TD I : Révisions de Licence

- 8 Septembre 2025-12 Septembre 2025
- Master I Isifar
- **Probabilités**

1 Variables aléatoires réelles

Pour X une variable aléatoire réelle et $t \in \mathbb{R}$ on note

$$F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t)$$

la *fonction de répartition* de (la loi de) X et

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)]$$

la *fonction caractérique* de (la loi) de X

1.1 Fonctions de répartition

Exercice 1 (Transformation affine)**.**

Soit X une variable aléatoire réelle, F_X sa fonction de répartition, a, b deux réels fixés, et $Y := aX + b$

1. On suppose dans cette question que $a = 1$. Comment déduire F_Y de F_X ?
   Si (la loi de) X admet une densité, en est-il de même de Y? Si oui, exprimer dans ce cas f_Y à l'aide de f_X.
2. On suppose dans cette question que $b = 0$ et $a > 0$. Comment déduire F_Y de F_X ?
   Si (la loi de) X admet une densité, à quelle condition sur a en est-il de même de (la loi de) Y? Exprimer dans ce cas f_Y à l'aide de f_X.
3. Répondre aux mêmes questions lorsque $b = 0$ et $a = -1$?
4. Répondre enfin aux mêmes questions lorsque a et b sont quelconques.

Solution

Soit F_Y la fonction de répartition de Y.

1. On a

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X + b \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x - b) = F_X(x - b)$$

   Ainsi, le graphe de F_Y se déduit de celui de F_X en le translatant de b vers la droite.
   Si X admet une densité f_X,

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x-b} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{b} f_Y(v)dv,$$

   où $f_Y(v) = f_X(v - b), u \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, si X admet une densité f_X, Y admet la densité f_Y définie ci-dessus.

2. On a dans ce cas
$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \le x) = \mathbb{P}(aX \le x) = \mathbb{P}(X \le \frac{x}{a}) = F_X(\frac{x}{a}).$$
Ainsi le graphe de F_Y se déduit de celui de F_X en dilatant ce dernier par a.
Si X admet une densité f_X, on a
$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{a}} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} f_X(\frac{v}{a})dv = \int_{-\infty}^{x} f_Y(v)dv,$$
où $f_Y(v) = \frac{1}{a} f_X(\frac{v}{a}), v \in \mathbb{R}$. Ainsi, si X admet une densité f_X, alors Y admet la densité f_Y définie ci-dessus.
3. Dans ce cas
$$F_Y(x) = \mathbb{P}(-X \le x) = \mathbb{P}(X \ge -x) = 1 - F_X((-x)^-).$$
Si X admet une densité f_X,
$$F_Y(x) = \int_{-x}^{\infty} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{x} f_X(-v)dv = \int_{-\infty}^{x} f_Y(v)dv,$$
où $f_Y(v) = f_X(-v), x \in \mathbb{R}$. Ainsi, si X admet une densité f_X, alors Y admet la densité f_Y définie ci-dessus.
4. Traitons d'abord le cas $a = 0$. Dans ce cas, quelque soit X, on obtient que Y est déterministe, $\mathbb{P}(Y = b) = 1$ (en particulier Y n'a pas de densité même si X en possède une.
Lorsque $a > 0$, on obtient par un raisonnement similaire à 1,2,
$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right),$$
et si X possède la densité f_X, alors Y possède la densité f_Y telle que $f_Y(v) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{v-b}{a}\right), v \in \mathbb{R}$.
Enfin lorsque $a < 0$,
$$F_Y(x) = \mathbb{P}(aX+b \le x) = \mathbb{P}(aX \le x-b) = \mathbb{P}\left(X \ge \frac{x-b}{a}\right) = 1-F_X\left(\left(\frac{x-b}{a}\right)^-\right),$$
et si X possède la densité f_X,
$$F_Y(x) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f_X(u)du = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{x} f_X\left(\frac{v-b}{a}\right)dv,$$
de sorte que Y possède la densité f_Y où $f_Y(v) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{v-b}{a}\right), v \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Minimum, maximum de variables indépendantes)**.**

Soient $X_i, i \ge 1$, des variables indépendantes. Pour $k \ge 2$, on note $Y_k = \min(X_1, ..., X_k)$, $Z_k = \max(X_1, ..., X_k)$.

1. Dans cette question on s'intéresse à $k = 2$.
Comment déduire F_{Y_2} de F_{X_1}, F_{X_2} ? Même question pour F_{Z_2}.

2. Généraliser à k quelconque.
3. Quelle est la loi de Z_k lorsque les $\{X_i, i \geq 1\}$ sont i.i.d., $\sim$ Unif$[0,1]$?
4. Quelle est la loi de Y_k lorsque les $\{X_i, i \geq 1\}$ sont des variables *exponentielles* indépendantes, avec $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ (où pour tout i, $\lambda_i > 0$) ?

Solution

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1-F_{Y_2}(x) = \mathbb{P}(Y_2 > x) = \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x)) = \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) = \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x),$$

où pour la dernière égalité on s'est servi de l'indépendance de X_1 et X_2. On déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - F_{Y_2}(x) = (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x)).$$

De manière similaire, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_{Z_2}(x) = F_{Y_1}(x)F_{Y_2}(x).$$

1. Par un raisonnement similaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - f_{Y_k}(x) = \prod_{i=1}^{k}(1 - F_{X_i}(x))$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{Z_k}(x) = \mathbb{P}(\max(X_1, ..., X_k) \leq x) = \mathbb{P}(X_i \leq x, 1 \leq i \leq k) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i \leq x)$$

où pour la dernière égalité on s'est servi de l'indépendance des $(X_i, 1 \leq i \leq k)$. On déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{Z_k}(x) = \prod_{i=1}^{k} F_{X_i}(x)$$

2. Dans ce cas $F_{X_i}(x) = x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$, et donc

$$F_{Z_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^k & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases},$$

on déduit donc que Z_k est une variable de densité

$$f_{Z_k}(x) = kx^{k-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x), x \in \mathbb{R}.$$

3. Dans ce cas $1 - F_{X_i}(x) = \exp(-\lambda_i x)\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} + \mathbf{1}_{\{x<0\}}$, on a donc

$$1 - F_{Y_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\left(-x\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que $Y_k \sim \exp(\Lambda)$, avec $\Lambda = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i$.

Exercice 3.

On suppose que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Que valent

$$\mathbb{P}(X \leq 1), \quad \mathbb{P}(-1.23 \leq X \leq 0.43), \quad \mathbb{P}(X > 0.32)?$$

Solution

En utillisant le logiciel `R`, la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est désignée par `pnorm()`, la fonction réciproque (fonction quantile) est désignée par `qnorm`

		$\approx$
$\mathbb{P}(X \leq 1)$	`pnorm(1)`	0.84
$\mathbb{P}(-1.23 \leq X \leq 0.43)$	`pnorm(.43) - pnorm(-1.23)`	0.56
$\mathbb{P}(X > .321)$	`1 - pnorm(.32)`	0.37

Exercice 4.

On suppose que l'écart à la taille moyenne $T = 15.5$ des individus d'une population suit une loi normale centrée réduite.

Dans quel intervalle centré en T se situent les tailles de 99% des individus de la population ?

Solution

D'après la table, pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a $\mathbb{P}(Z \leq 2.57) \approx 0.9949$), et $\mathbb{P}(Z \leq 2.58) \approx 0.9951$, de sorte que $\mathbb{P}(|Z| \geq 2.57) \approx 0.0102$, et $\mathbb{P}(|Z| \geq 2.58) \approx 0.0098$.
On déduit que les tailles de 99% de la population se situent entre $15.5 - 2,58 = 12.92$ et $15.5 + 2.58 = 18.08$.

Exercice 5.

Etant donnée X une variable aléatoire gaussienne de paramètres μ et σ^2, donner la probabilité que $|X - \mu|$ dépasse $k\sigma$ pour $k = 1, 2, 3$.

Suggestion : On commencera par montrer que $\sigma^{-1}(X - \mu)$ suit une loi normale centrée réduite.

Reprendre les questions de l'exercice précédent lorsque $\mu = 2, \sigma = 2$.

Reprendre les questions de l'exercice précédent lorsque $\mu = 0, \sigma = 1/2$.

Solution

Puisque $(X - \mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$ on a

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) = \mathbb{P}(|Z| \geq k),$$

et donc d'après la table, pour $k = 1$ ceci vaut

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 1) = 2(1 - \mathbb{P}(Z \leq 1)) \approx 2 \times (1 - 0.8413) = 2 * 0.1587 = 0.3174$$

pour $k = 2$,

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 2) = 2(1 - \mathbb{P}(Z \leq 2) \approx 2 \times (1 - 0.9772) = 0.0456.$$

enfin pour $k = 3$,

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 3) = 2(1 - \mathbb{P}(Z \leq 3) \approx 2 \times (1 - 0.9987) = 0.0026.$$

Pour $\mu = 2, \sigma = 2$, on a

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(Z \leq -1/2) \approx 0.3085,$$

$$\mathbb{P}(-1.23 \leq X \leq 0.43) = \mathbb{P}(-\frac{3.23}{2} \leq Z \leq -\frac{1.57}{2}) \approx 0.9463 - 0.7823 = 0.1640,$$

$$\mathbb{P}(X > 0.32) = \mathbb{P}(Z > -0.84) \approx 0.7995.$$

Pour $\mu = 0, \sigma = 1/2$, on trouve

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(Z \leq 2) \approx 0.9772$$

$$\mathbb{P}(-1.23 \leq X \leq 0.43) = \mathbb{P}(-2.46 \leq Z \leq 0.86) \approx 0.8051 - (1 - 0.9931) = 0.7982,$$

$$\mathbb{P}(X > 0.32) = \mathbb{P}(Z > 0.64) \approx 1 - 0.7389 = 0.2611$$

1.2 Densités

Exercice 6.

Dans les cas suivants, trouver la valeur de C pour que f soit une densité de probabilité.

1. $f(x) = C\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, 0 < x < 1,$
2. $f(x) = C\exp(-x - \exp(-x)), x \in \mathbb{R},$
3. $f(x) = C\frac{1}{1+x^2}.$

Solution

1. On a
$$x(1-x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$
et on sait que la primitive de $x \to \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ est $x \to \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$. On a donc en effectuant le changement de variable $y = x - 1/2$,
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{4} - y^2}} = [\arcsin(2y)]_{-1/2}^{1/2} = \pi,$$
et il faut donc poser $C = \frac{1}{\pi}$ pour que f soit une densité de probabilité sur $]0, 1[$.

2. Soit $h(x) = \exp(-\exp(-x)), x \in \mathbb{R}$, on a pour $x \in \mathbb{R}$,
$$h'(x) = \exp(-x)\exp(-\exp(-x)) = \exp(-x - \exp(-x)),$$
de sorte que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x - \exp(-x)) = [\exp(-\exp(-x))]_{-\infty}^{\infty} = 1,$$

et il faut poser $C = 1$ pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

3. On a
$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_{-\infty}^{\infty} = \pi,$$
et il faut donc poser $C = \frac{1}{\pi}$ pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

(Mélange)

On suppose que X et Y sont deux variables de densités respectives f_X, f_Y, et que $\alpha \in [0,1]$. Montrer que $g := \alpha f_X + (1-\alpha) f_Y$ est également une densité de probabilité.

Trouver une variable aléatoire dont g est la densité.

Solution

La fonction g reste bien évidemment borélienne, et puisque $\alpha \in [0,1]$, positive, de plus
$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}} f_Y(x)dx = \alpha + (1-\alpha) = 1,$$
on conclut que g est bien une densité de probabilité.
Soit $\xi \sim \mathrm{Ber}(\alpha)$, indépendante de (X,Y). Alors $Z = \xi X + (1-\xi)Y$ possède la densité g. En effet, en utilisant l'indépendance de ξ et (X,Y) à la deuxième ligne ci-dessous,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \le x) &= \mathbb{P}(\xi = 1, X \le x) + \mathbb{P}(\xi = 0, Y \le x) \\
&= \mathbb{P}(\xi = 1)\mathbb{P}(X \le x) + \mathbb{P}(\xi = 0)\mathbb{P}(Y \le x) \\
&= \alpha F_X(x) + (1-\alpha) F_Y(x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} (\alpha f_X(x) + (1-\alpha) f_Y(x))dx
\end{aligned}$$

Exercice 8.

Soit X de densité f, et $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ sont supposés tels que
$$\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = 1$$
On suppose que g est un C^1-difféomorphisme croissant de (α, β) sur $(g(\alpha), g(\beta))$.

1. Montrer que $g(X)$ a pour densité $\frac{f(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))} \mathbf{1}_{\{x \in (g(\alpha), g(\beta))\}}$.
2. Quelle est la densité de la variable $aX + b$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ sont fixés ?

3. Soit $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la densité de $Z = \exp(Y)$?

Solution

1. Posons $T = g(X)$. Pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, on a
$$\mathbb{E}[h(T)] = \mathbb{E}[h(g(X))] = \int_{\alpha}^{\beta} h(g(x)) f(x) dx$$

En effectuant le changement de variables $t = g(x)$ il vient

$$\mathbb{E}[h(T)] = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} \frac{h(t)f(g^{-1}(t))}{g'(g^{-1}(t))}dt.$$

Comme ceci est valable pour tout fonction h mesurable positive, on conclut que T possède la densité souhaitée sur $(g(\alpha), g(\beta))$

2. Ici $g : x \to ax + b$, $g^{-1} : x \to \frac{x-b}{a}$, $g'(x) = a$ pour tout x et dans ce cas la densité recherchée s'exprime donc

$$\frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \mathbf{1}_{(a\alpha+b, a\beta+b)}(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Quitte à prendre $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$, on retrouve le résultat de l'exercice 2.

3. Ici $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$, $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2), y \in \mathbb{R}$, et $g : x \to \exp(x)$, $g^{-1} : y \to \ln(y)$ et $g'(g^{-1}(x)) = x$. On obtient donc que la densité de Z est

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln(x)^2}{2}\right) \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

1.3 Lois usuelles, calculs de loi

Exercice 9.

(Fonctions de répartition et fonctions caractéristiques de lois usuelles)

Attention : dans le cas d'une variable continue, quand on calcule Φ_X on %doit intégrer sur $\mathbb{R}$ une fonction complexe. Trois méthodes sont envisageables.
Parfois on peut intégrer séparément partie réelle et partie imaginaire.
Parfois il est utile de se servir de la formule de Cauchy. En particulier, cette formule assure que si f est une fonction *holomorphe*, si $\mathcal{C}$ est un contour fermé "raisonnable" (en particulier tout cercle ou polygone régulier), et enfin si $\mathring{\mathcal{C}}$ désigne l'ensemble des points se trouvant à l'intérieur de ce contour, alors

$$\forall a \in \mathring{\mathcal{C}}, \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z.$$

Attention : cette formule montre bien que l'on ne peut pas traiter l'intégrale d'une fonction complexe en faisant "comme si" i était réel (!) La *méthode des résidus* est en outre une conséquence directe de la formule de Cauchy.
Enfin, on peut utiliser le prolongement analytique (voir l'exemple de la fonction Γ).

1. Exprimer le plus simplement F_X dans les cas suivants (on pourra se contenter de tracer l'allure du graphe de la fonction de répartition lorsque celle-ci ne possède pas d'expression simple).

   a. $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1], X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$,
   b. $\lambda > 0, X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$,
   c. $a > 0, X \sim \mathrm{Unif}[-a,a]$,
   d. $\lambda > 0, X \sim \mathbf{exp}(\lambda)$,

e. $\lambda > 0, s \in \mathbb{N}^*$, $X \sim \Gamma(\lambda, s)$ (on rappelle que la densité f_X de $X \sim \Gamma(\lambda, s)$ est telle que $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\lambda^s x^{s-1}\exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x), x \in \mathbb{R}$),

f. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$,

g. $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

h. $a > 0, X \sim$ Cauchy(a) (on rappelle que la densité f_X de la loi de Cauchy de paramètre a est telle que $f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}, x \in \mathbb{R}$).

i. (*) $X \sim$ stable$(1/2)$ (cette loi a pour densité $\sqrt{2\pi x^{-3}}\exp(-1/2x)\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$.)

2. Lesquelles parmi ces variables possèdent une densité ?

3. Exprimer le plus simplement Φ_X pour les 7 premières variables de la première question ci-dessus. En déduire, ou trouver par un calcul direct, $E[X]$, et $\mathrm{Var}[X]$.

Solution

— Binômiale Il s'agit d'une variable discrète à valeurs dans $[|0,n|]$, (elle ne possède donc pas de densité), et telle que

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k},\ 0 \le k \le n$$

On a

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{x \ge k\}} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}, x \in \mathbb{R}.$$

X a même loi que $\sum_{j=1}^n \xi_j$ où les $(\xi_j, 0 \le j \le n)$ i.i.d suivant la loi Ber(p), de sorte que

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)] = \Phi_{\xi_1}(t)^n = (p\exp(it) + (1-p))^n,\ t \in \mathbb{R}$$

On a enfin, toujours gr^ace à l'écriture de X comme somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p,

$$\mathbb{E}[X] = np, \qquad \mathrm{Var}[X] = np(1-p)$$

— Poisson Il s'agit d'une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ (elle ne possède donc pas de densité) et telle que

$$\mathbb{P}(X=k) = \lambda^k \frac{\exp(-\lambda)}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

On a

$$F_X(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{x \ge k\}} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}, x \in \mathbb{R}$$

et

$$\Phi_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \exp(itk)\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda\exp(it) - 1), t \in \mathbb{R}$$

On a par un calcul direct

$$\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}[X] = \lambda.$$

— Uniforme continue symétrique
Il s'agit de la loi de densité $\frac{1}{2a}\mathbf{1}_{[-a,a]}$. On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -a \\ \frac{1}{2a}(x+a) & \text{si } x \in [-a, a] \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(ta)}{ta} & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

On a par un calcul direct

$$\mathbb{E}[X] = 0, \mathrm{Var}[X] = \frac{a^2}{3}$$

— Exponentielle
Il s'agit de la loi de densité $x \to \lambda \exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$. On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, t\ in\mathbb{R}$$

On a enfin par un calcul direct (i.p.p)

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

— Gamma
La densité est rappelée en énoncé. La fonction de répartition n'admet pas en général de forme plus simple que $\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$. On a de plus

$$\Phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^s, t \in \mathbb{R}$$

Quitte à calculer la dérivée première et seconde en 0 de Φ_X on trouve

$$\mathbb{E}[X] = \frac{s}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{s}{\lambda^2}.$$

— Gaussienne centrée réduite
Il s'agit de la loi de densité $f_X : x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$, la fonction F_X n'a pas de forme plus simple que $\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$, et

$$\Phi_X(t) = \exp(-t^2/2),\ t \in \mathbb{R}$$

On a (soit par calcul direct, soit en dérivant Φ_X)

$$\mathbb{E}[X] = 0, \quad \mathrm{Var}[X] = 1$$

— Gaussienne
Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a $X = \mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et X a pour densité

$$f_X : x \to \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right).$$

la fonction F_X n'a pas de forme plus simple que $\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$ et

$$\Phi_X(t) = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), t \in \mathbb{R}.$$

Puisque $X = \mu + \sigma Z$ on trouve que

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad \mathrm{Var}[X] = \sigma^2.$$

— Cauchy
La densité est rappelée dans l'énoncé, on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right),$$

et

$$\Phi_X(t) = \exp(-a|t|), t \in \mathbb{R}.$$

— Stable (1/2)
La loi stable(1/2) a la densité rappelée en énoncé (la fonction F_X n'a pas de forme plus simple que $\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$), sa fonction caractéristique est donnée par

$$\Phi_X(t) = \exp(-\sqrt{|t|}(1 + \mathrm{sgn}(t)i),\ t \in \mathbb{R}.$$

et on note que $x \to x f_X(x)$ n'est pas intégrable (donc $\mathbb{E}[X] = +\infty$, $\mathrm{Var}[X] = +\infty$).

Exercice 10.

Pour des valeurs de t que l'on précisera, calculer la transformée de Laplace $L(t) := \mathbb{E}[\exp(-tX)]$ et la fonction génératrice des moments $G(u) := \mathbb{E}[u^X]$ de la variable X dans les cas suivants.

1. $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, où $p \in [0,1]$,
2. $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, où $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$,
3. $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, où $p \in [0,1]$,
4. $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, où $\lambda > 0$,

5. $X = Y_1 + ... + Y_n$, où les $Y_i, 1 \leq i \leq n$ sont des variables indépendantes, et $Y_i \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_i)$, avec $\lambda_i > 0$.

Solution

1. $G(u) = 1 - p + pu, u \in \mathbb{R}$, $L(t) = (1-p) + p\exp(-t) = G(\exp(-t)), t \in \mathbb{R}$.
2. $G(u) = (1 - p + pu)^n, u \in \mathbb{R}$, $L(t) = G(\exp(-t)), t \in \mathbb{R}$
3. $G(u) = \frac{up}{1-u(1-p)}, |u| < \frac{1}{1-p}$, et $L(t) = G(\exp(-t)), t > \ln(1-p)$.
4. $G(u) = \exp(\lambda(u-1)), u \in \mathbb{R}$, et $L(t) = G(\exp(-t)), t \in \mathbb{R}$

5. $G(u) = \exp(\Lambda(u-1)), u \in \mathbb{R}$ où $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $L(t) = G(\exp(-t)), t \in \mathbb{R}$

Exercice 11.

Soit X une v.a.r. de densité f. Quelle est la densité de X^2 ? Qu'obtient-on dans le cas où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$?

Solution

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne positive. et $Y = X^2$. On a, en effectuant le changement de variables $u = x^2$ à la quatrième ligne ci-dessous,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(Y^2)] &= \mathbb{E}[\phi(X^2)] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x^2) f(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_-} \phi(x^2) f(x) dx + \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x^2) f(x) dx \\
&= \int_0^\infty \phi(u) f(-\sqrt{u}) \frac{du}{2\sqrt{u}} + \int_0^\infty \phi(u) f(\sqrt{u}) \frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&= \int_0^\infty \phi(u) \frac{f(-\sqrt{u}) + f(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} du
\end{aligned}$$

Comme l'égalité ci-dessus est valable pour toute $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne positive, on conclut que Y possède la densité

$$u \to f_Y(u) = \frac{f(-\sqrt{u}) + f(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} \mathbf{1}_{\{u>0\}}.$$

Dans le cas où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on obtient

$$f_Y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left(-\frac{u}{2}\right)}{\sqrt{u}} \mathbf{1}_{\{u>0\}},$$

de sorte que $Y \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.

Exercice 12.

Soit $X \sim \exp(1)$. Calculer la densité des variables suivantes :

1. $Y = aX + b$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Qu'observe-t-on dans le cas où $b = 0$?
2. $Z = X^2$.
3. $U = \exp(-X)$.

Solution

1. On a d'après l'exercice 2

$$f_Y(u) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{u-b}{a}\right) \mathbf{1}_{\{u \geq 0\}}, u \in \mathbb{R}$$

   Lorsque $b = 0$, on constate que $Y \sim \exp\left(\frac{1}{a}\right)$
2. D'après l'exercice précédent

$$f_Z(u) = \frac{\exp(-\sqrt{u})}{\sqrt{u}} \mathbf{1}_{\{u>0\}}, u \in \mathbb{R}.$$

3. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on a, en effectuant le changement de variables $u = \exp(-x)$ à la troisième ligne ci-dessous

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(U)] &= \mathbb{E}[\phi(\exp(-X)] \\
&= \int_0^\infty \phi(\exp(-x)) \exp(-x) dx \\
&= \int_0^1 \phi(u) du,
\end{aligned}$$

et, comme cette égalité est valable pour tout $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on conclut que $U \sim \mathrm{Unif}[0, 1]$.

Exercice 13.

Trouver la loi de $\arcsin(X)$ lorsque

1. $X \sim \mathrm{Unif}[0, 1]$,
2. $X \sim \mathrm{Unif}[-1, 1]$.

Solution

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on a, en effectuant le changement de variables $u = \arcsin(x)$ à la deuxième ligne ci-dessous

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(\arcsin(X))] &= \int_0^1 \phi(\arcsin(x)) dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \phi(u) \cos(u) du.
\end{aligned}$$

On conclut que $Y = \arcsin(X)$ possède la densité $u \to f_Y(u) = \cos(u)\mathbf{1}_{[0,\pi/2]}(u)$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on a, en effectuant le changement de variables $u = \arcsin(x)$ à la deuxième ligne ci-dessous

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(\arcsin(X))] &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi(\arcsin(x)) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi(u) \cos(u) du.
\end{aligned}$$

On conclut que $Y = \arcsin(X)$ possède la densité $u \to f_Y(u) = \frac{\cos(u)}{2}\mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}(u)$.

Exercice 14.

On souhaite peindre un mur (infini !) en utilisant un arroseur automatique qui effectue des demi-révolutions successives. Pour simplifier le modèle, on représentera le mur par une droite verticale Δ, et l'arroseur par une source ponctuelle O située à 1 mètre du mur, et émettant en tout instant t de façon parfaitement rectiligne dans la direction $\vec{u}(t)$. On note M la projection orthogonale de O sur Δ et $\theta(t)$ l'angle entre $O\vec{u}(t)$ et $\vec{OM}$. L'intersection de $O\vec{u}$ avec Δ est notée $H(\theta)$.

On suppose en outre que lors d'une demi-révolution, $\theta(t)$ parcourt exactement l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$.

On fait l'hypothèse que la demi-révolution s'effectue à vitesse angulaire constante, et on se demande quelle sera la répartition de l'épaisseur de la couche de peinture le long de Δ après un nombre entier de demi-révolutions.

1. Justifier qu'une particule de peinture choisie uniformément au hasard parmi toutes les particules est envoyée suivant un angle $\theta \sim \text{Unif}(-\pi/2, \pi/2)$. Une telle particule se pose alors en $H(\theta)$, On note $h(\theta)$ l'ordonnée de $H(\theta)$ (c'est également la distance algébrique entre O et H).
2. Exprimer $h(\theta)$ en fonction de θ. Quelle est la loi de $h(\theta)$? Que pouvez-vous en déduire sur la distribution de l'épaisseur de la couche de peinture le long du mur ?
3. A posteriori, quelle critique peut-on formuler sur le modèle ?

Solution

1. La vitesse angulaire étant constante, et le nombre de révolutions étant entier, aucune direction dans $]-\pi/2, \pi/2[$ n'est privilégiée. Plus précisément, si $-\pi/2 < \theta_0 < \theta_0 + \theta_1 < \pi/2$, le nombre de particules envoyées lors des n révolutions dans un secteur angulaire $(\theta_0, \theta_0 + \theta_1)$ ne dépend pas de θ_0 et est proportionnel à θ_1. Ainsi, lorsqu'on choisit une des particules de peinture envoyées uniformément au hasard, la probabilité qu'elle ait été envoyée dans ce secteur angulaire est proportionnelle à θ_1,, elle vaut donc $\frac{2}{\pi}\theta_1$ (en effet la probabilité est 1 pour $\theta_0 = -\pi/2, \theta_1 = \pi$. Toujours pour $-\pi/2 < \theta_0 < \theta_0 + \theta_1 < \pi/2$, $\frac{1}{\pi}\theta_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} \frac{1}{\pi} dx$, et comme ceci est valable pour tous $-\pi/2 < \theta_0 < \theta_0 + \theta_1 < \pi/2$, cela caractérise la loi de l'angle, et on déduit que celui-ci suit bien une loi Unif$]-\pi/2, \pi/2[$.
2. On a $h(\theta) = \tan(\theta)$, et donc si on pose $X = h(\theta)$ et si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est borélienne on a (on effectue le changement de variables $x = \tan(\theta)$ à la troisième ligne ci-dessous)
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(X)] &= \mathbb{E}[\phi(\tan(\theta))] \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\phi(\tan(\theta))d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\phi(x)}{1+x^2}dx\end{aligned}$$
de sorte que X a pour densité $f_X : x \to \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
3. On a $\mathbb{E}[|X|] = +\infty$, autrement dit, la distance moyenne à l'axe des abcisses à laquelle une particule choisie uniformément atterit est ... infinie.

Exercice 15.

Soit $X \sim$ Cauchy (de paramètre 1).
Quelle est la loi de

1. $Y := \frac{1}{X}$?

2. $Z := \frac{1}{1+X^2}$?

Solution

1. Comme $\mathbb{P}(X=0)=0$, la variable Y est bien définie.
   Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est borélienne on a (on effectue le changement de variables $y = \frac{1}{x}$ à la toisième ligne ci-dessous)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(Y)] &= \mathbb{E}[\phi(\frac{1}{X})] \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\phi(1/x)}{\pi(1+x^2)} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\phi(1/x)}{\pi(1+x^2)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\phi(y)}{\pi y^2(1+\frac{1}{y^2})} dy + \int_{0}^{\infty} \frac{\phi(y)}{\pi y^2(1+\frac{1}{y^2})} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(y)}{\pi(1+y^2)} dy
\end{aligned}$$

   de sorte que $Y \sim \text{Cauchy}(1)$.
2. Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est borélienne on a (on effectue le changement de variables $z = \frac{1}{1+x^2}$ à la toisième ligne ci-dessous)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(Z)] &= \mathbb{E}[\phi(\frac{1}{1+X^2})] \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\phi(\frac{1}{1+x^2})}{\pi(1+x^2)} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\phi(\frac{1}{1+x^2})}{\pi(1+x^2)} dx \\
&= 2\int_{0}^{1} \frac{z\phi(z)}{\pi} \frac{1}{2z^2\sqrt{\frac{1}{z}-1}} \\
&= \int_{0}^{1} \frac{\phi(z)}{\pi\sqrt{z(1-z)}}
\end{aligned}$$

   de sorte que $Z \sim \text{Beta}(1/2, 1/2)$.

Exercice 16.

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$(x^{-1} - x^{-3}) \exp(-x^2/2) \leq \sqrt{2\pi}\mathbb{P}(Z > x) \leq x^{-1} \exp(-x^2/2).$$

Indication : on pourra penser à utiliser le changement de variable $y = x + z$ pour obtenir l'inégalité de droite, et on commencera par calculer la dérivée de $(x^{-1} - x^{-3}) \exp(-x^2/2)$ pour obtenir celle de gauche.

Solution

On a pour $x > 0$, en effectuant le changement de variables $y = x + z$ suggéré dans l'énoncé

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\mathbb{P}(Z > x) &= \int_x^\infty \exp(-y^2/2)dy \\
&= \int_0^\infty \exp(-x^2/2 - xz - z^2/2)\mathrm{d}z \\
&= \exp(-x^2/2)\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-zx - z^2/2)\mathrm{d}z \\
&\leq \exp(-x^2/2)\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-zx)\mathrm{d}z = x^{-1}\exp(-x^2/2)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $g : x \to (x^{-1} - x^{-3})(\exp(-x^2/2)$, on a pour $x > 0$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} - x(x^{-1} - x^{-3})\right)\exp(-x^2/2) \\
&= \left(-1 - \frac{3}{x^4}\right)\exp(-x^2/2)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $h : x \to \sqrt{2\pi}\mathbb{P}(Z > x)$, on a $h'(x) = -\exp(-x^2/2)$ de sorte que $g'(x) < h'(x)$, pour tout $x > 0$.
Comme $g(x) \to -\infty$ lorsque $x \searrow 0$, alors que $h(0) = \sqrt{\pi/2}$, on déduit, comme souhaité, que

$$g(x) \leq h(x), \ \forall x > 0$$

Exercice 17 (Calcul d'une loi conditionnelle discrète)**.**

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables de Poisson, indépendantes, de paramètres respectifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

1. Déterminer la loi de $Y := \sum_{k=1}^n X_k$.
2. Pour $r \in \mathbb{N}$, que vaut la loi conditionnelle de $(X_1, ..., X_n)$ sachant $Y = r$?

Solution

1. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, en utilisant l'indépendance des $(X_k, 1 \leq k \leq n)$ à la première ligne ci-dessous,

$$\begin{aligned}
\Phi_Y(t) &= \prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(t) \\
&= \prod_{k=1}^n \exp(\lambda_k(\exp(it) - 1)) \\
&= \exp(\Lambda(\exp(it) - 1)
\end{aligned}$$

où $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$. La fonction caractéristique caractérisant la loi, on déduit que $Y \sim$ Poisson(Λ). 1. Soient $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$. Si $\sum_{k=1}^n \ell_k \neq r$ on a bien sûr $\{(X_1, ..., X_n) = (\ell_1, ...\ell_n)\} \cap \{Y = r\} = \emptyset$ donc

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, \dots, X_n) = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \mid Y = r) = 0$$

Si $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$ sont tels que $\sum_{k=1}^{n} \ell_k = n$, on a $\{Y = r\} \supset \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)\}$ et donc en utilisant l'indépendance des $(X_k)_{1 k n} $ à la deuxième ligne ci-dessous

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_1, X_2, \ldots, X_n) = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) \mid Y = r) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = \ell_1, X_2 = \ell_2, \ldots, X_n = \ell_r)}{\mathbb{P}(Y = r)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{\ell_k} \exp(-\lambda_k)}{\ell_k!}}{\frac{\exp(-\Lambda)\Lambda^r}{r!}} \\
&= \binom{r}{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{\Lambda}\right)^{\ell_k},
\end{aligned}$$

avec $\binom{r}{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n} = \frac{r!}{\ell_1! \ell_2! \ldots \ell_n!}$ le coefficient multinômial de $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ parmi r.
On conclut que la loi conditionnelle de $(X_1, \ldots, X_n)$ sachant $\{Y = r\}$ est une loi mutinômiale de paramètres $\left(r, \frac{\lambda_1}{\Lambda}, \frac{\lambda_2}{\Lambda}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\Lambda}\right)$.

2 Lois jointes

2.1 Exemples divers

Exercice 18.

On suppose que le nombre X d'oeufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la probabilité qu'un oeuf meurt sans éclore est, indépendamment des autres oeufs, égale à $1-p$, où $p \in]0,1[$.

1. Démontrer que le nombre Y d'oeufs qui arrivent à éclosion suit une loi de Poisson de paramètre λp.
2. Quelle est la loi jointe de (Y, Z), où $Z = X - Y$ est le nombre d'oeufs morts avant éclosion ?

Solution

Quitte à introduire des variables $(\xi_i, i \geq 1)$ indépendantes de X, et i.i.d suivant la loi de Bernoulli de paramètre p ($\xi_i = 1$ si le i-ième oeuf arrive à éclosion),

$$Y = \sum_{k=1}^{X} \xi_i, \quad Z = \sum_{k=1}^{X} (1-\xi_i),$$

où par convention $\sum_{k=1}^{0} \cdots = 0$.
On a donc pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant l'indépendance de X et des $(\xi_i, i \geq 1)$ à la quatrième ligne ci-dessous, puis le fait que les $(\xi_i, i \geq 1)$ sont i.i.d suivant une loi $\mathrm{Ber}(p)$ à la suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi_{(Y,Z)}(s,t) &= \mathbb{E}[\exp(isY + itZ)] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(is\sum_{k=1}^{X}\xi_k + it\sum_{k=1}^{X}(1-\xi_k)\right)\right] \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X=j\}} \exp\left(is\sum_{k=1}^{j}\xi_k + it\sum_{k=1}^{j}(1-\xi_k)\right)\right] \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^j \exp(-\lambda)}{j!} \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{j} \exp(is\xi_k + it(1-\xi_k))\right] \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^j \exp(-\lambda)}{j!} \Big(p\exp(is) + (1-p)\exp(it)\Big)^j \\
&= \exp(-\lambda + \lambda p \exp(is) + \lambda(1-p)\exp(it)) \\
&= \exp(\lambda p(\exp(is)-1)) \exp(\lambda(1-p)(\exp(it)-1))
\end{aligned}$$

On déduit que (Y, Z) est un couple de variables de Poisson indépendantes, de paramètres respectifs $\lambda p, \lambda(1-p)$.

Exercice 19.

(Somme d'exponentielles et χ^2)
Soit $\lambda > 0$ et $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables i.i.d, $\sim \exp(\lambda)$.

1. Calculer $\mathbb{E}[\exp(-tY_1)]$ pour $t \geq 0$.

2. Calculer $\mathbb{E}\left[\exp(-t\sum_{i=1}^n)Y_i\right]$ pour $t \geq 0$.
3. Montrer que la densité de la variable $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ est proportionnelle à $x^{n-1}\exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{x\geq 0}$. En déduire la valeur de cette densité.
4. Soient $X_n, n \geq 1$ des variables i.i.d, $\sim \mathcal{N}(0,1)$. On pose $\chi^2(n) := \sum_{i=1}^n X_i^2$, $Z := X_1X_2 + X_3X_4$. \ Calculer $\Phi_{\chi^2(n)}, \Phi_Z$. Pouvez-vous deviner la distribution de Z (on pourra utiliser un résultat d'un exercice précédent) ?

Solution

1. $\mathbb{E}[\exp(-tY_1)] = \frac{\lambda}{\lambda+t}, t \geq 0$
2. $\mathbb{E}\left[\exp(-t\sum_{i=1}^n)Y_i\right] = \left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^n,\ t \geq 0$.
3. On montre cette assertion par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. L'assertion est évidente pour $n = 1$ (avec facteur de proportionalité $c_1 := \lambda$). Supposons la vraie au rang n et posons $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} Y_i$. Comme Y_{n+1} est indépendante de Z_n le vecteur (Z_n, Y_{n+1}) possède la densité jointe sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_{(Z_n,Y_{n+1})}(z,y) = f_{Z_n}(z)f_{Y_{n+1}}(y) = c_n\lambda z^{n-1}\exp(-\lambda z - \lambda y)\mathbf{1}_{\{z\geq 0, y\geq 0\}}, (z,y) \in \mathbb{R}^2$$

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne positive

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(Z_{n+1})] &= \mathbb{E}[\phi(Z_n + Y_{n+1})] \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \phi(z+y)f_{Z_n}(z)f_{Y_{n+1}}(y)\mathrm{d}z dy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \phi(z+y)c_n\lambda z^{n-1}\exp(-\lambda z - \lambda y)\mathrm{d}z dy \\
&= \int_{u\in\mathbb{R}_+, u\geq v} \phi(u)c_n\lambda v^{n-1}\exp(-\lambda u)dudv
\end{aligned}$$

où à la dernière ligne on a utilisé le changement de variable $(u,v) = (z+y, z)$ de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2 : v \leq u\}$, de jacobien 1. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(Z_{n+1})] &= \int_{u\in\mathbb{R}_+} \lambda c_n\phi(u)\exp(-\lambda u)\int_{v=0}^u v^{n-1}dvdu \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(u)\lambda\frac{c_n}{n}u^n\exp(-\lambda u)du
\end{aligned}$$

et on obtient la conclusion souhaitée, avec $c_{n+1} = \frac{\lambda c_n}{n}$.
On déduit par une récurrence immédiate que $c_n = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}, n \in \mathbb{N}^*$.

1. On a vu (exercice 12) que $X_i^2 \sim \text{Gamma}(1/2, 1/2)$, et par un raisonnement similaire à celui de la question précédente, on obtient que $\chi^2(n) \sim \text{Gamma}(n/2, 1/2)$. On peut aussi raisonner directement avec les fonctions caractéristiques, pour obtenir que

$$\Phi_{\chi^2(n)}(t) = \Phi_{X_1^2}(t)^n = \left(\frac{1/2}{1/2 - it}\right)^{n/2}.$$

Par ailleurs pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_1X_2}(t) = \mathbb{E}[\exp(itX_1X_2)] &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \exp(itx_1x_2 - x_1^2/2 - x_2^2/2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_1^2/2) \int_{\mathbb{R}} dx_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(itx_1x_2 - x_2^2/2) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_1^2/2) \Phi_{X_2}(tx_1) dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_1^2/2) \exp(-t^2x_1^2/2) dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2(1+t^2)}{2}\right) dx_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}
\end{aligned}$$

et donc les $(X_i, i \geq 1)$ étant i.i.d, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_Z(t) = \Phi_{X_1X_2}(t)\Phi_{X_3X_4}(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Il s'agit de la fonction caractéristique d'une variable "exponentielle symétrique", de densité $x \to \frac{1}{2}\exp(-|x|)$ (c'est d'ailleurs une manière d'effectuer le calcul de la fonction caractéristique d'une Cauchy(1)). On peut le vérifier directement. Soit $\xi \sim \text{Ber}(1/2)$, et (X, Y) i.i.d suivant une loi exp(1). La variable $T = \xi X - (1-\xi)Y$ a une loi exponentielle symétrique. De plus pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_T(t) &= \mathbb{E}[\exp(it\xi X - it(1-\xi)Y)] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}[\exp(itX)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\exp(-itY)] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-it} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+it} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(1+it) + \frac{1}{2}(1-it)}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}$$

comme souhaité.

Exercice 20.

Soit $Z = (X, Y)$, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que Z admet une densité f définie par

$$f(x,y) = \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{x \geq |y|\}},$$

où $\sigma > 0$.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer les lois de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la loi de $(X - Y, X + Y)$ et montrer que $X - Y$ et $X + Y$ sont indépendantes.

Solution

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ est continue donc borélienne Par symétrie des rôles de x et y,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{y\geq|x|\}}.$$

Par parité de $x \to \exp(-\frac{x^2}{2})$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{x\leq-|y|\}}.$$

A nouveau par symétrie des rôles de x et y

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{y\leq-|x|\}}.$$

Enfin, la réunion des 4 ensembles $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y|\}, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -|y|\}, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -|x|\}$ est $\mathbb{R}^2$ tout entier. L'intersection des 2 premiers est $\{(x,y) : x = y \geq 0\}$, de mesure de Lebesgue nulle, et des considérations similaires permettent d'assurer que c'est également le cas pour l'intersection de n'importe quelle paire parmi ces 4 ensembles. On conclut que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) rdrd\theta \\
&= \left[\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right)\right]_0^{\infty} = 1,
\end{aligned}$$

comme souhaité. 1. Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est borélienne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(X)] &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x) f(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x)\frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)\int_{-x}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) dydx
\end{aligned}$$

On déduit que X possède la densité f_X telle que

$$f_X(x) = \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)\int_{-x}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) dy\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$$

Remarque : Avec $\mathrm{erf}(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u^2\right) du$, on peut réexprimer

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) dy = \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

de sorte que

$$f_X(x) = \frac{4}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sigma}\right) \mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$$

Toujours pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(Y)] &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(y) f(x,y)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) \int_{|y|}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) dxdy\end{aligned}$$

On déduit que Y possède la densité f_Y telle que

$$f_Y(y) = \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) \int_{|y|}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx$$

Remarque : On a

$$\int_{|y|}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u^2\right) du = \frac{1}{2}(1-\mathrm{erf}(|y|)) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(|y|)$$

et donc

$$\int_{|y|}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{|y|}{\sigma}\right),$$

de sorte que

$$f_Y(y) = \frac{2}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) \mathrm{erfc}\left(\frac{|y|}{\sigma}\right).$$

Enfin puisque par exemple $\mathbb{P}(X \geq Y \geq 1) = \mathbb{P}(Y \geq 1)$ on a $\mathbb{P}(X \geq 1, Y \geq 1) \neq \mathbb{P}(X \geq 1)\mathbb{P}(Y \geq 1)$ et les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

1. Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi(X-Y, X+Y)] &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x-y, x+y) f(x,y)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x-y, y+y) \frac{4}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{x \geq |y|\}}\end{aligned}$$

Notons que $G : \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y|\} \to \{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2\} \\ (x,y) \to (u,v) = (x+y, x-y) \end{cases}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (d'inverse $G^{-1} : (u,v) \to (x,y)$ avec $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$), de jacobien 2. Par la formule de changement de variables, et en remarquant que $u^2 + v^2 = 2(x^2 + y^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi(X-Y, X+Y)] &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \psi(u,v) \frac{2}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}\right) dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(u,v) f_U(u) f_V(v) dudv\end{aligned}$$

avec

$$f_U(u) = f_V(u) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{u \geq 0\}},$$

qui est la densité de $|Z|$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
On conclut que $(X+Y, X-Y)$ sont i.i.d. suivant la loi de $|Z|$.

Exercice 21.

1. Soit $X_1, ..., X_n$ des variables i.i.d, $\sim \mathcal{N}(0,1)$, et $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ (où les $\alpha_i, i = 1, ..., n$ sont de réels fixés). Quelle est la loi de Z ?
2. Soit $(X_1, ..., X_n) \sim \mathcal{N}(0, A)$. Quelle est la loi de $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$?
3. Soit $(X_1, ..., X_n) \sim \mathcal{N}(0, A)$. Quelle est la loi de (Z_1, Z_2), où, pour des réels $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, i = 1, ..., n$ fixés,
$$Z_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,1} X_i, Z_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,2} X_i.$$
4. Généraliser la question précédente en exprimant la loi de
$$(Z_1, ..., Z_n) = (X_1, ..., X_n)P,$$
où P est une matrice $n \times n$.
5. Soient X, Y deux variables indépendantes, $\sim$ Unif$[0,1]$. Quelle est la loi de $S = X + Y$?
6. Soient X, Y des variables indépendantes de loi respectives $\Gamma(a,c), \Gamma(b,c)$, où $a, b, c > 0$. On pose $S = X + Y, T = \frac{X}{X+Y}$ Quelle est la loi du couple (S,T) ?
7. Soient X, Y deux variables indépendantes, $\sim$ Unif$[0,1]$. On pose $U = \sqrt{-2\log(X)} \cdot \cos(2\pi Y), V = \sqrt{-2\log(X)} \cdot \sin(2\pi Y)$. Quelle est la loi du couple (X,Y) ?
8. Soient X, Y deux variables indépendantes, $\sim \mathcal{N}(0,1)$. On pose $T = \frac{Y}{X}$. Quelle est la loi de T?
9. Soient (X,Y) un couple de variables indépendantes, $\sim \mathcal{N}(0,1)$. On pose $U = X, V = X^2 + Y^2$. Quelle est la loi de (U,V) ?
10. Soit X de densité $\exp(-x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. On pose $U = [X]$ et $V = X - [X]$, la partie entière, resp. la partie décimale de X. Quelle est la loi de (U,V) ?

Solution

1. En utilisant d'abord l'indépendance des $(X_k, 1 \le k \le n)$ à la deuxième ligne ci-dessous, puis le fait que $\Phi_{X_k}(u) = \exp(-u^2/2)$ à la suivante, on obtient que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi_Z(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(it\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k\right)\right] \\ &= \prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(t\alpha_k) \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\right)\end{aligned}$$

et on déduit que $Z \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{k=1}^n \alpha_k^2\right)$. 1. Lorsque X est un vecteur gaussien, toute combinaison linéaire des coordonnées de X suit une loi gaussienne. Comme les coordonnées de X sont ici centrées, il en va de même pour Z. Par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \alpha_k \alpha_\ell \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) \\ &= \alpha^T A \alpha.\end{aligned}$$

Finalement $Z \sim \mathcal{N}(0, \alpha^T A \alpha)$, autrement dit
$$\Phi_Z(t) = \exp\left(-t^2 \frac{\alpha^T A \alpha}{2}\right).$$

1. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$uZ_1 + vZ_2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,1} + v\alpha_{i,2}) X_i,$$

et d'après la question précédente, ceci est distribué suivant une loi $\mathcal{N}(0, (u\alpha_1 + v\alpha_2)^T A (u\alpha_1 + v\alpha_2))$, et donc

$$\Phi_{uZ_1+vZ_2}(1) = \mathbb{E}[\exp(iuZ_1+ivZ_2)] = \Phi_{(Z_1,Z_2)}(u,v) = \exp\left(-\frac{(u\alpha_1 + v\alpha_2)^T A (u\alpha_1 + v\alpha_2)}{2}\right).$$

Reste à observer que $u\alpha_1 + v\alpha_2$ est le produit d'une matrice, disons P à n lignes et deux colonnes, la première ayant les coordonnées de α_1 la deuxième celle de α_2, par le vecteur $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. On conclut que $Z \sim \mathcal{N}(0, P^T A P)$

1. La matrice P joue le même rôle que la matrice de la question précédent (à ceci près qu'elle possède désormais n lignes et n colonnes). Par le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve que $Z \sim \mathcal{N}(0, P^T A P)$.

2. Puisque X et Y sont indépendantes et à densité, (X, Y) possède la densité jointe $f_{(X,Y)}$ telle que $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. On a donc pour $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne,

$$\mathbb{E}[\phi(X + Y)] = \int_{[0,1]^2} \phi(x + y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

On fait le changement de variables $\begin{cases} [0,1]^2 \to \{(s,t) \in [0,2] \times [0,1] : t + 1 \geq s \geq t\} \\ (x,y) \to (s = x + y, t = y) \end{cases}$, de jacobien 1, et on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(X + Y)] &= \int_0^2 ds\phi(s) \int_{\max(s-1,0)}^{\min(s,1)} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \phi(s) \min(s, 1 - s) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

et on déduit que S possède la densité f_S, où

$$f_S(s) = \begin{cases} s \text{ si } 0 \leq s \leq 1 \\ (1 - s) \text{ si } 1 \leq s \leq 2 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. D'après l'énoncé, (X, Y) possède la densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{c^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} y^{b-1} \exp(-c(x + y)) \mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}.$$

Pour $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne on a donc

$$\mathbb{E}[\phi(S, T)] = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \phi\left(x + y, \frac{x}{x + y}\right) \frac{c^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} y^{b-1} \exp(-c(x + y)) dxdy$$

On effectue alors le changement de variables via le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$G : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}_+^* \times (0,1) \\ (x,y) \to \left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) \end{cases}$$

d'inverse

$$G^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times (0,1) \to (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (s,t) \to (st, s(1-t) \end{cases}$$

dont le jacobien est $|J^{-1}| = s$, pour obtenir

$$\mathbb{E}[\phi(S,T)] = \int_{\mathbb{R}_+^*} ds \int_0^1 dt\phi(s,t)\frac{c^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}s^{a+b-1}\exp(-cs)t^{a-1}(1-t)^{b-1}$$

et on conclut que $S \sim \text{Gamma}(a+b,c)$ est indépendant de $T \sim \text{Beta}(a,b)$.

2. L'application

$$\Psi : \begin{cases} [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to (u,v) = \left(\sqrt{-2\ln(x)}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\ln(x)}\sin(2\pi y)\right) \end{cases}$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, composée de $(x,y) \to (r,\theta) = (\sqrt{-2\ln(x)}, 2\pi y)$ et $(r,\theta) \to (u,v) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Le Jacobien de Ψ est $2\pi\exp((u^2+v^2)/2)$ et on déduit que pour ϕ continue bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(U,V)] &= \int_0^1 \int_0^1 dxdy\phi\left(\sqrt{-2\ln(x)}\cos(2\pi y), \sqrt{-2\ln(x)}\sin(2\pi y)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dudv\phi(u,v)\frac{1}{2\pi}\exp(-u^2/2)\exp(-v^2/2),\end{aligned}$$

et finalement que $(U,V) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$.

1. Notons d'abord que $\mathbb{P}(X=0) = 0$ de sorte que Z est définie p.s. Par ailleurs $(X,Y) \sim \mathcal{N}(0, Id_2)$ et a la densité correspondante.

On a, pour $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bornée mesurable, gr\^ace au changement de variables de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ dans lui-même, qui à (x,y) associe $(x,z) = (x, \frac{y}{x})$ (et dont l'inverse du jacobien vaut $|x|$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(X,Z)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathbb{R}^*)^2} \phi(x, \frac{y}{x})\exp(-x^2/2 - y^2/2)dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathbb{R}^*)^2} \phi(x,z)|x|\exp\left(-\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right)dx\mathrm{d}z\end{aligned}$$

et donc (X,Z) a densité

$$f_{(X,Z)}(x,z) = \frac{1}{2\pi}|x|\exp\left(-\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right).$$

On en déduit que

$$f_Z(z) = 2\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2\pi}xz^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right)dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2},$$

de sorte que $Z \sim \text{Cauchy}(1)$.

1. Quitte à considérer les $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

$$G : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^* \to \{(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* : v \geq u^2\} \\ (x,y) \to (x, x^2+y^2) \end{cases}, \; H : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x,y) \to (x, x^2+y^2) \end{cases}$$

dont les jacobiens sont tous deux égaux à $2|y| = 2\sqrt{u - v^2}$, on obtient pour $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne (les deux intégrales fournissent des contributions identiques) :

$$\mathbb{E}[\phi(U,V)] = 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \phi(u,v)\frac{\exp\left(-\frac{v}{2}\right)}{4\pi\sqrt{u-v^2}}\mathbf{I}_{\{v\geq u^2\}}dudv$$

et on conclut que (U,V) possède la densité $f_{(U,V)}$ telle que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{\exp\left(-\frac{v}{2}\right)}{2\pi\sqrt{u-v^2}}\mathbf{I}_{\{v\geq u^2\}}.$$

Remarque : On peut recalculer à partir de cette densité les marginales, mais il est évident que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, et on avait vu plus haut que $X^2 + Y^2 \sim \exp(1/2)$.

2. On a pour $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(U,V)] &= \int_{\mathbb{R}_+} \phi([x], x-[x])\exp(-x)dx \\ &= \sum_{n\geq 0}\int_n^{n+1} \phi(n, x-n)\exp(-x)dx \\ &= \sum_{n\geq 0}\int_0^1 \phi(n,v)\exp(-n)\exp(-v)du \end{aligned}$$

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ boréliennes, quitte à considérer $\phi(u,v) = g(u)h(v)$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(U)h(V)] &= \sum_{n\geq 0} g(n)\exp(-1)^n(1-\exp(-1))\int_0^1 h(v)\frac{\exp(-v)}{1-\exp(-1)}du \\ &= \mathbb{E}[g(U)]\mathbb{E}[h(V)] \end{aligned}$$

On conclut que U et V sont indépendantes, avec $U + 1 \sim \text{Geom}(1-\exp(-1))$ et V de densité f_V avec, pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$f_V(v) = \frac{1}{1-\exp(-1)}\exp(-v)\mathbf{1}_{(0,1)}(v).$$

Remarque : La loi de V est celle d'une variable exponentielle de paramètre 1 conditionnée à être plus petite que 1.

Exercice 22.

Soient X_1, X_2 deux variables indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi

Unif$\{1, 2, 3\}$.

On note $U = \min\{X_1, X_2\}$, $V = \max\{X_1, X_2\}$ et enfin $S = U + V$.

1. Déterminer la loi jointe de (U, V) et (V, S).
2. En déduire les lois de U, V, et S. Calculer les lois de UV et VS.
3. Calculer les covariances et les coefficients de corrélation de (U, V) et (V, S).

Solution

1. Par hypothèse, la loi de (X_1, X_2) est uniforme sur $\{1, 2, 3\}^2$, et on déduit, quitte à disjoindre les cas, que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((U, V) = (1, 1)) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 1/9 \\
&\mathbb{P}((U, V) = (1, 2)) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 1) = 2/9 \\
&\mathbb{P}((U, V) = (1, 3)) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 3) + \mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 1) = 2/9 \\
&\mathbb{P}((U, V) = (2, 2)) = \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2) = 1/9 \\
&\mathbb{P}((U, V) = (2, 3)) = \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 3) + \mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2) = 2/9 \\
&\mathbb{P}((U, V) = (3, 3)) = \mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 3) = 1/9
\end{aligned}$$

La même disjonction de cas conduit à la loi de (V, S) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(V = 1, S = 2) = 1/9 \\
&\mathbb{P}(V = 2, S = 3) = 2/9 \\
&\mathbb{P}(V = 3, S = 4) = 2/9 \\
&\mathbb{P}(V = 2, S = 4) = 1/9 \\
&\mathbb{P}(V = 3, S = 5) = 2/9 \\
&\mathbb{P}(V = 3, S = 6) = 1/9
\end{aligned}$$

2. On en déduit (on peut également faire un raisonnement direct)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(U = 1) = 5/9,\ \mathbb{P}(U = 2) = 1/3,\ \mathbb{P}(U = 3) = 1/9 \\
&\mathbb{P}(V = 1) = 1/9,\ \mathbb{P}(V = 2) = 1/3,\ \mathbb{P}(V = 3) = 5/9 \\
&\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}(S = 6) = 1/9,\ \mathbb{P}(S = 3) = \mathbb{P}(S = 5) = 2/9.\ \mathbb{P}(S = 4) = 1/3
\end{aligned}$$

La loi de UV se déduit facilement de la loi jointe de (U, V) calculée à la question précédente

$$\mathbb{P}(UV = 1) = \mathbb{P}(UV = 4) = pp(UV = 9) = 1/9,\ \mathbb{P}(UV = 2) = \mathbb{P}(UV = 3) = \mathbb{P}(UV = 6) = 2/9.$$

De même pour la loi de VS

```
$$\mathbb{P}(VS=2) = \mathbb{P}(VS=8) = \mathbb{P}(VS=18) = 1/9, \ \mathbb{P}(VS=6) = \ma
```

1. On déduit de la question précédente

$$\mathbb{E}[U] = \frac{14}{9},\ \mathbb{E}[V] = \frac{22}{9},\ \mathbb{E}[UV] = 4,\ \mathrm{Cov}(U, V) = \frac{16}{81},$$

et

$$\mathrm{Var}(U) = \frac{38}{81} = \mathrm{Var}(V), \quad \rho(U,V) = \frac{8}{19}.$$

Par ailleurs

$$\mathbb{E}[V] = \frac{22}{9},\ \mathbb{E}[S] = 4,\ \mathbb{E}[VS] = \frac{94}{9},\ \mathrm{Cov}(V,S) = \frac{2}{3}.$$

et

$$\mathrm{Var}(V) = \frac{38}{9}, \mathrm{Var}(S) = \frac{2}{3}, \rho(V,S) \approx 0.397$$

2.2 Le cadre gaussien

Exercice 23.

On considère deux variables indépendantes $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ avec probabilité } p \\ -1 \text{ avec probabilité } 1-p, \end{cases}$$

où $p \in (0,1)$.

1. Quelle est la loi de $Z = \varepsilon Y$
2. Quelle est la loi de $Y + Z$?
3. Le vecteur (Y, Z) est-il un vecteur gaussien ?

Solution

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(\varepsilon)] &= \mathbb{E}[\phi(Y)\mathbf{1}_{\varepsilon=1}] + \mathbb{E}[\phi(-Y)\mathbf{1}_{\varepsilon=-1}] \\
&= p\mathbb{E}[\phi(Y)] + (1-p)\mathbb{E}[\phi(-Y)] \\
&= p\int_{\mathbb{R}} \phi(z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2)\mathrm{d}z + (1-p)\int_{\mathbb{R}} \phi(-z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2)\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variables $u = -z$ pour voir que $\int_{\mathbb{R}} \phi(-z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2)\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \phi(u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)du$. On conclut que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2. On a \$Y+Z = (1+ et donc pour ϕ comme ci-dessus

$$\mathbb{E}[\phi(Y+Z)] = (1-p)\phi(0) + p\int_{\mathbb{R}} \phi(u)\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/8)du.$$

En particulier la loi de $Y+Z$ n'est ni discrète ni à densité, donc pas gaussienne.

3. Non, puisque $Y+Z$ n'est pas gaussienne.

Exercice 24.

Soit (X, Y, Z) le vecteur aléatoire gaussien d'espérance $(1, 1, 0)$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire la fonction caractéristique de (X, Y, Z).

2. Trouver la loi de $2X + Y + Z$, de $4X - 2Y + Z$, enfin de $Y - Z$.
3. Le vecteur (X, Y) admet-il une densité dans $\mathbb{R}^2$. Si oui, laquelle ?
4. Pour $a \in \mathbb{R}$ on définit $u_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ a & -2a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer la loi de $u_a(X - 1, Y - 1, Z)$ en fonction de a.
   Pour quelle valeur de a les deux premières coordonnées de $u_a(X-1, Y-1, Z)$ suivent-ils une loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}^2$?

Solution

Dans les questions 2,3,4 ci-dessous, on fait usage de la Prop 3 du cours : si $V \sim \mathcal{N}(m, K)$ est un vecteur gaussien de dimension d et P est une matrice à p lignes et d colonnes, on a $X \sim \mathcal{N}(Pm, PKP^T)$. Ici $d = 3$, m est le vecteur de coordonnées $(1, 1, 0)$, et K la matrice précisée dans l'énoncé.

1. D'après le cours (Prop 2), pour tout $t \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées (t_1, t_2, t_3),

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \exp(it^T m + PKP^T) \\ &= \exp\left(i(t_1 + t_2) - (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_1t_2 + t_1t_3 + 2t_2t_3)\right)\end{aligned}$$

2. On applique le résultat général avec $P = (2 \;\; 1 \;\; 1)$ puis avec $P = (4 \;\; -2 \;\; 1)$, et enfn avec $P = (0 \;\; 1 \;\; -1)$ pour obtenir

$$2X + Y + Z \sim \mathcal{N}(3, 24), \quad 4X - 2Y + Z \sim \mathcal{N}(2, 26), \quad Y - Z \sim \mathcal{N}(1, 0)$$

   Dans le troisième cas notons que $\mathbb{P}(Y - Z = 1) = 1$, de sorte que $Y - Z$ n'a pas de densité.
3. On a $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$. On a $\det(\Sigma) = 3$, et est $\Sigma^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, et donc ce vecteur possède la densité f sur $\mathbb{R}^2$, où pour $x \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_1, x_2),

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{3}((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - (x_1 - 1)(x_2 - 1))\right)\end{aligned}$$

4. On obtient ici que

$$A\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\sim\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&6a^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right),$$

de sorte qu'on a le résultat souhaité pour $a\in\left\{-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

Exercice 25.

Soit $\rho\in]-1,1[$ et (X,Y) un vecteur gaussien centré de matrice de covariances $M=\begin{pmatrix}1&\rho\\\rho&1\end{pmatrix}$. On notera $\sigma=\sqrt{1-\rho^2}$.

1. Calculer $\det(M)$, M^{-1}, puis exprimer la densité $f_{(X,Y)}$ du vecteur (X,Y).
2. Montrer que

$$g_x(y):=\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2\right).$$

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $y\to g_x(y)$ définit une densité.

3. Si on note Y_x une variable de densité g_x, que pouvez-vous dire sur la loi de Y_x ?

4. Trouver α, β deux réels tels que $(X,\alpha X+\beta Y)$ suit la loi normale centrée réduite.

Remarquer que l'on peut écrire $Y=-\frac{\alpha}{\beta}X+\frac{1}{\beta}(\alpha X+\beta Y)$. Sauriez-vous dire pourquoi cette écriture est intéressante ?

Solution

1. On a $\det(M)=1-\rho^2\neq 0$, $M^{-1}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1&-\rho\\-\rho&1\end{pmatrix}$, et donc $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ possède la densité $f_{(X,Y)}$ où, pour $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}f_{(X,Y)}(x)&=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^T M^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\\&=\frac{1}{2\pi\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2-2\rho xy)\right)\end{aligned}$$

2. $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ donc $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2), x\in\mathbb{R}$. On a donc, pour $y\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}g_x(y)&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)+\frac{1}{2}x^2\right)\\&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(-\frac{1}{2}(\rho^2x^2-2\rho xy+y^2)\right)\right)\\&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(-\frac{1}{2}(y-\rho x)^2\right)\right)\end{aligned}$$

comme souhaité, et donc $Y_x\sim\mathcal{N}(\rho x,1-\rho^2)$.

3. Comme $\begin{pmatrix} X \\ \alpha X+\beta Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ d'après Prop 3 du cours

$$\begin{pmatrix} X \\ \alpha X+\beta Y\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^T\right)$$

et donc

$$\begin{pmatrix} X \\ \alpha X+\beta Y\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha+\rho\beta \\ \rho & \rho\alpha+\beta \end{pmatrix}\right) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\rho\beta \\ \alpha+\rho\beta & \alpha^2+2\rho\alpha\beta+\beta^2 \end{pmatrix}\right)$$

Pour obtenir le résultat souhaité il faut et il suffit que $\begin{cases} \alpha+\rho\beta = 0 \\ \alpha^2+2\rho\alpha\beta+\beta^2 = 1 \end{cases}$,
En remplaçant $\alpha = -\rho\beta$ dans la deuxième équation il vient que nécessairement

$$\rho^2\beta^2 - 2\rho\alpha\beta + \beta^2 = (1-\rho)^2\beta^2 = 1,$$

et on obtient que $(\alpha,\beta) \in \left\{\left(\frac{\rho}{1-\rho}, -\frac{1}{1-\rho}\right), \left(\frac{-\rho}{1-\rho}, \frac{1}{1-\rho}\right)\right\}$
On a alors, comme indiqué dans l'énoncé

$$Y = \rho X + (1-\rho)\left(-\frac{\rho}{1-\rho}X + \frac{1}{1-\rho}Y\right),$$

et quitte à poser $Z = -\frac{\rho}{1-\rho}X + \frac{1}{1-\rho}Y$ qui est une normale centrée réduite indépendante de X, on a

$$Y = \rho X + (1-\rho)Z,$$

qui permet de comprendre comment Y dépend de X.

La décomposition sera en particulier très utile pour caculer espérance et loi conditionnelle de Y sachant X.

Exercice 26.

Montrer que le vecteur aléatoire de dimension 3 de moyenne $m = (7,0,1)$ et de matrice de covariances

$$K = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

appartient presque sûrement à un hyperplan affine de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Solution

En résolvant $Kx = 0$ on trouve $\ker(K) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$. On a donc

$$\ker(K)^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+2y+z = 0\}$$

D'après le cours, $\mathbb{P}(X - m \in \ker(K)^\perp) = 1$, de sorte que p.s.

$$X \in \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y + z = -6\right\}.$$

3 Notions de théorie de la mesure

Exercice 27.

1. Soient E et F deux espaces, f une application de E dans F et $\mathcal{F}$ une tribu sur F. Montrer que $\mathcal{E}_f := \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur E. La fonction $f : (E, \mathcal{E}_f) \to (F, \mathcal{F})$ est-elle mesurable ?
2. Supposons $E = \mathbb{R}$, $(F, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $f : x \to x^2$.
   — Montrer que $\mathcal{E}_f := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.
   — (*) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 28.

Dans cet exercice, μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui vérifie les conditions suivantes :

C1 $\forall x \in R,\ \mu(\{x\}) = 0.$
C2 Pour tous réels $a < b : \mu([a, b]) < +\infty$.

1. La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ vérifie-t-elle ces conditions ? Et la mesure de Dirac δ_0 ? Quid de la loi d'une variable de Poisson de paramètre $a \geq 0$? et de la loi d'une variable uniforme sur $[0, 1]$?
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\right)$.
3. Calculer $\mu(\mathbb{Q})$.
4. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On définit la fonction f_A comme suit :

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0, +\infty[\\ x \mapsto f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]) \end{cases}$$

   Pourquoi la fonction f_A est-elle bien définie ? Calculer $f_A(x)$ pour $A = \mathbb{Q}$.
5. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$. Représenter graphiquement l'allure de f_A pour $A = \mathbb{R}$.
6. Même question pour $A = [0, 1]$.

Exercice 29.

(Mesure image)

Situation générale. Premiers exemples. Soient $(F, \mathcal{F})$ et $(G, \mathcal{G})$ des espaces mesurables, $\phi : F \to G$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $(F, \mathcal{F})$. On définit $\nu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ par $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$.

1. Montrer que ν est une mesure sur $(G, \mathcal{G})$. On dit que c'est la mesure image de μ par ϕ, et on la note également $\phi \circ \mu$.
2. On choisit $\mu = \delta_a$, où $a \in F$, et on suppose dans cette question que les singletons sont des éléments de $\mathcal{G}$. Déterminer $\phi \circ \delta_a$.
3. On suppose que μ est une mesure de probabilité sur $(F, \mathcal{F})$ (i.e. μ est une mesure vérifiant $\mu(F) = 1$). On fixe $B \in \mathcal{F}$ et on choisit $(G, \mathcal{G}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déterminer $(\mathbf{1}_B) \circ \mu$.

Variable aléatoire. Image d'une variable aléatoire : Il est important de noter que la définition de "loi" d'une variable aléatoire réelle est étroitement liée à la notion de mesure image. Par exemple, supposons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, et que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle (c'est-à-dire que X définit une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})))$. Alors la loi de X, notée P_X, n'est autre que la mesure image $X \circ \mathbb{P}$, qui est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Supposons maintenant que X est une variable aléatoire réelle de loi P_X, et que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne. Quelle est la loi P_Y de la variable aléatoire $Y = f(X)$?

4 Convergence(s)

Exercice 30.

(LFGN et TCL)

%Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, rappelons que $\%\Phi_{\vec{X}}(\vec{t}) := E[\exp(i\vec{t}.\vec{X})]$. Soient X un variable aléatoire réelle, telle que $E[|X|] < \infty$,
et $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on définit $S_0 = x_0, S_n = x_0 + \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\Phi_{S_n/n}$ en fonction de n, x_0, Φ_X. La suite de fonctions $(\Phi_{S_n/n})_{n \in \mathbb{N}}$ possède-t-elle une limite simple ?

2. On suppose ici que X est tel que $E[X] = 0$, $E[X^2] = \sigma^2 < \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$ en fonction de n, x_0, Φ_X. La suite $(\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}})_{n \in \mathbb{N}}$ possède-t-elle une limite simple ?

Exercice 31.

On joue à un jeu équilibré, on remporte un euro à chaque main gagnée, et on perd un euro à chaque main perdue. On note G_n le gain algébrique lorsque n mains ont été jouées.

1. Soit $\alpha > 0, A > 0$ fixés. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, trouver un majorant de la quantité $\mathbb{P}(G_n \geq An^\alpha)$. Interpréter le résultat.
2. Discuter l'ordre de grandeur, lorsque $n \to \infty$, de la borne obtenue en fonction de A et α. Peut-on être plus précis sur l'ordre de grandeur de $\mathbb{P}(G_n \geq An^\alpha)$ lorsque $\alpha \leq 1/2$? Qu'obtient-on en particulier lorsque $\alpha = 1/2$?

Exercice 32.

(Convergence en loi d'une variable uniforme)

1. Soit, pour $n \geq 1$, $X_n \sim \text{Unif}(\{1, ..., n\})$ (i.e $\forall i \in \{1, .., n\},\ P(X_n = i) = 1/n$). Montrer que la suite $n^{-1}X_n$ possède une limite en loi, que l'on déterminera.
2. On considère maintenant $X_n \sim \text{Unif}\left(\left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, ..., \frac{2^n}{2^n}\right\}\right)$. Montrer que X_n possède une limite en loi. Voyez-vous le lien avec la définition de l'intégrale de Riemann ?

Exercice 33.

Géométrique et exponentielle

1. Soit $\lambda > 0$ et $X \sim \exp(\lambda)$. Montrer que $\lceil X \rceil$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre en fonction de λ.

2. Le but de cette deuxième partie est de montrer comment on peut "construire" une variable exponentielle à partir d'une variable géométrique. Dans la suite $\lambda > 0$ est fixé.

3. On rappelle qu'une variable géométrique de paramètre p représente l'indice de premier succès d'une suite d'essais i.i.d, $\sim \text{Ber}(p)$. \ Pour $\delta > 0$ on considère $Y_\delta \sim \text{Geom}(p_\delta)$ où $p_\delta := \delta\lambda$.
   Calculer $P(Y_\delta > m)$ en fonction de m, δ.

4. On suppose que les tentatives suivant une loi de Bernoulli ont lieu aux temps $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$. Montrer que la probabilité qu'aucun succès n'ait été observé jusqu'au temps t converge vers $e^{-\lambda t}$ lorsque $\delta \to 0$ (On remarquera que lorsque δ est très petit, au temps t, environ t/δ tentatives ont eu lieu). Ainsi, le temps de premier succès est approximativement une variable exponentielle de paramètre λ.

Exercice 34.

Approximation de la loi binômiale par une loi de Poisson

On rappelle qu'une variable X qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ vérifie $P(X = k) = \exp(-\lambda)\lambda^k/k!, k \in \mathbb{N}$

1. Que vaut $E[X], \mathrm{Var}[X]$?
2. Soit $Y_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$, avec $np_n \to \lambda > 0$. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $P(Y_n = k) \to P(X = k)$ lorsque $n \to \infty$, $np_n \to \lambda$.
3. Application : Un avion transporte 416 passagers. La compagnie aérienne qui l'affrète a remarqué qu'en moyenne, un passager qui réserve sa place ne se présente pas à l'enregistrement avec probabilité 0.01, et pour simplifier on suppose que les événements de présence des passagers sont mutuellement indépendants. Afin d'anticiper les absences, la compagnie vend 420 réservations pour chacun des vols de l'avion. Sur quelle proportion de vols la compagnie sera-t-elle forcée de refuser des clients (on utilisera une approximation poissonienne de la loi binômiale) ?
4. Même question, mais on utilisera cette fois le théorème de la limite centrale pour évaluer la proportion.

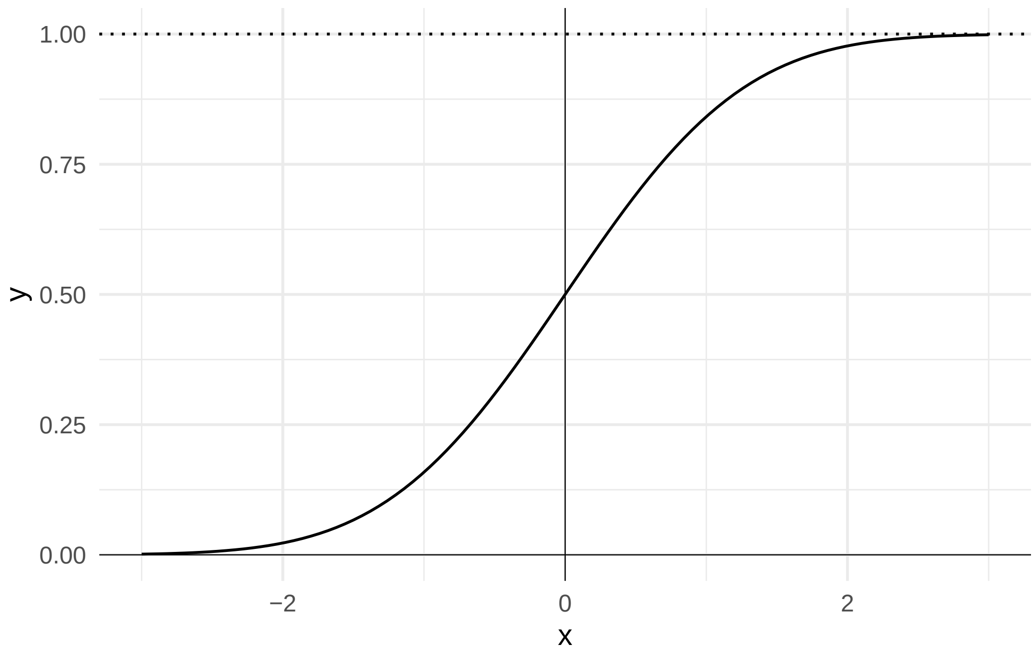

FIGURE 1 : Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0; 1)$