

**i TD IV : Espérance conditionnelle/Catactérisations**

- 29 Septembre 2025-2 octobre 2025
- Master I ISIFAR
- Probabilités

**i Conventions**

Dans les 3 exercices qui suivent,  $X_1, \dots, X_n, \dots$  constituent une famille indépendante de variables aléatoires identiquement distribuées à valeur dans  $\{-1, 1\}$ .

L'univers des possibles est  $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Les  $X_i$  sont les projections canoniques.

On note  $\mathcal{F}_n$  la tribu engendrée par les  $n$  premières coordonnées :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

L'univers est muni de la tribu des cylindres  $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$ .

On note  $\Delta$  une constante à valeur dans  $(0, 1)$  (la *dérivée* de la marche aléatoire).

On note  $\mathbb{P}$  la loi produit infini, telle que pour tout  $x \in \{-1, 1\}^n$

$$\mathbb{P}\left\{\bigwedge_{i=1}^n X_i = x_i\right\} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 + x_i \Delta)$$

On étudie la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  de dérive  $\Delta$ .

On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

L'indice  $n$  représente le temps,  $S_n$  la position à l'instant  $n$ .

**Exercice 1 (marches aléatoires biaisées i)**

- Quelle est la loi de  $S_n$  ?
- $S_n$  est-elle  $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_{n+1}$  mesurable ?
- Quelle est l'espérance de  $S_n$  ?
- Quelle est la variance de  $S_n$  ?

**i On admettra l'inégalité de Hoeffding :**

Si  $Y_1, \dots, Y_n$  sont des variables aléatoires indépendantes telles que  $a_i \leq Y_i \leq b_i$  (les  $Y_i$  sont bornées), alors

$$P\{Z - \mathbb{E}Z \geq t\} \leq e^{-2 \frac{t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}}$$

avec  $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$ .

**Exercice 2 (marches aléatoires biaisées ii)**

Pour  $0 \leq \tau \leq n\Delta$ ,

- Majorer  $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$  à l'aide de l'inégalité de Chebyshev
- Majorer  $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$  à l'aide de l'inégalité de Hoeffding
- L'ensemble

$$E = \{\omega : \forall n, S_n(\omega) < \tau\}$$

appartient-il à la tribu  $\mathcal{F}_m$  pour un  $m$  donné ? est-il un événement de  $\mathcal{F}$  ?

- Si  $E$  est un événement, quelle est sa probabilité ?

### **i Convention**

On suppose  $\tau \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

On note  $T = \inf \{n : S_n \geq \tau\}$ . Si  $\forall n, S_n(\omega) < \tau$ , alors  $T(\omega) = \infty$ .

On note  $S_T$ , la fonction définie par

$$S_T(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T(\omega)=n} S_n(\omega) \quad \text{si } T(\omega) < \infty$$

et  $S_T(\omega) = 0$  si  $T(\omega) = \infty$ .

### **Exercice 3 (marches aléatoires biaisées iii)**

- Pourquoi peut-on considérer que  $T$  est une variable aléatoire (à valeur dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) ?
- Quelle est la probabilité que  $T = \infty$  ?
- L'événement  $\{T \leq n\}$  est-il  $\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}$  mesurable ?
- Pourquoi peut-on considérer que  $S_T$  est une variable aléatoire ?
- Quelle est l'espérance de  $S_T$  ?
- Montrer que  $\mathbb{E}S_T = \Delta \mathbb{E}T$ . En déduire  $\mathbb{E}T$ .

### **Exercice 4**

Les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  sont des variables de Bernoulli de probabilité de succès  $p \in (0, 1)$ , indépendantes. On définit  $T_1 = \min\{i : X_i = 1\}$  (temps du premier succès),  $T_1 = \min\{i : i > T_1, X_i = 1\}$  (temps du premier succès après  $T_1$ ), et récursivement  $T_{n+1} = \min\{i : i > T_n, X_i = 1\}$  (temps du  $n + 1$ ème succès).

On admet l'existence d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  où  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{F}$  est une tribu pour laquelle les  $X_i$  sont mesurables, et  $P$  tel que  $X_1, \dots, X_n, \dots$  est une famille indépendante.

- $T_1$  et plus généralement  $T_n$  sont-elles des variables aléatoires ?
- Calculer  $P\{T_1 > k\}$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
- Calculer  $P\{T_1 = k\}$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
- Calculer  $\mathbb{E}T_1$ .
- Calculer  $P\{T_1 = k \wedge T_2 = k + j\}$  pour  $k, j \in \mathbb{N}$ .
- Calculer  $P\{T_2 = k\}$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
- Calculer  $\mathbb{E}T_2$ .
- Calculer  $\mathbb{E}T_n$ .

### **Exercice 5**

On dispose de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$  et de  $n$  boules. Les boules sont réparties de manière uniforme dans les urnes (chaque boule se comporte de manière indépendante des autres et a probabilité  $1/n$  de tomber dans chaque urne). On note  $U_i$  la variable aléatoire désignant le nombre de boules qui tombent dans l'urne  $i$ . Soit  $\alpha > 1$  un réel.

- Déterminer la loi de  $U_i$ .
- Montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \log n) \leq n \mathbb{P}(U_1 > \alpha \log n).$$

- Calculer  $\mathbb{E}(\exp(U_1))$ .
- Montrer que pour tout  $\beta > -n$ , on a  $(1 + \beta/n)^n \leq \exp(\beta)$ .
- Montrer que  $\mathbb{P}(U_1 > \alpha \log n) \leq \frac{\exp(\exp(\alpha)-1)}{n^\alpha}$ .
- En déduire que si  $\alpha > 1$ , on a

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \log n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

### **Exercice 6 (Restitution Organisée de Connaissances)**

- Soient  $A, B, C$  trois événements dans un espace probabilisé. A-t-on toujours :  $A \perp\!\!\!\perp B$  et  $B \perp\!\!\!\perp C \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp C$  ?

- Soient  $P$  et  $Q$  deux lois de probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , on définit l'ensemble  $\mathcal{M} = \{A : A \in \mathcal{F}, P(A) = Q(A)\}$ . Répondre par *vrai/faux/je ne sais pas* aux questions suivantes :
  - $\mathcal{M}$  est-il toujours une classe monotone ?
  - $\mathcal{M}$  est-il toujours une  $\sigma$ -algèbre ?
  - $\mathcal{M}$  est-il toujours une  $\pi$ -classe ?
- Soient  $G$  et  $F$  sont deux fonctions génératrices de probabilité. Répondre par *vrai/faux* aux questions suivantes :
  - Est-il vrai que  $G \times F$  est toujours une fonction génératrice ?
  - Est-il vrai que  $G + F$  est toujours une fonction génératrice de probabilité ?
  - Est-il vrai que  $\lambda G + (1 - \lambda)F$  avec  $\lambda \in [0, 1]$  est toujours une fonction génératrice de probabilité ?
- Si  $\hat{F}$  est la fonction caractéristique de la loi de  $X$ , et si  $\epsilon \perp\!\!\!\perp X$ , avec  $P\{\epsilon = 1\} = P\{\epsilon = -1\} = 1/2$ , quelle est la fonction caractéristique de la loi de  $\epsilon X$  ?

### Exercice 7

Si  $X$  est une variable aléatoire positive intégrable, la version *biaisée par la taille* de  $X$  est la variable aléatoire  $X^*$  dont la loi  $Q$  est absolument continue par rapport à celle de  $X$  (notée  $P$ ) et dont la densité (par rapport à celle de  $X$ ) est proportionnelle à  $X$  :

$$\frac{dQ}{dP}(x) = \frac{x}{\mathbb{E}X}.$$

- Caractériser  $X^*$  lorsque  $X$  est une Bernoulli.
- Caractériser  $X^*$  lorsque  $X$  est binomiale.
- Caractériser  $X^*$  lorsque  $X$  est Poisson.
- Caractériser  $X^*$  lorsque  $X$  est Gamma.
- Si  $X$  est à valeurs entières, exprimer la fonction génératrice de  $X^*$  en fonction de celle de  $X$ .
- Exprimer la transformée de Laplace de  $X^*$  en fonction de celle de  $X$ .
- Si  $U$  est une transformée de Laplace, dérivable à droite en 0,  $U'/U'(0)$  est-elle la transformée de Laplace d'une loi sur  $[0, \infty)$  ?

### Exercice 8

#### **i** Rappel

La loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$  admet pour densité  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ ,

- Si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , donner une densité de la loi de  $Y = \exp(X)$  (Loi log-normale). Calculer l'espérance et la variance de  $Y$ .
- Même question si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Si  $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , avec  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , donner une densité de la loi de  $Z = Y/X$  (Loi de Student à 1 degré de liberté)
- Si  $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , avec  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , donner une densité de la loi de  $W = Y/\sqrt{X^2}$ .
- Si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $\epsilon$  vaut  $\pm 1$  avec probabilité  $1/2$  (variable de Rademacher) avec  $X \perp\!\!\!\perp \epsilon$ , donner une densité de la loi de  $Y = \epsilon X$ .  $Y$  et  $X$  sont-elles indépendantes ?

### Exercice 9

Principe de réflexion

Dans cet exercice,  $X_1, X_2, \dots$  sont des variables de Rademacher indépendantes ( $P\{X_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$ ),  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S_0 = 0$  et  $M_n = \max_{k \leq n} S_k$ .

Montrer que, pour  $a > 0$ ,

$$P\{M_n > a\} \leq 2P\{S_n > a\}$$

### **i Statistique des rangs/Statistiques d'ordre**

Les statistiques d'ordre  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  d'un  $n$ -échantillon  $X_1, \dots, X_n$  d'observations indépendantes identiquement distribuées sont formées par le réarrangement croissant (convention) de l'échantillon.

Quand  $n$  est clair d'après le contexte on peut les noter  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ .

#### **Exercice 10**

- Vérifier que la loi jointe des statistiques d'ordre est absolument continue par rapport à la loi de l'échantillon.
- On suppose que  $X$  est une variable aléatoire réelle, absolument continue, de densité continue. Montrer que l'échantillon est presque sûrement formé de valeurs deux à deux distinctes.
- Donner la densité de la loi jointe des statistiques d'ordre.
- Si la loi des  $X_i$  définie par sa fonction de répartition  $F$ , admet une densité  $f$ , quelle est la densité de la loi de  $X_{k:n}$  pour  $1 \leq k \leq n$  ?
- Montrer que conditionnellement à  $X_{k:n} = x$ , la suite

$$(X_{i:n} - X_{k:n})_{i=k+1, \dots, n}$$

est distribuée comme les statistiques d'ordre d'un  $n - k$  échantillon de la loi d'excès au dessus de  $x$  (fonction de survie  $\bar{F}(x + \cdot)/\bar{F}(x)$ ) avec la convention  $\bar{F} = 1 - F$ .

- Si  $X_1, \dots, X_n$  est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité  $\mathbb{1}_{x>0}e^{-x}$ ), et  $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$  les statistiques d'ordre associées, montrer que :
- avec la convention  $X_{0:n} = 0$ , les écarts  $(X_{i:n} - X_{i-1:n})_{1 \leq i \leq n}$  (*spacings*) forment une collection de variables aléatoires indépendantes ;
- $X_{i:n} - X_{i-1:n}$  est distribuée selon une loi exponentielle d'espérance  $\frac{1}{i}$ .
- Maintenant,  $X_1, \dots, X_n$  est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité  $\mathbb{1}_{x>0}e^{-x}$ ), et  $X_{n:n} \geq X_{n-1:n} \geq \dots \geq X_{1:n}$  les statistiques d'ordre associées, et  $(k_n)_n$  est une suite croissante d'entiers qui tend vers l'infini, telle que  $k_n/n$  tende vers une limite finie (éventuellement nulle). Montrer que

$$\frac{X_{k_n:n} - \mathbb{E}X_{k_n:n}}{\sqrt{\text{var}(X_{k_n:n})}}$$

converge en loi vers une Gaussienne centrée réduite.