

TD II : Espérances et lois conditionnelles (supplément)

22 Septembre 2025-26 Septembre 2025

— Master I Isifar

— **Probabilités****Exercice 1** (Questionnaire).

Soient $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ un espace de probabilité, X et Y des v.a.r., T une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Que peut-on dire, sous réserve d'hypothèses d'intégrabilité adéquates, des espérances conditionnelles suivantes :

1. $\mathbb{E}(f(T) | T)$ avec $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne,
2. $\mathbb{E}(X | T)$ avec X $\sigma(T)$ -mesurable,
3. $\mathbb{E}(XY | T)$ avec X $\sigma(T)$ -mesurable,
4. $\mathbb{E}(f(X) | T)$ avec $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne, X et T indépendantes,
5. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | T))$,
6. $\mathbb{E}[S_{10}|S_8]$ lorsque $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et les $(X_i)_{i \geq 1}$ sont i.i.d.,
7. $\mathbb{E}[S_{31} | X_1]$ lorsque $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et les $(X_i)_{i \geq 1}$ sont i.i.d.,
8. $\mathbb{E}[\Pi_4 | \Pi_2]$ lorsque $\Pi_n = \prod_{i=1}^n X_i$ et les $(X_i)_{i \geq 1}$ sont i.i.d.,
9. $\mathbb{E}[\phi(X, Y) | Y]$ lorsque X et Y sont indépendantes,
10. $\mathbb{E}[f(S_2 + X_8) | S_2]$, lorsque $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et les $(X_i)_{i \geq 1}$ sont i.i.d.

Exercice 2.

On considère un processus de Galton-Watson de loi de branchement

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = \mathbb{P}(\xi = 2) = 1/2.$$

issu à la génération 0 d'un unique individu ancestral. On note Z_n la taille de la population à la génération n .

Exprimer $\mathbb{E}[(Z_2 - 1)^2 | Z_1]$.