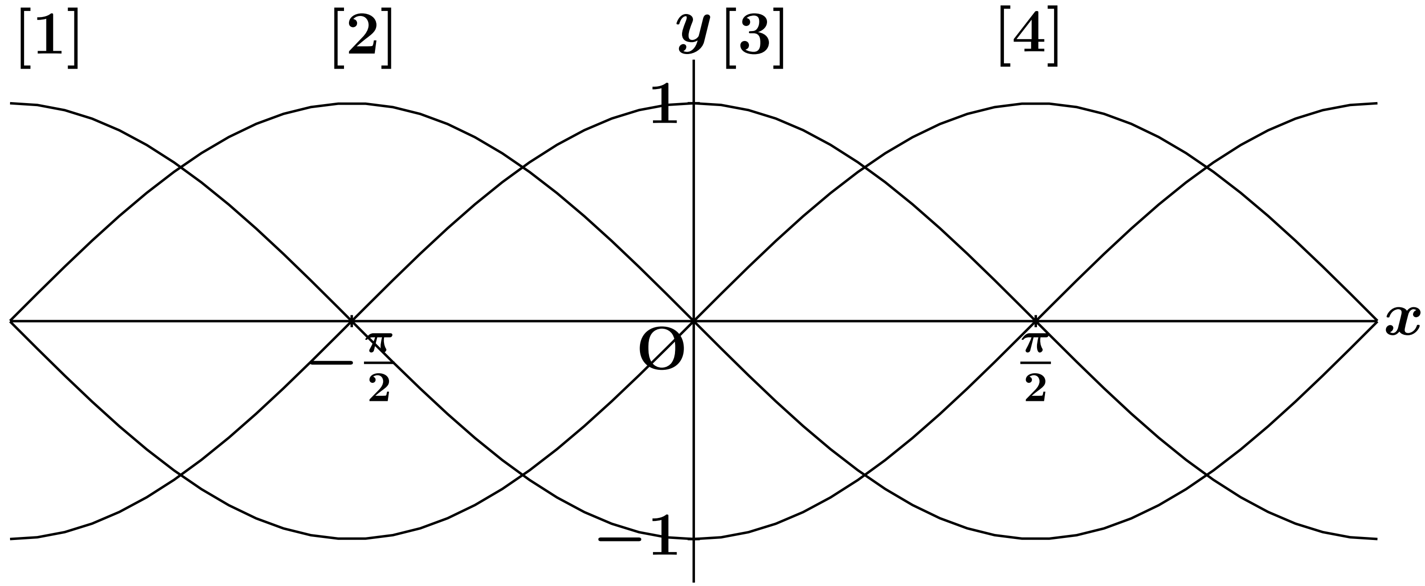
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

問 0626-8 次の関数を微分せよ.

[1] $y = x^{\frac{1}{4}}$　　[2] $y = x^{-2}$　　[3] $y = x^{-\frac{1}{2}}$

三角関数の微分

三角関数のグラフ



問 0626-9 図は

$$y = \sin x, y = \cos x, y = -\sin x, y = -\cos x$$

のグラフである．アプリを用いて，関数の番号を答えよ．

$\sin x, \cos x$ の微分

問 0626-10 アプリを用いて導関数を求めよ．

[1] $y = \sin x$ [2] $y = \cos x$

- 微分公式

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x}$$

問 0626-11 次の関数を微分せよ

$$y = 2\sin x - 3\cos x$$

$\tan x$ の微分

- $\boxed{(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\cos^2 x = (\cos x)^2$

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{(\cos x \cos x) - \sin x(-\sin x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

質問

問 0626-12 次の関数を微分せよ

[1] $y = \sin x \cos x$

[2] $y = \sin^2 x (= \sin x \sin x)$

[3] $y = x \tan x$

[4] $y = \tan x - x$