# 複素平面におけるユークリッド幾何学

tria_math

2025 年 9 月 6 日

## 目次

## 2 基本の公式

**定理 2.1.**

4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A \neq B$, $C \neq D$ であるとする.

- 直線 $AB$ と直線 $CD$ とが平行であることは $a-b \sim c-d$ と同値である.
- 直線 $AB$ と直線 $CD$ とが垂直であることは $\sqrt{-1}(a-b) \sim c-d$ と同値である.
- 直線 $AB$ を反時計回りに $\theta$ 回転させたときに直線 $CD$ と重なることは $e^{\sqrt{-1}\theta}(a-b) \sim c-d$ と同値である.

**定理 2.2.**

単位円 $\Omega$ 上に 4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A \neq B$, $C \neq D$ であるとする.

- 線分 $AB$ が $\Omega$ の直径であることは $a+b=0$ と同値である.
- 直線 $AB$ と直線 $CD$ とが平行であることは $ab=cd$ と同値である.
- 直線 $AB$ と直線 $CD$ とが垂直であることは $ab+cd=0$ と同値である.
- 直線 $AB$ を反時計回りに $\theta$ 回転させたときに直線 $CD$ と重なることは $cd=e^{2\sqrt{-1}\theta}ab$ と同値である.

**定理 2.3.**

6 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$ がある. 三角形 $ABC$ と $A'B'C'$ とが正の向きに相似であることは

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{c'-a'}{b'-a'}$$

と同値である. また, この式は

$$\begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix}=0$$

と書くことができる.

三角形 $ABC$ と $A'B'C'$ とが負の向きに相似であることは

$$\frac{c-a}{b-a}=\overline{\left(\frac{c'-a'}{b'-a'}\right)}$$

と同値である. また, この式は

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a'} & 1 \\ b & \overline{b'} & 1 \\ c & \overline{c'} & 1 \end{vmatrix}=0$$

と書くことができる.

**定理 2.4.**

3 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ が共線であることは

$$a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} = \bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a$$

と同値である．また，これは

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と書くことができる．

**定理 2.5.**

$\alpha$ を 0 でない複素数，$c$ を実数とする．このとき，

$$\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = \sqrt{-1}c$$

をみたす点 $z$ の全体は直線である．逆に，複素平面内の直線は，$\alpha$ および $c$ を適切に定めることで上の形の式で表せる．

**定理 2.6.**

2 点 $A(a)$, $P(p)$ があり，$A \neq P$ であるとする．$A$ が単位円上にあるとし，直線 $AP$ と単位円との交点のうち $A$ でない方を $Q(q)$ とする．このとき，

$$q = \frac{a - p}{a\bar{p} - 1}$$

である．

**定理 2.7.**

単位円上に 2 点 $A(a)$, $B(b)$ があり，$A \neq B$ であるとする．$Z(z)$ が直線 $AB$ 上にあることは

$$z + ab\bar{z} = a + b$$

と同値である．

**定理 2.8.**

単位円 $\Omega$ 上に点 $A(a)$ がある．$Z(z)$ が $A$ における $\Omega$ の接線上にあることは

$$z + a^2\bar{z} = 2a$$

と同値である．

**定理 2.9.**

4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A \neq B$, $C \neq D$ であるとする．直線 $AB$ と直線 $CD$ とが平行でないとき, 直線 $AB$ と直線 $CD$ との交点の座標は

$$\frac{(\bar{a}b-\bar{b}a)(c-d)-(\bar{c}d-\bar{d}c)(a-b)}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d)-(\bar{c}-\bar{d})(a-b)}$$

で与えられる．また, 直線 $AB$ と直線 $CD$ が平行であることは $(\bar{a}-\bar{b})(c-d)-(\bar{c}-\bar{d})(a-b)=0$ と同値である.

**系 2.10.**

4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A \neq B$, $C \neq D$ であるとする．2 点 $A$, $B$ が単位円上にあり, 直線 $AB$ と直線 $CD$ とが平行でないとき, 直線 $AB$ と直線 $CD$ との交点の座標は

$$\frac{ab(\bar{c}d-\bar{d}c)+(a+b)(c-d)}{ab(\bar{c}-\bar{d})+c-d}$$

で与えられる.

**系 2.11.**

単位円上に 4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A \neq B$, $C \neq D$ であるとする．直線 $AB$ と直線 $CD$ とが平行でないとき, 直線 $AB$ と直線 $CD$ との交点の座標は

$$\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$$

で与えられる.

**系 2.12.**

単位円 $\Omega$ 上に 2 点 $A(a)$, $C(c)$ があるとき, 点 $A$ における $\Omega$ の接線と点 $C$ における $\Omega$ の接線との交点の座標は

$$\frac{2ac}{a+c}$$

で与えられる.

**定理 2.13.**

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を $0$ でない複素数, $p,\ q,\ r$ を実数とする. 3 直線 $\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = \sqrt{-1}p,\ \bar{\beta}z - \beta\bar{z} = \sqrt{-1}q,\ \bar{\gamma}z - \gamma\bar{z} = \sqrt{-1}r$ が共点であることは

$$\begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & p \\ \beta & \bar{\beta} & q \\ \gamma & \bar{\gamma} & r \end{vmatrix} = 0$$

と同値である. ただし, 3 直線が平行である場合は無限遠点で交わると考え, 共線として扱う.

**定理 2.14.**

6 点 $A(a),\ B(b),\ C(c),\ D(d),\ E(e),\ F(f)$ があり, $A \neq D,\ B \neq E,\ C \neq F$ であるとする. 3 直線 $AD$, $BE$, $CF$ が共点であることは

$$\begin{vmatrix} a\bar{d} - d\bar{a} & a-d & \bar{a} - \bar{d} \\ b\bar{e} - e\bar{b} & b-e & \bar{b} - \bar{e} \\ c\bar{f} - f\bar{c} & c-f & \bar{c} - \bar{f} \end{vmatrix} = 0$$

と同値である. ただし, 3 直線が平行である場合は無限遠点で交わると考え, 共線として扱う.

**系 2.15.**

円周上に 6 点 $A(a),\ B(b),\ C(c),\ D(d),\ E(e),\ F(f)$ があり, $A \neq D,\ B \neq E,\ C \neq F$ であるとする. 3 直線 $AD$, $BE$, $CF$ が共点であることは

$$\begin{vmatrix} ad & a+d & 1 \\ be & b+e & 1 \\ cf & c+f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と同値である. また, この式は

$$(a-b)(c-d)(e-f) + (b-c)(d-e)(f-a) = 0$$

と書くことができる.
ただし, 3 直線が平行である場合は無限遠点で交わると考え, 共線として扱う.

**定理 2.16.**

4 点 $A(a),\ B(b),\ C(c),\ D(d)$ が共円であることは

$$\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & b & \bar{b} & 1 \\ c\bar{c} & c & \bar{c} & 1 \\ d\bar{d} & d & \bar{d} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と同値である.

**定理 2.17.**

3 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ があり, $A$, $B$, $C$ は同一直線上にないとする. このとき, 三角形 $ABC$ の外心の座標は

$$-\frac{\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}}$$

である.

**定理 2.18.**

3 点 $A(a)$, $B(b)$, $X(x)$ があり, $A \neq B$ であるとする. 直線 $AB$ に関して $X$ と対称な点の座標は

$$\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{x} + \frac{a\bar{b}-b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$$

で与えられる. また, 点 $X$ から直線 $AB$ に下ろした垂線の足の座標は

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{x} + \frac{a\bar{b}-b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}\right)$$

で与えられる.

**系 2.19.**

3 点 $A(a)$, $B(b)$, $X(x)$ があり, $A \neq B$ であるとする. $|a| = |b| = 1$ であるとき, 直線 $AB$ に関して $X$ と対称な点の座標は

$$a + b - ab\bar{x}$$

で与えられる. また, 点 $X$ から直線 $AB$ に下ろした垂線の足の座標は

$$\frac{1}{2}(a + b + x - ab\bar{x})$$

で与えられる.

**定理 2.20.**

どの 2 つも相異なる 4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ に対して, $ABCD$ が調和四角形をなすまたは $(A, C; B, D)$ が調和点列であることは

$$(a-b)(c-d)+(b-c)(d-a)=0$$

と同値である. また, これは

$$(a+c)(b+d)=2(ac+bd)$$

と書くことができる.

**定理 2.21.**

5 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $M(m)$ があり, 三角形 $MAB$ と三角形 $MDC$ とは正の向きに相似であるとする. このとき,

$$m=\frac{ac-bd}{a+c-b-d}$$

である.

## 3　具体的な点の座標

本章では前章の命題を用いて具体的な状況で点の複素座標を計算する．2 点 $a$, $b$ を通る直線を $l(a,b)$ で表し，$|a|=1$ のとき $l(a,a)$ は $a$ における単位円の接線を表すものとする．

### 3.1　外心を中心とする座標

**設定**

三角形 $ABC$ の外心を $O$ として，$o=0$, $|a|=|b|=|c|=1$ となるような座標を考える．

**定理 3.1.**

三角形 $ABC$ の重心，垂心をそれぞれ $G$, $H$ とすると，

$$g=\frac{a+b+c}{3},\quad h=a+b+c$$

である．

**定理 3.2.**

三角形 $ABC$ の九点円の中心を $N_9$ とすると，

$$n_9=\frac{a+b+c}{2}$$

である．

**定理 3.3.**

点 $A$ から直線 $BC$ へ下ろした垂線の足を $H_A$ とすると，

$$h_a=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{bc}{a}\right)$$

である．

**定理 3.4.**

$A$ を含まない弧 $BC$ の中点を $M_A$ とし, $M_B$, $M_C$ も同様に定める.

$$m_a = -\sqrt{bc}, \quad m_b = -\sqrt{ca}, \quad m_c = -\sqrt{ab}$$

となるように $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ の符号を定めることができる. また, このとき三角形 $ABC$ の内心を $I$ とすると

$$i = -\sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca}$$

となる.

**定理 3.5.**

三角形 $ABC$ に関する点 $P$ の等角共軛点を $Q$ とすると,

$$q = \frac{abc\bar{p}^2 - (ab+bc+ca)\bar{p} + a + b + c - p}{1 - p\bar{p}}$$

である.

**定理 3.6.**

四角形 $AXBC$ が調和四角形になるように点 $X$ をとったとき,

$$x = \frac{a(b+c) - 2bc}{2a - b - c}$$

である. また, 三角形 $ABC$ の Lemoine 点を $L$ とすると,

$$l = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c)}{a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b - 6abc}$$

である.

**定理 3.7.**

辺 $BC$ の中点を $M$ とする. $H$ から直線 $AM$ に下ろした垂線の足を $P$ としたとき,

$$p = \frac{a(b^2 + c^2) - bc(b+c)}{a(b+c) - 2bc}$$

である. また, このような点 $P$ は $A$-**Humpty point** と呼ばれる.

**定理 3.8.**

$A$-Humpty point の等角共軛点を $Q$ とすると,

$$q = \frac{a^2 - bc}{2a - b - c}$$

である. また, このような点 $Q$ は $A$-**Dumpty point** と呼ばれる.

**定理 3.9.**

$B$ から直線 $AC$ に下ろした垂線の足, $C$ から直線 $AB$ に下ろした垂線の足をそれぞれ $H_B$, $H_C$ とする. 三角形 $ABC$ の外接円と三角形 $AH_CH_B$ の外接円との交点のうち $A$ でない方を $Q$ とする. このとき,

$$q = \frac{bc(2a + b + c)}{ab + bc + ca}$$

である. また, このような点 $Q$ は $A$-**queue point** と呼ばれる.

## 3.2 内心を中心とする座標

**設定**

三角形 $ABC$ の内心を $I$, 内接円を $\omega$ として, $\omega$ が辺 $BC$, $CA$, $AB$ と接する点をそれぞれ $D$, $E$, $F$ とする. $i = 0$, $|d| = |e| = |f| = 1$ となるような座標を考える.

**定理 3.10.**

$$a = \frac{2ef}{e + f}, \quad b = \frac{2fd}{f + d}, \quad c = \frac{2de}{d + e} \tag{1}$$

である.

**定理 3.11.**

角 $A$ 内の傍心を $I_A$ とすると,

$$i_a = \frac{4def}{(d + e)(d + f)} \tag{2}$$

である.

**定理 3.12.**

三角形 $ABC$ の外心を $O$ とすると,

$$o = \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)} \tag{3}$$

である.

**定理 3.13.**

三角形 $ABC$ の重心, 垂心をそれぞれ $G$, $H$ とすると,

$$g = \frac{6def(d+e+f) + 2d^2e^2 + 2e^2f^2 + 2f^2d^2}{3(d+e)(e+f)(f+d)}, \quad h = \frac{2def(d+e+f) + 2d^2e^2 + 2e^2f^2 + 2f^2d^2}{(d+e)(e+f)(f+d)}$$

である.

**命題 3.14.**

$F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ を 1 次の斉次有理式とする．外心を中心とした座標で $F(a,b,c)$ と表される点は, 内心を中心とする座標では

$$\frac{2}{(d+e)(e+f)(f+d)}\bigl(F(e^2f^2, f^2d^2, d^2e^2) + def(d+e+f)\bigr)$$

と表せる．また, 内心を中心とした座標で $G(d,e,f)$ と表される点は, 外心を中心とする座標では定理 3.4 の符号の定め方のもとで

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{2}G\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right) - (\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$$

と表せる.

**定理 3.15.**

三角形 $ABC$ の Gergonne 点を $Ge$ とすると,

$$g_e = \frac{d^2e^2 + e^2f^2 + f^2d^2 - def(d+e+f)}{d^2e + d^2f + e^2f + e^2d + f^2d + f^2e - 6def}$$

である.

**定理 3.16.**

三角形 $ABC$ の外接円と三角形 $AEF$ の外接円との交点のうち $A$ でない方を $K$ とする．このとき，

$$k = \frac{2def}{-d^2 + de + df + ef}$$

である．また，このような点 $K$ は $A$**-sharky-devil point** と呼ばれる．

**定理 3.17.**

三角形 $ABC$ の角 $A$ 内の混線内接円が辺 $AB$, 辺 $AC$, 三角形 $ABC$ の外接円と接する点をそれぞれ $K$, $L$, $T$ とする．このとき，

$$k = \frac{2ef}{e-f}, \quad l = \frac{2ef}{f-e}, \quad t = \frac{2def}{de+df+2ef}$$

である．

**定理 3.18.**

三角形 $ABC$ の Feuerbach 点を $F_e$ とすると，

$$f_e = \frac{de+ef+fd}{d+e+f}$$

である．

## 3.3 弧の中点を中心とする座標

**設定**

三角形 $ABC$ の内心を $I$ とし，三角形 $BCI$ の外心を $M_A$ とする．$m = 0$, $|b| = |c| = |i| = 1$ となる座標を考える．

**定理 3.19.**

三角形 $ABC$ の角 $A$ 内の傍心，角 $B$ 内の傍心，角 $C$ 内の傍心をそれぞれ $I_A$, $I_B$, $I_C$ とすると，

$$i_a = -i, \quad i_b = \frac{2bc - bi + ci}{b+c}, \quad i_c = \frac{2bc - ci + bi}{b+c}$$

である．

**定理 3.20.**

$$a = \frac{bc + i^2}{b + c} \tag{4}$$

である.

**定理 3.21.**

三角形 $ABC$ の外心を $O$ とすると

$$o = \frac{bc}{b + c}$$

である.

# 4　練習問題

本章にはここまでで紹介してきた公式を用いて解くことができる問題を多数掲載した．これらの問題は概ね難易度の順になるように並べている．全ての問題に解答を付しているので, 解くことも解答を読むことも勉強になるであろう．

## 4.1　複素座標で実際の問題を解くには

矛盾しているように聞こえるかもしれないが, 複素座標で問題を解くことにおいて初等幾何の力は大いに役に立つ．実際, 第 3 章で行ったように, 点の座標を計算する前にその点のより計算しやすい特徴づけを与えることは重要である．また, 初等的考察によって, 示したい命題を複素座標で示しやすい命題に言い換えることも重要である．例えば, 根心の構図を用いて共円の条件を共線に帰着させることはよく行われる．複素座標は単位円上の 2 点を結ぶ直線, 角度の条件を扱うことには長けているが, 単位円上にない点や辺の長さの条件に対しては弱い．

ここまでは座標計算の補助として初等的考察を行うことについて述べたが, 初等的考察の補助として座標計算を行うことができるようになると解ける問題の幅はさらに広がるであろう．

また, 座標計算を行う際には計算ミスが天敵である．月並みなアドバイスではあるが, あとで検算をするときに見返してわかるように式変形を書くのは大事である．そのほか, $\alpha+\beta$ と $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ を両方計算してそれらが共軛になっていることを確かめるなど, ダブルチェックを行うことも計算ミスを減らすことに一役買う．

もしあなたが数学オリンピックの受験生であるなら, 全ての幾何の問題を座標計算で解けると考えることは得策ではない．本章には多数の問題を掲載したが, 掲載しなかった問題も多数あることを念頭に置くべきである．座標計算で解ける問題であっても試験時間のうちに解ききれるとは限らない．

## 4.2　有名定理

**問題 4.1** (Napoleon の定理).

三角形 $ABC$ において, $BPC$, $CQA$, $ARB$ が正三角形となるように 3 点 $P$, $Q$, $R$ をとる．ただし, $(B,P,C)$, $(C,Q,A)$, $(A,R,B)$ はいずれもこの順に反時計回りに並ぶとする．三角形 $BPC$, $CQA$, $ARB$ の重心をそれぞれ $L$, $M$, $N$ とするとき, 三角形 $LMN$ は正三角形であることを示せ．

**問題 4.2** (Morley の定理).

三角形 $ABC$ において, 角 $A$ の内角の三等分線を $l_{ab}$, $l_{ac}$ とおく．ただし, 辺 $AB$, $l_{ab}$, $l_{ac}$, 辺 $AC$ はこの順に並ぶとする．$l_{ba}$, $l_{bc}$, $l_{ca}$, $l_{cb}$ も同様に定める．$l_{bc}$ と $l_{cb}$ との交点を $P$, $l_{ca}$ と $l_{ac}$ との交点を $Q$, $l_{ab}$ と $l_{ba}$ との交点を $R$ としたとき, 三角形 $PQR$ は正三角形であることを示せ．

**問題 4.3** (Newton の定理).

四角形 $ABCD$ が円 $\Gamma$ に外接している. 対角線 $AC$ の中点を $M$, 対角線 $BD$ の中点を $N$ とする. $M \neq N$ であるとき, 円 $\Gamma$ の中心は直線 $MN$ 上にあることを示せ.

**問題 4.4.**

三角形 $ABC$ の内心を $I$, 外心を $O$, Feuerbach 点を $F_e$ とする. 辺 $BC$ の中点を $M$, 三角形 $ABC$ の内接円が辺 $BC$ と接する点を $D$ とするとき, 三角形 $AIO$ と三角形 $F_eDM$ とは相似であることを示せ.

**問題 4.5.**

円周 $\Gamma$ 上に 4 点 $A$, $B$, $C$, $D$ がある. $A$, $B$, $C$, $D$ における $\Gamma$ の接線をそれぞれ $l_A$, $l_B$, $l_C$, $l_D$ とする. このとき, $l_A$ と $l_B$ との交点, $l_C$ と $l_D$ との交点, 直線 $AC$ と直線 $BD$ との交点は同一直線上にあることを示せ.

**問題 4.6** (Simson の定理).

三角形 $ABC$ と点 $P$ とがある. $P$ から直線 $BC$, $CA$, $AB$ に下ろした垂線の足をそれぞれ $P_a$, $P_b$, $P_c$ とする. $A$, $B$, $C$, $P$ が共円であることと $P_a$, $P_b$, $P_c$ が共線であることとは同値であることを示せ.

**問題 4.7** (Pascal の定理).

単位円上に 6 点 $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ があるとき, 直線 $AB$ と直線 $DE$ との交点, 直線 $BC$ と直線 $EF$ との交点, 直線 $CD$ と直線 $FA$ との交点は同一直線上にあることを示せ.

**問題 4.8.**

三角形 $ABC$ と点 $P$ とがある. $P$ から直線 $BC$, $CA$, $AB$ に下ろした垂線の足をそれぞれ $P_a$, $P_b$, $P_c$ とし, 三角形 $ABC$ に関する点 $P$ の等角共軛点を $Q$ とする. このとき, 三角形 $P_aP_bP_c$ の外心は線分 $PQ$ の中点であることを示せ.

## 4.3 数学オリンピックの過去問

**問題 4.9** (ISL2024-G1).

円に内接する四角形 $ABCD$ が $AC < BD < AD$ および $\angle DBA < 90^\circ$ をみたしている. $D$ を通り $AB$ に平行な直線上に点 $E$ をとったところ, $E$ と $C$ は直線 $AD$ に関して反対側にあり, $AC = DE$ が成り立った. $A$ を通り $CD$ に平行な直線上に点 $F$ をとったところ, $F$ と $B$ は直線 $AD$ に関して反対側にあり, $BD = AF$ が成り立った. $BC$ の垂直二等分線と $EF$ の垂直二等分線とは, 四角形 $ABCD$ の外接円上で交わることを示せ.

**問題 4.10** (IMO2024-4).

$AB < AC < BC$ をみたす三角形 $ABC$ において, その内心と内接円をそれぞれ $I$, $\omega$ とおく. 直線 $BC$ 上の $C$ と異なる点 $X$ を, $X$ を通り直線 $AC$ に平行な直線が $\omega$ に接するようにとる. 同様に, 直線 $BC$ 上の $B$ と異なる点 $Y$ を, $Y$ を通り直線 $AB$ に平行な直線が $\omega$ に接するようにとる. 直線 $AI$ と三角形 $ABC$ の外接円の交点のうち $A$ でない方を $P$ とする. 辺 $AC$, $AB$ の中点をそれぞれ $K$, $L$ とおく. このとき, $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ が成り立つことを示せ.

**問題 4.11** (239 Open MO 2024 Grade8-9 p4).

三角形 $ABC$ があり, その内心を $I$ とする. $X$, $Y$ はそれぞれ線分 $BI$, $CI$ の $I$ 側の延長線上の点で, $\angle IAX = \angle IBA$ および $\angle IAY = \angle ICA$ が成り立つ. 線分 $IA$ の中点, 線分 $XY$ の中点, 三角形 $ABC$ の外心の 3 点は同一直線上にあることを示せ.

**問題 4.12** (Vietnum TST 2024-3).

鋭角不等辺三角形 $ABC$ において, $ABC$ の内接円が辺 $BC$, $CA$, $AB$ と接する点をそれぞれ $D$, $E$, $F$ とする. $A$, $B$, $C$ から対辺 $BC$, $CA$, $AB$ に下ろした垂線の足をそれぞれ $X$, $Y$, $Z$ とする. $EF$, $FD$, $DE$ に関して $X$, $Y$, $Z$ と対称な点をそれぞれ $A'$, $B'$, $C'$ とするとき, 三角形 $ABC$ と三角形 $A'B'C'$ とは相似であることを示せ.

**問題 4.13** (Balkan MO 2025-2).

鋭角三角形 $ABC$ において, 垂心を $H$ とし, 辺 $BC$ 上 (端点を除く) に点 $D$ をとる. 辺 $AB$ 上 (端点を除く) に点 $E$ を, 辺 $AC$ 上 (端点を除く) に点 $F$ をそれぞれとったところ, 4 点 $A$, $C$, $D$, $E$ および 4 点 $A$, $B$, $D$, $F$ はそれぞれ同一円周上にあった. 線分 $BF$ と線分 $CE$ との交点を $P$ とおく. 直線 $HA$ 上に点 $L$ を, 直線 $LC$ が三角形 $PBC$ の外接円と点 $C$ で接するようにとる. 直線 $BH$ と直線 $CP$ との交点を $X$ とおく. このとき, 3 点 $D$, $X$, $L$ は同一直線上にあることを示せ.

**問題 4.14** (IMO2023-2).

$AB < AC$ なる鋭角三角形 $ABC$ があり, その外接円を $\Omega$ とする. 点 $S$ を, $\Omega$ の $A$ を含む弧 $CB$ の中点とする. $A$ を通り $BC$ に垂直な直線が直線 $BS$ と点 $D$ で交わり, $\Omega$ と $A$ と異なる点 $E$ で交わる. $D$ を通り $BC$ と平行な直線が直線 $BE$ と点 $L$ で交わる. 三角形 $BDL$ の外接円を $\omega$ とおくと, $\omega$ と $\Omega$ が $B$ と異なる点 $P$ で交わった. このとき, 点 $P$ における $\omega$ の接線と直線 $BS$ が, $\angle BAC$ の二等分線上で交わることを示せ.

**問題 4.15** (EGMO2025-3).

鋭角三角形 $ABC$ の辺 $BC$ 上に点 $D$, $E$ を, 4 点 $B$, $D$, $E$, $C$ がこの順に並び, さらに $BD = DE = EC$ をみたすようにとる. 線分 $AD$, $AE$ の中点をそれぞれ $M$, $N$ とする. 三角形 $ADE$ が鋭角三角形であると仮定し, その垂心を $H$ とする. 直線 $BM$, $CN$ 上にそれぞれ点 $P$, $Q$ をとると, $D$, $H$, $M$, $P$ は同一円周上にある相異なる 4 点であり, $E$, $H$, $N$, $Q$ もまた同一円周上にある相異なる 4 点であった. このとき, 4 点 $P$, $Q$, $N$, $M$ は同一円周上にあることを示せ.

**問題 4.16** (JMO 春合宿 2025-6, ISL2024-G7).

$AB < AC < BC$ をみたす三角形 $ABC$ の内心を $I$ とし, 直線 $AI$, $BI$, $CI$ と三角形 $ABC$ の外接円の交点のうち, それぞれ $A$, $B$, $C$ でない方を $M_A$, $M_B$, $M_C$ とする. 直線 $AI$ と辺 $BC$ が点 $D$ で交わっており, 半直線 $BM_C$ と半直線 $CM_B$ が点 $X$ で交わっている. また, 三角形 $XBC$ の外接円と三角形 $XM_BM_C$ の外接円が $X$ でない点 $S$ で交わっており, 直線 $BX$, $CX$ と三角形 $SM_AX$ の外接円の交点のうち, $X$ でない方をそれぞれ $P$, $Q$ とする. このとき, 三角形 $DIS$ の外心は直線 $PQ$ 上にあることを示せ.

**問題 4.17** (ISL2024-G5).

三角形 $ABC$ とその内心 $I$ とがあり, 三角形 $BIC$ の外接円を $\Omega$ とする. $K$ は辺 $BC$ 上 (端点を除く) の点で, $\angle BAK < \angle KAC$ をみたす. $\angle BKA$ の二等分線は $\Omega$ と 2 点 $W$, $X$ で交わり, $\angle CKA$ の二等分線は $\Omega$ と 2 点 $Y$, $Z$ で交わった. ただし, $W$ および $Y$ は直線 $BC$ に関して $A$ と同じ側にあるとする. このとき, $\angle WAY = \angle ZAX$ を示せ.

**問題 4.18** (ISL2024-G6).

$AB < AC$ なる鋭角三角形 $ABC$ があり, その外接円を $\Gamma$ とする. $\Gamma$ 上に点 $X$, $Y$ をとると, 直線 $XY$ と直線 $BC$ とは $\angle BAC$ の外角の二等分線上で交わった. $X$, $Y$ における $\Gamma$ の接線の交点を $T$ とすると, $T$ は $BC$ に関して $A$ と同じ側にあり, 直線 $TX$, $TY$ は直線 $BC$ とそれぞれ $U$, $V$ で交わった. 三角形 $TUV$ の角 $T$ 内の傍心を $J$ とするとき, $AJ$ は $\angle BAC$ を二等分することを示せ.