

**i TD II : Espérances et lois conditionnelles**

22 Septembre 2025-26 Septembre 2025

- Master I Isifar
- Probabilités

**Exercice 1**

**i Cours**

Espérance conditionnelle par rapport à une tribu engendrée par une partition dénombrable.

1. Soit  $(A_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une partition de  $\Omega$  et  $\mathcal{F} = \sigma(A_n, n \geq 1)$  la tribu engendrée par les  $A_n, n \geq 1$ . Rappelons qu'une v.a.r.  $Y$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable si et seulement si il existe une suite de réels  $(a_n)$  telle que  $Y = \sum_{n \geq 1} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ . Exprimer  $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}]$ .
2. Soient  $X, Y$  deux variables i.i.d.  $\sim \text{Ber}(p)$ . On considère  $\mathcal{G} = \sigma(\{X + Y = 0\})$ . Calculer  $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ ,  $\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$ . Les variables obtenues sont-elles toujours indépendantes ?

**Exercice 2**

**i Cours**

Conditionnement continu

Soient  $(X, Y)$  un couple de v.a. réelles intégrables de densité jointe  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne telle que  $g(X, Y) \in \mathbb{L}^1$ .

Rappeler l'expression de  $\phi, \psi$  telles que

$$\mathbb{E}[g(X, Y) | Y] = \phi(Y), \quad \mathbb{E}[g(X, Y) | X] = \psi(X).$$

1. On considère  $(X, Y)$  de densité jointe  $f(x, y) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq x \leq 1\}}$ . Quelle est la loi de  $X$  ? Calculer la distribution conditionnelle  $f_{Y|X}$  de  $Y$  sachant  $X$ . Calculer  $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1 | X)$ , puis en déduire  $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$ .

Pour simplifier l'expression obtenue on pourra utiliser que  $x \rightarrow \sqrt{1-x^2} - \tanh^{-1}(\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2} \ln(1 - \sqrt{1-x^2})$  est une primitive de  $x \rightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ .

2. Dans le cas général, montrer que  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$ . Que vaut  $\mathbb{E}[Y]$  dans l'exemple de la question précédente ?
3. Montrer, dans le cas général, que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]g(X)] = \mathbb{E}[Yg(X)],$$

pour toute fonction  $g$  telle que les deux espérances sont définies. Que vaut  $\mathbb{E}[Yg(X) | X]$  ?

**Exercice 3**

**i Partiel passé**

Soient  $0 \leq r \leq p \leq 1$  tels que  $1 - 2p + r \geq 0$ .

Soient  $X_1, X_2$  tels que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) &= r, & \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) &= p - r, \\ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) &= p - r, & \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) &= 1 - 2p + r. \end{aligned}$$

1. Quelle est la loi de  $X_1$  ? celle de  $X_2$  ?

2. Calculer  $Y = \mathbb{E}[X_1 | X_2]$  et vérifier que

$$Y = \begin{cases} \frac{p-r}{1-p} & \text{avec probabilité } 1-p \\ \frac{r}{p} & \text{avec probabilité } p. \end{cases}$$

3. Rappelons que par définition  $\text{Var}[X_1 | X_2] = \mathbb{E}[X_1^2 | X_2] - \mathbb{E}[X_1 | X_2]^2$ . Montrer que

$$\text{Var}[X_1 | X_2] = \left( \frac{p-r}{1-p} - \left( \frac{p-r}{1-p} \right)^2 \right) \mathbf{1}_{\{X_2=0\}} + \left( \frac{r}{p} - \left( \frac{r}{p} \right)^2 \right) \mathbf{1}_{\{X_2=1\}}.$$

4. Que vaut  $\text{Var}(\mathbb{E}[X_1 | X_2])$  ?  $\mathbb{E}[\text{Var}[X_1 | X_2]]$  ? Vérifier qu'on a bien

$$\text{Var}(X_1) = \text{Var}(\mathbb{E}[X_1 | X_2]) + \mathbb{E}[\text{Var}[X_1 | X_2]].$$

#### Exercice 4

Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. i.i.d intégrables, et  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

1. Que valent  $\mathbb{E}[X_1 | X_2]$ ,  $\mathbb{E}[S_n | X_1]$ ,  $\mathbb{E}[S_n | S_{n-1}]$  ?
2. Montrer que si les paires de variables  $(X, Z)$ ,  $(Y, Z)$  ont la même loi jointe, alors pour toute fonction réelle positive (ou satisfaisant une condition d'intégrabilité),  $\mathbb{E}[f(X) | Z] = \mathbb{E}[f(Y) | Z]$ . En déduire  $\mathbb{E}[X_1 | S_n]$ .

#### Exercice 5

**i Examen passé**

Soit  $(X_n, n \geq 0)$  une suite de variables i.i.d, avec  $X_1 \sim \text{Ber}(1/2)$ . On pose  $S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - 1/2)$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

Calculer  $\mathbb{E}[S_n | \mathcal{F}_5]$  en fonction de  $n$ . Quelle est la loi de cette variable aléatoire ?

#### Exercice 6

**i Partiel passé**

Soient  $\{\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{N}\}$  des variables i.i.d exponentielles de paramètre 1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on note  $S_n := \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$ .

1. On note  $f_n$  la fonction de densité de la variable  $S_n$ . Montrer que pour tout  $t \geq 0$

$$f_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-t).$$

2. Pour  $t > 0, n \in \mathbb{N}^*$ , que vaut  $\mathbb{P}(S_n \leq t)$  ?
3. On fixe  $t > 0$  et on suppose  $X_t \sim \text{Poisson}(t)$ . Que vaut  $\mathbb{P}(X_t \geq n)$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ?
4. Sur la demi-droite  $\mathbb{R}_+$  on place les points  $S_1, S_2, S_3, \dots$ . On note  $N_t$  le nombre de ces points qui tombent dans l'intervalle  $[0, t]$ . Exprimer l'événement  $\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$ . Déterminer la loi de  $N_t$  à l'aide des questions précédentes.
5. Montrer que, conditionnellement à  $\{N_t = 1\}$ , la loi de  $\mathbf{e}_1$  est uniforme sur  $[0, t]$ .
6. Conditionnellement à  $\{N_t = 2\}$ , quelle est la loi du vecteur  $(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2)$  ?

#### Exercice 7

**i CC2 2023**

On considère

$$X \sim \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right).$$

1. Calculer  $\mathbb{E}[X_3 | X_4]$ , et déterminer la loi conditionnelle de  $X_3$  sachant  $X_4$ .
2. On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $BA^{-1}$ , puis vérifier que

$$BA^{-1}B^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer  $\mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right]$ , et la loi conditionnelle de  $\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$  sachant  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 8

**i** (Partiel passé)

Soit  $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mu, M)$  où

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la loi du couple  $(X_1, X_2)$  ?
2. Déterminer  $\alpha$  un réel tel que  $Y = X_1 + X_2$  est indépendante de  $X_1$ . Que vaut  $\mathbb{E}[Y]$  ?  $\text{Var}(Y)$  ?
3. En déduire  $\mathbb{E}[X_2 | X_1]$ . Quelle est la loi conditionnelle de  $X_2$  sachant  $X_1$  ?
4. Déterminer un réel  $\beta$  tels que  $Z = \beta X_1 + X_3$  est indépendante de  $X_1$ . En déduire

$$\mathbb{E}[X_3 | X_1], \quad \mathbb{E}[X_3^2 | X_1].$$

5. Calculer  $\mathbb{E}[X_1^2 X_2 + X_3^2 X_1 | X_1]$ .

### Exercice 9

**i** Examen passé

Soit  $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mu, M)$ , où

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $\mathbb{E}[X_1 + 2X_2 | X_3]$ . Quelle est la loi conditionnelle de  $X_1 + 2X_2$  sachant  $X_3$  ?

### Exercice 10

**i** (CC2 2023)

On suppose dans cet exercice que  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires tel que pour toute  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  borélienne,

$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)] = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \phi(n, y) \exp\left(-\frac{y^2}{2n}\right) dy.$$

1. Montrer que  $X \sim \text{Geom}(2/3)$ .

2. Vérifier que pour une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f(Y) \in \mathbb{L}^1$ , on a

$$\mathbb{E}[f(Y) | X] = \sum_{n \geq 1} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2n}\right) dy \right) \mathbb{1}_{\{X=n\}}$$

%1. En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , %

$$\mathbb{E}[Y^k | X] = \frac{k!}{X^{2k}}$$

3. Calculer  $\mathbb{E}[\exp(itY) | X]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , quelle est la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X$  ?  
4. Déduire que si  $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(itY)] = \frac{2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{3 - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}.$$

### Exercice 11

**i** Partiel passé

#### Partie I

On considère le couple  $(X, Z)$  de densité jointe

$$f(x, z) := (z - x) \exp(-z) \mathbf{1}_{\{z \geq x \geq 0\}}.$$

1. Calculer la loi de  $X$ , puis celle de  $Z$ .
2. En déduire que

$$f_{X|Z}(x | z) = \frac{2(z - x)}{z^2} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq z, z > 0\}}.$$

3. Calculer  $\mathbb{E}[X | Z]$ , puis  $\text{Var}[X | Z]$ .
4. Calculer  $f_{Z|X}(z | x)$ , puis démontrer que  $\mathbb{E}[Z | X] = X + 2$ .
5. Quelle est la loi du couple  $(X, Z - X)$  ? En déduire la loi de  $Z - X$ .

#### Partie II

1. Soit  $z > 0$ . On suppose que  $U_1^z \sim \text{Unif}[0, z]$ ,  $U_2^z \sim \text{Unif}[0, z]$  et que  $U_1^z$  est indépendante de  $U_2^z$ . Calculer la densité de  $\min(U_1^z, U_2^z)$ .
2. On suppose à présent que conditionnellement à  $Z$ ,  $U_1^Z \sim \text{Unif}[0, Z]$ ,  $U_2^Z \sim \text{Unif}[0, Z]$  et que  $U_1^Z$  est (toujours conditionnellement à  $Z$ ) indépendante de  $U_2^Z$ . Montrer que, conditionnellement à  $Z$ ,  $\min(U_1^Z, U_2^Z)$  a la même loi que  $X$ .
3. Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois variables indépendantes, toutes trois distribuées suivant la distribution exponentielle de paramètre 1. On note  $S = X_1 + X_2 + X_3$ . Déterminer la loi de  $(X_1, S)$ . Que vaut  $\mathbb{E}[X_1 | S]$  ?  $\mathbb{E}[S | X_1]$  ? Montrer finalement que conditionnellement à  $S$ , le couple  $(X_1, X_1 + X_2)$  a la même loi que  $(\min(U_1^S, U_2^S), \max(U_1^S, U_2^S))$ .

### Exercice 12

**i** Partiel passé

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on définit

$$f(x, y) := \frac{4y}{x^3} \mathbf{1}_{\{0 < x < 1, 0 < y < x^2\}}.$$

Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité, puis calculer les densités marginales  $f_X, f_Y$ .

Calculer  $f_{Y|X}(y | x)$  et en déduire que

$$\mathbb{E}[Y | X] = \frac{2}{3}X^2.$$

Montrer que

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{2y}{1-y} \frac{1}{x^3} \mathbf{1}_{\{0 < x < 1, 0 < y < x^2\}},$$

puis calculer  $\mathbb{E}[X | Y]$ .

### Exercice 13

**i CC2 2023**

Dans cet exercice on suppose que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

et on pose  $U = X^2$ .

1. Vérifier que  $U \sim \text{Gamma}(1/2, 1/4)$ .
2. Montrer que  $(X, Y)$  possède une densité jointe  $g$  que l'on déterminera.
3. Montrer que  $(U, Y)$  possède la densité jointe

$$f(u, y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{u}} \left( \exp \left( -\frac{u}{2} - y^2 + y\sqrt{u} \right) + \exp \left( -\frac{u}{2} - y^2 - y\sqrt{u} \right) \right) \mathbb{1}_{\{u > 0\}}.$$

4. Calculer  $f_{Y|U}(y | u)$ . En déduire  $\mathbb{E}[Y | U]$ ,  $\mathbb{E}[Y^2 | U]$  et  $\text{Var}(Y | U)$ . Vérifier qu'on a bien

$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[\text{Var}[Y | U]] + \text{Var}[\mathbb{E}[Y | U]].$$

5. On suppose que conditionnellement à  $U$ ,  $\xi$  et  $Z$  sont indépendantes avec  $\xi \sim \text{Ber}(1/2)$  et  $Z \sim \mathcal{N} \left( \frac{\sqrt{U}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ . Montrer que conditionnellement à  $U$ ,  $(2\xi - 1)Z$  a même loi que  $Y$ . Vérifier alors les calculs de la question précédente.

### 🔦 Indications

1. rappelle que pour  $a > 0, \lambda > 0$ , la densité d'une variable  $G \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$  est donnée par

$$f_G(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x) \mathbb{I}_{\{x>0\}}$$

2. On fera attention à distinguer les domaines  $D_1 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$  et  $D_2 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  pour pouvoir considérer les  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes  $\Psi_1 : \begin{cases} D_1 \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow (x^2, y) \end{cases}, \quad \Psi_2 : \begin{cases} D_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow (x^2, y) \end{cases}$ .
3. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , les deux premiers moments de la variable  $\zeta \sim \mathcal{N}\left(\alpha \frac{\sqrt{u}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  sont

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\zeta] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} y \exp\left(-\left(y - \alpha \frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right) dy \\ &= \alpha \frac{\sqrt{u}}{2}, \\ \mathbb{E}[\zeta^2] &= \mathbb{E}[\zeta]^2 + \text{Var}[\zeta] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} y^2 \exp\left(-\left(y - \alpha \frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right) dy \\ &= \alpha^2 \frac{u}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Exercice 14

#### 📖 Rattrapage passé

Soit  $X = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(0, M)$ , où

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que  $\det(M) = 0$ . Le vecteur  $X$  possède-t-il une densité dans  $\mathbb{R}^3$  ?
2. Trouver  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $X_1$  et  $Y = X_2 - aX_1$  soient indépendantes. Calculer  $\text{Var}(Y)$  et en déduire la loi de  $(X_1, Y)$ .
3. Trouver la loi conditionnelle de  $X_2$  sachant  $X_1$ .

### Exercice 15

On considère  $X_0 = 0$ , et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi normale centrée réduite.

On introduit les variables

$$Y_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{i}, i \geq 1.$$

Pour  $n \geq 1$ , montrer que le vecteur  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est gaussien, puis calculer le vecteur moyenne et la matrice de covariances de  $(Y_1, \dots, Y_n)$ .

Calculer, pour  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{E}[Y_{n+1} | Y_n]$ .

### Exercice 16

Soient  $(X, Y)$  dont la loi jointe a pour densité  $f(x, y) = x(y - x) \exp(-y), 0 \leq x \leq y < \infty$ . On introduit la notation  $f_{X|Y}(x|y) := f(x, y)/f_Y(y)$  lorsque le quotient est  $> 0$ , 0 sinon.

1. Exprimer  $f_{X|Y}(x|y)$ , puis  $f_{Y|X}(y|x)$ .

2. En déduire les expressions de  $\mathbb{E}[X|Y]$ ,  $\mathbb{E}[Y|X]$ .

### Exercice 17

Soient  $Y, Z$  deux v.a.r. indépendantes  $\sim \exp(\lambda)$  où  $\lambda > 0$ . On pose  $X = Y + Z$ . Quelle est la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X$ ? Que vaut  $\mathbb{E}[Y|X]$ ? En déduire l'expression de  $\mathbb{E}[Y|X]$

### Exercice 18

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux normales centrées réduites. On définit pour  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| \leq 1$ ,

$$U = \sigma_1 X, \quad V = \sigma_2 \rho X + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Y.$$

1. Quelle est la loi de  $(U, V)$ ?
2. Que vaut  $\mathbb{E}[UV]$ ?
3. Que vaut  $\mathbb{E}[U | V]$ ?  $\mathbb{E}[V | U]$ ?  $\text{Var}[U | V]$ ?  $\text{Var}[V | U]$ ?

### Exercice 19

Soit  $Z = (X, Y)$  un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $E(X) = E(Y) = 0$ ,  $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$  et que  $\text{Cov}(X; Y) = \rho$  avec  $|\rho|^2 \neq 1$ . On pose  $U = X - \rho Y, V = \sqrt{1 - \rho^2} Y$ .

1. Quelles sont les lois de  $U$  et  $V$ ? Les v.a.  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes?
2. Calculer  $\mathbb{E}(U^2 V^2), \mathbb{E}(U V^3), \mathbb{E}(V^4)$ . En déduire  $\mathbb{E}(X^2 Y^2)$ .
3. Retrouver ce dernier résultat par conditionnement.

### Exercice 20

Soient  $U, V, W$  trois v.a.r. gaussiennes centrées réduites. On pose

$$Z = \frac{U + VW}{\sqrt{1 + W^2}}.$$

1. Quelle est la loi conditionnelle de  $Z$  sachant  $W$ ?
2. En déduire que  $Z$  et  $W$  sont indépendantes et donner la loi de  $Z$ .

### Exercice 21

Soient  $X_1$  et  $X_2$  des v.a. indépendantes, de lois exponentielles de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

1. Calculer  $\mathbb{E}[\max(X_1, X_2) | X_1]$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}[\max(X_1; X_2)]$ .

### Exercice 22

On pose  $h(x) = \frac{1}{\Gamma(a+1)} \exp(-x)x^{a-1}$  ( $a > 0$  fixé) et  $D = \{0 < y < x\}$ . Soit  $f(x, y) = h(x)\mathbf{1}_D(x, y)$  :

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}^2$ . On considère dans la suite un couple  $(X, Y)$  de v.a.r. de densité  $f$ .
2. Les v.a.  $X$  et  $Y/X$  sont-elles indépendantes?
3. Quelle est la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X$ ?
4. Soit  $U$  une v.a.r. indépendante du couple  $(X, Y)$  telle que  $\mathbb{P}(U = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(U = 0) = 1 - p$ . On pose  $Z = UX + (1 - U)Y$ . Quelle est l'espérance conditionnelle de  $Z$  sachant  $X$ ?

### Exercice 23

Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  une suite de v.a.r.i.i.d. de densité  $f$  et fonction de répartition  $F$ . Soient  $N := \min\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$  et

$M := \min\{n \geq 1 : X_0 \geq X_1 \geq \dots \geq X_{n-1} < X_n\}$ .

1. Trouver  $\mathbb{P}(N = n)$ , puis montrer que la fonction de répartition de  $X_N$  est  $F + (1 - F) \log(1 - F)$  (on pourra conditionner par les événements  $\{N = n\}, n \in \mathbb{N}$ ).
2. Exprimer  $\mathbb{P}(M = m), m \geq 1$ .

3. On suppose dans cette question que  $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ . Pour  $x \in (0, 1)$  on introduit  $R^x := \min\{n \geq 1 : X_1 + \dots + X_n > x\}$ . Montrer que  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{R^x > n\}} \mid X_n] = \Phi(X_n)$  où  $\Phi(u) = \mathbb{1}_{\{u < x\}} \mathbb{P}(R^{x-u} > n - 1)$ . En déduire  $H_n(x) := \mathbb{P}(R^x > n)$ .

#### Exercice 24

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

1. Quelle est l'espérance conditionnelle de  $(Y - X)_+$  sachant  $X$ ?
2. Quelle est la loi conditionnelle de  $(Y - X)_+$  sachant  $X$ ?

#### Exercice 25

Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois v. a. r. gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose  $U = 2X_1 - X_2 - X_3, V = X_1 + X_2 + X_3, W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$ .

1. Quelles sont les lois de  $U, V$  et  $W$ ? Quels sont les couples de v.a. indépendantes parmi les couples  $(U, V), (U, W), (V, W)$ ?
2. Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $W = aU + Z$  avec  $U$  et  $Z$  indépendantes. En déduire  $\mathbb{E}(W \mid U)$ .

#### Exercice 26

Soient  $X$  et  $Y$  deux v. a. r. gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose  $Z = X + Y, W = X - Y$ .

1. Montrer que  $Z$  et  $W$  sont indépendantes. Quelle est la loi de  $W$ ?
2. En déduire l'espérance conditionnelle et la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Z$ .
3. Calculer  $\mathbb{E}(XY \mid Z)$  et  $\mathbb{E}(XYZ \mid Z)$ .