複素平面におけるユークリッド幾何学

tria_math

2025 年 9 月 6 日

目次

まえがき

本書は, 筆者が数学オリンピックの現役時および引退後に複素座標について勉強したことをまとめたものである.

複素座標とは, 平面上の点に複素数の座標を対応させることで平面幾何の問題を解く手法のことである. 1 つの点に 2 つの実数を割りあてる直交座標や, 3 つの実数を割りあてる重心座標とは違い, 複素座標では 1 つの点に複素数 1 つのみが割りあてられるという特徴がある. 複素座標を初めて学んだときはその簡潔さと威力とに非常に感銘を受けたが, さらに勉強を進めると, その力が思っていた以上に強いことや複素座標そのものが興味深い考察の対象であることがわかった. 本書を通じて複素座標の強力さや面白さを伝えることができれば幸いである.

本書の構成にうつる. 第 1 章では, 複素座標の計算の礎となる行列式と偏角とについて解説した. 第 2 章では共線の条件などの基本的な命題を扱い, 第 3 章では第 2 章の命題を用いて具体的な点の座標を計算する. また, 第 4 章には練習問題を多数掲載し, それらすべての解答を第 6 章に記した.

第 2 章までは初等幾何の知識はできるだけ使わないように努めたが, 第 3 章以降では初等幾何の知識を十分に使用する. 『数学オリンピック幾何への挑戦 ユークリッド幾何学をめぐる船旅』(通称: 船旅) やその原著の『Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads』の第 3 章までの知識があれば読むのにはほとんど困らない. 本書には長い計算が多く登場するが, 計算過程をすべて書くと煩雑になることから過程を省略している箇所が多くある. そのため, 紙とペンを脇に置いて読むことを推奨する.

最後に, 本書が多くの数学オリンピック受験生の手に渡ると幸いである.

注意書き・定義集

- 座標はすべて複素座標で考える.
- 虚数単位には i ではなく $\sqrt{-1}$ を用いる.
- 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す.
- 特に断らないかぎり点の座標を対応する小文字で表す.
- z の複素共軛を $\bar{z}$ や $\overline{z}$ で表す.
- 0 でない複素数の偏角を $\arg z$ で表す.
- 0 でない複素数 α, β に対して $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$ であることを $\alpha \sim \beta$ と表す.
- 2 点 a, b を通る直線を $l(a, b)$ で表す.
- 線分 XY の長さを $|XY|$ や XY で, 三角形 XYZ の面積を $|\triangle XYZ|$ で表す.
- 三角形 ABC と三角形 DEF とが正の向きに相似であるとは, 回転, 平行移動, 拡大縮小のみを用いて一方を他方に移すことができることをいう. 三角形 ABC と三角形 DEF とが負の向きに相似であるとは, 三角形 ABC の鏡映が三角形 DEF と正の向きに相似であることをいう.
- $e^{\sqrt{-1}x}$ は $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ の略記である. $|e^{\sqrt{-1}x}| = 1$ や $e^{\sqrt{-1}(x+y)} = e^{\sqrt{-1}x}e^{\sqrt{-1}y}$ が成り立つことを確認せよ. 勿論, e^z に $z = \sqrt{-1}x$ を代入したものとして読んでも矛盾は生じない.

本書に登場する人名と, よく使われるかな表記との対応を記す.

人名	かな表記
Cramér	クラメル, クラメール
de Moivre	ド・モアブル, ド・モワブル
Feuerbach	フォイエルバッハ
Gergonne	ジュルゴンヌ, ジェルゴンヌ
Lemoine	ルモワーヌ
Miquel	ミケル
Morley	モーリー
Napoleon	ナポレオン
Newton	ニュートン
Pascal	パスカル
Simson	シムソン
Vandelmonde	ヴァンデルモンド

1　行列式と偏角

複素座標に限らず, 幾何の問題を座標計算で解く際には行列式の計算の能力は非常に役に立つ．また, 複素座標による座標計算では複素数の偏角の計算が非常に重要である．そのため, 本章では行列式および偏角についての解説を行う．

1.1　行列式の定義・性質

本節では本章を読むにあたって必要な事項を列挙した．証明や詳しい解説は線型代数の教科書を参考にされたい．また, ベクトルを太字でなく通常の字体で表記しているため, 混乱しないように注意せよ．行列の成分は複素数であるとする．

定義 1.1.

正方行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ に対して次のようにして定まる値 $\det A$ を A の**行列式**と呼ぶ．

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

ここで, S_n は n 次対称群である．また, 行列式は $\det A$ の他に $|A|$ と表記され, この表記を用いる際は行列の成分を囲む括弧は省略される．

例えば,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = aqz + brx + cpy - ary - bpz - cqx$$

である．

命題 1.2.

(線型性)

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & b_i & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

(交代性)

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

(余因子展開)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

ただし, A_{ij} は A から i 行目および j 列目を除いた $n-1$ 次行列.

系 1.3.

$a_i = 0$ となる i が存在するとき, 行列式の値は 0 である:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_{i-1} & 0 & a_{i+1} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

$a_i = a_j$ となる相異なる i, j が存在するとき, 行列式の値は 0 である:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

ある列の複素数倍を他の列に加えても行列式の値は変わらない:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & \lambda a_i + a_j & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

命題 1.4.

$a_1, \ldots, a_n$ が線型従属のとき

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

命題 1.5.

n 次正方行列 A に対して

$$\det A = \det {}^t\!A.$$

命題 1.6.

n 次正方行列 A, B に対して

$$\det AB = \det A \det B.$$

1.2 Cramér の公式

定理 1.7.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

のとき, 連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = a \\ b_1x + b_2y + b_3z = b \\ c_1x + c_2y + c_3z = c \end{cases}$$

は解 (x, y, z) をもち,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ c & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

である. y, z についても同様の式が成り立つ.

証明.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

により, 連立方程式は解をただ 1 組もつ. それを (x, y, z) とすると,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ c & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & & -z \\ + & -y & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_1x + a_2y + a_3z & a_2 & a_3 \\ b_1x + b_2y + b_3z & b_2 & b_3 \\ c_1x + c_2y + c_3z & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} a_1x & a_2 & a_3 \\ b_1x & b_2 & b_3 \\ c_1x & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となるので

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ c & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

が得られる． □

1.3 Vandelmonde の行列式

定理 1.8.

複素数 $x_1, \dots, x_n$ に対して，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

証明. 求める行列式を Δ とおく．Δ は交代式なので $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ で割りきれる．次数を比較すると定数 C を用いて $\Delta = C\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ と書けることがわかり，$x_2{x_3}^2\cdots{x_n}^{n-1}$ の係数を比較すると $C = 1$ がわかる． □

1.4 線型性の応用

例 1.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x^2+x+1 & y^2+y+1 & z^2+z+1 \end{vmatrix}$$

を計算する．線型性を用いると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x^2+x+1 & y^2+y+1 & z^2+z+1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と分解できる．第 1 項以外は同一の行が含まれるので行列式は 0 となり，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x^2+x+1 & y^2+y+1 & z^2+z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

である．

例 1.2. Vandelmonde の行列式に異なる導出を与える．$n = 4$ の場合で説明する．系 1.3 を用いて行列式を単

純にする.

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
x & y & z & w \\
x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\
x^3 & y^3 & z^3 & w^3
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
x & y-x & z-x & w-x \\
x^2 & (y+x)(y-x) & (z+x)(z-x) & (w+x)(w-x) \\
x^3 & (y^2+yx+x^2)(y-x) & (z^2+zx+x^2)(z-x) & (w^2+wx+x^2)(w-x)
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
y-x & z-x & w-x \\
(y+x)(y-x) & (z+x)(z-x) & (w+x)(w-x) \\
(y^2+yx+x^2)(y-x) & (z^2+zx+x^2)(z-x) & (w^2+wx+x^2)(w-x)
\end{vmatrix} \\
&= (y-x)(z-x)(w-x)\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
y+x & z+x & w+x \\
y^2+yx+x^2 & z^2+zx+x^2 & w^2+wx+x^2
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

であり,

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
y+x & z+x & w+x \\
y^2+yx+x^2 & z^2+zx+x^2 & w^2+wx+x^2
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
y & z & w \\
y^2 & z^2 & w^2
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となって $n=3$ の場合に帰着できる. これを繰り返すことで

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
x & y & z & w \\
x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\
x^3 & y^3 & z^3 & w^3
\end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(w-x)\cdot(z-y)(w-y)\cdot(w-z)
$$

がわかる.

例 1.3.

$$
\begin{vmatrix}
ab(a+b) & (a+b)^2 & ab \\
bc(b+c) & (b+c)^2 & bc \\
ca(c+a) & (c+a)^2 & ca
\end{vmatrix}
$$

を計算する.

$s = a+b+c$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} ab(a+b) & (a+b)^2 & ab \\ bc(b+c) & (b+c)^2 & bc \\ ca(c+a) & (c+a)^2 & ca \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ab(s-c) & (a+b)^2 & ab \\ bc(s-a) & (b+c)^2 & bc \\ ca(s-b) & (c+a)^2 & ca \end{vmatrix} \\
&= s\begin{vmatrix} ab & (a+b)^2 & ab \\ bc & (b+c)^2 & bc \\ ca & (c+a)^2 & ca \end{vmatrix} - abc\begin{vmatrix} 1 & (a+b)^2 & ab \\ 1 & (b+c)^2 & bc \\ 1 & (c+a)^2 & ca \end{vmatrix} \\
&= -abc\begin{vmatrix} 1 & (a+b)^2 & ab \\ 1 & (b+c)^2 & bc \\ 1 & (c+a)^2 & ca \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

となる.

$$\begin{vmatrix} 1 & (a+b)^2 & ab \\ 1 & (b+c)^2 & bc \\ 1 & (c+a)^2 & ca \end{vmatrix}$$

は 4 次の交代式なので定数 C を用いて $C(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$ と書くことができる. bc^3 の係数を比較すると, $C=-1$ が得られる. したがって,

$$\begin{vmatrix} ab(a+b) & (a+b)^2 & ab \\ bc(b+c) & (b+c)^2 & bc \\ ca(c+a) & (c+a)^2 & ca \end{vmatrix} = abc(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

である.

例 1.4.

$$\begin{vmatrix} d(2ef+ed+fd)(2d+e+f) & (2d+e+f)(e+d)(f+d) & (e+d)^2(f+d)^2 \\ e(2fd+fe+de)(2e+f+d) & (2e+f+d)(f+e)(d+e) & (f+e)^2(d+e)^2 \\ f(2de+df+ef)(2f+d+e) & (2f+d+e)(d+f)(e+f) & (d+f)^2(e+f)^2 \end{vmatrix}$$

を計算する. $s = d+e+f$, $t = de+ef+fd$, $u = def$ とおく. $d^3 = sd^2 - td + u$ に注意する.

$$d(2ef+ed+fd)(2d+e+f) = (u+dt)(d+s) = td^2 + (st+u)d + su,$$

$$(2d+e+f)(e+d)(f+d) = (d+s)(d^2+t) = 2sd^2 + st + u,$$

$$(e+d)^2(f+d)^2 = (d^2+t)^2 = (s^2+t)d^2 + (-st+u)d + su + t^2$$

を用いる.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} d(2ef+ed+fd)(2d+e+f) & (2d+e+f)(e+d)(f+d) & (e+d)^2(f+d)^2 \\ e(2fd+fe+de)(2e+f+d) & (2e+f+d)(f+e)(d+e) & (f+e)^2(d+e)^2 \\ f(2de+df+ef)(2f+d+e) & (2f+d+e)(d+f)(e+f) & (d+f)^2(e+f)^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} td^2+(st+u)d+su & 2sd^2+st+u & (s^2+t)d^2+(u-st)d+su+t^2 \\ te^2+(st+u)e+su & 2se^2+st+u & (s^2+t)e^2+(u-st)e+su+t^2 \\ tf^2+(st+u)f+su & 2sf^2+st+u & (s^2+t)f^2+(u-st)f+su+t^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & d & d^2 \\ 1 & e & e^2 \\ 1 & f & f^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} su & st+u & su+t^2 \\ st+u & 0 & u-st \\ t & 2s & s^2+t \end{vmatrix} \\
&= -(e-d)(f-d)(f-e)s^2(st-u)^2 \\
&= -(e-d)(f-d)(f-e)(d+e+f)^2(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2
\end{aligned}$$

と計算できる．したがって，

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} d(2ef+ed+fd)(2d+e+f) & (2d+e+f)(e+d)(f+d) & (e+d)^2(f+d)^2 \\ e(2fd+fe+de)(2e+f+d) & (2e+f+d)(f+e)(d+e) & (f+e)^2(d+e)^2 \\ f(2de+df+ef)(2f+d+e) & (2f+d+e)(d+f)(e+f) & (d+f)^2(e+f)^2 \end{vmatrix} \\ &= -(e-d)(f-d)(f-e)(d+e+f)^2(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2\end{aligned}$$

である．

1.5 複素数の偏角

ここからは偏角について解説する．

定義 1.9.

0 でない複素数 z が正の実数 r, 実数 θ を用いて

$$z = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

と表されるとき, θ を z の**偏角**といい, $\arg z$ で表す.

偏角は一意に定まらないことに注意する[*1]．例えば,

$$1 = \cos 0 + \sqrt{-1}\sin 0 = \cos 2\pi + \sqrt{-1}\sin 2\pi$$

であるため 1 の偏角は 0 でも 2π でもある．偏角は一意には定まらないが, 2π の整数倍の差を無視すると一意に定まる．そこで, 偏角の**主値**と呼ばれる次の値を定義する．

定義 1.10.

0 でない複素数 z に対し, z の偏角であって 0 以上 2π 未満であるものを $\operatorname{Arg} z$ で表す.

Arg は一価の函数である．

1.6 複素数の平方根

$z = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ であるとする．このとき, de Moivre の定理により

$$\left(\sqrt{r}\bigl(\cos(\theta/2) + \sqrt{-1}\sin(\theta/2)\bigr)\right)^2 = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

であるため, $\sqrt{z} = \sqrt{r}\bigl(\cos(\theta/2) + \sqrt{-1}\sin(\theta/2)\bigr)$ と考えられる．一方で,

$$-\sqrt{r}\bigl(\cos(\theta/2) + \sqrt{-1}\sin(\theta/2)\bigr)$$

も二乗すると z になるためこれも $\sqrt{z}$ の候補である．したがって, $\sqrt{z}$ としてありうる値には偏角が $\frac{1}{2}\operatorname{Arg} z$ であるものと $\frac{1}{2}\operatorname{Arg} z + \pi$ であるものとの 2 つがある．このことは θ と $\theta + 2\pi$ とは $\bmod 2\pi$ で等しいが $\frac{\theta}{2}$ と $\frac{\theta+2\pi}{2}$ とは $\bmod 2\pi$ で等しくないことに起因している．

以上により, $\sqrt{z}$ も $\arg z$ と同様に多価函数であると考えるのがよい．

[*1] 同値類という言葉を知っている人ならば, arg は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ から $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ への写像であると考えた方がわかりやすいであろう．

1.7 複素数の傾き

偏角は $\mathrm{mod}\,2\pi$ で定まる量であるが, 複素座標の計算においては傾きのみに着目し, z も $-z$ も同じであると考えた方が都合がよい. そこで, 次の同値関係を定義する.

定義 1.11.

0 でない複素数 α, β に対して $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$ であることを $\alpha \sim \beta$ と表す.

$\alpha \sim \beta$ であるとは, 言わば α と β との傾きが等しいということである.

命題 1.12.

0 でない複素数 α, β, γ について以下が成り立つ.

1. $\alpha \sim \alpha$.
2. $\alpha \sim \beta$ ならば $\beta \sim \alpha$.
3. $\alpha \sim \beta$ かつ $\beta \sim \gamma$ ならば $\alpha \sim \gamma$.

証明. 各自確かめよ. □

同値関係 $\sim$ についての重要な命題を示す.

命題 1.13.

0 でない複素数 α, β, γ について以下が成り立つ.

1. $\alpha \sim \beta$ かつ $\alpha \sim \gamma$ であり $\beta + \gamma \neq 0$ であるとき, $\alpha \sim \beta + \gamma$.
2. $\alpha \sim \beta$ のとき $\alpha\gamma \sim \beta\gamma$.
3. $|\alpha| = |\beta|$ かつ $\alpha + \beta \neq 0$ であるとき, $\alpha + \beta \sim \sqrt{\alpha\beta}$.
4. $|\alpha| = |\beta|$ かつ $\alpha - \beta \neq 0$ であるとき, $\alpha - \beta \sim \sqrt{-1}\sqrt{\alpha\beta}$.
5. $\alpha \sim \beta$ は $\alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta$ と同値.
6. $|\alpha| = 1$ のとき, $\alpha \sim \beta$ は $\beta = \alpha^2\bar{\beta}$ と同値.

注意. 3, 4 において $\sqrt{\alpha\beta}$ としてありうる値のどちらを選んでも $\alpha + \beta \sim \sqrt{\alpha\beta}$ の意味することは変わらないことに注意する.

証明. 1, 2 は明らか. 3 は $0, \alpha, \alpha+\beta, \beta$ が菱形の 4 頂点をなすことからわかる. 4 は 3 から明らか. 5 は $z \in \mathbb{R}$ と $z = \bar{z}$ とが同値であることを用いるとわかる. 6 は 5 と $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ とからわかる. □

上の命題を用いる具体例を紹介して本章を終える.

例 1.5. $|a| = |b| = |c| = 1$ かつ $(a+b+c)(ab+bc+ca) \neq 0$ であるとき

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \sim abc.$$

証明.

$$\begin{aligned}\overline{(a+b+c)(ab+bc+ca)} &= \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\ &= \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(abc)^2}\end{aligned}$$

によりわかる. □

2　基本の公式

定理 2.1.

4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A \neq B$, $C \neq D$ であるとする.

- 直線 AB と直線 CD とが平行であることは $a-b \sim c-d$ と同値である.
- 直線 AB と直線 CD とが垂直であることは $\sqrt{-1}(a-b) \sim c-d$ と同値である.
- 直線 AB を反時計回りに θ 回転させたときに直線 CD と重なることは $e^{\sqrt{-1}\theta}(a-b) \sim c-d$ と同値である.

定理 2.2.

単位円 Ω 上に 4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A \neq B$, $C \neq D$ であるとする.

- 線分 AB が Ω の直径であることは $a+b=0$ と同値である.
- 直線 AB と直線 CD とが平行であることは $ab=cd$ と同値である.
- 直線 AB と直線 CD とが垂直であることは $ab+cd=0$ と同値である.
- 直線 AB を反時計回りに θ 回転させたときに直線 CD と重なることは $cd = e^{2\sqrt{-1}\theta}ab$ と同値である.

定理 2.3.

6 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$ がある. 三角形 ABC と $A'B'C'$ とが正の向きに相似であることは

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'}$$

と同値である. また, この式は

$$\begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と書くことができる.

三角形 ABC と $A'B'C'$ とが負の向きに相似であることは

$$\frac{c-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{c'-a'}{b'-a'}\right)}$$

と同値である. また, この式は

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a'} & 1 \\ b & \overline{b'} & 1 \\ c & \overline{c'} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と書くことができる.

証明. 三角形 ABC と $A'B'C'$ とが正の向きに相似であることは $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|A'B'|}$ かつ $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ であることと同値であり, これは

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'}$$

と同値である.

負の向きの相似の場合も同様にわかる. □

定理 2.4.

3 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ が共線であることは

$$a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} = \bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a$$

と同値である. また, これは

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と書くことができる.

証明. 3 点 A, B, C の中に等しいものがあるとき, 主張は自明である.

3 点 A, B, C が相異なるときを考える. 3 点 A, B, C が共線であることは直線 AB と直線 AC とが平行であることと同値であり, 定理 2.1 より, $\frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$ と同値である.

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R} &\iff \frac{a-b}{a-c} = \overline{\left(\frac{a-b}{a-c}\right)} \\ &\iff \frac{a-b}{a-c} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}} \\ &\iff a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} = \bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a \\ &\iff \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

により, 主張が従う. □

定理 2.5.

α を 0 でない複素数, c を実数とする. このとき,

$$\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = \sqrt{-1}c$$

をみたす点 z の全体は直線である. 逆に, 複素平面内の直線は, α および c を適切に定めることで上の形の式で表せる.

証明. $z = x + \sqrt{-1}y$, $\alpha = a + \sqrt{-1}b$ とおくと,

$$\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = \sqrt{-1}c$$

は

$$2ay - 2bx = c$$

と書き直せるので, これは直線を表す.

また, 2 点 $A(a)$, $B(b)$ を通る直線の方程式は

$$(\bar{a}-\bar{b})z-(a-b)\bar{z}=\bar{a}b-\bar{b}a$$

であり, これは上の式で $\alpha=a-b$, $c=-\sqrt{-1}(\bar{a}b-\bar{b}a)$ としたものである. □

定理 2.6.

2 点 $A(a)$, $P(p)$ があり, $A\neq P$ であるとする. A が単位円上にあるとし, 直線 AP と単位円との交点のうち A でない方を $Q(q)$ とする. このとき,

$$q=\frac{a-p}{a\bar{p}-1}$$

である.

証明. A, P, Q が共線なので

$$\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ p & \bar{p} & 1 \\ q & \frac{1}{q} & 1 \end{vmatrix}=0$$

である.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ p & \bar{p} & 1 \\ q & \frac{1}{q} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{aq}\begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ p & \bar{p} & 1 \\ q^2 & 1 & q \end{vmatrix} \\
&= \frac{a-q}{aq}\begin{vmatrix} a+q & 0 & 1 \\ p & \bar{p} & 1 \\ q^2 & 1 & q \end{vmatrix} \\
&= \frac{a-q}{aq}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ p-q & \bar{p} & 1 \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} \\
&= \frac{a-q}{aq}\big(a(\bar{p}q-1)+p-q\big)
\end{aligned}$$

により,

$$q=\frac{a-p}{a\bar{p}-1}$$

が得られる. □

定理 2.7.

単位円上に 2 点 $A(a)$, $B(b)$ があり, $A\neq B$ であるとする. $Z(z)$ が直線 AB 上にあることは

$$z+ab\bar{z}=a+b$$

と同値である.

証明. $\bar{a} = \frac{1}{a}$ および $\bar{b} = \frac{1}{b}$ に注意すると, 3 点 A, B, Z が共線であることは

$$\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と同値である.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a-b & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} & 0 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{a-b}{ab}\begin{vmatrix} ab & -1 & 0 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{a-b}{ab}\begin{vmatrix} ab & -1 & 0 \\ a+b & 0 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{a-b}{ab}(a+b-ab\bar{z}-z)
\end{aligned}$$

により, 3 点 A, B, Z が共線であることは

$$z + ab\bar{z} = a + b$$

と同値である. □

定理 2.8.

単位円 Ω 上に点 $A(a)$ がある. $Z(z)$ が A における Ω の接線上にあることは

$$z + a^2\bar{z} = 2a$$

と同値である.

証明. Z が A における Ω の接線上にあることは, $z = a$ または $\arg(z-a) \equiv \arg a + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ であることと同値で, これは

$$z - a = \overline{z-a} \cdot (-a^2)$$

と同値である. したがって,

$$z + a^2\bar{z} = 2a$$

が得られる. □

定理 2.9.

4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A \neq B$, $C \neq D$ であるとする. 直線 AB と直線 CD とが平行でないとき, 直線 AB と直線 CD との交点の座標は

$$\frac{(\bar{a}b - \bar{b}a)(c-d) - (\bar{c}d - \bar{d}c)(a-b)}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d) - (\bar{c}-\bar{d})(a-b)}$$

で与えられる. また, 直線 AB と直線 CD が平行であることは $(\bar{a}-\bar{b})(c-d) - (\bar{c}-\bar{d})(a-b) = 0$ と同値である.

証明. 交点の座標を x とおくと, 定理 2.4 により,

$$(\bar{a}-\bar{b})x-(a-b)\bar{x}-\bar{a}b+\bar{b}a=(\bar{c}-\bar{d})x-(c-d)\bar{x}-\bar{c}d+\bar{d}c=0$$

であるため, Cramér の公式より

$$x=\frac{(\bar{a}b-\bar{b}a)(c-d)-(\bar{c}d-\bar{d}c)(a-b)}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d)-(\bar{c}-\bar{d})(a-b)}$$

が得られる. □

系 2.10.

4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A\neq B$, $C\neq D$ であるとする. 2 点 A, B が単位円上にあり, 直線 AB と直線 CD とが平行でないとき, 直線 AB と直線 CD との交点の座標は

$$\frac{ab(\bar{c}d-\bar{d}c)+(a+b)(c-d)}{ab(\bar{c}-\bar{d})+c-d}$$

で与えられる.

証明. $\bar{a}=\frac{1}{a}$, $\bar{b}=\frac{1}{b}$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\frac{(\bar{a}b-\bar{b}a)(c-d)-(\bar{c}d-\bar{d}c)(a-b)}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d)-(\bar{c}-\bar{d})(a-b)}&=\frac{(\frac{b}{a}-\frac{a}{b})(c-d)-(\bar{c}d-\bar{d}c)(a-b)}{(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})(c-d)-(\bar{c}-\bar{d})(a-b)}\\&=\frac{ab(\bar{c}d-\bar{d}c)+(a+b)(c-d)}{ab(\bar{c}-\bar{d})+c-d}\end{aligned}$$

と計算できる. □

系 2.11.

単位円上に 4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ があり, $A\neq B$, $C\neq D$ であるとする. 直線 AB と直線 CD とが平行でないとき, 直線 AB と直線 CD との交点の座標は

$$\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$$

で与えられる.

証明. $\bar{a}=\frac{1}{a}$ などに注意すると,

$$\begin{aligned}\frac{(\bar{a}b-\bar{b}a)(c-d)-(\bar{c}d-\bar{d}c)(a-b)}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d)-(\bar{c}-\bar{d})(a-b)}&=\frac{(\frac{b}{a}-\frac{a}{b})(c-d)-(\frac{d}{c}-\frac{c}{d})(a-b)}{(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})(c-d)-(\frac{1}{c}-\frac{1}{d})(a-b)}\\&=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}\end{aligned}$$

と計算できる. □

系 2.12.

単位円 Ω 上に 2 点 $A(a)$, $C(c)$ があるとき, 点 A における Ω の接線と点 C における Ω の接線との交点の座標は

$$\frac{2ac}{a+c}$$

で与えられる.

証明. 系 2.11 において $b \to a$, $d \to c$ の極限をとればよい.

$$\lim_{b\to a, d\to c} \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd} = \frac{2a^2c-2ac^2}{a^2-c^2} = \frac{2ac}{a+c}.$$

□

定理 2.13.

α, β, γ を 0 でない複素数, p, q, r を実数とする. 3 直線 $\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = \sqrt{-1}p$, $\bar{\beta}z - \beta\bar{z} = \sqrt{-1}q$, $\bar{\gamma}z - \gamma\bar{z} = \sqrt{-1}r$ が共点であることは

$$\begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & p \\ \beta & \bar{\beta} & q \\ \gamma & \bar{\gamma} & r \end{vmatrix} = 0$$

と同値である. ただし, 3 直線が平行である場合は無限遠点で交わると考え, 共線として扱う.

証明. (必要性) 交点を z としたとき,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & p \\ \beta & \bar{\beta} & q \\ \gamma & \bar{\gamma} & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{z} \\ z \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つため

$$\begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & p \\ \beta & \bar{\beta} & q \\ \gamma & \bar{\gamma} & r \end{vmatrix} = 0$$

が得られる. 交点が無限遠点の場合は $(-\bar{z}, z, -\sqrt{-1})$ の代わりに $(-\bar{z}, z, 0)$ で同じことを行える.

(十分性)

$$\begin{vmatrix} \beta & \bar{\beta} \\ \gamma & \bar{\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & \bar{\gamma} \\ \alpha & \bar{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} \\ \beta & \bar{\beta} \end{vmatrix} = 0$$

のとき, 3 直線は平行なので 3 直線は共点である.

そうでないとき, 例えば

$$\begin{vmatrix} \beta & \bar{\beta} \\ \gamma & \bar{\gamma} \end{vmatrix} \neq 0$$

であるとする. このとき,

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} \bar{\beta} & \sqrt{-1}q \\ \bar{\gamma} & \sqrt{-1}r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta & \bar{\beta} \\ \gamma & \bar{\gamma} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \beta & \sqrt{-1}q \\ \gamma & \sqrt{-1}r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta & \bar{\beta} \\ \gamma & \bar{\gamma} \end{vmatrix}}$$

は

$$\begin{pmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & p \\ \beta & \bar{\beta} & q \\ \gamma & \bar{\gamma} & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす．$y = -\bar{z}$ が成り立つので z が 3 直線の交点となる． □

定理 2.14.

6 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $E(e)$, $F(f)$ があり，$A \neq D$, $B \neq E$, $C \neq F$ であるとする．3 直線 AD, BE, CF が共点であることは

$$\begin{vmatrix} a\bar{d} - d\bar{a} & a-d & \bar{a} - \bar{d} \\ b\bar{e} - e\bar{b} & b-e & \bar{b} - \bar{e} \\ c\bar{f} - f\bar{c} & c-f & \bar{c} - \bar{f} \end{vmatrix} = 0$$

と同値である．ただし，3 直線が平行である場合は無限遠点で交わると考え，共線として扱う．

証明. 直線 AD, BE, CF の方程式はそれぞれ

$$(\bar{a} - \bar{d})z - (a-d)\bar{z} = \bar{a}d - \bar{d}a,$$

$$(\bar{b} - \bar{e})z - (b-e)\bar{z} = \bar{b}e - \bar{e}b,$$

$$(\bar{c} - \bar{f})z - (c-f)\bar{z} = \bar{c}f - \bar{f}c$$

であるため，定理 2.13 により定理が従う． □

系 2.15.

円周上に 6 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $E(e)$, $F(f)$ があり，$A \neq D$, $B \neq E$, $C \neq F$ であるとする．3 直線 AD, BE, CF が共点であることは

$$\begin{vmatrix} ad & a+d & 1 \\ be & b+e & 1 \\ cf & c+f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と同値である．また，この式は

$$(a-b)(c-d)(e-f) + (b-c)(d-e)(f-a) = 0$$

と書くことができる．
ただし，3 直線が平行である場合は無限遠点で交わると考え，共線として扱う．

証明. はじめに単位円上の場合を考える. $\bar{a} = \frac{1}{a}$ などに注意する.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a\bar{d} - d\bar{a} & a-d & \bar{a}-\bar{d} \\ b\bar{e} - e\bar{b} & b-e & \bar{b}-\bar{e} \\ c\bar{f} - f\bar{c} & c-f & \bar{c}-\bar{f} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{a^2-d^2}{ad} & a-d & \frac{d-a}{ad} \\ \frac{b^2-e^2}{be} & b-e & \frac{e-b}{be} \\ \frac{c^2-f^2}{cf} & c-f & \frac{f-c}{cf} \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a-d)(b-e)(c-f)}{abcdef} \begin{vmatrix} a+d & ad & -1 \\ b+e & be & -1 \\ c+f & cf & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a-d)(b-e)(c-f)}{abcdef} \begin{vmatrix} ad & a+d & 1 \\ be & b+e & 1 \\ cf & c+f & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

であり, $(a-d)(b-e)(c-f) \neq 0$ なので

$$\begin{vmatrix} ad & a+d & 1 \\ be & b+e & 1 \\ cf & c+f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

を得る. 後半の主張は行列式を展開するとわかる.

また, (a,b,c,d,e,f) を $(pa+q, pb+q, pc+q, pd+q, pe+q, pf+q)$ に置き換えても式の形は変わらないため, 単位円でない円の場合にもわかる. □

定理 2.16.

4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ が共円であることは

$$\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & b & \bar{b} & 1 \\ c\bar{c} & c & \bar{c} & 1 \\ d\bar{d} & d & \bar{d} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と同値である.

証明. 4 点 A, B, C, D の中に等しいものがあるとき, 主張は自明である.

4 点 A, B, C, D が相異なるときを考える. 4 点 A, B, C, D が共円であることは $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} \in \mathbb{R}$ と同値である.

$$\begin{aligned}
\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} \in \mathbb{R} &\iff \frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = \frac{(\bar{a}-\bar{b})(\bar{c}-\bar{d})}{(\bar{b}-\bar{c})(\bar{d}-\bar{a})} \\
&\iff \begin{vmatrix} a\bar{a} & a & \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & b & \bar{b} & 1 \\ c\bar{c} & c & \bar{c} & 1 \\ d\bar{d} & d & \bar{d} & 1 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

より, 主張が従う. □

定理 2.17.

3 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ があり, A, B, C は同一直線上にないとする. このとき, 三角形 ABC の外心の座標は

$$-\frac{\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}}$$

である.

証明. 外心の座標を x とおく. $|a-x|^2 = a\bar{a} - a\bar{x} - x\bar{a} + x\bar{x}$ であるため, 以下の 3 式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \bar{a}x + a\bar{x} - x\bar{x} + |a-x|^2 &= a\bar{a} \\ \bar{b}x + b\bar{x} - x\bar{x} + |b-x|^2 &= b\bar{b} \\ \bar{c}x + c\bar{x} - x\bar{x} + |c-x|^2 &= c\bar{c} \end{aligned}$$

ここで, $|a-x| = |b-x| = |c-x|$ より, $(s,t,u) = (x, \bar{x}, |a-x|^2 - x\bar{x})$ は連立方程式

$$\begin{aligned} \bar{a}s + at + u &= a\bar{a} \\ \bar{b}s + bt + u &= b\bar{b} \\ \bar{c}s + ct + u &= c\bar{c} \end{aligned}$$

の解である. また, a, b, c は同一直線上にないのでこの方程式は解をただ 1 組もち, Cramér の公式より主張が得られる. □

定理 2.18.

3 点 $A(a)$, $B(b)$, $X(x)$ があり, $A \neq B$ であるとする. 直線 AB に関して X と対称な点の座標は

$$\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{x} + \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$$

で与えられる. また, 点 X から直線 AB に下ろした垂線の足の座標は

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{x} + \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}\right)$$

で与えられる.

証明. 直線 AB に関して X と対称な点を $Y(y)$ とおく. このとき,

$$\frac{y-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)}$$

が成り立つので

$$y = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{x} + \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$$

が得られる. □

系 2.19.

3 点 $A(a)$, $B(b)$, $X(x)$ があり, $A \neq B$ であるとする. $|a| = |b| = 1$ であるとき, 直線 AB に関して X と対称な点の座標は

$$a + b - ab\bar{x}$$

で与えられる. また, 点 X から直線 AB に下ろした垂線の足の座標は

$$\frac{1}{2}(a + b + x - ab\bar{x})$$

で与えられる.

証明. $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$ に注意すると,

$$\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{x} + \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = a + b - ab\bar{x}$$

が得られる. □

定理 2.20.

どの 2 つも相異なる 4 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ に対して, $ABCD$ が調和四角形をなすまたは $(A, C; B, D)$ が調和点列であることは

$$(a-b)(c-d) + (b-c)(d-a) = 0$$

と同値である. また, これは

$$(a+c)(b+d) = 2(ac+bd)$$

と書くことができる.

証明. $ABCD$ が調和四角形をなすまたは $(A, C; B, D)$ が調和点列であることは, $\arg \frac{a-b}{c-b} = \arg \frac{a-d}{c-d} + \pi$ かつ $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ であることと同値である. また, これは $(a-b)(c-d)$ と $(b-c)(d-a)$ との偏角の差が π で, $(a-b)(c-d)$ と $(b-c)(d-a)$ との絶対値が等しいことと同値である. したがって, これは $(a-b)(c-d) = -(b-c)(d-a)$ と同値であり, 定理の主張を得る. □

定理 2.21.

5 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $M(m)$ があり, 三角形 MAB と三角形 MDC とは正の向きに相似であるとする. このとき,

$$m = \frac{ac - bd}{a + c - b - d}$$

である.

証明. 三角形 MAB と三角形 MDC とが正の向きに相似であることは

$$\frac{m-b}{m-a} = \frac{m-c}{m-d}$$

と同値である．したがって,

$$m = \frac{ac - bd}{a + c - b - d}$$

が得られる． $\square$

3　具体的な点の座標

本章では前章の命題を用いて具体的な状況で点の複素座標を計算する．2 点 a, b を通る直線を $l(a,b)$ で表し，$|a|=1$ のとき $l(a,a)$ は a における単位円の接線を表すものとする．

3.1　外心を中心とする座標

設定

三角形 ABC の外心を O として，$o=0$, $|a|=|b|=|c|=1$ となるような座標を考える．

定理 3.1.

三角形 ABC の重心, 垂心をそれぞれ G, H とすると,

$$g=\frac{a+b+c}{3},\quad h=a+b+c$$

である．

証明. $g=\frac{a+b+c}{3}$ は明らかなので $h=a+b+c$ を示す．
h は $l(a,-\frac{bc}{a})$ と $l(b,-\frac{ac}{b})$ との交点なので,

$$h=\frac{-bc(b-\frac{ac}{b})+ac(a-\frac{bc}{a})}{-bc+ac}=\frac{-b^2+ac+a^2-bc}{a-b}=a+b+c$$

と計算できる． □

証明 2. $h'=a+b+c$ によって H' を定めたとき H' が垂心となることを示せば十分である．$\angle BAC$ と $\angle ABC$ はどちらも直角でないと仮定する．$\angle BAC\neq\pi/2$ なので $b+c\neq 0$ であることに注意すると, $h'-a=b+c\sim\sqrt{bc}$ および $b-c\sim\sqrt{-1}\sqrt{bc}$ により直線 AH' と直線 BC とは垂直である．同様にして, 直線 BH' と直線 AC とは垂直であることがわかるので H' は垂心である． □

定理 3.2.

三角形 ABC の九点円の中心を N_9 とすると,

$$n_9=\frac{a+b+c}{2}$$

である．

証明. N_9 が線分 OH の中点であることから従う． □

定理 3.3.

点 A から直線 BC へ下ろした垂線の足を H_A とすると,

$$h_a = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right)$$

である.

証明. $l(a, -bc/a)$ と $l(b, c)$ とは垂直なので, H_A は $l(a, -bc/a)$ と $l(b, c)$ との交点である. したがって,

$$h_a = \frac{bc(a - bc/a) + bc(b + c)}{bc + bc} = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right)$$

が得られる. □

定理 3.4.

A を含まない弧 BC の中点を M_A とし, M_B, M_C も同様に定める.

$$m_a = -\sqrt{bc}, \quad m_b = -\sqrt{ca}, \quad m_c = -\sqrt{ab}$$

となるように $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ の符号を定めることができる. また, このとき三角形 ABC の内心を I とすると

$$i = -\sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca}$$

となる.

証明. $0 < \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$ となる α, β, γ を用いて $a = e^{\sqrt{-1}\alpha}$, $b = e^{\sqrt{-1}\beta}$, $c = e^{\sqrt{-1}\gamma}$ と書けると仮定して一般性を失わない. $\sqrt{a} = e^{\sqrt{-1}\alpha/2}$, $\sqrt{b} = -e^{\sqrt{-1}\beta/2}$, $\sqrt{c} = e^{\sqrt{-1}\gamma/2}$ と符号を定めると目標は達成される.

また, i は $l(a, -\sqrt{bc})$ と $l(b, -\sqrt{ca})$ との交点なので

$$\begin{aligned} i &= \frac{-a\sqrt{bc}(b - \sqrt{ca}) + b\sqrt{ca}(a - \sqrt{bc})}{-a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca}} \\ &= \frac{-\sqrt{a}(b - \sqrt{ca}) + \sqrt{b}(a - \sqrt{bc})}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} \\ &= -\sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca} \end{aligned}$$

と計算できる. □

定理 3.5.

三角形 ABC に関する点 P の等角共軛点を Q とすると,

$$q = \frac{abc\bar{p}^2 - (ab + bc + ca)\bar{p} + a + b + c - p}{1 - p\bar{p}}$$

である.

証明. 定理 2.6 により, p は $l(a, \frac{a-p}{a\bar{p}-1})$ 上にある. したがって, q は $l(a, \frac{bc(a\bar{p}-1)}{a-p})$ 上にある. 同様に考えると, q

は $l(b, \frac{ac(b\bar{p}-1)}{b-p})$ 上にある. 以上より, q は $l(a, \frac{bc(a\bar{p}-1)}{a-p})$ と $l(b, \frac{ac(b\bar{p}-1)}{b-p})$ との交点なので

$$\begin{aligned} q &= \frac{a\frac{bc(a\bar{p}-1)}{a-p}(b+\frac{ac(b\bar{p}-1)}{b-p}) - b\frac{ac(b\bar{p}-1)}{b-p}(a+\frac{bc(a\bar{p}-1)}{a-p})}{a\frac{bc(a\bar{p}-1)}{a-p} - b\frac{ac(b\bar{p}-1)}{b-p}} \\ &= \frac{(a\bar{p}-1)\big(b(b-p)+ac(b\bar{p}-1)\big) - (b\bar{p}-1)\big(a(a-p)+bc(a\bar{p}-1)\big)}{(a-b)(1-p\bar{p})} \\ &= \frac{abc\bar{p}^2 - (ab+bc+ca)\bar{p} + a + b + c - p}{1-p\bar{p}} \end{aligned}$$

と計算できる. □

定理 3.6.

四角形 $AXBC$ が調和四角形になるように点 X をとったとき,

$$x = \frac{a(b+c)-2bc}{2a-b-c}$$

である. また, 三角形 ABC の Lemoine 点を L とすると,

$$l = \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)}{a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-6abc}$$

である.

証明. 定理 2.20 により, $(a+x)(b+c) = 2(ax+bc)$ が成り立つので

$$x = \frac{a(b+c)-2bc}{2a-b-c}$$

である. また, l は $l(a, \frac{a(b+c)-2bc}{2a-b-c})$ と $l(b, \frac{b(c+a)-2ca}{2b-c-a})$ との交点なので

$$\begin{aligned} l &= \frac{a\frac{a(b+c)-2bc}{2a-b-c}(b+\frac{b(c+a)-2ca}{2b-c-a}) - b\frac{b(c+a)-2ca}{2b-c-a}(a+\frac{a(b+c)-2bc}{2a-b-c})}{a\frac{a(b+c)-2bc}{2a-b-c} - b\frac{b(c+a)-2ca}{2b-c-a}} \\ &= \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)}{a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-6abc} \end{aligned}$$

が得られる. □

定理 3.7.

辺 BC の中点を M とする. H から直線 AM に下ろした垂線の足を P としたとき,

$$p = \frac{a(b^2+c^2)-bc(b+c)}{a(b+c)-2bc}$$

である. また, このような点 P は A-**Humpty point** と呼ばれる.

証明. 三角形 ABC の外接円における A の対蹠点を A' とし, 直線 AM と三角形 ABC の外接円との交点のうち A でない方を D とおく.

$$\angle HPM = \angle A'DM = \frac{\pi}{2}$$

および M が H と A' との中点であることにより, P は M に関して D と対称である.

定理 2.6 により

$$d = \frac{a - \frac{b+c}{2}}{a\frac{b+c}{2bc} - 1} = \frac{bc(2a-b-c)}{a(b+c)-2bc}$$

であり,

$$p = b + c - d = \frac{a(b^2+c^2) - bc(b+c)}{a(b+c)-2bc}$$

が得られる. □

定理 3.8.

A-Humpty point の等角共軛点を Q とすると,

$$q = \frac{a^2 - bc}{2a-b-c}$$

である. また, このような点 Q は A-**Dumpty point** と呼ばれる.

証明. P を三角形 ABC の A-Humpty point とする. P と M, 直線 BC に関して対称な点をそれぞれ D, E とおく. 定理 3.7 の証明から, D は三角形 ABC の外接円上にある. また, D と E とは線分 BC の垂直二等分線に関して対称なので E も三角形 ABC の外接円上にある.

$$\measuredangle PCB = -\measuredangle ECB = \measuredangle DBC = \measuredangle DAC = \measuredangle PAC$$

であり, 同様に

$$\measuredangle PBC = \measuredangle PAB$$

も成り立つ. これにより, P の等角共軛点である Q は

$$\measuredangle QCA = \measuredangle QAB, \quad \measuredangle QAC = \measuredangle QBA$$

をみたす. これは三角形 QCA と三角形 QAB とが正の向きに相似であることを意味するので, 定理 2.21 により

$$q = \frac{a^2 - bc}{2a-b-c}$$

が得られる. □

定理 3.9.

B から直線 AC に下ろした垂線の足, C から直線 AB に下ろした垂線の足をそれぞれ H_B, H_C とする. 三角形 ABC の外接円と三角形 AH_CH_B の外接円との交点のうち A でない方を Q とする. このとき,

$$q = \frac{bc(2a+b+c)}{ab+bc+ca}$$

である. また, このような点 Q は A-**queue point** と呼ばれる.

証明. 三角形 QH_CH_B と三角形 QBC とが正の向きに相似であることを用いる．定理 2.21 により，

$$\begin{aligned} q &= \frac{bh_b - ch_c}{b + h_b - c - h_c} \\ &= \frac{bc(b(a+b+c) - ac) - bc(c(a+b+c) - ab)}{c(2b^2 + b(a+b+c) - ac) - b(2c^2 + c(a+b+c) - ab)} \\ &= \frac{bc(2a+b+c)}{2bc + (b+c)a} \end{aligned}$$

と計算できる． □

3.2 内心を中心とする座標

設定

三角形 ABC の内心を I, 内接円を ω として, ω が辺 BC, CA, AB と接する点をそれぞれ D, E, F とする． $i = 0$, $|d| = |e| = |f| = 1$ となるような座標を考える．

定理 3.10.

$$a = \frac{2ef}{e+f}, \quad b = \frac{2fd}{f+d}, \quad c = \frac{2de}{d+e} \tag{1}$$

である．

証明. 系 2.12 より従う． □

定理 3.11.

角 A 内の傍心を I_A とすると，

$$i_a = \frac{4def}{(d+e)(d+f)} \tag{2}$$

である．

証明. 三角形 ABI と三角形 AI_AC とは正の向きに相似であることに注意すると，

$$i_a - a = \frac{(b-a)(c-a)}{i-a} = \frac{\frac{2f^2(d-e)}{(d+f)(e+f)} \cdot \frac{2e^2(d-f)}{(d+e)(e+f)}}{-\frac{2ef}{e+f}} = -\frac{2ef(d-e)(d-f)}{(d+e)(d+f)(e+f)}$$

となり，

$$i_a = -\frac{2ef(d-e)(d-f)}{(d+e)(d+f)(e+f)} + \frac{2ef}{e+f} = \frac{4def}{(d+e)(d+f)}$$

が得られる． □

定理 3.12.

三角形 ABC の外心を O とすると,

$$o = \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)} \tag{3}$$

である.

証明. 定理 2.17 により,

$$o = -\frac{\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}}$$

である.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{2ef}{e+f} & \frac{2}{e+f} & 1 \\ \frac{2fd}{f+d} & \frac{2}{f+d} & 1 \\ \frac{2de}{d+e} & \frac{2}{d+e} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{4}{(d+e)(e+f)(f+d)} \begin{vmatrix} ef & 1 & e+f \\ fd & 1 & f+d \\ de & 1 & d+e \end{vmatrix} \\
&= -\frac{4(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)(e+f)(f+d)}
\end{aligned}$$

である. また, 例 1.3 により

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{4ef}{(e+f)^2} & \frac{2ef}{e+f} & 1 \\ \frac{4fd}{(f+d)^2} & \frac{2fd}{f+d} & 1 \\ \frac{4de}{(d+e)^2} & \frac{2de}{d+e} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{8}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2} \begin{vmatrix} ef & ef(e+f) & (e+f)^2 \\ fd & fd(f+d) & (f+d)^2 \\ de & de(d+e) & (d+e)^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{8def(d+e+f)(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2}
\end{aligned}$$

である. したがって,

$$o = \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}$$

が得られる. $\square$

証明 2. 同一法により示す．$o' = \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} a - o' &= \frac{2ef}{e+f} - \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)} \\ &= \frac{2ef}{(d+e)(e+f)(f+d)}\big((d+e)(d+f) - d(d+e+f)\big) \\ &= \frac{2e^2f^2}{(d+e)(e+f)(f+d)} \end{aligned}$$

である．これの絶対値は d, e, f に関して対称なので O' は外心である．したがって，$o = \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}$ が示された． □

定理 3.13.

三角形 ABC の重心，垂心をそれぞれ G, H とすると，

$$g = \frac{6def(d+e+f) + 2d^2e^2 + 2e^2f^2 + 2f^2d^2}{3(d+e)(e+f)(f+d)}, \quad h = \frac{2def(d+e+f) + 2d^2e^2 + 2e^2f^2 + 2f^2d^2}{(d+e)(e+f)(f+d)}$$

である．

証明.

$$g = \frac{1}{3}\left(\frac{2ef}{e+f} + \frac{2fd}{f+d} + \frac{2de}{d+e}\right) = \frac{6def(d+e+f) + 2d^2e^2 + 2e^2f^2 + 2f^2d^2}{3(d+e)(e+f)(f+d)}$$

である．また，$h = 3g - 2o$ なので

$$h = \frac{2def(d+e+f) + 2d^2e^2 + 2e^2f^2 + 2f^2d^2}{(d+e)(e+f)(f+d)}$$

である． □

命題 3.14.

$F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ を 1 次の斉次有理式とする．外心を中心とした座標で $F(a, b, c)$ と表される点は，内心を中心とする座標では

$$\frac{2}{(d+e)(e+f)(f+d)}\big(F(e^2f^2, f^2d^2, d^2e^2) + def(d+e+f)\big)$$

と表せる．また，内心を中心とした座標で $G(d, e, f)$ と表される点は，外心を中心とする座標では定理 3.4 の符号の定め方のもとで

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{2} G\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

と表せる．

証明. 点 P が外心を中心とした座標で $p = F(a, b, c)$ と表せるとする．このとき，

$$p = F(a - o, b - o, c - o) + o$$

であり, この表式は座標の取り方 (原点の位置, 実軸の向き, スケール) によって変化しない. 実際, 座標の取り換えは (a,b,c,o,p) を $(\alpha a+\beta,\alpha b+\beta,\alpha c+\beta,\alpha o+\beta,\alpha p+\beta)$ に置き換えることに対応しており, F が 1 次の斉次式であることからこの変換によって p の表式は変化しない. したがって, 内心を中心とする座標でも上の表式を使うことができ, $a=\frac{2ef}{e+f}$, $b=\frac{2fd}{f+d}$, $c=\frac{2de}{d+e}$, $o=\frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}$ を代入すると

$$\begin{aligned}p&=F\left(\frac{2e^2f^2}{(d+e)(e+f)(f+d)},\frac{2f^2d^2}{(d+e)(e+f)(f+d)},\frac{2d^2e^2}{(d+e)(e+f)(f+d)}\right)\\&\quad+\frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}\\&=\frac{2}{(d+e)(e+f)(f+d)}\big(F(e^2f^2,f^2d^2,d^2e^2)+def(d+e+f)\big)\end{aligned}$$

が得られる.

点 Q が内心を中心とした座標で $q=G(d,e,f)$ と表せるとする. このとき,

$$q=G(d-i,e-i,f-i)+i$$

であり, この表式は外心を中心とした座標でも使うことができる.

$$\begin{aligned}d-i&=\frac{1}{2}(b+c-i-bc\bar{i})\\&=\frac{\sqrt{a}(b+c)+\sqrt{a}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+\sqrt{bc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{2\sqrt{a}}\\&=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{2\sqrt{a}}\end{aligned}$$

であり, 同様にして $e-i=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{2\sqrt{b}}$, $f-i=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{2\sqrt{c}}$ もわかる. これらを代入すると,

$$\begin{aligned}q&=G(d-i,e-i,f-i)+i\\&=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{2}G\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}}\right)-(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\end{aligned}$$

が得られる. □

定理 3.15.

三角形 ABC の Gergonne 点を Ge とすると,

$$g_e=\frac{d^2e^2+e^2f^2+f^2d^2-def(d+e+f)}{d^2e+d^2f+e^2f+e^2d+f^2d+f^2e-6def}$$

である.

証明. Ge は三角形 DEF の Lemoine 点なので, 定理 3.6 により,

$$g_e=\frac{d^2e^2+e^2f^2+f^2d^2-def(d+e+f)}{d^2e+d^2f+e^2f+e^2d+f^2d+f^2e-6def}$$

が得られる. □

定理 3.16.

三角形 ABC の外接円と三角形 AEF の外接円との交点のうち A でない方を K とする．このとき,

$$k = \frac{2def}{-d^2 + de + df + ef}$$

である．また, このような点 K は A**-sharky-devil point** と呼ばれる．

証明. 三角形 KBC と三角形 KFE とが正の向きに相似であることを用いる．定理 2.21 により,

$$\begin{aligned} k &= \frac{be - cf}{b + e - c - f} \\ &= \frac{2def(d+e) - 2def(d+f)}{(d+e)(2df + e(d+f)) - (d+f)(2de + f(d+e))} \\ &= \frac{2def}{(d+e)(d+f) - 2d^2} \\ &= \frac{2def}{-d^2 + de + df + ef} \end{aligned}$$

と計算できる． □

定理 3.17.

三角形 ABC の角 A 内の混線内接円が辺 AB, 辺 AC, 三角形 ABC の外接円と接する点をそれぞれ K, L, T とする．このとき,

$$k = \frac{2ef}{e - f}, \quad l = \frac{2ef}{f - e}, \quad t = \frac{2def}{de + df + 2ef}$$

である．

証明. C を含まない弧 AB の中点, B を含まない弧 AC の中点をそれぞれ M_C, M_B とおく．T を中心とする相似拡大によって三角形 ABC の混線内接円を外接円にうつすとき, 点 K は M_C にうつるので, M_C, K, T は共線である．同様に, M_B, L, T は共線である．ABM_BTM_CC に Pascal の定理を適用すると K, I, L の共線がわかり, さらに, $AK = AL$ により直線 AI と直線 KL とは垂直である．

K は $l(f, f)$ と $l(\sqrt{-ef}, -\sqrt{-ef})$ との交点なので

$$k = \frac{-2ef^2}{f^2 - ef} = \frac{2ef}{e - f}$$

である．同様に,

$$l = \frac{2ef}{f - e}$$

である．

T は直線 M_CK と直線 M_BL との交点であり, 定理 3.11 により

$$m_c = \frac{2def}{(d+f)(e+f)}, \quad m_b = \frac{2def}{(d+e)(e+f)}$$

であるので,

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{(\bar{k}m_c - \bar{m}_c k)(l - m_b) - (\bar{l}m_b - \bar{m}_b l)(k - m_c)}{(\bar{k} - \bar{m}_c)(l - m_b) - (\bar{l} - \bar{m}_b)(k - m_c)} \\
&= \frac{1}{(-\frac{2}{e-f} - \frac{2f}{(d+f)(e+f)})(\frac{2ef}{f-e} - \frac{2def}{(d+e)(e+f)}) - (-\frac{2}{f-e} - \frac{2e}{(d+e)(e+f)})(\frac{2ef}{e-f} - \frac{2def}{(d+f)(e+f)})} \\
&\quad \times \Bigg(\left(-\frac{2}{e-f}\frac{2def}{(d+f)(e+f)} - \frac{2f}{(d+f)(e+f)}\frac{2ef}{e-f} \right)\left(\frac{2ef}{f-e} - \frac{2def}{(d+e)(e+f)} \right) \\
&\qquad - \left(-\frac{2}{f-e}\frac{2def}{(d+e)(e+f)} - \frac{2e}{(d+e)(e+f)}\frac{2ef}{f-e} \right)\left(\frac{2ef}{e-f} - \frac{2def}{(d+f)(e+f)} \right) \Bigg) \\
&= \frac{2ef\big(-(d+f)e(2d+e+f) + (d+e)f(2d+e+f)\big)}{-(de+df+2ef)e(2d+e+f) + (de+df+2ef)f(2d+e+f)} \\
&= \frac{2def}{de+df+2ef}
\end{aligned}
$$

と計算できる. □

定理 3.18.

三角形 ABC の Feuerbach 点を F_e とすると,

$$f_e = \frac{de+ef+fd}{d+e+f}$$

である.

証明. F_e が内接円上にあるので $|f_e| = 1$ である. 辺 AB の中点の座標は

$$\frac{ef}{e+f} + \frac{df}{d+f} = \frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)}$$

であり, 辺 BC, CA についても同様である. f_e が九点円上にあることは $\frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)}$, $\frac{d(2ef+ed+fd)}{(e+d)(f+d)}$, $\frac{e(2fd+fe+de)}{(f+e)(d+e)}$, f_e が共円であることと同値で,

$$
\begin{vmatrix}
1 & f_e & \frac{1}{f_e} & 1 \\
\frac{d(2ef+ed+fd)(2d+e+f)}{(e+d)^2(f+d)^2} & \frac{d(2ef+ed+fd)}{(e+d)(f+d)} & \frac{(2d+e+f)}{(e+d)(f+d)} & 1 \\
\frac{e(2fd+fe+de)(2e+f+d)}{(f+e)^2(d+e)^2} & \frac{e(2fd+fe+de)}{(f+e)(d+e)} & \frac{(2e+f+d)}{(f+e)(d+e)} & 1 \\
\frac{f(2de+df+ef)(2f+d+e)}{(d+f)^2(e+f)^2} & \frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)} & \frac{(2f+d+e)}{(d+f)(e+f)} & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

と同値である. 第 1 列で余因子展開することによってこの行列式を計算する. $s = d+e+f$, $t = de+ef+fd$,

$u = def$ とおく. 第 1 項は,

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\frac{d(2ef+ed+fd)}{(e+d)(f+d)} & \frac{(2d+e+f)}{(e+d)(f+d)} & 1 \\
\frac{e(2fd+fe+de)}{(f+e)(d+e)} & \frac{(2e+f+d)}{(f+e)(d+e)} & 1 \\
\frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)} & \frac{(2f+d+e)}{(d+f)(e+f)} & 1
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2} \\
&\quad \times \begin{vmatrix}
d(2ef+ed+fd) & (2d+e+f) & (e+d)(f+d) \\
e(2fd+fe+de) & (2e+f+d) & (f+e)(d+e) \\
f(2de+df+ef) & (2f+d+e) & (d+f)(e+f)
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2} \begin{vmatrix}
td+u & d+s & d^2+t \\
te+u & e+s & e^2+t \\
tf+u & f+s & f^2+t
\end{vmatrix} \\
&= -\frac{(st-u)}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2} \begin{vmatrix}
1 & d & d^2 \\
1 & e & e^2 \\
1 & f & f^2
\end{vmatrix} \\
&= -\frac{(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2}(st-u).
\end{aligned}
$$

第 2 項は,

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\frac{d(2ef+ed+fd)(2d+e+f)}{(e+d)^2(f+d)^2} & \frac{(2d+e+f)}{(e+d)(f+d)} & 1 \\
\frac{e(2fd+fe+de)(2e+f+d)}{(f+e)^2(d+e)^2} & \frac{(2e+f+d)}{(f+e)(d+e)} & 1 \\
\frac{f(2de+df+ef)(2f+d+e)}{(d+f)^2(e+f)^2} & \frac{(2f+d+e)}{(d+f)(e+f)} & 1
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4} \\
&\quad \times \begin{vmatrix}
d(2ef+ed+fd)(2d+e+f) & (2d+e+f)(e+d)(f+d) & (e+d)^2(f+d)^2 \\
e(2fd+fe+de)(2e+f+d) & (2e+f+d)(f+e)(d+e) & (f+e)^2(d+e)^2 \\
f(2de+df+ef)(2f+d+e) & (2f+d+e)(d+f)(e+f) & (d+f)^2(e+f)^2
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4} \\
&\quad \times \begin{vmatrix}
td^2+(st+u)d+su & 2sd^2+st+u & (s^2+t)d^2+(u-st)d+su+t^2 \\
te^2+(st+u)e+su & 2se^2+st+u & (s^2+t)e^2+(u-st)e+su+t^2 \\
tf^2+(st+u)f+su & 2sf^2+st+u & (s^2+t)f^2+(u-st)f+su+t^2
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4} \begin{vmatrix}
1 & d & d^2 \\
1 & e & e^2 \\
1 & f & f^2
\end{vmatrix} \begin{vmatrix}
su & st+u & su+t^2 \\
st+u & 0 & u-st \\
t & 2s & s^2+t
\end{vmatrix} \\
&= -\frac{(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4} s^2(st-u)^2 \\
&= -\frac{(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2} s^2.
\end{aligned}
$$

第 3 項は,

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\frac{d(2ef+ed+fd)(2d+e+f)}{(e+d)^2(f+d)^2} & \frac{d(2ef+ed+fd)}{(e+d)(f+d)} & 1\\
\frac{e(2fd+fe+de)(2e+f+d)}{(f+e)^2(d+e)^2} & \frac{e(2fd+fe+de)}{(f+e)(d+e)} & 1\\
\frac{f(2de+df+ef)(2f+d+e)}{(d+f)^2(e+f)^2} & \frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)} & 1
\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4}\\
&\quad\times \begin{vmatrix}
d(2ef+ed+fd)(2d+e+f) & d(2ef+ed+fd)(e+d)(f+d) & (e+d)^2(f+d)^2\\
e(2fd+fe+de)(2e+f+d) & e(2fd+fe+de)(f+e)(d+e) & (f+e)^2(d+e)^2\\
f(2de+df+ef)(2f+d+e) & f(2de+df+ef)(d+f)(e+f) & (d+f)^2(e+f)^2
\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4}\\
&\quad\times \begin{vmatrix}
td^2+(st+u)d+su & (st+u)d^2+2tu & (s^2+t)d^2+(u-st)d+su+t^2\\
te^2+(st+u)e+su & (st+u)e^2+2tu & (s^2+t)e^2+(u-st)e+su+t^2\\
tf^2+(st+u)f+su & (st+u)f^2+2tu & (s^2+t)f^2+(u-st)f+su+t^2
\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4}\begin{vmatrix}1 & d & d^2\\ 1 & e & e^2\\ 1 & f & f^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}su & 2tu & su+t^2\\ st+u & 0 & u-st\\ t & st+u & s^2+t\end{vmatrix}\\
&= \frac{(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4}t^2(st-u)^2\\
&= \frac{(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2}t^2.
\end{aligned}
$$

第 4 項は,

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\frac{d(2ef+ed+fd)(2d+e+f)}{(e+d)^2(f+d)^2} & \frac{d(2ef+ed+fd)}{(e+d)(f+d)} & \frac{(2d+e+f)}{(e+d)(f+d)}\\
\frac{e(2fd+fe+de)(2e+f+d)}{(f+e)^2(d+e)^2} & \frac{e(2fd+fe+de)}{(f+e)(d+e)} & \frac{(2e+f+d)}{(f+e)(d+e)}\\
\frac{f(2de+df+ef)(2f+d+e)}{(d+f)^2(e+f)^2} & \frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)} & \frac{(2f+d+e)}{(d+f)(e+f)}
\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4}\\
&\quad\times \begin{vmatrix}
d(2ef+ed+fd)(2d+e+f) & d(2ef+ed+fd)(e+d)(f+d) & (2d+e+f)(e+d)(f+d)\\
e(2fd+fe+de)(2e+f+d) & e(2fd+fe+de)(f+e)(d+e) & (2e+f+d)(f+e)(d+e)\\
f(2de+df+ef)(2f+d+e) & f(2de+df+ef)(d+f)(e+f) & (2f+d+e)(d+f)(e+f)
\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4}\\
&\quad\times \begin{vmatrix}
td^2+(st+u)d+su & (st+u)d^2+2tu & 2sd^2+st+u\\
te^2+(st+u)e+su & (st+u)e^2+2tu & 2se^2+st+u\\
tf^2+(st+u)f+su & (st+u)f^2+2tu & 2sf^2+st+u
\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4}\begin{vmatrix}1 & d & d^2\\ 1 & e & e^2\\ 1 & f & f^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}su & 2tu & st+u\\ st+u & 0 & 0\\ t & st+u & 2s\end{vmatrix}\\
&= -\frac{(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^4(e+f)^4(f+d)^4}(st+u)(st-u)^2\\
&= -\frac{(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2}(st+u).
\end{aligned}
$$

以上より,

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1 & f_e & \frac{1}{f_e} & 1 \\
\frac{4d(2ef+ed+fd)(2d+e+f)}{(e+d)^2(f+d)^2} & \frac{2d(2ef+ed+fd)}{(e+d)(f+d)} & \frac{2(2d+e+f)}{(e+d)(f+d)} & 1 \\
\frac{4e(2fd+fe+de)(2e+f+d)}{(f+e)^2(d+e)^2} & \frac{2e(2fd+fe+de)}{(f+e)(d+e)} & \frac{2(2e+f+d)}{(f+e)(d+e)} & 1 \\
\frac{4f(2de+df+ef)(2f+d+e)}{(d+f)^2(e+f)^2} & \frac{2f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)} & \frac{2(2f+d+e)}{(d+f)(e+f)} & 1
\end{vmatrix} \\
&= \frac{(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2}\left(-(st-u)+s^2f_e+\frac{t^2}{f_e}-(st+u)\right) \\
&= \frac{(e-d)(f-d)(f-e)}{(d+e)^2(e+f)^2(f+d)^2}\frac{(sf_e-t)^2}{f_e}
\end{aligned}
$$

となる．これが 0 となるので

$$f_e = \frac{de+ef+fd}{d+e+f}$$

が得られる． □

証明 2. 同一法により示す．九点円の中心を N_9 とし, 辺 BC の中点を M とする．${f_e}' = \frac{de+ef+fd}{d+e+f}$ により点 ${F_e}'$ を定める．${F_e}'$ が三角形 ABC の内接円上にも九点円上にもあり, ${F_e}'$, I, N_9 が共線であることを示せばよい．

$$\overline{\left(\frac{de+ef+fd}{d+e+f}\right)} = \frac{d+e+f}{de+ef+fd}$$

により, $\left|\frac{de+ef+fd}{d+e+f}\right| = 1$ がわかり, ${F_e}'$ は三角形 ABC の内接円上にある．

外心を中心とする座標では $n_9 = \frac{a+b+c}{2}$ なので定理 3.14 により

$$
\begin{aligned}
n_9 &= \frac{2}{(d+e)(e+f)(f+d)}\left(\frac{d^2e^2+e^2f^2+f^2d^2}{2}+def(d+e+f)\right) \\
&= \frac{(de+ef+fd)^2}{(d+e)(e+f)(f+d)}
\end{aligned}
$$

である．また,

$$m = \frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)}$$

である．

$$
\begin{aligned}
\frac{de+ef+fd}{d+e+f} - n_9 &= \frac{de+ef+fd}{d+e+f} - \frac{(de+ef+fd)^2}{(d+e)(e+f)(f+d)} \\
&= -\frac{def(de+ef+fd)}{(d+e)(e+f)(f+d)(d+e+f)}
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
m - n_9 &= \frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)} - \frac{(de+ef+fd)^2}{(d+e)(e+f)(f+d)} \\
&= \frac{f(d+e)(2de+df+ef)-(de+ef+fd)^2}{(d+e)(e+f)(f+d)} \\
&= -\frac{d^2e^2}{(d+e)(e+f)(f+d)}
\end{aligned}
$$

なので

$$\left|\frac{de+ef+fd}{d+e+f}-n_9\right|=|m-n_9|$$

が得られ, ${F_e}'$ は三角形 ABC の九点円上にある.

また,

$$\frac{n_9-i}{{f_e}'-i}=\frac{(d+e+f)(de+ef+fd)}{(d+e)(e+f)(f+d)}\sim\frac{def}{def}=1$$

であるので, ${F_e}'$, I, N_9 は共線である.

以上により, ${F_e}'$ は Feuerbach 点であり, $f_e=\frac{de+ef+fd}{d+e+f}$ が得られる. □

3.3 弧の中点を中心とする座標

設定

三角形 ABC の内心を I とし, 三角形 BCI の外心を M_A とする. $m=0$, $|b|=|c|=|i|=1$ となる座標を考える.

定理 3.19.

三角形 ABC の角 A 内の傍心, 角 B 内の傍心, 角 C 内の傍心をそれぞれ I_A, I_B, I_C とすると,

$$i_a=-i,\quad i_b=\frac{2bc-bi+ci}{b+c},\quad i_c=\frac{2bc-ci+bi}{b+c}$$

である.

証明. $i_a=-i$ は $\angle IBI_A=\angle ICI_A=\frac{\pi}{2}$ から明らかである. I_B は直線 BI と直線 CI_A との交点なので

$$i_b=\frac{bi(c-i)+ci(b+i)}{bi+ci}=\frac{2bc-bi+ci}{b+c}$$

である. $i_c=\frac{2bc-ci+bi}{b+c}$ も同様である. □

定理 3.20.

$$a=\frac{bc+i^2}{b+c}\tag{4}$$

である.

証明. 三角形 ABI と三角形 AI_AC とは正の向きに相似であるので, 定理 2.21 により,

$$a=\frac{bc+i^2}{b+c}$$

が得られる. □

定理 3.21.

三角形 ABC の外心を O とすると

$$o = \frac{bc}{b+c}$$

である.

証明. 定理 2.17 を用いる. $\overline{\left(\frac{bc+i^2}{b+c}\right)} = \frac{bc+i^2}{i^2(b+c)}$ であることに注意する.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{bc+i^2}{b+c} & \frac{bc+i^2}{i^2(b+c)} & 1 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ c & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{bci^2(b+c)} \begin{vmatrix} i^2(bc+i^2) & bc+i^2 & i^2(b+c) \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{bci^2(b+c)} \begin{vmatrix} (bc+i^2)(i^2-b^2) & 0 & c(i^2-b^2) \\ b^2 & 1 & b \\ c^2-b^2 & 0 & c-b \end{vmatrix} \\
&= \frac{(c-b)(i^2-b^2)}{bci^2(b+c)} \begin{vmatrix} (bc+i^2) & c \\ c+b & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(c-b)(i^2-b^2)(i^2-c^2)}{bci^2(b+c)}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{bc+i^2}{b+c}\frac{bc+i^2}{i^2(b+c)} & \frac{bc+i^2}{b+c} & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{i^2(b+c)^2} \begin{vmatrix} (bc+i^2)^2 & i^2(b+c)(bc+i^2) & i^2(b+c)^2 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{i^2(b+c)^2} \begin{vmatrix} (i^2-b^2)(i^2-c^2) & i^2(b+c)(bc+i^2) & i^2(b+c)^2 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(i^2-b^2)(i^2-c^2)(b-c)}{i^2(b+c)^2}
\end{aligned}$$

から,

$$o = \frac{bc}{b+c}$$

が得られる. □

証明 2. $\measuredangle BOC = 2\measuredangle BM_AC$ により

$$\frac{c-o}{b-o} = \frac{c^2}{b^2}$$

である. これにより,

$$o = \frac{b^2c - bc^2}{b^2 - c^2} = \frac{bc}{b+c}$$

が得られる. □

4 練習問題

本章にはここまでで紹介してきた公式を用いて解くことができる問題を多数掲載した．これらの問題は概ね難易度の順になるように並べている．全ての問題に解答を付しているので，解くことも解答を読むことも勉強になるであろう．

4.1 複素座標で実際の問題を解くには

矛盾しているように聞こえるかもしれないが，複素座標で問題を解くことにおいて初等幾何の力は大いに役に立つ．実際，第 3 章で行ったように，点の座標を計算する前にその点のより計算しやすい特徴づけを与えることは重要である．また，初等的考察によって，示したい命題を複素座標で示しやすい命題に言い換えることも重要である．例えば，根心の構図を用いて共円の条件を共線に帰着させせることはよく行われる．複素座標は単位円上の 2 点を結ぶ直線，角度の条件を扱うことには長けているが，単位円上にない点や辺の長さの条件に対しては弱い．

ここまでは座標計算の補助として初等的考察を行うことについて述べたが，初等的考察の補助として座標計算を行うことができるようになると解ける問題の幅はさらに広がるであろう．

また，座標計算を行う際には計算ミスが天敵である．月並みなアドバイスではあるが，あとで検算をするときに見返してわかるように式変形を書くのは大事である．そのほか，$\alpha+\beta$ と $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ を両方計算してそれらが共軛になっていることを確かめるなど，ダブルチェックを行うことも計算ミスを減らすことに一役買う．

もしあなたが数学オリンピックの受験生であるなら，全ての幾何の問題を座標計算で解けると考えることは得策ではない．本章には多数の問題を掲載したが，掲載しなかった問題も多数あることを念頭に置くべきである．座標計算で解ける問題であっても試験時間のうちに解ききれるとは限らない．

4.2 有名定理

問題 4.1 (Napoleon の定理).

三角形 ABC において，BPC, CQA, ARB が正三角形となるように 3 点 P, Q, R をとる．ただし，(B,P,C), (C,Q,A), (A,R,B) はいずれもこの順に反時計回りに並ぶとする．三角形 BPC, CQA, ARB の重心をそれぞれ L, M, N とするとき，三角形 LMN は正三角形であることを示せ．

問題 4.2 (Morley の定理).

三角形 ABC において，角 A の内角の三等分線を l_{ab}, l_{ac} とおく．ただし，辺 AB, l_{ab}, l_{ac}, 辺 AC はこの順に並ぶとする．l_{ba}, l_{bc}, l_{ca}, l_{cb} も同様に定める．l_{bc} と l_{cb} との交点を P, l_{ca} と l_{ac} との交点を Q, l_{ab} と l_{ba} との交点を R としたとき，三角形 PQR は正三角形であることを示せ．

問題 4.3 (Newton の定理).

四角形 $ABCD$ が円 Γ に外接している．対角線 AC の中点を M, 対角線 BD の中点を N とする．$M \neq N$ であるとき, 円 Γ の中心は直線 MN 上にあることを示せ.

問題 4.4.

三角形 ABC の内心を I, 外心を O, Feuerbach 点を F_e とする．辺 BC の中点を M, 三角形 ABC の内接円が辺 BC と接する点を D とするとき, 三角形 AIO と三角形 F_eDM とは相似であることを示せ.

問題 4.5.

円周 Γ 上に 4 点 A, B, C, D がある．A, B, C, D における Γ の接線をそれぞれ l_A, l_B, l_C, l_D とする．このとき, l_A と l_B との交点, l_C と l_D との交点, 直線 AC と直線 BD との交点は同一直線上にあることを示せ.

問題 4.6 (Simson の定理).

三角形 ABC と点 P とがある．P から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P_a, P_b, P_c とする．A, B, C, P が共円であることと P_a, P_b, P_c が共線であることとは同値であることを示せ.

問題 4.7 (Pascal の定理).

単位円上に 6 点 A, B, C, D, E, F があるとき, 直線 AB と直線 DE との交点, 直線 BC と直線 EF との交点, 直線 CD と直線 FA との交点は同一直線上にあることを示せ.

問題 4.8.

三角形 ABC と点 P とがある．P から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P_a, P_b, P_c とし, 三角形 ABC に関する点 P の等角共軛点を Q とする．このとき, 三角形 $P_aP_bP_c$ の外心は線分 PQ の中点であることを示せ.

4.3 数学オリンピックの過去問

問題 4.9 (ISL2024-G1).

円に内接する四角形 $ABCD$ が $AC < BD < AD$ および $\angle DBA < 90^\circ$ をみたしている．D を通り AB に平行な直線上に点 E をとったところ, E と C は直線 AD に関して反対側にあり, $AC = DE$ が成り立った．A を通り CD に平行な直線上に点 F をとったところ, F と B は直線 AD に関して反対側にあり, $BD = AF$ が成り立った．BC の垂直二等分線と EF の垂直二等分線とは, 四角形 $ABCD$ の外接円上で交わることを示せ.

問題 4.10 (IMO2024-4).

$AB < AC < BC$ をみたす三角形 ABC において, その内心と内接円をそれぞれ I, ω とおく．直線 BC 上の C と異なる点 X を, X を通り直線 AC に平行な直線が ω に接するようにとる．同様に, 直線 BC 上の B と異なる点 Y を, Y を通り直線 AB に平行な直線が ω に接するようにとる．直線 AI と三角形 ABC の外接円の交点のうち A でない方を P とする．辺 AC, AB の中点をそれぞれ K, L とおく．このとき, $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ が成り立つことを示せ.

問題 4.11 (239 Open MO 2024 Grade8-9 p4).

三角形 ABC があり, その内心を I とする．X, Y はそれぞれ線分 BI, CI の I 側の延長線上の点で, $\angle IAX = \angle IBA$ および $\angle IAY = \angle ICA$ が成り立つ．線分 IA の中点, 線分 XY の中点, 三角形 ABC の外心の 3 点は同一直線上にあることを示せ.

問題 4.12 (Vietnum TST 2024-3).

鋭角不等辺三角形 ABC において, ABC の内接円が辺 BC, CA, AB と接する点をそれぞれ D, E, F とする．A, B, C から対辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ X, Y, Z とする．EF, FD, DE に関して X, Y, Z と対称な点をそれぞれ A', B', C' とするとき, 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ とは相似であることを示せ.

問題 4.13 (Balkan MO 2025-2).

鋭角三角形 ABC において, 垂心を H とし, 辺 BC 上 (端点を除く) に点 D をとる．辺 AB 上 (端点を除く) に点 E を, 辺 AC 上 (端点を除く) に点 F をそれぞれとったところ, 4 点 A, C, D, E および 4 点 A, B, D, F はそれぞれ同一円周上にあった．線分 BF と線分 CE との交点を P とおく．直線 HA 上に点 L を, 直線 LC が三角形 PBC の外接円と点 C で接するようにとる．直線 BH と直線 CP との交点を X とおく．このとき, 3 点 D, X, L は同一直線上にあることを示せ.

問題 4.14 (IMO2023-2).

$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC があり, その外接円を Ω とする．点 S を, Ω の A を含む弧 CB の中点とする．A を通り BC に垂直な直線が直線 BS と点 D で交わり, Ω と A と異なる点 E で交わる．D を通り BC と平行な直線が直線 BE と点 L で交わる．三角形 BDL の外接円を ω とおくと, ω と Ω が B と異なる点 P で交わった．このとき, 点 P における ω の接線と直線 BS が, $\angle BAC$ の二等分線上で交わることを示せ.

問題 4.15 (EGMO2025-3).

鋭角三角形 ABC の辺 BC 上に点 D, E を, 4 点 B, D, E, C がこの順に並び, さらに $BD = DE = EC$ をみたすようにとる．線分 AD, AE の中点をそれぞれ M, N とする．三角形 ADE が鋭角三角形であると仮定し, その垂心を H とする．直線 BM, CN 上にそれぞれ点 P, Q をとると, D, H, M, P は同一円周上にある相異なる 4 点であり, E, H, N, Q もまた同一円周上にある相異なる 4 点であった．このとき, 4 点 P, Q, N, M は同一円周上にあることを示せ.

問題 4.16 (JMO 春合宿 2025-6, ISL2024-G7).

$AB < AC < BC$ をみたす三角形 ABC の内心を I とし, 直線 AI, BI, CI と三角形 ABC の外接円の交点のうち, それぞれ A, B, C でない方を M_A, M_B, M_C とする．直線 AI と辺 BC が点 D で交わっており, 半直線 BM_C と半直線 CM_B が点 X で交わっている．また, 三角形 XBC の外接円と三角形 XM_BM_C の外接円が X でない点 S で交わっており, 直線 BX, CX と三角形 SM_AX の外接円の交点のうち, X でない方をそれぞれ P, Q とする．このとき, 三角形 DIS の外心は直線 PQ 上にあることを示せ.

問題 4.17 (ISL2024-G5).

三角形 ABC とその内心 I とがあり, 三角形 BIC の外接円を Ω とする．K は辺 BC 上 (端点を除く) の点で, $\angle BAK < \angle KAC$ をみたす．$\angle BKA$ の二等分線は Ω と 2 点 W, X で交わり, $\angle CKA$ の二等分線は Ω と 2 点 Y, Z で交わった．ただし, W および Y は直線 BC に関して A と同じ側にあるとする．このとき, $\angle WAY = \angle ZAX$ を示せ.

問題 4.18 (ISL2024-G6).

$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC があり, その外接円を Γ とする．Γ 上に点 X, Y をとると, 直線 XY と直線 BC とは $\angle BAC$ の外角の二等分線上で交わった．X, Y における Γ の接線の交点を T とすると, T は BC に関して A と同じ側にあり, 直線 TX, TY は直線 BC とそれぞれ U, V で交わった．三角形 TUV の角 T 内の傍心を J とするとき, AJ は $\angle BAC$ を二等分することを示せ.

5　練習問題のヒント

問題 4.16 三角形 BIC と三角形 PDQ との相似を計算により示し, それ以降は初等的に考察する.

問題 4.15 根心の存在定理の逆を用いて示すべきことを共線に帰着させる. 根軸の式は 2 つの円の方程式の線型結合で得られる.

問題 4.18 $\angle UTV$ の二等分線と $\angle BAC$ の二等分線との交点が三角形 TUV の傍心であることを示す.

6　練習問題の解答

問題 4.1 (Napoleon の定理).

三角形 ABC において, BPC, CQA, ARB が正三角形となるように 3 点 P, Q, R をとる．ただし, (B,P,C), (C,Q,A), (A,R,B) はいずれもこの順に反時計回りに並ぶとする．三角形 BPC, CQA, ARB の重心をそれぞれ L, M, N とするとき, 三角形 LMN は正三角形であることを示せ.

解答. $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおく．三角形 BPC が正三角形なので

$$p = -\omega c - \omega^2 b$$

が成り立つ．同様に

$$q = -\omega a - \omega^2 c, \quad p = -\omega b - \omega^2 a$$

も成り立つ．示したい式は

$$l + \omega m + \omega^2 n = 0$$

であり,

$$\begin{aligned} l + \omega m + \omega^2 n &= \frac{1}{3}\bigl(b + c + p + \omega(c + a + q) + \omega^2(a + b + r)\bigr) \\ &= \frac{1}{3}\bigl(b + c - \omega c - \omega^2 b + \omega(c + a - \omega a - \omega^2 c) + \omega^2(a + b - \omega b - \omega^2 a)\bigr) \\ &= 0 \end{aligned}$$

により成り立つ.

問題 4.2 (Morley の定理).

三角形 ABC において, 角 A の内角の三等分線を l_{ab}, l_{ac} とおく．ただし, 辺 AB, l_{ab}, l_{ac}, 辺 AC はこの順に並ぶとする．l_{ba}, l_{bc}, l_{ca}, l_{cb} も同様に定める．l_{bc} と l_{cb} との交点を P, l_{ca} と l_{ac} との交点を Q, l_{ab} と l_{ba} との交点を R としたとき, 三角形 PQR は正三角形であることを示せ.

解答. $a = \alpha^3$, $b = \beta^3$, $c = \gamma^3$ とおく．ただし, $0 \le \arg\alpha \le \arg\beta \le \arg\gamma < \frac{\pi}{3}$ とする．$l_{ab} = l(\alpha^3, \beta^2\gamma)$, $l_{ac} = l(\alpha^3, \beta\gamma^2)$, $l_{bc} = l(\beta^3, \omega\gamma^2\alpha)$, $l_{ba} = l(\beta^3, \omega^2\gamma\beta^2)$, $l_{ca} = (\gamma^3, \alpha^2\beta)$, $l_{cb} = l(\gamma^3, \alpha\beta^2)$ であることを用いる．ただし, $\omega = e^{\frac{2\sqrt{-1}\pi}{3}}$ である．これにより, P の座標は

$$\begin{aligned} p &= \frac{\beta^3\omega\gamma^2\alpha(\gamma^3 + \alpha\beta^2) - \gamma^3\alpha\beta^2(\beta^3 + \omega\gamma^2\alpha)}{\beta^3\omega\gamma^2\alpha - \gamma^3\alpha\beta^2} \\ &= \frac{\omega\beta(\gamma^3 + \alpha\beta^2) - \gamma(\beta^3 + \omega\gamma^2\alpha)}{\omega\beta - \gamma} \\ &= -\omega\beta\gamma^2 - \omega^2\beta^2\gamma + \alpha\beta^2 + \omega^2\alpha\beta\gamma + \omega\alpha\gamma^2, \end{aligned}$$

Q の座標は

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{\gamma^3\alpha^2\beta(\alpha^3+\beta\gamma^2)-\alpha^3\beta\gamma^2(\gamma^3+\alpha^2\beta)}{\gamma^3\alpha^2\beta-\alpha^3\beta\gamma^2} \\
&= \frac{\gamma(\alpha^3+\beta\gamma^2)-\alpha(\gamma^3+\alpha^2\beta)}{\gamma-\alpha} \\
&= -\gamma\alpha^2-\gamma^2\alpha+\beta\gamma^2+\beta\gamma\alpha+\beta\alpha^2,
\end{aligned}
$$

R の座標は

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\alpha^3\beta^2\gamma(\beta^3+\omega^2\gamma\alpha^2)-\beta^3\omega^2\gamma\alpha^2(\alpha^3+\beta^2\gamma)}{\alpha^3\beta^2\gamma-\beta^3\omega^2\gamma\alpha^2} \\
&= \frac{\alpha(\beta^3+\omega^2\gamma\alpha^2)-\omega^2\beta(\alpha^3+\beta^2\gamma)}{\alpha-\omega^2\beta} \\
&= -\omega^2\alpha\beta^2-\omega\alpha^2\beta+\omega^2\gamma\alpha^2+\omega\gamma\alpha\beta+\gamma\beta^2
\end{aligned}
$$

と計算できる． $p+\omega q+\omega^2 r=0$ であるため, 三角形 PQR は正三角形である．

問題 4.3 (Newton の定理).

四角形 $ABCD$ が円 Γ に外接している．対角線 AC の中点を M, 対角線 BD の中点を N とする． $M\neq N$ であるとき, 円 Γ の中心は直線 MN 上にあることを示せ.

解答. Γ が単位円となるような座標で考える．円 Γ と辺 AB, BC, CD, DA との接点をそれぞれ X, Y, Z, W とおく．このとき,

$$
a=\frac{2wx}{w+x},\quad b=\frac{2xy}{x+y},\quad c=\frac{2yz}{y+z},\quad d=\frac{2zw}{z+w}
$$

であり,

$$
m=\frac{(y+z)wx+(w+x)yz}{(w+x)(y+z)},\quad n=\frac{(z+w)xy+(x+y)zw}{(x+y)(z+w)}
$$

が得られる．これにより,

$$
\frac{n}{m}=\frac{(w+x)(y+z)}{(x+y)(z+w)}\sim\frac{\sqrt{wx}\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}\sqrt{zw}}=1
$$

であり, 0, m, n は共線である.

問題 4.4.

三角形 ABC の内心を I, 外心を O, Feuerbach 点を F_e とする．辺 BC の中点を M, 三角形 ABC の内接円が辺 BC と接する点を D とするとき, 三角形 AIO と三角形 F_eDM とは相似であることを示せ.

解答. $i=0$, $|d|=1$ となるような座標で考える. 定理 3.12, 定理 3.18 により

$$\begin{aligned} a &= \frac{2ef}{e+f}, \\ i &= 0, \\ o &= \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}, \\ f_e &= \frac{de+ef+fd}{d+e+f}, \\ d &= d, \\ m &= \frac{d(de+df+2ef)}{(d+e)(d+f)} \end{aligned}$$

である. 示すべき式は

$$\begin{vmatrix} \frac{2ef}{e+f} & \frac{de+ef+fd}{d+e+f} & 1 \\ 0 & d & 1 \\ \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)} & \frac{d(de+df+2ef)}{(d+e)(d+f)} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

である.

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \frac{2ef}{e+f} & \frac{de+ef+fd}{d+e+f} & 1 \\ 0 & d & 1 \\ \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)} & \frac{d(de+df+2ef)}{(d+e)(d+f)} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2ef}{(d+e)(e+f)(f+d)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{de+ef+fd}{d+e+f} & 1 \\ 0 & d & 1 \\ d(d+e+f) & d(de+df+2ef) & (d+e)(d+f) \end{vmatrix} \\ &= \frac{2ef}{(d+e)(e+f)(f+d)(d+e+f)} \begin{vmatrix} d+e+f & de+ef+fd & d+e+f \\ 0 & d & 1 \\ d(d+e+f) & d(de+df+2ef) & (d+e)(d+f) \end{vmatrix} \\ &= \frac{2ef}{(d+e)(e+f)(f+d)(d+e+f)} \begin{vmatrix} d+e+f & de+ef+fd & d+e+f \\ 0 & d & 1 \\ 0 & def & ef \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

により示された.

問題 4.5.

円周 Γ 上に 4 点 A, B, C, D がある. A, B, C, D における Γ の接線をそれぞれ l_A, l_B, l_C, l_D とする. このとき, l_A と l_B との交点, l_C と l_D との交点, 直線 AC と直線 BD との交点は同一直線上にあることを示せ.

解答. 示すべきことは 3 点 $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{2cd}{c+d}$, $\frac{ac(b+d)-bd(a+c)}{ac-bd}$ の共線であり, これらの共軛がそれぞれ $\frac{2}{a+b}$, $\frac{2}{c+d}$, $\frac{a+c-b-d}{ac-bd}$ であることから示すべき式は

$$\begin{vmatrix} 2ab & 2 & a+b \\ 2cd & 2 & c+d \\ ac(b+d)-bd(a+c) & a+c-b-d & ac-bd \end{vmatrix} = 0$$

である.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} +\ + & ac & -(a+c) \end{array}\\
\begin{vmatrix} 2ab & 2 & a+b \\ 2cd & 2 & c+d \\ ac(b+d)-bd(a+c) & a+c-b-d & ac-bd \end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 2ab+2ac-(a+c)(a+b) & 2 & a+b \\ 2cd+2ac-(a+c)(c+d) & 2 & c+d \\ 0 & a+c-b-d & ac-bd \end{vmatrix} \\
&= (a-c)\begin{vmatrix} b-a & 2 & a+b \\ c-d & 2 & c+d \\ 0 & a+c-b-d & ac-bd \end{vmatrix} \\
&= (a-c)\Big(-(a+c-b-d)\big((b-a)(c+d)-(c-d)(a+b)\big)+(ac-bd)(2b-2a-2c+2d)\Big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

と計算できるので $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{2cd}{c+d}$, $\frac{ac(b+d)-bd(a+c)}{ac-bd}$ の共線が示された.

問題 4.6 (Simson の定理).

三角形 ABC と点 P とがある. P から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P_a, P_b, P_c とする. A, B, C, P が共円であることと P_a, P_b, P_c が共線であることとは同値であることを示せ.

解答. $|a|=|b|=|c|=1$ となるような座標で考える.

$$p_a=\frac{1}{2}(b+c+p-bc\bar{p}),\quad p_b=\frac{1}{2}(c+a+p-ca\bar{p}),\quad p_c=\frac{1}{2}(a+b+p-ab\bar{p})$$

であるので, P_a, P_b, P_c が共線であることは

$$\begin{vmatrix} b+c+p-bc\bar{p} & \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\bar{p}-\frac{p}{bc} & 1 \\ c+a+p-ca\bar{p} & \frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\bar{p}-\frac{p}{ca} & 1 \\ a+b+p-ab\bar{p} & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\bar{p}-\frac{p}{ab} & 1 \end{vmatrix}=0$$

と同値である. ここで,

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b+c+p-bc\bar{p} & \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\bar{p}-\frac{p}{bc} & 1 \\ c+a+p-ca\bar{p} & \frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\bar{p}-\frac{p}{ca} & 1 \\ a+b+p-ab\bar{p} & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\bar{p}-\frac{p}{ab} & 1 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} b+c-bc\bar{p} & \frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{p}{bc} & 1 \\ c+a-ca\bar{p} & \frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{p}{ca} & 1 \\ a+b-ab\bar{p} & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{p}{ab} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} b+c-bc\bar{p} & a(b+c-p) & 1 \\ c+a-ca\bar{p} & b(c+a-p) & 1 \\ a+b-ab\bar{p} & c(a+b-p) & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} b+c-bc\bar{p} & a(b+c-p) & 1 \\ (b-a)(c\bar{p}-1) & (b-a)(c-p) & 0 \\ (c-a)(b\bar{p}-1) & (c-a)(b-p) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(b-a)(c-a)}{abc}\begin{vmatrix} c\bar{p}-1 & c-p \\ b\bar{p}-1 & b-p \end{vmatrix} \\
&= \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{abc}(1-p\bar{p})
\end{aligned}
$$

と計算できるので, A, B, C, P が共円であることと P_a, P_b, P_c が共線であることとは同値であることが示された.

問題 4.7 (Pascal の定理).

単位円上に 6 点 A, B, C, D, E, F があるとき, 直線 AB と直線 DE との交点, 直線 BC と直線 EF との交点, 直線 CD と直線 FA との交点は同一直線上にあることを示せ.

解答. 直線 AB と直線 DE との交点, 直線 BC と直線 EF との交点, 直線 CD と直線 FA との交点の座標はそれぞれ

$$\frac{ab(d+e)-de(a+b)}{ab-de},\quad \frac{bc(e+f)-ef(b+c)}{bc-ef},\quad \frac{cd(f+a)-fa(c+d)}{cd-fa}$$

で与えられる. $\overline{\left(\frac{ab(d+e)-de(a+b)}{ab-de}\right)}=\frac{a+b-d-e}{ab-de}$ などに注意すると,

$$\begin{vmatrix} ab(d+e)-de(a+b) & a+b-d-e & ab-de \\ bc(e+f)-ef(b+c) & b+c-e-f & bc-ef \\ cd(f+a)-fa(c+d) & c+d-f-a & cd-fa \end{vmatrix}=0$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
&(c-f)\begin{pmatrix} ab(d+e)-de(a+b) \\ ab-de \\ a+b-d-e \end{pmatrix}+(d-a)\begin{pmatrix} bc(e+f)-ef(b+c) \\ bc-ef \\ b+c-e-f \end{pmatrix} \\
&\quad +(e-b)\begin{pmatrix} cd(f+a)-fa(c+d) \\ cd-fa \\ c+d-f-a \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であることを用いると, $c-f=d-a=e-b=0$ のときとそうでないときとでどちらも

$$\begin{vmatrix} ab(d+e)-de(a+b) & a+b-d-e & ab-de \\ bc(e+f)-ef(b+c) & b+c-e-f & bc-ef \\ cd(f+a)-fa(c+d) & c+d-f-a & cd-fa \end{vmatrix}=0$$

が成り立つことがわかる.

問題 4.8.

三角形 ABC と点 P とがある. P から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P_a, P_b, P_c とし, 三角形 ABC に関する点 P の等角共軛点を Q とする. このとき, 三角形 $P_aP_bP_c$ の外心は線分 PQ の中点であることを示せ.

解答. $|a|=|b|=|c|=1$ となるような座標で考える.

$$p_a=\frac{1}{2}(b+c+p-bc\overline{p}),\quad p_b=\frac{1}{2}(c+a+p-ca\overline{p}),\quad p_c=\frac{1}{2}(a+b+p-ab\overline{p})$$

が成り立つ. また, 定理 3.5 により

$$q=\frac{abc\overline{p}^2-(ab+bc+ca)\overline{p}+a+b+c-p}{1-p\overline{p}}$$

である. 線分 PQ の中点を M とする. このとき,

$$\begin{aligned}
m-p_a &= \frac{1}{2}\bigl(p+q-(b+c+p-bc\bar{p})\bigr)\\
&= \frac{1}{2(1-p\bar{p})}\bigl(abc\bar{p}^2-(ab+bc+ca)\bar{p}+a+b+c-p-(b+c-bc\bar{p})(1-p\bar{p})\bigr)\\
&= \frac{1}{2(1-p\bar{p})}(p-a)(b\bar{p}-1)(c\bar{p}-1)
\end{aligned}$$

と計算できる. これの絶対値は a, b, c について対称なので, 線分 PQ の中点が三角形 $P_aP_bP_c$ の外心であることが示された.

問題 4.9 (ISL2024-G1).

円に内接する四角形 $ABCD$ が $AC < BD < AD$ および $\angle DBA < 90^\circ$ をみたしている. D を通り AB に平行な直線上に点 E をとったところ, E と C は直線 AD に関して反対側にあり, $AC = DE$ が成り立った. A を通り CD に平行な直線上に点 F をとったところ, F と B は直線 AD に関して反対側にあり, $BD = AF$ が成り立った. BC の垂直二等分線と EF の垂直二等分線とは, 四角形 $ABCD$ の外接円上で交わることを示せ.

解答. $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$ となるような座標で考える. 四角形 $ABCD$ の外接円を Ω とおく. $\sqrt{bc}$ が点 A を含まない弧 BC 上にあるように $\sqrt{bc}$ の符号を定める.

$e-d$ は $a-c$ を $-\frac{1}{2}\angle BAC$ だけ回転したものであるため, $e-d = (a-c)\sqrt{\frac{b}{c}}$ が成り立つ. 同様に, $f-a$ は $d-b$ を $\frac{1}{2}\angle BDC$ だけ回転したものであるため, $f-a = (d-b)\sqrt{\frac{c}{b}}$ が成り立つ.

$-\sqrt{bc}$ は BC の垂直二等分線上にあるので $-\sqrt{bc}$ が EF の垂直二等分線上にあることを示せば十分である.

$$e+\sqrt{bc} = (a-c)\sqrt{\frac{b}{c}}+d+\sqrt{bc} = a\sqrt{\frac{b}{c}}+d$$

および

$$f+\sqrt{bc} = (d-b)\sqrt{\frac{c}{b}}+a+\sqrt{bc} = d\sqrt{\frac{c}{b}}+a$$

が成り立つので $|e+\sqrt{bc}| = |f+\sqrt{bc}|$ であり, $-\sqrt{bc}$ が EF の垂直二等分線上にあることが示された.

問題 4.10 (IMO2024-4).

$AB < AC < BC$ をみたす三角形 ABC において, その内心と内接円をそれぞれ I, ω とおく. 直線 BC 上の C と異なる点 X を, X を通り直線 AC に平行な直線が ω に接するようにとる. 同様に, 直線 BC 上の B と異なる点 Y を, Y を通り直線 AB に平行な直線が ω に接するようにとる. 直線 AI と三角形 ABC の外接円の交点のうち A でない方を P とする. 辺 AC, AB の中点をそれぞれ K, L とおく. このとき, $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ が成り立つことを示せ.

解答. I を中心とする座標で考える. 一般性を失わないため, 3 点 A, B, C は反時計回りに並んでいると仮定する. ω と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とおく.

直線 AC に平行な ω の接線は, e におけるものと $-e$ におけるものとがあるが, X が C と異なることから,

X は $-e$ における ω の接線と直線 BC との交点である．これにより,

$$x = \frac{-2de}{d-e} = \frac{2ed}{e-d}$$

である．同様に,

$$y = \frac{2fd}{f-d}$$

である．K, L はそれぞれ辺 AC, AB の中点なので

$$k = \frac{e(2df+de+ef)}{(d+e)(e+f)}, \quad l = \frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)}$$

である．また, P は I と A 内の傍心 I_a との中点なので定理 3.11 により

$$p = \frac{2def}{(d+e)(d+f)}$$

である．

$|\triangle IBC| < \frac{1}{2}|\triangle ABC|$ なので I は直線 KL に関して A と反対側にあり, $\angle KIL = \measuredangle KIL$ である．また, B, X, D, Y, C はこの順に並ぶので $\angle YPX = \measuredangle YPX$ である．したがって, $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ を示すには $\frac{l-i}{k-i}\frac{x-p}{y-p} \in \mathbb{R}$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
\frac{l-i}{k-i}\frac{x-p}{y-p} &= \frac{\frac{f(2de+df+ef)}{(d+f)(e+f)}}{\frac{e(2df+de+ef)}{(d+e)(e+f)}} \cdot \frac{\frac{2ed}{e-d} - \frac{2def}{(d+e)(d+f)}}{\frac{2fd}{f-d} - \frac{2def}{(d+e)(d+f)}} \\
&= \frac{f(d+e)(2de+df+ef)}{e(d+f)(2df+de+ef)} \cdot \frac{e(f-d)(d+e+2f)}{f(e-d)(d+2e+f)} \\
&= \frac{(e+d)(f-d)}{(e-d)(f+d)} \cdot \frac{(2de+df+ef)(d+e+2f)}{(2df+de+ef)(d+2e+f)}
\end{aligned}$$

であり, これは共軛をとっても不変であるため実数である．したがって, $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ が示された．

問題 4.11 (239 Open MO 2024 Grade8-9 p4).

三角形 ABC があり, その内心を I とする．X, Y はそれぞれ線分 BI, CI の I 側の延長線上の点で, $\angle IAX = \angle IBA$ および $\angle IAY = \angle ICA$ が成り立つ．線分 IA の中点, 線分 XY の中点, 三角形 ABC の外心の 3 点は同一直線上にあることを示せ．

解答． $|a| = |b| = |c| = 1$ となるような座標で考える．A を含まない弧 BC の中点, B を含まない弧 CA の中点, C を含まない弧 AB の中点をそれぞれ M_A, M_B, M_C とおき, $m_a = -\sqrt{bc}$, $m_b = -\sqrt{ca}$, $m_c = -\sqrt{ab}$ となるように $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ の符号を定める．線分 IA の中点, 線分 XY の中点, 三角形 ABC の外心をそれぞれ M_1, M_2, O とおく．

$i = -\sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca}$ により,

$$m_1 = \frac{a - \sqrt{ab} - \sqrt{ac} - \sqrt{bc}}{2}$$

である．

$$\measuredangle M_BBA = \measuredangle IBA = \measuredangle IAX = \measuredangle M_AAX$$

により, X は $l(a,\sqrt{ab})$ 上にある. これにより, x は $l(a,\sqrt{ab})$ と $l(b,-\sqrt{ca})$ との交点なので

$$\begin{aligned} x &= \frac{a\sqrt{ab}(b-\sqrt{ca})+b\sqrt{ca}(a+\sqrt{ab})}{a\sqrt{ab}+b\sqrt{ca}} \\ &= \frac{ab+b\sqrt{ac}-a\sqrt{ac}+a\sqrt{bc}}{a+\sqrt{bc}} \end{aligned}$$

となる. 同様に,

$$y = \frac{ac+c\sqrt{ab}-a\sqrt{ac}+a\sqrt{bc}}{a+\sqrt{bc}}$$

となり,

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{x+y}{2} \\ &= \frac{a(b+c)+\sqrt{abc}(\sqrt{b}+\sqrt{c})-a\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})+2a\sqrt{bc}}{2(a+\sqrt{bc})} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})\big(\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})+\sqrt{b}c-a\big)}{2(a+\sqrt{bc})} \\ &= -\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(a+\sqrt{bc})}m_1 \\ &\sim m_1 \end{aligned}$$

が得られる. したがって, M_1, M_2, O は共線である.

問題 4.12 (Vietnum TST 2024-3).

鋭角不等辺三角形 ABC において, ABC の内接円が辺 BC, CA, AB と接する点をそれぞれ D, E, F とする. A, B, C から対辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ X, Y, Z とする. EF, FD, DE に関して X, Y, Z と対称な点をそれぞれ A', B', C' とするとき, 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ とは相似であることを示せ.

解答. $|d|=|e|=|f|=1$ となるような座標で考える.

$$a=\frac{2ef}{e+f},\quad b=\frac{2fd}{f+d},\quad c=\frac{2de}{d+e}$$

である. 外心を中心とする座標では $x=\frac{1}{2}(a+b+c-bc/a)$ と表されるので, 命題 3.14 により

$$x=\frac{1}{(d+e)(e+f)(f+d)}(d^2e^2+e^2f^2+f^2d^2-d^4-2def(d+e+f))$$

である．系 2.19 により

$$
\begin{aligned}
a' &= e + f - ef\bar{x} \\
&= e + f - \frac{ef}{d^2(d+e)(e+f)(f+d)}(d^2e^2 + d^2f^2 + d^4 - e^2f^2 - 2d^2(de + ef + fd)) \\
&= \frac{1}{d^2(d+e)(e+f)(f+d)} \\
&\quad \times \Bigl((e+f)^2d^2(d^2 + (e+f)d + ef) - ef\bigl(d^4 - 2(e+f)d^3 + (e-f)^2d^2 - e^2f^2\bigr)\Bigr) \\
&= \frac{1}{d^2(d+e)(e+f)(f+d)}\bigl((e^2 + ef + f^2)d^4 + (e^3 + e^2f + ef^2 + f^3)d^3 + e^3f^3\bigr)
\end{aligned}
$$

である．対称性により，

$$
b' = \frac{1}{e^2(d+e)(e+f)(f+d)}\bigl((f^2 + fd + d^2)e^4 + (f^3 + f^2d + fd^2 + d^3)e^3 + f^3d^3\bigr)
$$

および

$$
c' = \frac{1}{f^2(d+e)(e+f)(f+d)}\bigl((d^2 + de + e^2)f^4 + (d^3 + d^2e + de^2 + e^3)f^3 + d^3e^3\bigr)
$$

も成り立つ．

以上により，

$$
\begin{aligned}
a' - b' &= \frac{1}{d^2e^2(d+e)(e+f)(f+d)} \\
&\quad \times \Bigl(e^2\bigl((e^2 + ef + f^2)d^4 + (e^3 + e^2f + ef^2 + f^3)d^3 + e^3f^3\bigr) \\
&\qquad - d^2\bigl((d^2 + df + f^2)e^4 + (d^3 + d^2f + df^2 + f^3)e^3 + d^3f^3\bigr)\Bigr) \\
&= \frac{d-e}{d^2e^2(d+e)(e+f)(f+d)}\Bigl(d^3e^3f + d^2e^2(d+e)f^2 - d^3e^3(d+e) - d^3e^3f + d^2e^2f^3 \\
&\qquad - (d^4 + d^3e + d^2e^2 + de^3 + e^4)f^3\Bigr) \\
&= \frac{(d^2 - e^2)(d^2e^2f^2 - d^3e^3 - e^3f^3 - f^3d^3)}{d^2e^2(d+e)(e+f)(f+d)}
\end{aligned}
$$

および

$$
a - b = \frac{2ef}{e+f} - \frac{2df}{d+f} = \frac{2(e^2 - d^2)f^2}{(d+e)(e+f)(f+d)}
$$

が成り立つ．これにより，

$$
\frac{a' - b'}{a - b} = \frac{d^3e^3 + e^3f^3 + f^3d^3 - d^2e^2f^2}{2d^2e^2f^2}
$$

であり，これは d, e, f について対称なので三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ とは相似である．

問題 4.13 (Balkan MO 2025-2).

鋭角三角形 ABC において, 垂心を H とし, 辺 BC 上 (端点を除く) に点 D をとる. 辺 AB 上 (端点を除く) に点 E を, 辺 AC 上 (端点を除く) に点 F をそれぞれとったところ, 4 点 A, C, D, E および 4 点 A, B, D, F はそれぞれ同一円周上にあった. 線分 BF と線分 CE との交点を P とおく. 直線 HA 上に点 L を, 直線 LC が三角形 PBC の外接円と点 C で接するようにとる. 直線 BH と直線 CP との交点を X とおく. このとき, 3 点 D, X, L は同一直線上にあることを示せ.

解答. $|a| = |b| = |c| = 1$ となるような座標で考える. 直線 AD と三角形 ABC の外接円との交点のうち A でない方を Q とする. このとき,

$$d = \frac{aq(b+c) - bc(a+q)}{aq - bc}$$

である. また,

$$\measuredangle ECB = \measuredangle ECD = \measuredangle EAD = \measuredangle BAQ$$

により, 直線 CE は $l(c, \frac{b^2}{q})$ である. x は $l(b, -\frac{ac}{b})$ と $l(c, \frac{b^2}{q})$ との交点なので

$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{b^2c}{q}\left(b - \frac{ac}{b}\right) + ac\left(c + \frac{b^2}{q}\right)}{\frac{b^2c}{q} + ac} \\ &= \frac{b(b^2 - ac) + a(b^2 + cq)}{b^2 + aq} \\ &= \frac{b^3 - abc + ab^2 + acq}{b^2 + aq} \end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned} \measuredangle LCB = \measuredangle CPB &= -\measuredangle PBC - \measuredangle BCP \\ &= -\measuredangle FBD - \measuredangle DCE \\ &= -\measuredangle FAD - \measuredangle DAE \\ &= -\measuredangle FAE = -\measuredangle CAB = \measuredangle BAC \end{aligned}$$

により直線 CL は $l(c, \frac{b^2}{c})$ なので

$$\begin{aligned} l &= \frac{b^2\left(a - \frac{bc}{a}\right) + bc\left(c + \frac{b^2}{c}\right)}{b^2 + bc} \\ &= \frac{b(a^2 - bc) + a(c^2 + b^2)}{a(b+c)} \\ &= \frac{a^2b - b^2c + ac^2 + ab^2}{a(b+c)} \end{aligned}$$

である.

以上により, 示すべきことは 3 点 $\frac{aq(b+c)-bc(a+q)}{aq-bc}$, $\frac{b^3-abc+ab^2+acq}{b^2+aq}$, $\frac{a^2b-b^2c+ac^2+ab^2}{a(b+c)}$ の共線である. これらの共軛がそれぞれ $\frac{a+q-b-c}{aq-bc}$, $\frac{acq-b^2q+bcq+b^3}{bc(b^2+aq)}$, $\frac{bc^2-a^2c+ab^2+ac^2}{abc(b+c)}$ であることに注意すると示すべき式は

$$\begin{vmatrix} aq(b+c) - bc(a+q) & a+q-b-c & aq-bc \\ bc(b^3 - abc + ab^2 + acq) & acq - b^2q + bcq + b^3 & bc(b^2 + aq) \\ bc(a^2b - b^2c + ac^2 + ab^2) & bc^2 - a^2c + ab^2 + ac^2 & abc(b+c) \end{vmatrix} = 0$$

である.

$$\begin{vmatrix} aq(b+c)-bc(a+q) & a+q-b-c & aq-bc \\ bc(b^3-abc+ab^2+acq) & acq-b^2q+bcq+b^3 & bc(b^2+aq) \\ bc(a^2b-b^2c+ac^2+ab^2) & bc^2-a^2c+ab^2+ac^2 & abc(b+c) \end{vmatrix}$$
$$= bc\begin{vmatrix} aq(b+c)-bc(a+q) & bc(a+q-b-c) & aq-bc \\ b^3-abc+ab^2+acq & acq-b^2q+bcq+b^3 & b^2+aq \\ a^2b-b^2c+ac^2+ab^2 & bc^2-a^2c+ab^2+ac^2 & ab+ac \end{vmatrix}$$

であり, 第 1 列に第 2 列の 1 倍と第 3 列の $-(b+c)$ 倍とを足すと

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & & -(b+c) \\ + & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} aq(b+c)-bc(a+q) & bc(a+q-b-c) & aq-bc \\ b^3-abc+ab^2+acq & acq-b^2q+bcq+b^3 & b^2+aq \\ a^2b-b^2c+ac^2+ab^2 & bc^2-a^2c+ab^2+ac^2 & ab+ac \end{vmatrix} \end{array}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & bc(a+q-b-c) & aq-bc \\ (a+b)(b-c)(b-q) & acq-b^2q+bcq+b^3 & b^2+aq \\ (a+b)(b-c)(a-c) & bc^2-a^2c+ab^2+ac^2 & ab+ac \end{vmatrix}$$
$$= (a+b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & bc(a+q-b-c) & aq-bc \\ b-q & acq-b^2q+bcq+b^3 & b^2+aq \\ a-c & bc^2-a^2c+ab^2+ac^2 & ab+ac \end{vmatrix} \begin{array}{l} -1 \\ + \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} b^2-ac & + & \end{array}$$
$$= (a+b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & bc(a+q-b-c) & aq-bc \\ b-q & acq-b^2q+b^3+b^2c+bc^2-abc & b^2+bc \\ a-c & bc^2-a^2c+ab^2+ac^2 & ab+ac \end{vmatrix}$$
$$= (a+b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & bc(a+q-b-c) & aq-bc \\ b-q & b^2c+bc^2 & b^2+bc \\ a-c & b^2c+bc^2 & ab+ac \end{vmatrix}$$
$$= bc(b+c)(a+b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & a+q-b-c & aq-bc \\ b-q & 1 & b \\ a-c & 1 & a \end{vmatrix}$$

と計算できる.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a+q-b-c & aq-bc \\ b-q & 1 & b \\ a-c & 1 & a \end{vmatrix} &= -(a+q-b-c)\begin{vmatrix} b-q & b \\ a-c & a \end{vmatrix} + (aq-bc)\begin{vmatrix} b-q & 1 \\ a-c & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{vmatrix} aq(b+c)-bc(a+q) & a+q-b-c & aq-bc \\ bc(b^3-abc+ab^2+acq) & acq-b^2q+bcq+b^3 & bc(b^2+aq) \\ bc(a^2b-b^2c+ac^2+ab^2) & bc^2-a^2c+ab^2+ac^2 & abc(b+c) \end{vmatrix} = 0$$

であり, D, X, L の共線が示された.

別解.

$$\begin{vmatrix} aq(b+c)-bc(a+q) & a+q-b-c & aq-bc \\ bc(b^3-abc+ab^2+acq) & acq-b^2q+bcq+b^3 & bc(b^2+aq) \\ bc(a^2b-b^2c+ac^2+ab^2) & bc^2-a^2c+ab^2+ac^2 & abc(b+c) \end{vmatrix} = 0$$

を示すことに帰着されるところまでは同じである．左辺は q の高々 2 次式なので 3 つの q の値について成立が確かめられれば任意の q について成立することがわかる．$q = b, c, -\frac{bc}{a}$ について成立することを示す．ABC は鋭角三角形なので b, c, $-\frac{bc}{a}$ はどの 2 つも相異なる．

$q = b$ のとき，$X = L = B$ なので D, X, L は共線であり，行列式は 0 となる．$q = c$ のとき，$D = C$ で，X と L はいずれも $l(c, \frac{b^2}{c})$ 上にあるので D, X, L は共線であり，行列式は 0 となる．$q = -\frac{bc}{a}$ のとき，X は $l(b, -\frac{ac}{b})$ と $l(c, -\frac{ab}{c})$ との交点なので $X = H$ であることに注意すると，D, X, L はいずれも $l(a, -\frac{bc}{a})$ 上にあるため，この場合も行列式は 0 である．

以上により，任意の q について上の行列式が 0 となることが示された．

問題 4.14 (IMO2023-2).

$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC があり，その外接円を Ω とする．点 S を，Ω の A を含む弧 CB の中点とする．A を通り BC に垂直な直線が直線 BS と点 D で交わり，Ω と A と異なる点 E で交わる．D を通り BC と平行な直線が直線 BE と点 L で交わる．三角形 BDL の外接円を ω とおくと，ω と Ω が B と異なる点 P で交わった．このとき，点 P における ω の接線と直線 BS が，$\angle BAC$ の二等分線上で交わることを示せ．

解答. $|a| = |b| = |c| = 1$ となるような座標で考える．直線 PD と Ω との交点のうち P でない方を F とし，P を通る ω の接線と Ω との交点のうち P でない方を Q とする．$s = \sqrt{bc}$ となるように $\sqrt{bc}$ の符号を定める．

$e = -\frac{bc}{a}$ である．

$$\measuredangle BPF = \measuredangle BPD = \measuredangle BLD = \measuredangle ELD = \measuredangle EBC$$

なので $f = \frac{bc}{e} = -a$ である．また，

$$\measuredangle FPQ = \measuredangle DPQ = \measuredangle DBP = \measuredangle SBP$$

により $q = \frac{fp}{s} = -\frac{ap}{\sqrt{bc}}$ である．3 直線 AE, BS, PF が共点なので系 2.15 により

$$\begin{vmatrix} ae & a+e & 1 \\ bs & b+s & 1 \\ pf & p+f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

である．

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} ae & a+e & 1 \\ bs & b+s & 1 \\ pf & p+f & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -bc & a-\frac{bc}{a} & 1 \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc} & 1 \\ -ap & p-a & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -bc & a-\frac{2bc}{a} & 1 \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc}+\frac{b\sqrt{bc}}{a} & 1 \\ -ap & -a & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -bc & 2a-\frac{2bc}{a} & 1 \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc}+\frac{b\sqrt{bc}}{a}+a & 1 \\ -ap & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{a+\sqrt{bc}}{a} \begin{vmatrix} -bc & 2(a-\sqrt{bc}) & 1 \\ b\sqrt{bc} & a+b & 1 \\ -ap & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

であり, $a+\sqrt{bc}\neq 0$ なので

$$\begin{vmatrix} -bc & 2(a-\sqrt{bc}) & 1 \\ b\sqrt{bc} & a+b & 1 \\ -ap & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つ.

示すべきことは $l(a,-\sqrt{bc})$, $l(b,\sqrt{bc})$, $l(p,-\frac{ap}{\sqrt{bc}})$ が共点であることなので

$$\begin{vmatrix} -a\sqrt{bc} & a-\sqrt{bc} & 1 \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc} & 1 \\ -\frac{ap^2}{\sqrt{bc}} & p-\frac{ap}{\sqrt{bc}} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -a\sqrt{bc} & a-\sqrt{bc} & 1 \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc} & 1 \\ -\frac{ap^2}{\sqrt{bc}} & p-\frac{ap}{\sqrt{bc}} & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -a\sqrt{bc} & a-\sqrt{bc} & 1 \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc} & 1 \\ -\frac{ap^2}{\sqrt{bc}}-ap & 0 & 1+\frac{p}{\sqrt{bc}} \end{vmatrix} \\ &= \left(1+\frac{p}{\sqrt{bc}}\right)\begin{vmatrix} -a\sqrt{bc} & a-\sqrt{bc} & 1 \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc} & 1 \\ -ap & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

であり, ここで

$$\begin{vmatrix} 2(a-\sqrt{bc}) & 1 \\ a+b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\sqrt{bc} & 1 \\ b+\sqrt{bc} & 1 \end{vmatrix}$$

および

$$\begin{vmatrix} -bc & 2(a-\sqrt{bc}) \\ b\sqrt{bc} & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sqrt{bc} & a-\sqrt{bc} \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc} \end{vmatrix}$$

により

$$\begin{vmatrix} -bc & 2(a-\sqrt{bc}) & 1 \\ b\sqrt{bc} & a+b & 1 \\ -ap & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sqrt{bc} & a-\sqrt{bc} & 1 \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc} & 1 \\ -ap & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

となるので,

$$\begin{vmatrix} -a\sqrt{bc} & a-\sqrt{bc} & 1 \\ b\sqrt{bc} & b+\sqrt{bc} & 1 \\ -\frac{ap^2}{\sqrt{bc}} & p-\frac{ap}{\sqrt{bc}} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が示された.

問題 4.15 (EGMO2025-3).

鋭角三角形 ABC の辺 BC 上に点 D, E を, 4 点 B, D, E, C がこの順に並び, さらに $BD=DE=EC$ をみたすようにとる. 線分 AD, AE の中点をそれぞれ M, N とする. 三角形 ADE が鋭角三角形であると仮定し, その垂心を H とする. 直線 BM, CN 上にそれぞれ点 P, Q をとると, D, H, M, P は同一円周上にある相異なる 4 点であり, E, H, N, Q もまた同一円周上にある相異なる 4 点であった. このとき, 4 点 P, Q, N, M は同一円周上にあることを示せ.

解答. $|a|=|d|=|e|=1$ となるような座標で考える．直線 PM と直線 QN との交点を X とする．X が三角形 DHM の外接円と三角形 EHN の外接円との根軸上にあれば, 方冪の定理により 4 点 P, Q, N, M は共円である．したがって, 直線 BM, 直線 CN, 三角形 DHM の外接円と三角形 EHN の外接円との根軸の共点を示すことに帰着された.

$b=2d-e$, $m=\frac{a+d}{2}$ なので, 直線 BM の方程式は

$$\left(\frac{2e-d}{de}-\frac{a+d}{2ad}\right)z-\left(2d-e-\frac{a+d}{2}\right)\bar{z}=\frac{2e-d}{de}\frac{a+d}{2}-(2d-e)\frac{a+d}{2ad}$$

すなわち

$$\frac{3ae-2ad-de}{2ade}-\frac{3d-2e-a}{2}\bar{z}=\frac{a+d}{2ade}(e^2+2ae-2de-ad)$$

であり, 直線 CN の方程式は

$$\frac{3ad-2ae-de}{2ade}-\frac{3e-2d-a}{2}\bar{z}=\frac{a+e}{2ade}(d^2+2ad-2de-ae)$$

である．$h=a+d+e$ なので, 三角形 DHM の外接円の方程式は

$$\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ \frac{(a+d+e)(ad+de+ea)}{ade} & a+d+e & \frac{ad+de+ea}{ade} & 1 \\ \frac{(a+d)^2}{4ad} & \frac{a+d}{2} & \frac{a+d}{2ad} & 1 \\ 1 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}=0$$

である．ここで,

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ \frac{(a+d+e)(ad+de+ea)}{ade} & a+d+e & \frac{ad+de+ea}{ade} & 1 \\ \frac{(a+d)^2}{4ad} & \frac{a+d}{2} & \frac{a+d}{2ad} & 1 \\ 1 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \\
&=\frac{1}{4a^2d^3e}\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ (a+d+e)(ad+de+ea) & ade(a+d+e) & ad+de+ea & ade \\ (a+d)^2 & 2ad(a+d) & 2(a+d) & 4ad \\ d & d^2 & 1 & d \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \\ -ae \end{array} \\
&=\frac{a+e}{4a^2d^3e}\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ (a+d)(d+e) & ade & d & 0 \\ (a+d)^2 & 2ad(a+d) & 2(a+d) & 4ad \\ d & d^2 & 1 & d \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow + \\ -(a+d) \end{array} \\
&=\frac{(a+e)(a-d)}{4a^2d^3e}\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ (a+d)(d+e) & ade & d & 0 \\ a+d & 2d(a+d) & 0 & 2d \\ d & d^2 & 1 & d \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{vmatrix} ade & d & 0 \\ 2d(a+d) & 0 & 2d \\ d^2 & 1 & d \end{vmatrix}=-2ad^2(d+e),$$

$$\begin{vmatrix} (a+d)(d+e) & d & 0 \\ a+d & 0 & 2d \\ d & 1 & d \end{vmatrix}=-d(d^2+3ad+2de+2ae),$$

$$\begin{vmatrix} (a+d)(d+e) & ade & 0 \\ a+d & 2d(a+d) & 2d \\ d & d^2 & d \end{vmatrix} = ad^2(2d^2+2ad+3de+ae),$$

$$\begin{vmatrix} (a+d)(d+e) & ade & d \\ a+d & 2d(a+d) & 0 \\ d & d^2 & 1 \end{vmatrix} = d(a+d)(d^2+ae+2ad+2de)$$

により, 三角形 DHM の外接円の方程式は

$$\begin{aligned} -2ade(d+e)z\bar{z} + e(d^2+3ad+2de+2ae)z + ade(2d^2+2ad+3de+ae)\bar{z} \\ = e(a+d)(d^2+ae+2ad+2de) \end{aligned}$$

である. 同様に, 三角形 EHN の外接円の方程式は

$$\begin{aligned} -2ade(d+e)z\bar{z} + d(e^2+3ae+2de+2ad)z + ade(2e^2+2ae+3de+ad)\bar{z} \\ = d(a+e)(e^2+ad+2ae+2de) \end{aligned}$$

である. これら 2 式の差をとると, 三角形 DHM の外接円と三角形 EHN の外接円との根軸の方程式は

$$(2ad+2ae+de)z - ade(a+2d+2e)\bar{z} = (d+e)(a^2-de)$$

となる.

以上により, 示すべき式は

$$\begin{vmatrix} 2ad+2ae+de & -ade(a+2d+2e) & (d+e)(a^2-de) \\ 3ae-2ad-de & -ade(3d-2e-a) & (a+d)(e^2+2ae-2de-ad) \\ 3ad-2ae-de & -ade(3e-2d-a) & (a+e)(d^2+2ad-2de-ae) \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$\begin{vmatrix} 2ad+2ae+de & a+2d+2e & (d+e)(a^2-de) \\ 3ae-2ad-de & 3d-2e-a & (a+d)(e^2+2ae-2de-ad) \\ 3ad-2ae-de & 3e-2d-a & (a+e)(d^2+2ad-2de-ae) \end{vmatrix} = 0$$

である.

$$\begin{vmatrix} 2ad+2ae+de & a+2d+2e & (d+e)(a^2-de) \\ 3ae-2ad-de & 3d-2e-a & (a+d)(e^2+2ae-2de-ad) \\ 3ad-2ae-de & 3e-2d-a & (a+e)(d^2+2ad-2de-ae) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2ad+2ae+de & a+2d+2e & (d+e)(a^2-de) \\ 5ae & 5d & -(a+3e)d^2+ae(3a+e) \\ 5ad & 5e & -(a+3d)e^2+ad(3a+d) \end{vmatrix}$$

$$= 5\begin{vmatrix} 2ad+2ae+de & a+2d+2e & 5(d+e)(a^2-de) \\ ae & d & -(a+3e)d^2+ae(3a+e) \\ ad & e & -(a+3d)e^2+ad(3a+d) \end{vmatrix}$$

$$-(a+d+e) \quad + \qquad ad+de+ea \quad +$$

$$= 5\begin{vmatrix} de & a & -a^2(d+e)+de(d+e) \\ ae & d & -(a+3e)d^2+ae(3a+e) \\ ad & e & -(a+3d)e^2+ad(3a+d) \end{vmatrix}$$

$$-2a \quad + \qquad 2de \quad +$$

$$= 5\begin{vmatrix} de & a & 0 \\ ae & d & -2d^2e+2a^2e \\ ad & e & -2de^2+2a^2d \end{vmatrix}$$

$$= 5\begin{vmatrix} de & a & 0 \\ ae & d & 0 \\ ad & e & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

により, 3 直線の共点が示された.

問題 4.16 (JMO 春合宿 2025-6, ISL2024-G7).

$AB < AC < BC$ をみたす三角形 ABC の内心を I とし, 直線 AI, BI, CI と三角形 ABC の外接円の交点のうち, それぞれ A, B, C でない方を M_A, M_B, M_C とする. 直線 AI と辺 BC が点 D で交わっており, 半直線 BM_C と半直線 CM_B が点 X で交わっている. また, 三角形 XBC の外接円と三角形 XM_BM_C の外接円が X でない点 S で交わっており, 直線 BX, CX と三角形 SM_AX の外接円の交点のうち, X でない方をそれぞれ P, Q とする. このとき, 三角形 DIS の外心は直線 PQ 上にあることを示せ.

解答. $|a|=|b|=|c|=1$ となるような座標で考える. $m_a=-\sqrt{bc}$, $m_b=-\sqrt{ca}$, $m_c=-\sqrt{ab}$ となるように $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ の符号を定める.

S の定義により, S は四角形 BCM_BM_C の Miquel 点であり, $\triangle IBC \sim \triangle AM_CM_B$ に注意すると, 4 点 (S, A, M_C, M_B) と (S, I, B, C) とは相似である. さらに, $\triangle SM_CM_B \sim \triangle SBC \sim \triangle SPQ$ が成り立つ.

$\triangle BIC \sim \triangle PDQ$ を示す. 3 点 (M_C, B, P') と 3 点 (A, I, D) とが相似になるように点 P' をとる. P' が三角形 SM_AX の外接円上にあることを示せば, $P'=P$ がわかり, $\triangle SPD \sim \triangle SBI$ が示される. 同様の方法で

$\triangle SQD \sim \triangle SCI$ も示されるので, $\triangle BIC \sim \triangle PDQ$ が導かれる. したがって, $\triangle BIC \sim \triangle PDQ$ を示すには S, M_A, X, P' が共円であることを示せば十分である. また, $\measuredangle XP'S = \measuredangle M_C P'S = \measuredangle ADS$ なので, 示すべき式は

$$\measuredangle ADS = \measuredangle XM_A S$$

である.

D は $l(b, c)$ と $l(a, m_a)$ との交点なので

$$d = \frac{bc(a - \sqrt{bc}) + a\sqrt{bc}(b + c)}{bc + a\sqrt{bc}} = \frac{ab + ac - bc + a\sqrt{bc}}{a + \sqrt{bc}}$$

である. S は四角形 BCM_BM_C の Miquel 点なので

$$s = \frac{bm_b - cm_c}{b + m_b - c - m_c} = \frac{c\sqrt{ba} - b\sqrt{ca}}{b + \sqrt{ca} - c - \sqrt{ba}} = -\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

である. X は $l(b, m_c)$ と $l(c, m_b)$ との交点なので

$$x = \frac{-b\sqrt{ba}(c - \sqrt{ca}) + c\sqrt{ca}(b - \sqrt{ba})}{-b\sqrt{ba} + c\sqrt{ca}} = \frac{\sqrt{bc}(\sqrt{bc} - \sqrt{ba} - \sqrt{ca})}{b + \sqrt{bc} + c}$$

である. 以上により,

$$a - d \sim a + \sqrt{bc} \sim \sqrt{a\sqrt{bc}},$$

$$\begin{aligned}
s - d &= \frac{-\sqrt{abc}(a + \sqrt{bc}) - (ab + ac - bc + a\sqrt{bc})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(a + \sqrt{bc})} \\
&= -\frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{bc})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(a + \sqrt{bc})} \\
&\sim \sqrt{\sqrt{bc}}\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{bc}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x - m_a &= \frac{\sqrt{bc}(\sqrt{bc} - \sqrt{ba} - \sqrt{ca}) + \sqrt{bc}(b + \sqrt{bc} + c)}{b + \sqrt{bc} + c} \\
&= \frac{\sqrt{bc}(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})}{b + \sqrt{bc} + c} \\
&\sim \sqrt{\sqrt{bc}}(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}),
\end{aligned}$$

$$s - m_a = \frac{-\sqrt{abc} + \sqrt{bc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{bc}(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \sim \frac{\sqrt{bc}\sqrt{\sqrt{bc}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

が成り立つので

$$\frac{a - d}{s - d}\frac{s - m_a}{x - m_a} \sim \frac{\sqrt{abc}}{(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{bc})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})}$$

である. 右辺は共軛をとっても変化しないため実数である. したがって,

$$\measuredangle ADS = \measuredangle XM_A S$$

が示された．

これにより, S, M_A, X, P' は共円であり, $\triangle BIC \sim \triangle PDQ$ である．

直線 PQ に関して D と対称な点を E とする．A と I とは直線 $M_B M_C$ に関して対称なことに注意すると, (S, A, M_C, M_B, I) と (S, D, P, Q, E) とは相似である．

$$\measuredangle DES = \measuredangle AIS = \measuredangle DIS$$

となるので E は三角形 DIS の外接円上にあり, 三角形 DIS の外心は線分 DE の垂直二等分線, すなわち直線 PQ 上にある．

問題 4.17 (ISL2024-G5).

三角形 ABC とその内心 I とがあり, 三角形 BIC の外接円を Ω とする．K は辺 BC 上 (端点を除く) の点で, $\angle BAK < \angle KAC$ をみたす．$\angle BKA$ の二等分線は Ω と 2 点 W, X で交わり, $\angle CKA$ の二等分線は Ω と 2 点 Y, Z で交わった．ただし, W および Y は直線 BC に関して A と同じ側にあるとする．このとき, $\angle WAY = \angle ZAX$ を示せ.

解答. $|b| = |c| = |i| = 1$ となるような座標で考える．定理 3.20 により $a = \frac{bc+i^2}{b+c}$ である．$\angle WAY = \measuredangle WAY$ および $\angle ZAX = \measuredangle ZAX$ が成り立つので, 示すべきことは $(w-a)(x-a) \sim (y-a)(z-a)$ である．

直線 AK と Ω との交点を P, Q とする．A は直線 PQ 上にあるので $l(p,q)$, $l(i,-i)$, $l(b, i^2/c)$ は共線である．したがって, 系 2.15 により

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} pq & p+q & 1 \\ -i^2 & 0 & 1 \\ \frac{bi^2}{c} & b+\frac{i^2}{c} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{c}\begin{vmatrix} pq & p+q & 1 \\ -i^2 & 0 & 1 \\ bi^2 & bc+i^2 & c \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{c}\begin{vmatrix} pq+i^2 & p+q & 0 \\ -i^2 & 0 & 1 \\ (b+c)i^2 & bc+i^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(p+q)(b+c)i^2 - (pq+i^2)(bc+i^2)}{c}
\end{aligned}$$

である．これにより,

$$p+q = \frac{(pq+i^2)(bc+i^2)}{(b+c)i^2}$$

である．

直線 WX は $\angle BKA$ の二等分線なので $(wx)^2 = bcpq$ である．$wx = \sqrt{bcpq}$, $yz = -\sqrt{bcpq}$ となるように $\sqrt{bcpq}$ の符号を定める．直線 BC, PQ, WX, YZ は共点なので

$$\begin{vmatrix} wx & w+x & 1 \\ pq & p+q & 1 \\ bc & b+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & y+z & 1 \\ pq & p+q & 1 \\ bc & b+c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つ．これにより

$$w+x = \frac{wx(p+q-b-c) + pq(b+c) - bc(p+q)}{pq-bc}$$

が成り立つ．

以上をあわせると

$$
\begin{aligned}
(w-a)(x-a) &= wx-(w+x)\frac{bc+i^2}{b+c}+\left(\frac{bc+i^2}{b+c}\right)^2\\
&= wx-\frac{bc+i^2}{b+c}\frac{wx(p+q-b-c)+pq(b+c)-bc(p+q)}{pq-bc}+\left(\frac{bc+i^2}{b+c}\right)^2\\
&= wx-\frac{bc+i^2}{b+c}\frac{wx\left(\frac{(pq+i^2)(bc+i^2)}{(b+c)i^2}-b-c\right)+pq(b+c)-bc\frac{(pq+i^2)(bc+i^2)}{(b+c)i^2}}{pq-bc}+\left(\frac{bc+i^2}{b+c}\right)^2\\
&= \frac{1}{(b+c)^2i^2(pq-bc)}\Bigg(\Big((b+c)^2i^2(pq-bc)-(bc+i^2)\big((pq+i^2)(bc+i^2)-(b+c)^2i^2\big)\Big)wx\\
&\qquad -(bc+i^2)\big(pq(b+c)^2i^2-bc(pq+i^2)(bc+i^2)\big)+(bc+i^2)^2i^2(pq-bc)\Bigg)\\
&= \frac{1}{(b+c)^2i^2(pq-bc)}\Bigg(\Big(-i^6+(b^2+c^2-pq)i^4+(b^2pq+c^2pq-b^2c^2)i^2-b^2c^2pq\Big)wx\\
&\qquad +\Big(i^6-(b^2-bc+c^2)i^4-(b^2-bc+c^2)bci^2+b^3c^3\Big)pq\Bigg)
\end{aligned}
$$

と計算できる．

$$
\begin{aligned}
-i^6+(b^2+c^2-pq)i^4+(b^2pq+c^2pq-b^2c^2)i^2-b^2c^2pq &\sim i^3bc\sqrt{pq},\\
i^6-(b^2-bc+c^2)i^4-(b^2-bc+c^2)bci^2+b^3c^3 &\sim i^3bc\sqrt{bc}
\end{aligned}
$$

から

$$
(w-a)(x-a)\sim\frac{i^3bcpq\sqrt{bc}}{(b+c)^2i^2(pq-bc)}
$$

がわかる．$(y-a)(z-a)$ は $(w-a)(x-a)$ において $\sqrt{bcpq}$ を $-\sqrt{bcpq}$ に変えたものなので

$$
(y-a)(z-a)\sim\frac{i^3bcpq\sqrt{bc}}{(b+c)^2i^2(pq-bc)}
$$

もわかる．したがって，

$$
(w-a)(x-a)\sim(y-a)(z-a)
$$

が示された．

問題 4.18 (ISL2024-G6).

$AB<AC$ なる鋭角三角形 ABC があり，その外接円を Γ とする．Γ 上に点 X, Y をとると，直線 XY と直線 BC とは $\angle BAC$ の外角の二等分線上で交わった．X, Y における Γ の接線の交点を T とすると，T は BC に関して A と同じ側にあり，直線 TX, TY は直線 BC とそれぞれ U, V で交わった．三角形 TUV の角 T 内の傍心を J とするとき，AJ は $\angle BAC$ を二等分することを示せ．

解答. $|a|=|b|=|c|=1$ となるような座標で考える．$\sqrt{bc}$ が A を含む弧 BC 上にあるように $\sqrt{bc}$ の符号を定める．$\angle UTV$ の二等分線と $\angle BAC$ の二等分線との交点を J' とし，J' が三角形 TUV の角 T 内の傍心

であることを示す．J' が $\angle VUT$ の外角の二等分線上にあることを示せばよく，$\angle VUT$ の外角の二等分線が $l(x, -\sqrt{bc})$ に平行であることから，示すべき式は

$$u - j' = \overline{u - j'} \cdot \sqrt{bc}x$$

である．

$\angle UTV$ の二等分線は $l(\sqrt{xy}, -\sqrt{xy})$ であることから，

$$j' = \frac{xy(a - \sqrt{bc})}{xy - a\sqrt{bc}}$$

である．また，

$$u = \frac{x^2(b + c) - 2bcx}{x^2 - bc}$$

である．以上より，

$$\begin{aligned}
u - j' &= \frac{x^2(b + c) - 2bcx}{x^2 - bc} - \frac{xy(a - \sqrt{bc})}{xy - a\sqrt{bc}} \\
&= \frac{(x^2(b + c) - 2bcx)(xy - a\sqrt{bc}) - xy(a - \sqrt{bc})(x^2 - bc)}{(x^2 - bc)(xy - a\sqrt{bc})} \\
&= \frac{(b + c - a + \sqrt{bc})x^3y - 2bcx^2y - a\sqrt{bc}(b + c)x^2 + bc(a - \sqrt{bc})xy + 2abc\sqrt{bc}x}{(x^2 - bc)(xy - a\sqrt{bc})}
\end{aligned}$$

であり，

$$\overline{u - j'} = \frac{(ab + ac - bc)\sqrt{bc} + abc - 2a\sqrt{bc}x - (b + c)xy - (a - \sqrt{bc})x^2 + 2x^2y}{(x^2 - bc)(xy - a\sqrt{bc})}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
&u - j - \overline{u - j'} \cdot \sqrt{bc}x \\
&= \frac{1}{(x^2 - bc)(xy - a\sqrt{bc})} \\
&\quad \times \Big((b + c - a - \sqrt{bc})x^3y + (a - \sqrt{bc})\sqrt{bc}x^3 + (b + c - 2\sqrt{bc})\sqrt{bc}x^2y \\
&\qquad - (b + c - 2\sqrt{bc})a\sqrt{bc}x^2 + (a - \sqrt{bc})bcxy + (a\sqrt{bc} + bc - ab - ac)bcx\Big) \\
&= \frac{x}{(x^2 - bc)(xy - a\sqrt{bc})} \\
&\quad \times \Big((b + c - a - \sqrt{bc})x^2y + (a - \sqrt{bc})\sqrt{bc}x^2 + (b + c - 2\sqrt{bc})\sqrt{bc}xy \\
&\qquad - (b + c - 2\sqrt{bc})a\sqrt{bc}x + (a - \sqrt{bc})bcy + (a\sqrt{bc} + bc - ab - ac)bc\Big)
\end{aligned}$$

となる．以下，

$$\begin{aligned}
&(b + c - a - \sqrt{bc})x^2y + (a - \sqrt{bc})\sqrt{bc}x^2 + (b + c - 2\sqrt{bc})\sqrt{bc}xy \\
&\quad - (b + c - 2\sqrt{bc})a\sqrt{bc}x + (a - \sqrt{bc})bcy + (a\sqrt{bc} + bc - ab - ac)bc \\
&= 0
\end{aligned}$$

を示す．

$l(x,y)$, $l(b,c)$, $l(a,\sqrt{bc})$ が共点なので

$$\begin{vmatrix} xy & x+y & 1 \\ bc & b+c & 1 \\ a\sqrt{bc} & a+\sqrt{bc} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

であり，これから

$$(b+c-a-\sqrt{bc})xy = (bc-a\sqrt{bc})(x+y) + a\sqrt{bc}(b+c) - bc(a+\sqrt{bc})$$

が得られる．これを用いると，

$$\begin{aligned}
&(b+c-a-\sqrt{bc})x^2y + (a-\sqrt{bc})\sqrt{bc}x^2 + (b+c-2\sqrt{bc})\sqrt{bc}xy \\
&\quad - (b+c-2\sqrt{bc})a\sqrt{bc}x + (a-\sqrt{bc})bcy + (a\sqrt{bc}+bc-ab-ac)bc \\
&= (bc-a\sqrt{bc})(x^2+xy) + \big(a\sqrt{bc}(b+c) - bc(a+\sqrt{bc})\big)x \\
&\quad + (a-\sqrt{bc})\sqrt{bc}x^2 + (b+c-2\sqrt{bc})\sqrt{bc}xy \\
&\quad - (b+c-2\sqrt{bc})a\sqrt{bc}x + (a-\sqrt{bc})bcy + (a\sqrt{bc}+bc-ab-ac)bc \\
&= (b+c-a-\sqrt{bc})\sqrt{bc}xy + (a-\sqrt{bc})bcx + (a-\sqrt{bc})bcy + (a\sqrt{bc}+bc-ab-ac)bc \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$u - j' = \overline{u-j'} \cdot \sqrt{bc}x$$

が示された．

参考文献

[1] A. V. Akopyan. *Geometry in Figures.* CreateSpace Independent Publishing Platform, 2011.

[2] Evan Chen. Lemmas in aops geometry. `https://web.evanchen.cc/handouts/GeoSlang/GeoSlang.pdf`.

[3] Evan Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.* American Mathematical Soc., 2016.

[4] Evan Chen, 森田康夫, 兒玉太陽, 熊谷勇輝, 宿田彩斗, 平山楓馬. 数学オリンピック幾何への挑戦: ユークリッド幾何学をめぐる船旅. 日本評論社, 2023.

[5] i3435. ’ muricaaaaaaa. `https://artofproblemsolving.com/community/c6h2456133p20459825`.

[6] Kapil Pause. On two special points in triangle. `https://web.evanchen.cc/handouts/GeoSlang/GeoSlang.pdf`.

[7] 小林一章. 獲得金メダル！ 国際数学オリンピック メダリストが教える解き方と技. 朝倉書店, 2011.