

i TD IV : Espérance conditionnelle/Catactérisations

- 29 Septembre 2025-2 octobre 2025
- Master I ISIFAR
- Probabilités

i Conventions

Dans les 3 exercices qui suivent, X_1, \dots, X_n, \dots constituent une famille indépendante de variables aléatoires identiquement distribuées à valeur dans $\{-1, 1\}$.

L'univers des possibles est $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Les X_i sont les projections canoniques.

On note \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les n premières coordonnées :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

L'univers est muni de la tribu des cylindres $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$.

On note Δ une constante à valeur dans $(0, 1)$ (la *dérivée* de la marche aléatoire).

On note \mathbb{P} la loi produit infini, telle que pour tout $x \in \{-1, 1\}^n$

$$\mathbb{P}\left\{\bigwedge_{i=1}^n X_i = x_i\right\} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 + x_i \Delta)$$

On étudie la marche aléatoire sur \mathbb{Z} de dérive Δ .

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

L'indice n représente le temps, S_n la position à l'instant n .

Exercice 1 (marches aléatoires biaisées i)

- Quelle est la loi de S_n ?
- S_n est-elle $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_{n+1}$ mesurable ?
- Quelle est l'espérance de S_n ?
- Quelle est la variance de S_n ?

i On admettra l'inégalité de Hoeffding :

Si Y_1, \dots, Y_n sont des variables aléatoires indépendantes telles que $a_i \leq Y_i \leq b_i$ (les Y_i sont bornées), alors

$$P\{Z - \mathbb{E}Z \geq t\} \leq e^{-2 \frac{t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}}$$

avec $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Exercice 2 (marches aléatoires biaisées ii)

Pour $0 \leq \tau \leq n\Delta$,

- Majorer $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$ à l'aide de l'inégalité de Chebyshev
- Majorer $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$ à l'aide de l'inégalité de Hoeffding
- L'ensemble

$$E = \{\omega : \forall n, S_n(\omega) < \tau\}$$

appartient-il à la tribu \mathcal{F}_m pour un m donné ? est-il un événement de \mathcal{F} ?

- Si E est un événement, quelle est sa probabilité ?

i Convention

On suppose $\tau \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On note $T = \inf \{n : S_n \geq \tau\}$. Si $\forall n, S_n(\omega) < \tau$, alors $T(\omega) = \infty$.

On note S_T , la fonction définie par

$$S_T(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T(\omega)=n} S_n(\omega) \quad \text{si } T(\omega) < \infty$$

et $S_T(\omega) = 0$ si $T(\omega) = \infty$.

Exercice 3 (marches aléatoires biaisées iii)

- Pourquoi peut-on considérer que T est une variable aléatoire (à valeur dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) ?
- Quelle est la probabilité que $T = \infty$?
- L'événement $\{T \leq n\}$ est-il $\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}$ mesurable ?
- Pourquoi peut-on considérer que S_T est une variable aléatoire ?
- Quelle est l'espérance de S_T ?
- Montrer que $\mathbb{E}S_T = \Delta \mathbb{E}T$. En déduire $\mathbb{E}T$.

Exercice 4

Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sont des variables de Bernoulli de probabilité de succès $p \in (0, 1)$, indépendantes. On définit $T_1 = \min\{i : X_i = 1\}$ (temps du premier succès), $T_1 = \min\{i : i > T_1, X_i = 1\}$ (temps du premier succès après T_1), et récursivement $T_{n+1} = \min\{i : i > T_n, X_i = 1\}$ (temps du $n+1$ ème succès).

On admet l'existence d'un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) où $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, \mathcal{F} est une tribu pour laquelle les X_i sont mesurables, et P tel que X_1, \dots, X_n, \dots est une famille indépendante.

- T_1 et plus généralement T_n sont-elles des variables aléatoires ?
- Calculer $P\{T_1 > k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- Calculer $P\{T_1 = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- Calculer $\mathbb{E}T_1$.
- Calculer $P\{T_1 = k \wedge T_2 = k + j\}$ pour $k, j \in \mathbb{N}$.
- Calculer $P\{T_2 = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- Calculer $\mathbb{E}T_2$.
- Calculer $\mathbb{E}T_n$.

Exercice 5

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n et de n boules. Les boules sont réparties de manière uniforme dans les urnes (chaque boule se comporte de manière indépendante des autres et a probabilité $1/n$ de tomber dans chaque urne). On note U_i la variable aléatoire désignant le nombre de boules qui tombent dans l'urne i . Soit $\alpha > 1$ un réel.

- Déterminer la loi de U_i .
- Montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \log n) \leq n \mathbb{P}(U_1 > \alpha \log n).$$

- Calculer $\mathbb{E}(\exp(U_1))$.
- Montrer que pour tout $\beta > -n$, on a $(1 + \beta/n)^n \leq \exp(\beta)$.
- Montrer que $\mathbb{P}(U_1 > \alpha \log n) \leq \frac{\exp(\exp(\alpha)-1)}{n^\alpha}$.
- En déduire que si $\alpha > 1$, on a

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \log n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice 6 (Restitution Organisée de Connaissances)

- Soient A, B, C trois événements dans un espace probabilisé. A-t-on toujours : $A \perp\!\!\!\perp B$ et $B \perp\!\!\!\perp C \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp C$?

- Soient P et Q deux lois de probabilités sur (Ω, \mathcal{F}) , on définit l'ensemble $\mathcal{M} = \{A : A \in \mathcal{F}, P(A) = Q(A)\}$. Répondre par *vrai/faux/je ne sais pas* aux questions suivantes :
 - \mathcal{M} est-il toujours une classe monotone ?
 - \mathcal{M} est-il toujours une σ -algèbre ?
 - \mathcal{M} est-il toujours une π -classe ?
- Soient G et F sont deux fonctions génératrices de probabilité. Répondre par *vrai/faux* aux questions suivantes :
 - Est-il vrai que $G \times F$ est toujours une fonction génératrice ?
 - Est-il vrai que $G + F$ est toujours une fonction génératrice de probabilité ?
 - Est-il vrai que $\lambda G + (1 - \lambda)F$ avec $\lambda \in [0, 1]$ est toujours une fonction génératrice de probabilité ?
- Si \hat{F} est la fonction caractéristique de la loi de X , et si $\epsilon \perp\!\!\!\perp X$, avec $P\{\epsilon = 1\} = P\{\epsilon = -1\} = 1/2$, quelle est la fonction caractéristique de la loi de ϵX ?

Exercice 7

Si X est une variable aléatoire positive intégrable, la version *biaisée par la taille* de X est la variable aléatoire X^* dont la loi Q est absolument continue par rapport à celle de X (notée P) et dont la densité (par rapport à celle de X) est proportionnelle à X :

$$\frac{dQ}{dP}(x) = \frac{x}{\mathbb{E}X}.$$

- Caractériser X^* lorsque X est une Bernoulli.
- Caractériser X^* lorsque X est binomiale.
- Caractériser X^* lorsque X est Poisson.
- Caractériser X^* lorsque X est Gamma.
- Si X est à valeurs entières, exprimer la fonction génératrice de X^* en fonction de celle de X .
- Exprimer la transformée de Laplace de X^* en fonction de celle de X .
- Si U est une transformée de Laplace, dérivable à droite en 0, $U'/U'(0)$ est-elle la transformée de Laplace d'une loi sur $[0, \infty)$?

Exercice 8

i Rappel

La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$,

- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, donner une densité de la loi de $Y = \exp(X)$ (Loi log-normale). Calculer l'espérance et la variance de Y .
- Même question si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, donner une densité de la loi de $Z = Y/X$ (Loi de Student à 1 degré de liberté)
- Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, donner une densité de la loi de $W = Y/\sqrt{X^2}$.
- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et ϵ vaut ± 1 avec probabilité $1/2$ (variable de Rademacher) avec $X \perp\!\!\!\perp \epsilon$, donner une densité de la loi de $Y = \epsilon X$. Y et X sont-elles indépendantes ?

Exercice 9

Principe de réflexion

Dans cet exercice, X_1, X_2, \dots sont des variables de Rademacher indépendantes ($P\{X_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$), $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$ et $M_n = \max_{k \leq n} S_k$.

Montrer que, pour $a > 0$,

$$P\{M_n > a\} \leq 2P\{S_n > a\}$$

i Statistique des rangs/Statistiques d'ordre

Les statistiques d'ordre $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ d'un n -échantillon X_1, \dots, X_n d'observations indépendantes identiquement distribuées sont formées par le réarrangement croissant (convention) de l'échantillon.

Quand n est clair d'après le contexte on peut les noter $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.

Exercice 10

- Vérifier que la loi jointe des statistiques d'ordre est absolument continue par rapport à la loi de l'échantillon.
- On suppose que X est une variable aléatoire réelle, absolument continue, de densité continue. Montrer que l'échantillon est presque sûrement formé de valeurs deux à deux distinctes.
- Donner la densité de la loi jointe des statistiques d'ordre.
- Si la loi des X_i définie par sa fonction de répartition F , admet une densité f , quelle est la densité de la loi de $X_{k:n}$ pour $1 \leq k \leq n$?
- Montrer que conditionnellement à $X_{k:n} = x$, la suite

$$(X_{i:n} - X_{k:n})_{i=k+1, \dots, n}$$

est distribuée comme les statistiques d'ordre d'un $n - k$ échantillon de la loi d'excès au dessus de x (fonction de survie $\bar{F}(x + \cdot)/\bar{F}(x)$) avec la convention $\bar{F} = 1 - F$.

- Si X_1, \dots, X_n est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité $\mathbb{1}_{x>0}e^{-x}$), et $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ les statistiques d'ordre associées, montrer que :
- avec la convention $X_{0:n} = 0$, les écarts $(X_{i:n} - X_{i-1:n})_{1 \leq i \leq n}$ (*spacings*) forment une collection de variables aléatoires indépendantes ;
- $X_{i:n} - X_{i-1:n}$ est distribuée selon une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{i}$.
- Maintenant, X_1, \dots, X_n est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité $\mathbb{1}_{x>0}e^{-x}$), et $X_{n:n} \geq X_{n-1:n} \geq \dots \geq X_{1:n}$ les statistiques d'ordre associées, et $(k_n)_n$ est une suite croissante d'entiers qui tend vers l'infini, telle que k_n/n tende vers une limite finie (éventuellement nulle). Montrer que

$$\frac{X_{k_n:n} - \mathbb{E}X_{k_n:n}}{\sqrt{\text{var}(X_{k_n:n})}}$$

converge en loi vers une Gaussienne centrée réduite.