TD IV : Caractérisations/Convergences

- Octobre 2025
- Master I ISIFAR
- **Probabilités**

Exercice 1

On définit la densité f_a par $f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ pour $a > 0$. Si $X \sim f_a, Y \sim f_b, X \perp\!\!\!\perp Y$ quelle est la densité de la loi de $X + Y$?

Suggestion : passez par les fonctions caractéristiques.

Exercice 2

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2 = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1)$. On se donne un entier x entre 0 et n et on pose $S_n = x + \sum_{k=1}^n X_k$, et $\tau_x = \inf\{t \geq 0, S_t = 0 \text{ ou } S_t = n\}$. Le but de l'exercice est de calculer $u_x = \mathbb{E}(\tau_x)$.

- Calculer u_0 et u_n.
- Écrire une équation reliant u_k, u_{k+1} et u_{k-1}.
- Poser $v_k = u_k - u_{k-1}$ et en déduire u_k, puis $\max_{k\in[0,n]} u_k$.
- Ecrire un *programme* permettant de simuler des réalisations aléatoires de τ_x.
- Estimer *numériquement* les u_k à partir des simulations de la question précédente.
- Représenter graphiquement les estimations de u_k en fonction de k.

Exercice 3 (Théorème d'approximation de Weierstrass)

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit S_n une variable aléatoire distribuée selon une loi binomiale de paramètres n et $x \in (0, 1)$.

Montrer que :

$$\lim_n \sup_{0\leq x\leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = 0$$

Suggestion : Utiliser

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z\mathbb{I}_A) + \mathbb{E}(Z\mathbb{I}_{A^c})$$

avec $Z = f(x) - f(S_n/n)$ et

$$A = \{|S_n/n - x| > \delta\},$$

Le théorème d'approximation de Weierstrass s'énonce : toute fonction continue sur $[0, 1]$ peut être approchée uniformément par des polynômes.

Exercice 4

a. Si f est une fonction croissante sur $[a, b]$, on définit son inverse généralisée $f^{\leftarrow}$ par

$$f^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : x \in [a, b],\ f(x) \geq y\} \qquad \text{pour } y \in [f(a), f(b)]\,.$$

Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions croissantes sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ qui converge *simplement* vers f une autre fonction croissante sur $[a, b]$ en tout point de continuité de f, alors la suite $(f_n^{\leftarrow}(y))$ converge simplement vers $f^{\leftarrow}(y)$ en tout $y \in [f(a), f(b)]$ où $f^{\leftarrow}$ est continue.

b. Soit F une fonction de répartition, on définit la fonction quantile associée $F^{\leftarrow}$ par

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} \qquad \text{pour } p \in]0, 1[\,.$$

Vérifier que si deux fonctions de répartitions ont même fonction quantiles alors elles sont égales.

Dans cette définition F est une fonction de répartition, $F^{\leftarrow}$ la fonction quantile associée.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, p \in]0,1[$,

c. $F^{\leftarrow}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F(x)$.

d. $F \circ F^{\leftarrow}(p) \geq p$ avec égalité si et seulement si il existe x tel que $F(x) = p$.\ Si $F \circ F^{\leftarrow}(p) > p$ alors $F^{\leftarrow}$ est discontinue en p.

e. $F^{\leftarrow} \circ F(x) \leq x$.\ Si $F^{\leftarrow} \circ F(x) < x$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $F(x-\epsilon) = F(x)$.

f. $(F \circ G)^{\leftarrow} = G^{\leftarrow} \circ F^{\leftarrow}$

Exercice 5

Si $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \ldots \leq Y_{n:n}$ forme les statistiques d'ordre d'un n-échantillon de la loi exponentielle d'espérance 1, et si $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ désigne les statistiques d'ordre d'un n-échantillon d'une loi de fonction de répartition F qui admet une densité partout positive, montrer que

$$(X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}) \sim \left(F^{\leftarrow}(1-\exp(-Y_{1:n})), \ldots, F^{\leftarrow}(1-\exp(-Y_{n:n}))\right) .$$

La fonction quantile empirique $F_n^{\leftarrow}$ est la fonction quantile associée à la fonction de répartition empirique F_n. Si les points de l'échantillon sont deux à deux distincts

$$F_n^{\leftarrow}(p) = X_{k:n} \qquad \text{pour } \frac{k-1}{n} < p \leq \frac{k}{n} .$$

Soit F une fonction de répartition qui est dérivable en $F^{\leftarrow}(p)$ de dérivée non nulle notée $f(p)$ pour une valeur $p \in]0,1[$. Montrer que

$$\sqrt{n}\left(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p)\right) + \sqrt{n}\frac{1}{f(p)}\left(F_n(F^{\leftarrow}(p)) - p\right) = o_P(1) .$$

Quelle est la loi limite de $\sqrt{n}\left(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p)\right)$?