graf $\overbrace{\text{algorytmu}}^{\text{strukturalny}}$

- sprawozdanie

dwu-wymiarowy : macierz (obraz)

jedno- " : wektor (dźwięk)

algebra macierzowa

1. $I_N = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}_N$ jednostkowa macierz

2. $O_{N\times M} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

3. $1_{N\times M} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \vdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

4. $e^{(n)}_{1\times N}$ – n-ty wiersz macierzy jednostkowej

przykład: $e^{(3)}_{1\times 8} = [0,0,0,1,0,0,0,0]^T$

5. $A_{N\times 1} = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]^T$

$X_{N\times 1} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$

$$\underbrace{(A,X)}_{\text{iloczyn skalarny}} = A^T X = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}] \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{vmatrix} = a_0 x_0 + \dots + a_{N-1} x_{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x_i$$

6. iloczyn hadamarda : $\blacksquare$

$$A_{N\times 1} \blacksquare X_{N\times 1} = \begin{vmatrix} a_0 x_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} x_{N-1} \end{vmatrix}$$

iloczyn tablicowy : (mnożenie macierzy tego samego wymiaru)

$$y_{ij} = a_{ij} \cdot x_{ij}$$

7. zwektoryzowany iloczyn hadamarda : $\circ$

$$B_{M\times N} = \| b_{m,n} \| \qquad m = \overline{0, M-1} \quad n = \overline{0, N-1}$$

$$Y_{M\times 1} = B_{M\times N} \circ X_{N\times 1}$$

wyliczanie:

$$y_m = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} b_{m,n} x_n, & \sum_{n=0}^{N-1} b_{m,n} = 1 \\ \prod_{n=0}^{N-1} b_{m,n} x_n, & \sum_{n=0}^{N-1} b_{m,n} > 1 \end{cases}$$

ckc group

przykład #1:

$$\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_0 & x_1\\ x_2 & x_3\\ x_4 & x_5\\ x_6 & x_7 \end{bmatrix}$$

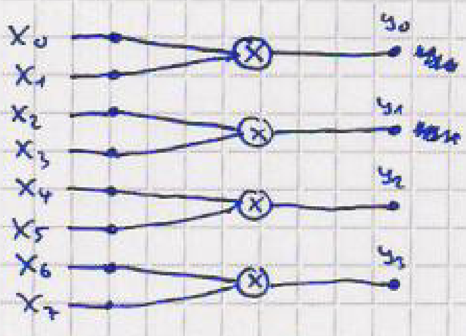
=> macierz maskowania

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_0 & x_1\\ x_2 & x_3\\ x_4 & x_5\\ x_6 & x_7 \end{bmatrix}$$

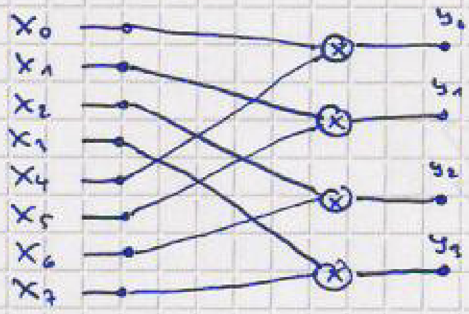
przykład #2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_0 & x_4\\ x_1 & x_5\\ x_2 & x_6\\ x_3 & x_7 \end{bmatrix}$$

graf strukturalny (dla przykładu #1)



graf strukturalny (dla przykładu #2)



diagonalna macierz: $D_N = \mathrm{diag}(d_0, d_1, \ldots, d_{N-1})$

$$= \begin{vmatrix} d_0 & & & \varnothing \\ & d_1 & & \\ & & \ddots & \\ \varnothing & & & d_{N-1} \end{vmatrix}$$

quazidiagonalna macierz

$$D_{M,N} = \mathrm{quazidiag}(D_{L\times K}, \ldots, D_{P\times S})$$

$$= \begin{vmatrix} D_{L\times K} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{P\times S} \end{vmatrix}$$

$M = L + \ldots + P$

$N = K + \ldots + S$

macierz jednostkowa rzędu N

$$\left.\begin{array}{l} I_N^{(\alpha\to)} \\[2em] I_N^{(\leftarrow\alpha)} \end{array}\right\}$$

macierzy jednostkowe rzędu N, których kolumny są cyklicznie przesunięte według względu pierwotnej postaci o liczbę pozycji zdefiniowanej górnego indeksu w kierunku określonego strzałką

przykład:

$$I_8 = \begin{vmatrix} 1 & & & \cdot\cdot & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ \cdot & & 1 & & & & & \cdot \\ \vdots & & & 1 & & & & \vdots \\ & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & \cdots & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad I_8^{(3\to)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

~~suma~~

tensorowa (prosta) suma macierzy :

$\oplus$: suma dwóch macierzy

$$\bigoplus_{n=0}^{N-1} A_{N\times M}^{(i)}$$

$$A_{M\times N} \oplus B_{L\times K} = \left[\begin{array}{c|c} A_{M\times N} & \emptyset \\ \hline \emptyset & B_{L\times K} \end{array}\right]$$

przykład :

$$I_3 \oplus 1_{1\times 3} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} \oplus [1 \; 1 \; 1]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & \emptyset & \\ & & 1 & & & \\ \hline & \emptyset & & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]_{4\times 6}$$

mnożenie Kroneckera: ⊗

przy wielu macierzy:

$$\bigotimes_{i=0}^{N-1} B^{(i)}_{M\times N} \qquad A_{M\times N} \otimes B_{L\times K} = \begin{vmatrix} a_{0,0} B_{L\times K} & a_{0,1} B_{L\times K} & \cdots a_{0,N-1} B_{L\times K} \\ a_{1,0} B_{L\times K} & a_{1,1} B_{L\times K} & \cdots a_{1,N-1} B_{L\times K} \\ \vdots & & \\ a_{M-1,0} B_{L\times K} & a_{M-1,1} B_{L\times K} & \cdots a_{M-1,N-1} B_{L\times K} \end{vmatrix}$$

przykład:

$$I_3 \otimes 1_{1\times 3} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{1\ 1\ 1} & & \\ & \boxed{1\ 1\ 1} & \\ & & \boxed{1\ 1\ 1} \end{vmatrix}_{3\times 9} = Y_{3\times 9}$$

Konkatenacja pionowa i pozioma

Konkatenacja pozioma: $\underset{=}{A_{M\times N}} \; \square|\square \; \underset{=}{B_{M\times K}}$

liczba wierszy musi być taka sama!

$$\underset{i=0}{\overset{N-1}{\square|\square}} A^{(i)}_{K\times P}$$

przykład:

$$I_3 \; \square|\square \; 1_{3\times 2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \square|\square \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{3\times 5}$$

Konkatenacja pionowa:

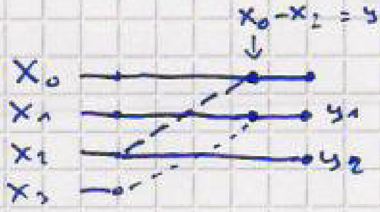
$$A_{M\times N} \; \frac{\square}{\square} \; B_{K\times N}$$

! liczba kolumn musi być ta sama !

$$\cancel{A_{3\times4}} \quad A_{3\times4} \, X_{4\times1} = Y_{3\times1}$$

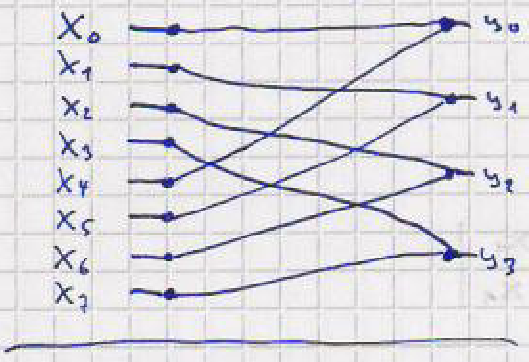
przykład:

$$A_{3\times4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



----- $\triangleq$ minus

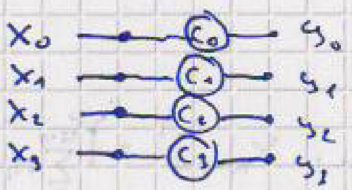
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{4\times8} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{vmatrix}_{8\times1} = \begin{vmatrix} x_0 + x_4 \\ x_1 + x_5 \\ x_2 + x_6 \\ x_3 + x_7 \end{vmatrix}$$



przykład: <u>mnożenie ze skalarami</u>

$$D_4 = \mathrm{diag}\,(c_0, c_1, c_2, c_3)$$

$$D_4 \cdot X_{4\times 1} = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 x_0 \\ c_1 x_1 \\ c_2 x_2 \\ c_3 x_3 \end{vmatrix}$$

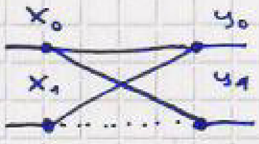


macierz hadamarda II. rzędu:

$$E_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$E_2 X_{2\times1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{vmatrix}$$

graficzna (motylkowa) postać:



duplowanie danych:

$$X_{N\times1} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$$

duplowanie:

$$\Rightarrow [\underbrace{x_0 \dots x_0}_{M_0}, \underbrace{x_1 \dots x_1}_{M_1}, \dots, \underbrace{x_{N-1} \dots x_{N-1}}_{M_{K-1}}]^T = Y_{\sum_{i=0}^{K-1} M_i \times 1}$$

przykład:

$m_0 = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $N = 3$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & 1 \\ & & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}_{9\times3}}_{=P} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$1_{2\times 1} \oplus 1_{3\times 1} \oplus 1_{4\times 1} = P$$