

i TD V : Convergences

- 6 Octobre 2025-10 octobre 2025
- Master I ISIFAR
- Probabilités

i Loi des grands nombres

Exercice 1

Exercice 2

i Convergence en distribution

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

Exercice 6

Exercice 7

- a. Si f est une fonction croissante sur $[a, b]$, on définit son inverse généralisée f^{\leftarrow} par

$$f^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : x \in [a, b], f(x) \geq y\} \quad \text{pour } y \in [f(a), f(b)].$$

Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions croissantes sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ qui converge *simplement* vers f une autre fonction croissante sur $[a, b]$ en tout point de continuité de f , alors la suite $(f_n^{\leftarrow}(y))$ converge simplement vers $f^{\leftarrow}(y)$ en tout $y \in [f(a), f(b)]$ où f^{\leftarrow} est continue.

- b. Soit F une fonction de répartition, on définit la fonction quantile associée F^{\leftarrow} par

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} \quad \text{pour } p \in]0, 1[.$$

Vérifier que si deux fonctions de répartition ont même fonction quantiles alors elles sont égales.

Dans cette définition F est une fonction de répartition, F^{\leftarrow} la fonction quantile associée.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, p \in]0, 1[$,

- c. $F^{\leftarrow}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F(x)$.
- d. $F \circ F^{\leftarrow}(p) \geq p$ avec égalité si et seulement si il existe x tel que $F(x) = p$. \ Si $F \circ F^{\leftarrow}(p) > p$ alors F^{\leftarrow} est discontinue en p .
- e. $F^{\leftarrow} \circ F(x) \leq x$. \ Si $F^{\leftarrow} \circ F(x) < x$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $F(x - \epsilon) = F(x)$.
- f. $(F \circ G)^{\leftarrow} = G^{\leftarrow} \circ F^{\leftarrow}$

Exercice 8

Si $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}$ forme les statistiques d'ordre d'un n -échantillon de la loi exponentielle d'espérance 1, et si $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ désigne les statistiques d'ordre d'un n -échantillon d'une loi de fonction de répartition F qui admet une densité partout positive, montrer que

$$(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}) \sim (F^{\leftarrow}(1 - \exp(-Y_{1:n})), \dots, F^{\leftarrow}(1 - \exp(-Y_{n:n}))) .$$

La fonction quantile empirique F_n^{\leftarrow} est la fonction quantile associée à la fonction de répartition empirique F_n . Si les points de l'échantillon sont deux à deux distincts

$$F_n^{\leftarrow}(p) = X_{k:n} \quad \text{pour } \frac{k-1}{n} < p \leq \frac{k}{n} .$$

Soit F une fonction de répartition qui est dérivable en $F^{\leftarrow}(p)$ de dérivée non nulle notée $f(p)$ pour une valeur $p \in]0, 1[$. Montrer que

$$\sqrt{n}(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p)) + \sqrt{n} \frac{1}{f(p)} (F_n(F^{\leftarrow}(p)) - p) = o_P(1) .$$

Quelle est la loi limite de $\sqrt{n}(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p))$?