

i TD III : Processus de branchement

- 18 Septembre 2025-25 Septembre 2025
- Master I ISIFAR
- **Probabilités**

Exercice 1 (Modélisation)

On note Q la loi de reproduction (loi sur $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$). On note μ son espérance.

On convient de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Pour chaque génération, on se donne une suite infinie d'entiers, soit un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$. L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$ n'est pas dénombrable.

Pour représenter la suite des générations, on se donne un élément de $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*})^{\mathbb{N}}$. Cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$. On convient de $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$. Pour $\omega \in \Omega$, $X_j^n(\omega)$ est le nombre d'enfants de l'individu $j \in \mathbb{N}^*$ dans la génération $n \in \mathbb{N}$.

Comme Ω n'est pas dénombrable, on ne choisit pas l'ensemble de ses parties comme tribu.

Pour la génération $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{G}_k^n est la tribu (de parties de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$) engendrée par $X_1^n, X_2^n, \dots, X_k^n$, et \mathcal{G}^n est la tribu engendrée par $(\mathcal{G}_k^n)_{k \in \mathbb{N}^*}$. La tribu $\mathcal{G}^n = \sigma((\mathcal{G}_k^n)_{k \in \mathbb{N}^*})$ est la tribu engendrée par les événements cylindriques décrivant la génération n .

Pour chaque n , $\mathcal{F}_n = \sigma(\cup_{m \leq n} \mathcal{G}^m)$, la tribu engendrée par les $(X_j^m)_{m \leq n, j \in \mathbb{N}^*}$.

Enfin $\mathcal{F} = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$.

Pour chaque n , on munit la $n^{\text{ième}}$ génération de la loi produit infinie qui étend les lois produits finies définies sur \mathcal{G}_k^n :

$$P \left\{ \bigwedge_{j \leq k} X_j^n = x_j^n \right\} = \prod_{j \leq k} Q \{X_j^n = x_j^n\}$$

pour $(x_j^n)_{1 \leq j \leq k} \in \mathbb{N}^k$

On munit (Ω, \mathcal{F}) de la loi produit infinie qui étend les lois produits définies sur les n premières générations.

La taille des générations $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie récurrence. On a $Z_0 = 1$ et

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^n$$

Pour tout n , Z_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable (vérification par récurrence sur n)

Pour tout n , \mathcal{F}_{n-1} est indépendante de \mathcal{G}^n

Exercice 2

Espérance conditionnelle de Z_{n+1} sachant \mathcal{F}_{n-1} , $\sigma(Z_n)$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{Z_n} X_j^n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{j \leq Z_n} X_j^n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{j \leq Z_n} \mathbb{E}[X_j^n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{j \leq Z_n} \mathbb{E}[X_j^n] \\
 &= \sum_{j=1}^{Z_n} \mu \\
 &= \mu \times Z_n
 \end{aligned}$$

On peut même conclure :

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_n] = \mu \times Z_n$$

Exercice 3

$$\mathbb{E}Z_{n+1} = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_n]] = \mu \times \mathbb{E}Z_n$$

D'où :

$$\mathbb{E}Z_n = \mu^n$$

Exercice 4

Extinction dans le cas sous-critique

$$E = \cup_n \{Z_n = 0\} = \cup_n \cap_{m \geq n} \{Z_m = 0\}$$

$$\Omega \setminus E = \cap_n \{Z_n > 0\}$$

Pour chaque k

$$P\{\cap_n \{Z_n > 0\}\} \leq P\{Z_k > 0\}$$

Comme la suite des événements $\{Z_n > 0\}$ est décroissante,

$$P\{\cap_n \{Z_n > 0\}\} \leq \lim_n P\{Z_n > 0\}$$

. Comme

$$P\{Z_n > 0\} \leq \mathbb{E}Z_n$$

on conclut dans le cas sous-critique $\mu < 1$, que

$$P\{\cap_n \{Z_n > 0\}\} = 0$$

Soit

$$P\{E\} = 1$$

(extinction presque sûre).

Exercice 5

Une équation satisfaite par p_E

$$E = \cup_{k=1}^{\infty} \{Z_1 = k\} \cap_{j=1}^k E_j$$

$$\begin{aligned} p_E &= \mathbb{E} [\mathbb{E}[\mathbb{1}_E \mid Z_1]] \\ &= \mathbb{E} [p_E^{Z_1}] \\ &= G_Q(p_E) \end{aligned}$$

car $Z_1 \sim Q$.

La probabilité d'extinction satisfait l'équation :

$$p_E = G_Q(p_E)$$

La Figure 1 illustre le problème posé par l'équation $p_E = G_Q(p_E)$ lorsque la loi de reproduction Q est la loi de Poisson de paramètre $\mu = 1.5$. Les deux intersections entre la courbe en trait plein et la droite pointillée représentent les deux solutions de l'équation $p_E = G_Q(p_E)$.

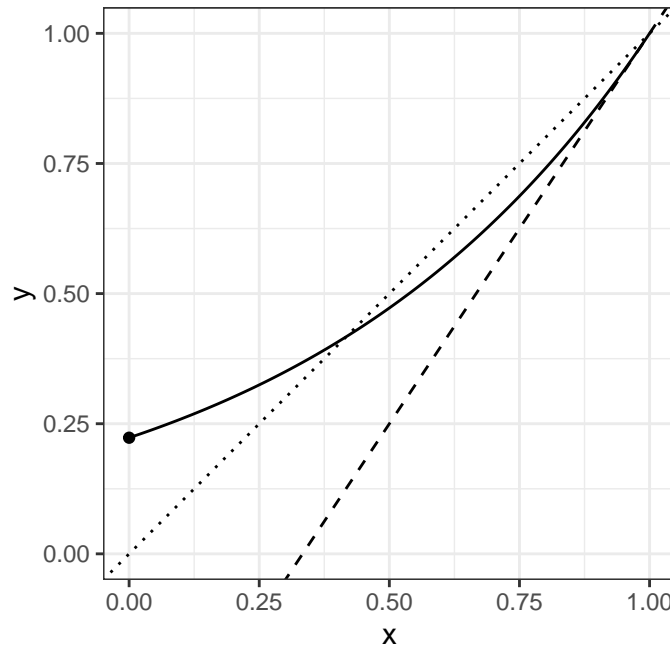


FIG. 1 : Fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\mu = 1.5$: $s \mapsto \exp(s(\mu - 1))$. La droite pointillée représente l'équation $y = x$. La droite en tiret l'équation $y = 1 + \mu(x - 1)$

Exercice 6

Étude des de l'équation $x = G_Q(x)$.

Comme série entière de rayon de convergence ≥ 1 , dérivable en 1, G_Q possède les propriétés suivantes :

- G_Q est croissante et convexe sur $[0, 1]$, indéfiniment dérivable sur $]0, 1[$
- La dérivée de G_Q en $x = 1$ est égale à l'espérance de la loi de reproduction Q , soit μ .

La fonction $x \mapsto G_Q(x) - x$ est convexe, de dérivée $G'_Q - 1$ sur $[0, 1]$.

Si $\mu < 1$, la dérivée croît jusqu'à 0 atteint en $x = 1$. $G_Q(x) - x$ décroît donc de $Q(0)$ à 0 entre 0 et 1. L'équation $x = G_Q(x)$ ne possède qu'une seule racine (triviale), $x = 1$. On retrouve le fait que p_E soit égal à 1 dans le cas sous-critique.

Si $\mu > 1$, $G'_Q(0) - 1 = Q(\{1\}) - 1 < 0$ et $G'_Q(1) - 1 = \mu - 1 > 0$, $G'_Q - 1$ s'annule en un $\theta \in]0, 1[$, est négative sur $[0, \theta]$, positive sur $[\theta, 1]$. La fonction $G_Q(x) - x$ décroît de 0 à θ , croît de θ à 1. Elle est positive en 0 et nulle en 1, elle s'annule donc une seule fois entre 0 et 1. Dans le cas sur-critique, l'équation $x = G_Q(x)$ admet une racine non-triviale entre 0 et 1.

Pour déterminer p_E dans le cas sur-critique, il faut déterminer la racine de l'équation $x = G_Q(x)$ qui est égale à p_E .

Exercice 7

Pour déterminer p_E dans le cas sur-critique, nous allons étudier la suite $(P\{Z_n = 0\})_n$. C'est une suite croissante, majorée par 1. Elle possède une limite dans $[0, 1]$, et $p_E = \lim_n \uparrow P\{Z_n = 0\}$.

On note $P\{Z_1 = 0\} = Q\{0\}$ ou encore $P\{Z_1 = 0\} = G_Q(0)$.

La relation entre $P\{Z_n = 0\}$ et G_Q est (relativement) simple et pas inattendue.

Si on note G_{Z_n} la fonction génératrice de la loi de Z_n , on a d'abord $G_{Z_1} = G_Q$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} \mid \sigma(Z_n)] &= \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n} \mid \sigma(Z_n)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_i^n} \mid \sigma(Z_n)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E}[s^{X_i^n} \mid \sigma(Z_n)] \\ &= \prod_{i=1}^{Z_n} G_Q(s) \\ &= (G_Q(s))^{Z_n}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$G_{Z_{n+1}}(s) = \mathbb{E}[(G_Q(s))^{Z_n}] = G_{Z_n}(G_Q(s))$$

D'où (par récurrence sur n) :

$$G_{Z_n} = \underbrace{G_Q \circ \dots \circ G_Q}_{n \text{ fois}}$$

Comme

$$P\{Z_n = 0\} = G_{Z_n}(0)$$

on a

$$P\{Z_n = 0\} = \underbrace{G_Q \circ \dots \circ G_Q}_{n \text{ fois}}(0)$$

la suite $P\{Z_n = 0\}$, vérifie la récurrence $u_{n+1} = G_Q(u_n)$ avec $u_1 = Q\{0\}$.

Notons τ la solution non-triviale de $x = G_Q(x)$.

Si $u \in [0, \tau[$, alors

$$u < G_Q(u) < \tau$$

Cette observation permet de déduire que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = G_Q(u_n)$ et $u_1 = Q\{0\}$ est croissante et majorée par τ . Elle admet une limite qui est un point fixe de G_Q , c'est donc τ .

On peut donc conclure que dans le cas sur-critique, la probabilité d'extinction est la solution non-triviale de l'équation $x = G_Q(x)$.