TD III : Processus de branchement

- 18 Septembre 2025-25 Septembre 2025
- Master I ISIFAR
- **Probabilités**

Exercice 1 (Modélisation)

On note Q la loi de reproduction (loi sur $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$). On note μ son espérance.

On convient de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Pour chaque génération, on se donne une suite infinie d'entiers, soit un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$. L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$ n'est pas dénombrable.

Pour représenter la suite des générations, on se donne un élément de $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}\right)^{\mathbb{N}}$. Cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$. On convient de $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$. Pour $\omega \in \Omega$, $X_j^n(\omega)$ est le nombre d'enfants de l'individus $j \in \mathbb{N}^*$ dans la génération $n \in \mathbb{N}$.

Comme Ω n'est pas dénombrable, on ne choisit pas l'ensemble de ses parties comme tribu.

Pour la génération $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{G}_k^n$ est la tribu (de parties de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$) engendrée par $X_1^n, X_2^n, \ldots, X_k^n$, et $\mathcal{G}^n$ est la tribu engendrée par $(\mathcal{G}_k^n)_{k\in\mathbb{N}^*}$. La tribu $\mathcal{G}^n = \sigma\left((\mathcal{G}_k^n)_{k\in\mathbb{N}^*}\right)$ est la tribu engendrée par les événements cylindriques décrivant la génération n.

Pour chaque n, $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\cup_{m\le n}\mathcal{G}^m\right)$, la tribu engendrée par les $(X_j^m)_{m\le n, j\in\mathbb{N}^*}$.

Enfin $\mathcal{F} = \sigma\left(\cup_n \mathcal{F}_n\right)$.

Pour chaque n, on munit la n^{ieme} génération de la loi produit infinie qui étend les lois produits finies définies sur $\mathcal{G}_k^n$:

$$P\left\{\bigwedge_{j\le k} X_j^n = x_j^n\right\} = \prod_{j\le k} Q\left\{X_j^n = x_j^n\right\}$$

pour $(x_j^n)_{1\le j\le k} \in \mathbb{N}^k$

On munit $(\Omega, \mathcal{F})$ de la loi produit infinie qui étend les les lois produits définies sur les n premières générations.

La taille des générations $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie récurrence. On a $Z_0 = 1$ et

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^n$$

Pour tout n, Z_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable (vérification par récurrence sur n)

Pour tout n, $\mathcal{F}_{n-1}$ est indépendante de $\mathcal{G}^n$

Exercice 2

Espérance conditionnelle de Z_{n+1} sachant $\mathcal{F}_{n-1}$, $\sigma(Z_n)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{Z_n} X_j^n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{I}_{j \leq Z_n} X_j^n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{I}_{j \leq Z_n} \mathbb{E}\left[X_j^n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{I}_{j \leq Z_n} \mathbb{E}\left[X_j^n\right] \\
&= \sum_{j=1}^{Z_n} \mu \\
&= \mu \times Z_n
\end{aligned}
$$

On peut même conclure :

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid Z_n\right] = \mu \times Z_n$$

Exercice 3

$$\mathbb{E}Z_{n+1} = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid Z_n\right]\right] = \mu \times \mathbb{E}Z_n$$

D'où :

$$\mathbb{E}Z_n = \mu^n$$

Exercice 4

Extinction dans le cas sous-critique

$$E = \cup_n \{Z_n = 0\} = \cup_n \cap_{m \geq n} \{Z_m = 0\}$$

$$\Omega \setminus E = \cap_n \{Z_n > 0\}$$

Pour chaque k

$$P\{\cap_n \{Z_n > 0\}\} \leq P\{Z_k > 0\}$$

Comme la suite des événements $\{Z_n > 0\}$ est décroissante,

$$P\{\cap_n \{Z_n > 0\}\} \leq \lim_n P\{Z_n > 0\}$$

. Comme

$$P\{Z_n > 0\} \leq \mathbb{E}Z_n$$

on conclut dans le cas sous-critique $\mu < 1$, que

$$P\{\cap_n \{Z_n > 0\}\} = 0$$

Soit

$$P\{E\} = 1$$

(extinction presque sûre).

Exercice 5

‘

Une équation satisfaite par p_E

$$E = \cup_{k=1}^{\infty} \{Z_1 = k\} \cap_{j=1}^{k} E_j$$

$$\begin{aligned} p_E &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mathbb{1}_E \mid Z_1]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[p_E^{Z_1}\right] \\ &= G_Q(p_E) \end{aligned}$$

car $Z_1 \sim Q$.

La probabilité d'extinction satisfait l'équation :

$$p_E = G_Q(p_E)$$

La Figure 1 illustre le problème posé par l'équation $p_E = G_Q(p_E)$ lorsque la loi de reproduction Q est la loi de Poisson de paramètre $\mu = 1.5$. Les deux intersections entre la courbe en trait plein et la droite pointillée représentent les deux solutions de l'équation $p_E = G_Q(p_E)$.

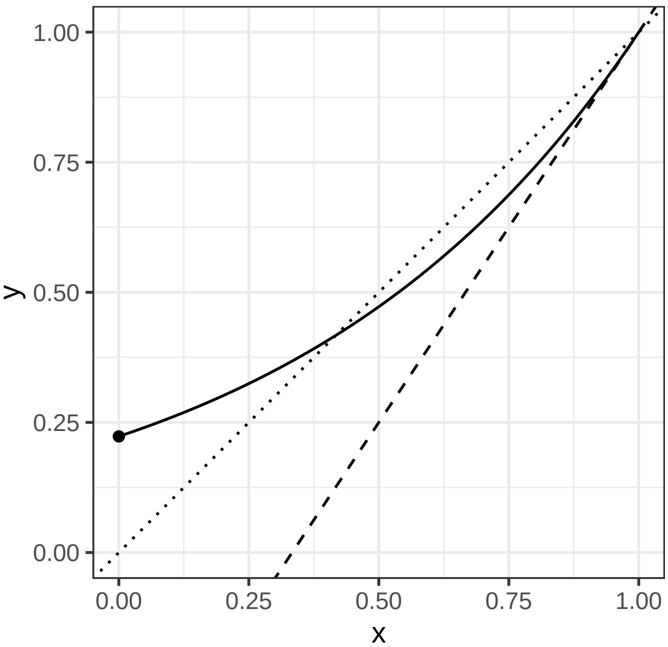

Fig. 1 : Fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\mu = 1.5$: $s \mapsto \exp(s(\mu - 1))$. La droite pointillée représente l'équation $y = x$. La droite en tiret l'équation $y = 1 + \mu(x - 1)$

Exercice 6

Étude des de l'équation $x = G_Q(x)$.

Comme série entière de rayon de convergence ≥ 1, dérivable en 1, G_Q possède les propriétés suivantes :

- G_Q est croissante et convexe sur $[0, 1]$, indéfiniment dérivable sur $]0, 1[$
- La dérivée de G_Q en $x = 1$ est égale à l'espérance de la loi de reproduction Q, soit μ.

La fonction $x \mapsto G_Q(x) - x$ est convexe, de dérivée $G'_Q - 1$ sur $[0, 1]$.

Si $\mu < 1$, la dérivée croît jusqu'à 0 atteint en $x = 1$. $G_Q(x) - x$ décroit donc de $Q(0)$ à 0 entre 0 et 1. L'équation $x = G_Q(x)$ ne possède qu'une seule racine (triviale), $x = 1$. On retrouve le fait que p_E soit égal à 1 dans le cas sous-critique.

Si $\mu > 1$, $G'_Q(0) - 1 = Q(\{1\}) - 1 < 0$ et $G'_Q(1) - 1 = \mu - 1 > 0$, $G'_Q - 1$ s'annule en un $\theta \in]0,1[$, est négative sur $[0,\theta]$, positive sur $[\theta, 1]$. La fonction $G_Q(x) - x$ décroit de 0 à θ, croit de θ à 1. Elle est positive en 0 et nulle en 1, elle s'annule donc une seule fois en tre 0 et θ. Dans le cas sur-critique, l'équation $x = G_Q(x)$ admet une racine non-triviale entre 0 et 1.

Pour déterminer p_E dans le cas sur-critique, il faut déterminer la racine de l'équation $x = G_Q(x)$ qui est égale à p_E.

Exercice 7

Pour déterminer p_E dans le cas sur-critique, nous allons étudier la suite $(P\{Z_n = 0\})_n$. C'est une suite croissante, majorée par 1. Elle possède une limite dans $[0,1]$, et $p_E = \lim_n \uparrow P\{Z_n = 0\}$.

On note $P\{Z_1 = 0\} = Q\{0\}$ ou encore $P\{Z_1 = 0\} = G_Q(0)$.

La relation entre $P\{Z_n = 0\}$ et G_Q est (relativement) simple et pas inattendue.

Si on note G_{Z_n} la fonction génératrice de la loi de Z_n,
on a d'abord $G_{Z_1} = G_Q$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}} \mid \sigma(Z_n)\right] &= \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n} \mid \sigma(Z_n)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_i^n} \mid \sigma(Z_n)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E}\left[s^{X_i^n} \mid \sigma(Z_n)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{Z_n} G_Q(s) \\
&= (G_Q(s))^{Z_n} .
\end{aligned}
$$

On en déduit :

$$G_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}\left[(G_Q(s))^{Z_n}\right] = G_{Z_n}(G_Q(s))$$

D'où (par récurrence sur n) :

$$G_{Z_n} = \underbrace{G_Q \circ ... \circ G_Q}_{n \text{ fois}}$$

Comme

$$P\{Z_n = 0\} = G_{Z_n}(0)$$

on a

$$P\{Z_n = 0\} = \underbrace{G_Q \circ ... \circ G_Q}_{n \text{ fois}}(0)$$

la suite $P\{Z_n = 0\}$, vérifie la récurrence $u_{n+1} = G_Q(u_n)$ avec $u_1 = Q\{0\}$.

Notons τ la solution non-triviale de $x = G_Q(x)$.

Si $u \in [0, \tau[$, alors

$$u < G_Q(u) < \tau$$

Cette observation permet de déduire que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = G_Q(u_n)$ et $u_1 = Q\{0\}$ et croissante et majorée par τ. Elle admet une limite qui est un point fixe de G_Q, c'est donc τ.

On peut donc conclure que dans le cas sur-critique, la probabilité d'extinction est la solution non-triviale de l'équation $x = G_Q(x)$.