TD V : Caractérisations/Convergences

- Octobre 2025
- Master I ISIFAR
- **Probabilités**

Exercice 1.

On définit la densité f_a par $f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ pour $a > 0$. Si $X \sim f_a, Y \sim f_b, X \perp\!\!\!\perp Y$ quelle est la densité de la loi de $X + Y$?

Suggestion : passez par les fonctions caractéristiques.

Exercice 2 (Marche symétrique arrêtée)**.**

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2 = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1)$. On se donne un entier x entre 0 et n et on pose pour $t \geq 1$, $S_t = x + \sum_{k=1}^{t} X_k$, et $\tau_x = \inf\{t \geq 0, S_t = 0 \text{ ou } S_t = n\}$. Le but de l'exercice est de calculer $u_x = \mathbb{E}(\tau_x)$.

i. τ_x est-elle une variable aléatoire ?
ii. Calculer u_0 et u_n.
iii. Écrire une équation reliant u_k, u_{k+1} et u_{k-1}.
iv. Poser $v_k = u_k - u_{k-1}$ et en déduire u_k, puis $\max_{k\in[0,n]} u_k$.
v. Ecrire un *programme* permettant de simuler des réalisations aléatoires de τ_x.
vi. Estimer *numériquement* les u_k à partir des simulations de la question précédente.
vii. Représenter graphiquement les estimations de u_k en fonction de k.

Exercice 3 (Théorème d'approximation de Weierstrass)**.**

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit S_n une variable aléatoire distribuée selon une loi binomiale de paramètres n et $x \in (0, 1)$.

Montrer que :

$$\lim_n \sup_{0\leq x\leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = 0$$

Suggestion : Utiliser

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{A^c})$$

avec $Z = f(x) - f(S_n/n)$ et

$$A = \{|S_n/n - x| > \delta\},$$

Le théorème d'approximation de Weierstrass s'énonce : toute fonction continue sur $[0, 1]$ peut être approchée uniformément par des polynômes.

Si f est une fonction croissante sur $[a, b]$, on définit son inverse généralisée $f^{\leftarrow}$ par

$$f^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : x \in [a, b],\ f(x) \geq y\} \qquad \text{pour } y \in [f(a), f(b)]\,.$$

Exercice 4 (Fonctions quantiles)**.**

i. Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions croissantes sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ qui converge *simplement* vers f une autre fonction croissante sur $[a,b]$ en tout point de continuité de f, alors la suite $(f_n^{\leftarrow}(y))$ converge simplement vers $f^{\leftarrow}(y)$ en tout $y \in [f(a), f(b)]$ où $f^{\leftarrow}$ est continue.

ii. Soit F une fonction de répartition, on définit la fonction quantile associée $F^{\leftarrow}$ par

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} \qquad \text{pour } p \in]0,1[\,.$$

Vérifier que si deux fonctions de répartitions ont même fonction quantiles alors elles sont égales.

Dans cette définition F est une fonction de répartition, $F^{\leftarrow}$ la fonction quantile associée.

iii. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, p \in]0,1[$,

a. $F^{\leftarrow}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F(x)$.
b. $F \circ F^{\leftarrow}(p) \geq p$ avec égalité si et seulement si il existe x tel que $F(x) = p$.\ Si $F \circ F^{\leftarrow}(p) > p$ alors $F^{\leftarrow}$ est discontinue en p.
c. $F^{\leftarrow} \circ F(x) \leq x$.\ Si $F^{\leftarrow} \circ F(x) < x$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $F(x - \epsilon) = F(x)$.
d. $(F \circ G)^{\leftarrow} = G^{\leftarrow} \circ F^{\leftarrow}$

Exercice 5 (Statistiques d'ordre)**.**

Si $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \ldots \leq Y_{n:n}$ forme les statistiques d'ordre d'un n-échantillon de la loi exponentielle d'espérance 1, et si $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ désigne les statistiques d'ordre d'un n-échantillon d'une loi de fonction de répartition F qui admet une densité partout positive, montrer que

$$(X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}) \sim (F^{\leftarrow}(1 - \exp(-Y_{1:n})), \ldots, F^{\leftarrow}(1 - \exp(-Y_{n:n}))) \,.$$

La fonction quantile empirique $F_n^{\leftarrow}$ est la fonction quantile associée à la fonction de répartition empirique F_n. Si les points de l'échantillon sont deux à deux distincts

$$F_n^{\leftarrow}(p) = X_{k:n} \qquad \text{pour } \frac{k-1}{n} < p \leq \frac{k}{n}\,.$$

Soit F une fonction de répartition qui est dérivable en $F^{\leftarrow}(p)$ de dérivée non nulle notée $f(p)$ pour une valeur $p \in]0,1[$. Montrer que

$$\sqrt{n}\,(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p)) + \sqrt{n}\frac{1}{f(p)}\,(F_n(F^{\leftarrow}(p)) - p) = o_P(1)\,.$$

Quelle est la loi limite de $\sqrt{n}\,(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p))$?

Exercice 6 (Convergences (relations))**.**

Si $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont définies sur le même espace probabilisé, et convergent en distribution vers Z (définie sur le même espace), peut-on affirmer que :

i. $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ convergent en probabilité vers Z ?
ii. $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ convergent presque sûrement vers Z ?

Exercice 7 (Convergence en distribution vers une constante)**.**

Si $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont définies sur le même espace probabilisé, et convergent en distribution vers c (une variable aléatoire constante/dégénérée) égale à c avec probabilité 1), montrer que $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ converge en probabilité vers c.

Exercice 8 (Lemme de Slutsky)**.**

Si les suites de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, \dots$, $Y_1, \dots, Y_n, \dots$ sont définies sur le même espace probabilisé, et convergent respectivement en distribution vers X et vers c (constante), montrer que

i. $X_n Y_n \rightsquigarrow cX$
ii. $X_n / Y_n \rightsquigarrow X/c$ si $c \neq 0$
iii. $g(X_n, Y_n) \rightsquigarrow g(X, c)$ si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue

Exercice 9 (representation-mediane-uniforme)**.** Dans cet exercice $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1}$ sont i.i.d. exponentielles. On suppose n impair montrer que

$$\frac{\sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} Y_i}{\sum_{i=1}^{n+1} Y_i}$$

est distribuée comme la médiane empirique d'un n-échantillon de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 10 (tcl-mediane-uniforme)**.**

Dans cet exercice $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1}$ sont i.i.d. exponentielles.

i. Montrer que

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i}{\sum_{i=1}^{n+1} Y_i}$$

est distribué comme la k^{eme} statistique d'ordre d'un n échantillon de ;la loi uniforme sur $[0, 1]$

ii. Pour n pair, $k = n/2$,

$$\sqrt{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i}{\sum_{i=1}^{n+1} Y_i} - \frac{1}{2} \right)$$

converge en distribution vers une Gaussienne centrée. Précisez la la variance de la loi limite.

Suggestion : utilisez le lemme de Slutsky (Exercice 8).

Exercice 11 (Lemme de Scheffé)**.**

i. Vérifier que la convergence simple des densités vers une densité implique la convergence en distribution.
ii. La réciproque est-elle vérifiée ? A-t-elle un sens bien défini ?

Exercice 12 (Convergence Poisson/Gaussienne)**.**

Si $X_n \sim \text{Poisson}(n)$, montrer que $\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Exercice 13 (Convergence Gamma/Gaussienne)**.**

Si $X_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, montrer que $\frac{X_n - n/\lambda}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/\lambda)$

Exercice 14 (Convergence Maxima d'échantillon uniforme)**.**

Si $X_1, \dots, X_n, \dots \sim_{\text{i.i.d.}} \text{Unif}[0,1]$, $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, pouvez-vous trouvez $(a_n, b_n)_n$ avec $a_n > 0$, tels que $\left((M_n - b_n)/a_n\right)_n$ convergent en loi vers une variable aléatoire non-dégénérée ?

Exercice 15 (Loi faible des grands nombres)**.**

Vérifier la loi faible des grands nombres si on suppose que les sommants X_i ont un moment d'ordre 4.