**TD II : Espérances et lois conditionnelles**

22 Septembre 2025-26 Septembre 2025
- Master I Isifar
- **Probabilités**

## Exercice 1

**Cours**

Espérance conditionnelle par rapport à une tribu engendrée par une partition dénombrable.

1. Soit $(A_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une partition de $\Omega$ et $\mathcal{F} = \sigma(A_n, n \geq 1)$ la tribu engendrée par les $A_n, n \geq 1$. Rappelons qu'une v.a.r. $Y$ est $\mathcal{F}$-mesurable si et seulement si il existe une suite de réls $(a_n)$ telle que $Y = \sum_{n \geq 1} a_n \mathbf{1}_{A_n}$. Exprimer $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.
2. Soient $X, Y$ deux variables i.i.d. $\sim$ Ber$(p)$. On considère $\mathcal{G} = \sigma(\{X + Y = 0\})$. Calculer $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$. Les variables obtenues sont-elles toujours indépendantes ?

## Exercice 2

**Cours**

Conditionnement continu

Soient $(X, Y)$ un couple de v.a. réelles intégrables de densité jointe $f$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $g(X, Y) \in \mathbb{L}^1$.

Rappeler l'expression de $\phi, \psi$ telles que

$$\mathbb{E}[g(X, Y) \mid Y] = \phi(Y), \quad \mathbb{E}[g(X, Y)|X] = \psi(X).$$

1. On considère $(X, Y)$ de densité jointe $f(x, y) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq x \leq 1\}}$. Quelle est la loi de $X$ ? Calculer la distribution conditionnelle $f_{Y|X}$ de $Y$ sachant $X$. Calculer $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1|X)$, puis en déduire $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

   Pour simplifier l'expression obtenue on pourra utiliser que $x \to \sqrt{1 - x^2} - \tanh^{-1}(\sqrt{1 - x^2}) = \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{1 - x^2}) + \frac{1}{2}\ln(1 - \sqrt{1 - x^2})$ est une primitive de $x \to \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
2. Dans le cas général, montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$. Que vaut $\mathbb{E}[Y]$ dans l'exemple de la question précédente ?
3. Montrer, dans le cas général, que

   $$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]g(X)] = \mathbb{E}[Yg(X)],$$

   pour toute fonction $g$ telle que les deux espérances sont définies. Que vaut $\mathbb{E}[Yg(X) \mid X]$ ?

## Exercice 3

**Partiel passé**

Soient $0 \leq r \leq p \leq 1$ tels que $1 - 2p + r \geq 0$.

Soient $X_1, X_2$ tels que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = r, \quad \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = p - r,$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = p - r, \quad \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - 2p + r.$$

1. Quelle est la loi de $X_1$ ? celle de $X_2$ ?

2. Calculer $Y = \mathbb{E}[X_1 \mid X_2]$ et vérifier que

$$Y = \begin{cases} \frac{p-r}{1-p} \text{ avec probabilité } 1-p \\ \frac{r}{p} \text{ avec probabilité } p. \end{cases}$$

3. Rappelons que par définition $\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2] = \mathbb{E}[X_1^2 \mid X_2] - \mathbb{E}[X_1 \mid X_2]^2$. Montrer que

$$\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2] = \left(\frac{p-r}{1-p} - \left(\frac{p-r}{1-p}\right)^2\right) \mathbf{1}_{\{X_2=0\}} + \left(\frac{r}{p} - \left(\frac{r}{p}\right)^2\right) \mathbf{1}_{\{X_2=1\}}.$$

4. Que vaut $\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X_1 \mid X_2])$ ? $\mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2]]$ ? Vérifier qu'on a bien

$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X_1 \mid X_2]) + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2]].$$

**Exercice 4**

Soit $(X_n)$ une suite de v.a. .i.i.d intégrables, et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Que valent $\mathbb{E}[X_1 \mid X_2], \mathbb{E}[S_n \mid X_1], \mathbb{E}[S_n \mid S_{n-1}]$?
2. Montrer que si les paires de variables $(X, Z)$, $(Y, Z)$ ont la même loi jointe, alors pour toute fonction réelle positive (ou satisfaisant une condition d'intégrabilité), $\mathbb{E}[f(X) \mid Z] = \mathbb{E}[f(Y) \mid Z]$. En déduire $\mathbb{E}[X_1 \mid S_n]$.

**Exercice 5**

**(Examen passé)**

Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables i.i.d, avec $X_1 \sim \mathrm{Ber}(1/2)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - 1/2)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$.

Calculer $\mathbb{E}[S_n \mid \mathcal{F}_5]$ en fonction de $n$. Quelle est la loi de cette variable aléatoire ?

**Exercice 6**

**Partiel passé**

Soient $\{\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{N}\}$ des variables i.i.d exponentielles de paramètre 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n := \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$.

1. On note $f_n$ la fonction de densité de la variable $S_n$. Montrer que pour tout $t \geq 0$

$$f_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-t).$$

2. Pour $t > 0, n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(S_n \leq t)$ ?
3. On fixe $t > 0$ et on suppose $X_t \sim \mathrm{Poisson}(t)$. Que vaut $\mathbb{P}(X_t \geq n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ ?
4. Sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$ on place les points $S_1, S_2, S_3, \ldots$. On note $N_t$ le nombre de ces points qui tombent dans l'intervalle $[0, t]$. Exprimer l'événement $\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$. Déterminer la loi de $N_t$ à l'aide des questions préc'dentes.

5. Montrer que, conditionnellement à $\{N_t = 1\}$, la loi de $\mathbf{e}_1$ est uniforme sur $[0, t]$.
6. Conditionnellement à $\{N_t = 2\}$, quelle est la loi du vecteur $(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2)$ ?

**Exercice 7**

**CC2 2023**

On considère

$$X \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}\right).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X_3 \mid X_4]$, et déterminer la loi conditionnelle de $X_3$ sachant $X_4$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $BA^{-1}$, puis vérifier que
$$BA^{-1}B^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$
3. Déterminer $\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\right]$. et la loi conditionnelle de $\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$ sachant $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 8**

(Partiel passé)

Soit $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mu, M)$ où
$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la loi du couple $(X_1, X_2)$ ?
2. Déterminer $\alpha$ un réel tel que $Y = X_1 + X_2 $ est indépendante de $X_1$. Que vaut $\mathbb{E}[Y]$ ? $\mathrm{Var}(Y)$ ?
3. En déduire $\mathbb{E}[X_2 \mid X_1]$. Quelle est la loi conditionnelle de $X_2$ sachant $X_1$ ?
4. Déterminer un réel $\beta$ tels que $Z = \beta X_1 + X_3$ est indépendante de $X_1$. En déduire
$$\mathbb{E}[X_3 \mid X_1], \quad \mathbb{E}[X_3^2 \mid X_1].$$
5. Calculer $\mathbb{E}\left[X_1^2 X_2 + X_3^2 X_1 \mid X_1\right]$.

**Exercice 9**

**Examen passé**

Soit $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mu, M)$, où
$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathbb{E}[X_1 + 2X_2 \mid X_3]$. Quelle est la loi conditionnelle de $X_1 + 2X_2$ sachant $X_3$ ?

**Exercice 10**

**(CC2 2023)**

On suppose dans cet exercice que $(X, Y)$ est un couple de variables aléatoires tel que pour toute $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne,
$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)] = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \phi(n, y) \exp\left(-\frac{y^2}{2n}\right) dy.$$

1. Montrer que $X \sim \mathrm{Geom}(2/3)$.
2. Vérifier que pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(Y) \in \mathbb{L}^1$, on a
$$\mathbb{E}[f(Y) \mid X] = \sum_{n \geq 1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2n}\right) dy\right) \mathbb{1}_{\{X=n\}}$$
%1. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, %
$$\mathbb{E}[Y^k \mid X] = \frac{k!}{X^{2k}}$$

3. Calculer $\mathbb{E}[\exp(itY) \mid X]$, $t \in \mathbb{R}$, quelle est la loi conditionnelle de $Y$ sachant $X$ ?
4. Déduire que si $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(itY)] = \frac{2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{3-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}.$$

**Exercice 11**

**Partiel passé**

**Partie I**

On considère le couple $(X, Z)$ de densité jointe

$$f(x,z) := (z-x)\exp(-z)\mathbf{1}_{\{z \geq x \geq 0\}}.$$

1. Calculer la loi de $X$, puis celle de $Z$.
2. En déduire que

$$f_{X|Z}(x \mid z) = \frac{2(z-x)}{z^2}\mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq z, z>0\}}.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[X \mid Z]$, puis $\mathrm{Var}[X \mid Z]$.
4. Calculer $f_{Z|X}(z \mid x)$, puis démontrer que $\mathbb{E}[Z \mid X] = X + 2$.
5. Quelle est la loi du couple $(X, Z-X)$ ? En déduire la loi de $Z - X$.

**Partie II**

1. Soit $z > 0$. On suppose que $U_1^z \sim \mathrm{Unif}[0,z]$, $U_2^z \sim \mathrm{Unif}[0,z]$ et que $U_1^z$ est indépendante de $U_2^z$. Calculer la densité de $\min(U_1^z, U_2^z)$.
2. On suppose à présent que {*conditionnellement à $Z$*}, $U_1^Z \sim \mathrm{Unif}[0,Z]$, $U_2^Z \sim \mathrm{Unif}[0,Z]$ *et que $U_1^Z$ est (toujours conditionnellement à $Z$) indépendante de $U_2^Z$. Montrer que, conditionnellement à $Z$,* $\min(U_1^Z, U_2^Z)$ *a la même loi que $X$.*
3. *Soient $X_1, X_2, X_3$ trois variables indépendantes, toutes trois distribuées suivant la distribution exponentielle de paramètre 1. On note $S = X_1 + X_2 + X_3$. Déterminer la loi de $(X_1, S)$. \ Que vaut $\mathbb{E}[X_1 \mid S]$ ? $\mathbb{E}[S \mid X_1]$ ?\ Montrer finalement que conditionnellement à $S$, le couple $(X_1, X_1 + X_2)$ a la même loi que* $(\min(U_1^S, U_2^S), \max(U_1^S, U_2^S))$.

**Exercice 12**

**Partiel passé**

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on définit

$$f(x,y) := \frac{4y}{x^3}\mathbf{1}_{\{0<x<1, 0<y<x^2\}}.$$

Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité, puis calculer les densités marginales $f_X$, $f_Y$.

Calculer $f_{Y|X}(y \mid x)$ et en déduire que

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = \frac{2}{3}X^2.$$

Montrer que

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{2y}{1-y}\frac{1}{x^3}\mathbf{1}_{\{0<x<1, 0<y<x^2\}},$$

puis calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$.

**Exercice 13**

**CC2 2023**

Dans cet exercice on suppose que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

et on pose $U = X^2$.

1. Vérifier que $U \sim \text{Gamma}(1/2, 1/4)$.
2. Montrer que $(X, Y)$ possède une densité jointe $g$ que l'on déterminera.
3. Montrer que $(U, Y)$ possède la densité jointe
$$f(u, y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{u}}\left(\exp\left(-\frac{u}{2} - y^2 + y\sqrt{u}\right) + \exp\left(-\frac{u}{2} - y^2 - y\sqrt{u}\right)\right)\mathbb{1}_{\{u>0\}}.$$
4. Calculer $f_{Y|U}(y \mid u)$. En déduire $\mathbb{E}[Y \mid U], \mathbb{E}[Y^2 \mid U]$ et $\text{Var}(Y \mid U)$. Vérifier qu'on a bien
$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[\text{Var}[Y \mid U]] + \text{Var}[\mathbb{E}[Y \mid U]]\,.$$
5. On suppose que conditionnellement à $U$, $\xi$ et $Z$ sont indépendantes avec $\xi \sim \text{Ber}(1/2)$ et $Z \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{U}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Montrer que conditionnellement à $U$, $(2\xi - 1)Z$ a même loi que $Y$. Vérifier alors les calculs de la question précédente.

**Indications**

1. rappelle que pour $a > 0, \lambda > 0$, la densité d'une variable $G \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$ est donnée par
$$f_G(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)}\exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\{x>0\}}$$
2. On fera attention à distinguer les domaines $D_1 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ et $D_2 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ pour pouvoir considérer les $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes $\Psi_1 : \begin{cases} D_1 \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (x, y) \to (x^2, y) \end{cases}$, $\Psi_2 : \begin{cases} D_2 \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (x, y) \to (x^2, y) \end{cases}$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les deux premiers moments de la variable $\zeta \sim \mathcal{N}\left(\alpha\frac{\sqrt{u}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sont
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\zeta] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} y \exp\left(-\left(y - \alpha\frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right) dy \\
&= \alpha\frac{\sqrt{u}}{2}, \\
\mathbb{E}[\zeta^2] = \mathbb{E}[\zeta]^2 + \text{Var}[\zeta] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} y^2 \exp\left(-\left(y - \alpha\frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right) dy \\
&= \alpha^2\frac{u}{4} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

### Exercice 14

**Rattrapage passé**

Soit $X = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(0, M)$, où

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que $\det(M) = 0$. Le vecteur $X$ possède-t-il une densité dans $\mathbb{R}^3$ ?
2. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $X_1$ et $Y = X_2 - aX_1$ soient indépendantes. Calculer $\mathrm{Var}(Y)$ et en déduire la loi de $(X_1, Y)$.
3. Trouver la loi conditionnelle de $X_2$ sachant $X_1$.

**Exercice 15**

On considère $X_0 = 0$, et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi normale centrée réduite.

On introduit les variables

$$Y_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{i}, i \geq 1.$$

Pour $n \geq 1$, montrer que le vecteur $(Y_1, ..., Y_n)$ est gaussien, puis calculer le vecteur moyenne et la matrice de covariances de $(Y_1, ..., Y_n)$.

Calculer, pour $n \geq 1$, $\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid Y_n]$.

**Exercice 16**

Soient $(X, Y)$ dont la loi jointe a pour densité $f(x, y) = x(y - x)\exp(-y), 0 \leq x \leq y < \infty$. On introduit la notation $f_{X|Y}(x|y) := f(x, y)/f_Y(y)$ lorsque le quotient est $> 0$, 0 sinon.

1. Exprimer $f_{X|Y}(x|y)$, puis $f_{Y|X}(y|x)$.
2. En déduire les expressions de $\mathbb{E}[X|Y], \mathbb{E}[Y|X]$.

**Exercice 17**

Soient $Y, Z$ deux v.a.r. indépendantes $\sim \exp(\lambda)$ où $\lambda > 0$. On pose $X = Y + Z$. Quelle est la loi conditionnelle de $Y$ sachant $X$ ? Que vaut $\mathbb{E}[Y|X]$ ? En déduire l'expression de $\mathbb{E}[Y|X]$

**Exercice 18**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux normales centrées réduites. On définit pour $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| \leq 1$,

$$U = \sigma_1 X, \quad V = \sigma_2 \rho X + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Y.$$

1. Quelle est la loi de $(U, V)$ ?
2. Que vaut $\mathbb{E}[UV]$ ?
3. Que vaut $\mathbb{E}[U \mid V]$?$\mathbb{E}[V \mid U]$?$\mathrm{Var}[U \mid V]$?$\mathrm{Var}[V \mid U]$?

**Exercice 19**

Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que $E(X) = E(Y) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ et que $\mathrm{Cov}(X; Y) = \rho$ avec $|\rho|^2 \neq 1$. On pose $U = X - \rho Y, V = \sqrt{1 - \rho^2} Y$.

1. Quelles sont les lois de $U$ et $V$? Les v.a. $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathbb{E}(U^2 V^2), \mathbb{E}(UV^3), \mathbb{E}(V^4)$. En déduire $\mathbb{E}(X^2 Y^2)$.
3. Retrouver ce dernier résultat par conditionnement.

**Exercice 20**

Soient $U, V, W$ trois v.a.r. gaussiennes centrées réduites. On pose

$$Z = \frac{U + VW}{\sqrt{1 + W^2}}.$$

1. Quelle est la loi conditionnelle de $Z$ sachant $W$?
2. En déduire que $Z$ et $W$ sont indépendantes et donner la loi de $Z$.

**Exercice 21**

Soient $X_1$ et $X_2$ des v.a. indépendantes, de lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

1. Calculer $\mathbb{E}[\max(X_1, X_2) \mid X_1]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[\max(X_1; X_2)]$.

**Exercice 22**

On pose $h(x) = \frac{1}{\Gamma(a+1)} \exp(-x)x^{a-1}$ ($a > 0$ fixé) et $D = \{0 < y < x\}$. Soit $f(x,y) = h(x)\mathbf{1}_D(x,y)$ :

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$. On considère dans la suite un couple $(X,Y)$ de v.a.r. de densité $f$.
2. Les v.a. $X$ et $Y/X$ sont-elles indépendantes ?
3. Quelle est la loi conditionnelle de $Y$ sachant $X$ ?
4. Soit $U$ une v.a.r. indépendante du couple $(X,Y)$ telle que $\mathbb{P}(U=1)=p$ et $\mathbb{P}(U=0)=1-p$. On pose $Z = UX + (1-U)Y$. Quelle est l'espérance conditionnelle de $Z$ sachant $X$ ?

**Exercice 23**

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de v.a.r.i.i.d. de densité $f$ et fonction de répartition $F$. Soient $N := \min\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$ et
$M := \min\{n \geq 1 : X_0 \geq X_1 \geq ... \geq X_{n-1} < X_n\}$.

1. Trouver $\mathbb{P}(N=n)$, puis montrer que la fonction de répartition de $X_N$ est $F + (1-F)\log(1-F)$ (on pourra conditionner par les événements $\{N=n\}, n \in \mathbb{N}$).
2. Exprimer $\mathbb{P}(M=m), m \geq 1$.
3. On suppose dans cette question que $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$. Pour $x \in (0,1)$ on introduit $R^x := \min\{n \geq 1 : X_1 + ... + X_n > x\}$. Montrer que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{R^x > n\}} \mid X_n] = \Phi(X_n)$ où $\Phi(u) = \mathbb{1}_{\{u<x\}}\mathbb{P}(R^{x-u} > n-1)$. En déduire $H_n(x) := \mathbb{P}(R^x > n)$.

**Exercice 24**

Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Quelle est l'espérance conditionnelle de $(Y-X)_+$ sachant $X$ ?
2. Quelle est la loi conditionnelle de $(Y-X)_+$ sachant $X$ ?

**Exercice 25**

Soient $X_1, X_2, X_3$ trois v. a. r. gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $U = 2X_1 - X_2 - X_3, V = X_1 + X_2 + X_3, W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$.

1. Quelles sont les lois de $U, V$ et $W$ ? Quels sont les couples de v.a. indépendantes parmi les couples $(U,V), (U,W), (V,W)$ ?
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $W = aU + Z$ avec $U$ et $Z$ indépendantes. En déduire $\mathbb{E}(W \mid U)$.

**Exercice 26**

Soient $X$ et $Y$ deux v. a. r. gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $Z = X + Y$, $W = X - Y$.

1. Montrer que $Z$ et $W$ sont indépendantes. Quelle est la loi de $W$ ?
2. En déduire l'espérance conditionnelle et la loi conditionnelle de $X$ sachant $Z$.
3. Calculer $\mathbb{E}(XY \mid Z)$ et $\mathbb{E}(XYZ \mid Z)$.