

TD IV : Espérance conditionnelle/Catactérisations

- 29 Septembre 2025-2 octobre 2025
- Master I ISIFAR
- **Probabilités**

Conventions

Dans les 3 exercices qui suivent, X_1, \dots, X_n, \dots constituent une famille indépendante de variables aléatoires identiquement distribuées à valeur dans $\{-1, 1\}$.

L'univers des possibles est $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Les X_i sont les projections canoniques.

On note \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les n premières coordonnées :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

L'univers est muni de la tribu des cylindres $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right)$.

On note Δ une constante à valeur dans $(0, 1)$ (la *dérive* de la marche aléatoire).

On note \mathbb{P} la loi produit infini, telle que pour tout $x \in \{-1, 1\}^n$

$$\mathbb{P}\left\{\bigwedge_{i=1}^n X_i = x_i\right\} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 + x_i \Delta)$$

On étudie la marche aléatoire sur \mathbb{Z} de dérive Δ .

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

L'indice n représente le temps, S_n la position à l'instant n .

Solution

Exercice 1 (Marches aléatoires biaisées i).

- a. Quelle est la loi de S_n ?
- b. S_n est-elle $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_{n+1}$ mesurable ?
- c. Quelle est l'espérance de S_n ?
- d. Quelle est la variance de S_n ?

On admettra l'inégalité de Hoeffding :

Si Y_1, \dots, Y_n sont des variables aléatoires indépendantes telles que $a_i \leq Y_i \leq b_i$ (les Y_i sont bornées), alors

$$P\{Z - \mathbb{E}Z \geq t\} \leq e^{-2 \frac{t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}}$$

avec $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Exercice 2 (Marches aléatoires biaisées ii).

Pour $0 \leq \tau \leq n\Delta$,

- a. Majorer $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$ à l'aide de l'inégalité de Chebyshev
- b. Majorer $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$ à l'aide de l'inégalité de Hoeffding
- c. L'ensemble

$$E = \{\omega : \forall n, S_n(\omega) < \tau\}$$

appartient-il à la tribu \mathcal{F}_m pour un m donné ? est-il un événement de \mathcal{F} ?

- d. Si E est un événement, quelle est sa probabilité ?

Solution

Convention

On suppose $\tau \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On note $T = \inf\{n : S_n \geq \tau\}$. Si $\forall n, S_n(\omega) < \tau$, alors $T(\omega) = \infty$.

On note S_T , la fonction définie par

$$S_T(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T(\omega)=n} S_n(\omega) \quad \text{si } T(\omega) < \infty$$

et $S_T(\omega) = 0$ si $T(\omega) = \infty$.

Exercice 3 (Marches aléatoires biaisées iii).

- Pourquoi peut-on considérer que T est une variable aléatoire (à valeur dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) ?
- Quelle est la probabilité que $T = \infty$?
- L'événement $\{T \leq n\}$ est-il $\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}$ mesurable ?
- Pourquoi peut-on considérer que S_T est une variable aléatoire ?
- Quelle est l'espérance de S_T ?
- Montrer que $\mathbb{E}S_T = \Delta \mathbb{E}T$. En déduire $\mathbb{E}T$.

Solution

Exercice 4 (Binomiale négative). Les variables $X_1, \dots, X_2, \dots, X_n, \dots$ sont des variables de Bernoulli de probabilité de succès $p \in (0, 1)$, indépendantes. On définit $T_1 = \min\{i : X_i = 1\}$ (temps du premier succès), $T_2 = \min\{i : i > T_1, X_i = 1\}$ (temps du premier succès après T_1), et récursivement $T_{n+1} = \min\{i : i > T_n, X_i = 1\}$ (temps du $n+1$ ème succès).

On admet l'existence d'un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) où $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, \mathcal{F} est une tribu pour laquelle les X_i sont mesurables, et P tel que X_1, \dots, X_n, \dots est une famille indépendante.

- T_1 et plus généralement T_n sont-elles des variables aléatoires ?
- Calculer $P\{T_1 > k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- Calculer $P\{T_1 = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- Calculer $\mathbb{E}T_1$.
- Calculer $P\{T_1 = k \wedge T_2 = k + j\}$ pour $k, j \in \mathbb{N}$.
- Calculer $P\{T_2 = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- Calculer $\mathbb{E}T_2$.
- Calculer $\mathbb{E}T_n$.

Solution

- Les événements de la forme $\{T_n \leq m\}$ sont dans $\sigma(X_1, \dots, X_m)$, car la seule connaissance de X_1, \dots, X_m suffit pour déterminer si le $i^{(eme)}$ succès survient avant le temps m . Donc les événements de la forme $\{T_n \leq m\}$ sont tous dans la tribu des cylindres $\sigma(\cup_m \sigma(X_1, \dots, X_m))$. Tout événement de la forme $\{T_n \in A\}$ avec $A \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, appartient à la tribu engendrée par les événements $\{T_n \leq m\}$, donc à la tribu $\sigma(\cup_m \sigma(X_1, \dots, X_m))$.
- $P\{T_1 > k\} = (1-p)^k$ (T_1 suit une loi géométrique)
- $P\{T_1 = k\} = P\{T_1 > k-1\} - P\{T_1 > k\} = (1-p)^{k-1}p$ pour $k \geq 1$
- $\mathbb{E}T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} P\{T_1 > k\} = \frac{1}{p}$
- $P\{T_1 = k \wedge T_2 = k+j\} = (1-p)^{k-1}p(1-p)^{j-1}p$ pour $k, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $T_1 \perp\!\!\!\perp T_2 - T_1$

et $T_2 - T_1 \sim T_1$

- f. $P\{T_2 = k\} = \sum_{j=1}^{k-1} (1-p)^{j-1} p (1-p)^{k-j-1} p = p \binom{k-1}{1} (1-p)^{k-2} p$ pour $k \geq 2$
 g. $\mathbb{E}T_2 = 2\mathbb{E}T_1 = \frac{2}{p}$
 h. $\mathbb{E}T_n = n\mathbb{E}T_1 = \frac{n}{p}$

Exercice 5 (Allocations aléatoires).

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n et de n boules. Les boules sont réparties de manière uniforme dans les urnes (chaque boule se comporte de manière indépendante des autres et a probabilité $1/n$ de tomber dans chaque urne). On note U_i la variable aléatoire désignant le nombre de boules qui tombent dans l'urne i . Dans la suite $\alpha > 1$ est un réel.

- a. Déterminer la loi de U_i .
 b. Montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \ln n) \leq n\mathbb{P}(U_1 > \alpha \ln n).$$

- c. Calculer $\mathbb{E}(\exp(U_1))$.
 d. Montrer que pour tout $\beta > -n$, on a $(1 + \beta/n)^n \leq \exp(\beta)$.
 e. Montrer que $\mathbb{P}(U_1 > \alpha \ln n) \leq \frac{\exp(\exp(\alpha)-1)}{n^\alpha}$.
 f. En déduire que si $\alpha > 1$, on a

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \ln n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Solution

- a. $U_i \sim \text{Binom}(n, 1/n)$
 b. Les U_i ne sont pas indépendantes (on a toujours $\sum_{i=1}^n U_i = n$), mais elles sont identiquement distribuées.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \ln n) &= \mathbb{P}(\cup_{1 \leq i \leq n} \{U_i > \alpha \ln n\}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{U_i > \alpha \ln n\}) \\ &= n\mathbb{P}(\{U_1 > \alpha \ln n\}) \end{aligned}$$

- c. $\mathbb{E}(\exp(U_1)) = (1 + \frac{1}{n}(e-1))^n \leq \exp(e-1)$
 d. En utilisant l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \ln n) &\leq n\mathbb{P}(\{U_1 > \alpha \ln n\}) \\ &\leq n \frac{\mathbb{E}(\exp(U_1))}{n^\alpha} \\ &\leq \frac{\exp(e-1)}{n^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

Exercice 6 (Restitution Organisée de Connaissances).

- Soient A, B, C trois événements dans un espace probabilisé. A-t-on toujours : $A \perp\!\!\!\perp B$ et $B \perp\!\!\!\perp C \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp C$?
- Soient P et Q deux lois de probabilités sur (Ω, \mathcal{F}) , on définit l'ensemble $\mathcal{M} = \{A : A \in \mathcal{F}, P(A) = Q(A)\}$. Répondre par *vrai/faux/je ne sais pas* aux questions suivantes :
 - a. \mathcal{M} est-il toujours une classe monotone ?
 - b. \mathcal{M} est-il toujours une σ -algèbre ?
 - c. \mathcal{M} est-il toujours une π -classe ?
- Soient G et F sont deux fonctions génératrices de probabilité. Répondre par *vrai/faux* aux questions suivantes :
 - a. Est-il vrai que $G \times F$ est toujours une fonction génératrice ?
 - b. Est-il vrai que $G + F$ est toujours une fonction génératrice de probabilité ?
 - c. Est-il vrai que $\lambda G + (1 - \lambda)F$ avec $\lambda \in [0, 1]$ est toujours une fonction génératrice de probabilité ?
- Si \hat{F} est la fonction caractéristique de la loi de X , et si $\epsilon \perp\!\!\!\perp X$, avec $P\{\epsilon = 1\} = P\{\epsilon = -1\} = 1/2$, quelle est la fonction caractéristique de la loi de ϵX ?

Solution

Exercice 7 (Distributions biaisées par la taille).

Si X est une variable aléatoire positive intégrable, la version *biaisée par la taille* de X est la variable aléatoire X^* dont la loi Q est absolument continue par rapport à celle de X (notée P) et dont la densité (par rapport à celle de X) est proportionnelle à X :

$$\frac{dQ}{dP}(x) = \frac{x}{\mathbb{E}X}.$$

- a. Caractériser X^* lorsque X est une Bernoulli.
- b. Caractériser X^* lorsque X est binomiale.
- c. Caractériser X^* lorsque X est Poisson.
- d. Caractériser X^* lorsque X est Gamma.
- e. Si X est à valeurs entières, exprimer la fonction génératrice de X^* en fonction de celle de X .
- f. Exprimer la transformée de Laplace de X^* en fonction de celle de X .
- g. Si U est une transformée de Laplace, dérivable à droite en 0, $U'/U'(0)$ est-elle la transformée de Laplace d'une loi sur $[0, \infty)$?

Solution

Exercice 8 (Amies des gaussiennes).

Rappel

La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$,

- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, donner une densité de la loi de $Y = \exp(X)$ (Loi log-normale). Calculer l'espérance et la variance de Y .
- Même question si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, donner une densité de la loi de $Z = Y/X$ (Loi de Student à 1 degré de liberté)
- Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, donner une densité de la loi de $W = Y/\sqrt{X^2}$.

- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et ϵ vaut ± 1 avec probabilité $1/2$ (variable de Rademacher) avec $X \perp\!\!\!\perp \epsilon$, donner une densité de la loi de $Y = \epsilon X$. Y et X sont-elles indépendantes ?

Exercice 9.

Exercice 10 (Principe de réflexion).

Principe de réflexion

Dans cet exercice, X_1, X_2, \dots sont des variables de Rademacher indépendantes ($P\{X_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$), $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$ et $M_n = \max_{k \leq n} S_k$.

Montrer que, pour $a > 0$,

$$P\{M_n > a\} \leq 2P\{S_n > a\}$$

Statistique des rangs/Statistiques d'ordre

Les statistiques d'ordre $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ d'un n -échantillon X_1, \dots, X_n d'observations indépendantes identiquement distribuées sont formées par le réarrangement croissant (convention) de l'échantillon.

Quand n est clair d'après le contexte on peut les noter $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.

Exercice 11 (Statistiques d'ordre).

- Vérifier que la loi jointe des statistiques d'ordre est absolument continue par rapport à la loi de l'échantillon.
- On suppose que X est une variable aléatoire réelle, absolument continue, de densité continue. Montrer que l'échantillon est presque sûrement formé de valeurs deux à deux distinctes.
- Donner la densité de la loi jointe des statistiques d'ordre.
- Si la loi des X_i définie par sa fonction de répartition F , admet une densité f , quelle est la densité de la loi de $X_{k:n}$ pour $1 \leq k \leq n$?
- Montrer que conditionnellement à $X_{k:n} = x$, la suite

$$(X_{i:n} - X_{k:n})_{i=k+1, \dots, n}$$

est distribuée comme les statistiques d'ordre d'un $n - k$ échantillon de la loi d'excès au dessus de x (fonction de survie $\bar{F}(x + \cdot)/\bar{F}(x)$) avec la convention $\bar{F} = 1 - F$.

(Représentation de Rényi)

Exercice 12 (Statistiques d'ordre d'un échantillon exponentiel). Cet exercice reprend les conventions de l'exercice précédent. On s'intéresse maintenant aux statistiques d'ordre d'un échantillon exponentiel.

- Si X_1, \dots, X_n est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité $\mathbb{1}_{x>0}e^{-x}$), et $X_{n:n} \geq X_{n-1:n} \geq \dots \geq X_{1:n}$ les statistiques d'ordre associées, montrer que :
- avec la convention $X_{0:n} = 0$, les écarts $(X_{i:n} - X_{i-1:n})_{1 \leq i \leq n}$ (*spacings*) forment une collection de variables aléatoires indépendantes ;
- $X_{i:n} - X_{i-1:n}$ est distribuée selon une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{i}$.

- d. Maintenant $(k_n)_n$ est une suite croissante d'entiers qui tend vers l'infini, telle que k_n/n tend vers une limite finie (éventuellement nulle). Montrer que

$$\frac{X_{k_n:n} - \mathbb{E}X_{k_n:n}}{\sqrt{\text{var}(X_{k_n:n})}}$$

converge en loi vers une Gaussienne centrée réduite.

Solution