TD IV : Espérance conditionnelle/Catactérisations

- 29 Septembre 2025-2 octobre 2025
- Master I ISIFAR
- **Probabilités**

Conventions

Dans les 3 exercices qui suivent, $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ constituent une famille indépendante de variables aléatoires identiquement distribuées à valeur dans $\{-1, 1\}$.
L'univers des possibles est $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Les X_i sont les projections canoniques.
On note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les n premières coordonnées :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$$

L'univers est muni de la tribu des cylindres $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right)$.
On note Δ une constante à valeur dans $(0, 1)$ (la *dérive* de la marche aléatoire).
On note $\mathbb{P}$ la loi produit infini, telle que pour tout $x \in \{-1, 1\}^n$

$$\mathbb{P}\left\{\bigwedge_{i=1}^{n} X_i = x_i\right\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(1 + x_i\Delta)$$

On étudie la marche alétoire sur $\mathbb{Z}$ de dérive Δ.
On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
L'indice n représente le temps, S_n la position à l'instant n.

Solution

Exercice 1 (marches aléatoires biaisées i)

a. Quelle est la loi de S_n ?
b. S_n est-elle $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_{n+1}$ mesurable ?
c. Quelle est l'espérance de S_n ?
d. Quelle est la variance de S_n ?

On admettra l'inégalité de Hoeffding :

Si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que $a_i \leq Y_i \leq b_i$ (les Y_i sont bornées), alors

$$P\{Z - \mathbb{E}Z \geq t\} \leq \mathrm{e}^{-2\frac{t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}}$$

avec $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Exercice 2 (marches aléatoires biaisées ii)

Pour $0 \leq \tau \leq n\Delta$,

a. Majorer $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$ à l'aide de l'inégalité de Chebyshev
b. Majorer $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$ à l'aide de l'inégalité de Hoeffding
c. L'ensemble

$$E = \{\omega : \forall n, S_n(\omega) < \tau\}$$

appartient-il à la tribu $\mathcal{F}_m$ pour un m donné ? est-il un événement de $\mathcal{F}$?
d. Si E est un événement, quelle est sa probabilité ?

Solution

Convention

On suppose $\tau \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
On note $T = \inf\{n : S_n \geq \tau\}$. Si $\forall n, \quad S_n(\omega) < \tau$, alors $T(\omega) = \infty$.
On note S_T, la fonction définie par

$$S_T(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T(\omega)=n} S_n(\omega) \qquad \text{si } T(\omega) < \infty$$

et $S_T(\omega) = 0$ si $T(\omega) = \infty$.

Exercice 3 (marches aléatoires biaisées iii)

a. Pourquoi peut-on considérer que T est une variable aléatoire (à valeur dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) ?
b. Quelle est la probabilité que $T = \infty$?
c. L'événement $\{T \leq n\}$ est-il $\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}$ mesurable ?
d. Pourquoi peut-on considérer que S_T est une variable aléatoire ?
e. Quelle est l'espérance de S_T ?
f. Montrer que $\mathbb{E}S_T = \Delta \mathbb{E}T$ En déduire $\mathbb{E}T$.

Solution

Exercice 4

Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sont des variables de Bernoulli de probabilité de succès $p \in (0,1)$, indépendantes. On définit $T_1 = \min\{i : X_i = 1\}$ (temps du premier succès), $T_2 = \min\{i : i > T_1, X_i = 1\}$ (temps du premier succès après T_1), et récursivement $T_{n+1} = \min\{i : i > T_n, X_i = 1\}$ (temps du $n+1$eme succès).

On admet l'existence d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ où $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$ est une tribu pour laquelle les X_i sont mesurables, et P tel que $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ est une famille indépendante.

a. T_1 et plus généralement T_n sont-elles des variables aléatoires ?
b. Calculer $P\{T_1 > k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
c. Calculer $P\{T_1 = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$
d. Calculer $\mathbb{E}T_1$.
e. Calculer $P\{T_1 = k \wedge T_2 = k + j\}$ pour $k, j \in \mathbb{N}$
f. Calculer $P\{T_2 = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$
g. Calculer $\mathbb{E}T_2$
h. Calculer $\mathbb{E}T_n$

Solution

a. Les événements de la forme $\{T_n \leq m\}$ sont dans $\sigma(X_1, \ldots X_m)$, car la seule connaissance de $X_1, \ldots, X_m$ suffit pour déterminer si le $i^{(eme)}$ succès survient avant le temps m. Donc les événements de la forme $\{T_n \leq m\}$ sont tous dans la tribu des cylindres $\sigma(\cup_m \sigma(X_1, \ldots X_m))$. Tout événement de la forme $\{T_n \in A\}$ avec $A \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, appartient à la tribu engendrée par les événements $\{T_n \leq m\}$, donc à la tribu $\sigma(\cup_m \sigma(X_1, \ldots X_m))$.
b. $P\{T_1 > k\} = (1-p)^k$ (T_1 suit une loi géométrique)
c. $P\{T_1 = k\} = P\{T_1 > k-1\} - P\{T_1 > k\} = (1-p)^{k-1}p$ pour $k \geq 1$
d. $\mathbb{E}T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} P\{T_1 > k\} = \frac{1}{p}$
e. $P\{T_1 = k \wedge T_2 = k+j\} = (1-p)^{k-1}p(1-p)^{j-1}p$ pour $k, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $T_1 \perp\!\!\!\perp T_2 - T_1$ et $T_2 - T_1 \sim T_1$
f. $P\{T_2 = k\} = \sum_{j=1}^{k-1}(1-p)^{j-1}p(1-p)^{k-j-1}p = p\binom{k-1}{1}(1-p)^{k-2}p$ pour $k \geq 2$
g. $\mathbb{E}T_2 = 2\mathbb{E}T_1 = \frac{2}{p}$
h. $\mathbb{E}T_n = n\mathbb{E}T_1 = \frac{n}{p}$

Exercice 5

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n et de n boules. Les boules sont réparties de manière uniforme dans les urnes (chaque boule se comporte de manière indépendante des autres et a probabilité $1/n$ de tomber dans chaque urne). On note U_i la variable aléatoire désignant le nombre de boules qui tombent dans l'urne i. Dans la suite $\alpha > 1$ est un réel.

a. Déterminer la loi de U_i.
b. Montrer que l'on a :
$$\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} U_i > \alpha \ln n) \leq n\mathbb{P}(U_1 > \alpha \ln n).$$
c. Calculer $\mathbb{E}(\exp(U_1))$.
d. Montrer que pour tout $\beta > -n$, on a $(1+\beta/n)^n \leq \exp(\beta)$.
e. Montrer que $\mathbb{P}(U_1 > \alpha \ln n) \leq \frac{\exp(\exp(\alpha)-1)}{n^\alpha}$.
f. En déduire que si $\alpha > 1$, on a
$$\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} U_i > \alpha \ln n) \to_{n\to\infty} 0.$$

Solution

a. $U_i \sim \text{Binom}(n, 1/n)$
b. Les U_i ne sont pas indépedantes (on a toujours $\sum_{i=1}^n U_i = n$), mais elles sont identiquement distribuées.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} U_i > \alpha \ln n) &= \mathbb{P}(\cup_{1\leq i\leq n}\{U_i > \alpha \ln n\}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{U_i > \alpha \ln n\}) \\ &= n\mathbb{P}(\{U_1 > \alpha \ln n\})\end{aligned}$$

c. $\mathbb{E}(\exp(U_1)) = \left(1+\frac{1}{n}(\mathrm{e}-1)\right)^n \leq \exp(\mathrm{e}-1)$
d. En utilisant l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} U_i > \alpha \ln n) &\leq n\mathbb{P}(\{U_1 > \alpha \ln n\}) \\ &\leq n\frac{\mathbb{E}(\exp(U_1))}{n^\alpha} \\ &\leq \frac{\exp(\mathrm{e}-1)}{n^{\alpha-1}}\end{aligned}$$

Exercice 6 (Restitution Organisée de Connaissances)

- Soient A, B, C trois événements dans un espace probabilisé. A-t-on toujours : $A \perp\!\!\!\perp B$ et $B \perp\!\!\!\perp C \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp C$?
- Soient P et Q deux lois de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on définit l'ensemble $\mathcal{M} = \{A : A \in \mathcal{F}, P(A) = Q(A)\}$. Répondre par *vrai/faux/je ne sais pas* aux questions suivantes :

  a. $\mathcal{M}$ est-il toujours une classe monotone ?
  b. $\mathcal{M}$ est-il toujours une σ-algèbre ?
  c. $\mathcal{M}$ est-il toujours une π-classe ?

- Soient G et F sont deux fonctions génératrices de probabilité. Répondre par *vrai/faux* aux questions suivantes :

  a. Est-il vrai que $G \times F$ est toujours une fonction génératrice ?
  b. Est-il vrai que $G + F$ est toujours une fonction génératrice de probabilité ?
  c. Est-il vrai que $\lambda G + (1-\lambda)F$ avec $\lambda \in [0, 1]$ est toujours une fonction génératrice de probabilité ?

- Si $\widehat{F}$ est la fonction caractéristique de la loi de X, et si $\epsilon \perp\!\!\!\perp X$, avec $P\{\epsilon = 1\} = P\{\epsilon = -1\} = 1/2$, quelle est la fonction caractéristique de la loi de ϵX ?

Solution

Exercice 7

Si X est une variable aléatoire positive intégrable, la version *biaisée par la taille* de X est la variable aléatoire X^* dont la loi Q est absolument continue par rapport à celle de X (notée P) et dont la densité (par rapport à celle de X) est proportionnelle à X :

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(x) = \frac{x}{\mathbb{E}X} \, .$$

a. Caractériser X^* lorsque X est une Bernoulli.
b. Caractériser X^* lorsque X est binomiale.
c. Caractériser X^* lorsque X est Poisson.
d. Caractériser X^* lorsque X est Gamma.
e. Si X est à valeurs entières, exprimer la fonction génératrice de X^* en fonction de celle de X.
f. Exprimer la transformée de Laplace de X^* en fonction de celle de X.
g. Si U est une transformée de Laplace, dérivable à droite en 0, $U'/U'(0)$ est-elle la transformée de Laplace d'une loi sur $[0, \infty)$?

Solution

Exercice 8

Rappel

La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$,

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, donner une densité de la loi de $Y = \exp(X)$ (Loi log-normale). Calculer l'espérance et la variance de Y.
- Même question si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, donner une densité de la loi de $Z = Y/X$ (Loi de Student à 1 degré de liberté)
- Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, donner une densité de la loi de $W = Y/\sqrt{X^2}$.
- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et ϵ vaut ± 1 avec probabilité 1/2 (variable de Rademacher) avec $X \perp\!\!\!\perp \epsilon$, donner une densité de la loi de $Y = \epsilon X$. Y et X sont-elles indépendantes ?

Exercice 9

Principe de réflexion

Dans cet exercice, $X_1, X_2, \ldots$ sont des variables de Rademacher indépendantes ($P\{X_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$), $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, S_0 = 0$ et $M_n = \max_{k \le n} S_n$.

Montrer que, pour $a > 0$,

$$P\{M_n > a\} \le 2P\{S_n > a\}$$

Statistique des rangs/Statistiques d'ordre

Les statistiques d'ordre $X_{1:n} \le X_{2:n} \le X_{n:n}$ d'un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ d'observations indépendantes identiquement distribuées sont formées par le réarrangement croissant (convention) de l'échantillon.
Quand n est clair d'après le contexte on peut les noter $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(n)}$.

Exercice 10

a. Vérifier que la loi jointe des statistiques d'ordre est absolument continue par rapport à la loi de l'échantillon.

b. On suppose que X est une variable aléatoire réelle, absolument continue, de densité continue. Montrer que l'échantillon est presque sûrement formé de valeurs deux à deux distinctes.

c. Donner la densité de la loi jointe des statistiques d'ordre.

d. Si la loi des X_i définie par sa fonction de répartition F, admet une densité f, quelle est la densité de la loi de $X_{k:n}$ pour $1 \leq k \leq n$?

e. Montrer que conditionnellement à $X_{k:n} = x$, la suite

$$(X_{i:n} - X_{k:n})_{i=k+1,\ldots,n}$$

est distribuée comme les statistiques d'ordre d'un $n-k$ échantillon de la loi d'excès au dessus de x (fonction de survie $\overline{F}(x+\cdot)/\overline{F}(x)$) avec la convention $\overline{F} = 1 - F$).

f. Si $X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité $\mathbb{I}_{x>0}\mathrm{e}^{-x}$), et $X_{n :n} X_{n-1 :n} … X_{1 :n} $ les statistiques d'ordre associées, montrer que :

g. avec la convention $X_{0:n} = 0$, les écarts $(X_{i:n} - X_{i-1:n})_{1 \leq i \leq n}$ (*spacings*) forment une collection de variables aléatoires indépendantes ;

h. $X_{i:n} - X_{i-1:n}$ est distribuée selon une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{i}$.

i. Maintenant, $X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité $\mathbb{I}_{x>0}\mathrm{e}^{-x}$), et $X_{n:n} \geq X_{n-1:n} \geq \ldots \geq X_{1:n}$ les statistiques d'ordre associées, et $(k_n)_n$ est une suite croissante d'entiers qui tend vers l'infini, telle que k_n/n tende vers une limite finie (éventuellement nulle). Montrer que

$$\frac{X_{k_n:n} - \mathbb{E}X_{k_n:n}}{\sqrt{\mathrm{var}(X_{k_n:n})}}$$

converge en loi vers une Gaussienne centrée réduite.

Solution