

CC I :

- 7 Octobre 2025
- Master I ISIFAR
- Durée : 1 heure 30
- **Probabilités**

- Aide-mémoire : une feuille A4 recto verso autorisée
- Aucun autre document autorisé
- Aucun moyen de communication électronique autorisé

Exercice 1.

Soit X une variable binomiale à paramètres n (fixé) et V aléatoire uniformément distribué sur $[0, 1]$ ($X \sim \text{Binom}(n, V)$).

- i. Calculer la fonction génératrice des probabilités de la loi de X
- ii. Quelle est l'espérance de X ?
- iii. Que vaut $P\{X = k\}$ pour $k \in \{0, n\}$?

Solution

- (1) On utilisera le fait que si $Y_i \sim_{\text{i.i.d.}} \text{Berp}(p)$, alors $\sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{Binom}(n, p)$. La fonction génératrice de $\text{Binom}(n, p)$ s'écrit donc

$$s \mapsto (1 - p + ps)^n$$

et

$$\mathbb{E}[s^X \mid \sigma(V)] = (1 - V + Vs)^n$$

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \mathbb{E}[s^X] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^X \mid \sigma(V)]] \\ &= \mathbb{E}[(1 - V + Vs)^n] \\ &= \int_{[0,1]} (1 - v + vs)^n \, dv \\ &= \left[\frac{1}{(n+1)(s-1)} (1 - v + vs)^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{s^{n+1} - 1}{(n+1)(s-1)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} s^k. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice des probabilités de la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$

- (2) L'espérance coïncide avec la dérivée de G_X en 1. Elle vaut $\frac{n}{2}$.
- (3) $P\{X = k\} = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2.

On se donne un processus de branchement avec une distribution de reproduction Poissonnienne de paramètre $\mu > 0$. On note $Z_0 = 1, Z_1, \dots$ les effectifs des différentes générations.

- i. Calculer la fonction génératrice de la loi de Z_2
- ii. Quelle est la probabilité que l'extinction ait lieu exactement à la génération 2 ?
- iii. Quelle est la probabilité que l'extinction ait lieu exactement à la génération n ?

Solution

- (4) On G_μ la fonction génératrice des probabilités de Poisson(μ), G_n la fonction génératrice des probabilités de la loi de Z_n .

$$G_n = \underbrace{G_\mu \circ G_\mu \circ \dots \circ G_\mu}_{n \text{ fois}}$$

avec

$$G_\mu(s) = \exp(\mu(s-1))$$

(5)

$$P\{\text{Extinction à la génération 2}\} = P\{Z_2 = 0 \vee Z_1 > 0\} = P\{Z_2 = 0\} - P\{Z_1 = 0\}$$

$$P\{\text{Extinction à la génération 2}\} = G_2(0) - G_1(0)$$

$$\begin{aligned} P\{\text{Extinction exactement à la génération 2}\} &= \exp(-\mu(1 - \exp(-\mu))) - \exp(-\mu) \\ &= \exp(-\mu) (\exp(\exp(-\mu)) - 1) \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} P\{\text{Extinction exactement à la génération } n\} &= P\{Z_n = 0 \vee Z_{n-1} > 0\} \\ &= P\{Z_n = 0\} - P\{Z_{n-1} = 0\} \end{aligned}$$

$$P\{\text{Extinction exactement à la génération } n\} = G_n(0) - G_{n-1}(0)$$

$$\begin{aligned} P\{\text{Extinction exactement à la génération } n\} &= \underbrace{G_\mu \circ G_\mu \circ \dots \circ G_\mu}_{n \text{ fois}}(0) - \underbrace{G_\mu \circ G_\mu \circ \dots \circ G_\mu}_{n-1 \text{ fois}}(0) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Solution Chat-GPT 3.5

On a un processus de Galton–Watson avec loi de reproduction Poisson(μ). Notons la fonction génératrice de la loi des descendants

$$f(s) = \mathbb{E}[s^\xi] = \exp(\mu(s-1)),$$

où $\xi \sim \text{Poisson}(\mu)$.

i) Fonction génératrice de Z_2

La fonction génératrice de Z_n est la $n^{\text{ième}}$ composition de f avec elle-même, donc pour $n = 2$

$$G_{Z_2}(s) = f(f(s)) = \exp\left(\mu(\exp(\mu(s-1)) - 1)\right).$$

ii) Probabilité que l'extinction ait lieu *exactement* à la génération (2)

L'évènement « extinction exactement à la génération 2 » est $Z_1 > 0$ et $Z_2 = 0$. On peut écrire

$$\mathbb{P}(Z_2 = 0, Z_1 > 0) = \mathbb{P}(Z_2 = 0) - \mathbb{P}(Z_1 = 0).$$

Or

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0) = f(0) = e^{-\mu} \text{ et } \mathbb{P}(Z_2 = 0) = G_{Z_2}(0) = f(f(0)) = \exp(\mu(e^{-\mu} - 1)).$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{extinction exactement en 2}) = \exp(\mu(e^{-\mu} - 1)) - e^{-\mu}}$$

On peut obtenir la même formule en conditionnant sur $Z_1 = k$ et sommant

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Z_1 = k) \times e^{-\mu k}$$

Exercice 3.

Soit $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$ (loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$), on définit $Y = \cos(X)$.

- La loi de Y est-elle absolument continue ?
- Si oui, déterminer une version de sa densité.

Solution

- (7) Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, \cos croît de 0 à 1 puis décroît de 1 à 0. La fonction \cos est paire. Pour $x \in [0, 1]$

$$P\{\cos(U) \leq x\} = 2 \times P\left\{\arccos(x) \leq U \leq \frac{\pi}{2}\right\} = 1 - \frac{2 \arccos(x)}{\pi}$$

La fonction de répartition est continue, dérivable et elle égale à l'intégrale de sa dérivée qui s'annule en 0. La loi de Y est donc absolument continue, à support $[0, 1]$.

- (8) Une version continue de la densité est obtenue en dérivant la fonction de répartition :

$$x \mapsto \frac{2}{\pi \sin(\arccos(x))} = \frac{2}{\pi \sqrt{1-x^2}}$$

pour $x \in [0, 1]$

Solution Chat-GPT 3.5

La loi de Y est absolument continue (sans atome) et on peut donner explicitement sa

densité.

Remarquons d'abord que \cos envoie l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[0, 1]$. Pour $y \in (0, 1)$ les équations $\cos x = y$ ont exactement deux solutions dans $[-\pi/2, \pi/2]$, à savoir $x_1 = \arccos y$ et $x_2 = -\arccos y$. La densité de (la loi de) X est $f_X(x) = \frac{1}{\pi}$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

En utilisant la formule de changement de variable pour fonctions non monotones :

$$f_Y(y) = \sum_{x: \cos x = y} \frac{f_X(x)}{|(\cos)'(x)|} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{|-\sin(\arccos y)|} + \frac{1}{|-\sin(-\arccos y)|} \right).$$

Or $\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2}$ et les deux termes sont égaux, d'où pour $y \in (0, 1)$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - y^2}}.$$

Enfin $f_Y(y) = 0$ pour $y \notin [0, 1]$. (Les points $y = 0$ et $y = 1$ n'ont pas d'atome : la densité diverge en 0 et 1 mais ces points ont probabilité nulle.)

Critique de Chat-GPT 3.5

La propriété *absolue continuité* n'est pas équivalente à la propriété *être sans atome* (*diffuse*). La ou plutôt les lois de Cantor sont des exemples de lois sans atomes qui ne sont pas absolument continues.

La *formule de changement de variable pour fonctions non monotones* est vaseuse, on ne sait pas d'où elle sort, ni quel est son domaine d'application.

La discussion sur la divergence de la densité à la fin est elle aussi vaseuse.

Exercice 4.

Soit X_1, \dots, X_n, \dots des variables aléatoires distribuées indépendamment selon une loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$, $P\{X_1 \geq t\} = t^{-\alpha}$, $t \geq 1$. Soit N indépendante des X_i , distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. On définit Z par $Z = \max_{i \leq N} X_i$.

Remarque : Si $N = 0$, on convient de $\max_{i \leq N} X_i = 0$.

- i. Calculer la fonction de répartition de la loi de Z .
- ii. La loi de Z possède-t-elle une espérance finie ?

Solution

(9) On note $F_\alpha(x) = 1 - t^{-\alpha}$ pour $t > 1$, 0 sinon.

Pour $x > 1$, on a

$$\begin{aligned}
 F_Z(x) &= P\{Z \leq x\} \\
 &= \mathbb{E} [\mathbb{I}_{Z \leq x}] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^N \mathbb{I}_{X_i \leq x} \mid \sigma(N) \right] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^N \mathbb{E} [\mathbb{I}_{X_i \leq x}] \right] \\
 &= \mathbb{E} [(1 - x^{-\alpha})^N] \\
 &= \exp(\mu(1 - x^{-\alpha} - 1)) \\
 &= \exp(-\mu x^{-\alpha})
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $x \in [0, 1]$, $F_Z(x) = P\{N = 0\} = \exp(-\mu) = \lim_{x \downarrow 1} F_Z(x)$

(10) Z est positive, son espérance est bien définie et donnée par

$$\mathbb{E}Z = \int_0^\infty (1 - F_Z(t))dt$$

$$\int_0^\infty (1 - F_Z(x))dx = (1 - \exp(-\mu)) + \int_1^\infty (1 - \exp(-\mu x^{-\alpha})) dx$$

Si $\alpha > 1$, en utilisant $1 - \exp(-x) \leq x$ on vérifie que l'intégrale à droite est finie. L'espérance de Z est finie

Si $\alpha \leq 1$, l'intégrale est divergente, $\mathbb{E}Z$ est infinie (Z n'est pas intégrable).

Solution Chat-GPT 3.5

Rappel : $N \sim \text{Poisson}(\mu)$ indépendant des X_i , et pour tout $t \geq 1$ $P(X_1 \geq t) = t^{-\alpha}$, donc $P(X_1 \leq t) = 1 - t^{-\alpha}$.

i) Fonction de répartition de $Z = \max_{1 \leq i \leq N} X_i$ (avec convention $\max_{i \leq 0} X_i = 0$)

Pour $t < 0$ on a évidemment $F_Z(t) = 0$. Pour $0 \leq t < 1$ tous les X_i valent ≥ 1 , donc $Z \leq t = N = 0$ et

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(N = 0) = e^{-\mu}.$$

Pour $t \geq 1$, conditionnons sur N :

$$P(Z \leq t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) \times P(\max_{1 \leq i \leq k} X_i \leq t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} (1 - t^{-\alpha})^k.$$

La somme donne une exponentielle :

$$F_Z(t) = e^{-\mu} \exp(\mu(1 - t^{-\alpha})) = \exp(-\mu t^{-\alpha}), \quad t \geq 1.$$

Ainsi, de façon compacte (et continue en $t=1$) :

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\mu} & 0 \leq t < 1 \\ \exp(-\mu t^{-\alpha}) & t \geq 1. \end{cases}$$

ii) Existence (ou non) de l'espérance de Z

Utilisons la formule $E[Z] = \int_0^\infty P(Z > t) dt$. Avec la CDF ci-dessus :

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^1 (1 - e^{-\mu}) dt + \int_1^\infty (1 - e^{-\mu t^{-\alpha}}) dt = 1 - e^{-\mu} + \int_1^\infty (1 - e^{-\mu t^{-\alpha}}) dt.$$

Pour étudier la convergence de la seconde intégrale, posons $u = t^{-\alpha}$ (donc pour $t \in [1, \infty)$, $u \in (0, 1]$). On obtient

$$\int_1^\infty (1 - e^{-\mu t^{-\alpha}}) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (1 - e^{-\mu u}) u^{-1/\alpha-1} du.$$

Quand $u \rightarrow 0^+$, $1 - e^{-\mu u} \sim \mu u$, donc l'intégrande se comporte comme une constante fois $u^{-1/\alpha}$. L'intégrale $\int_0^1 u^{-1/\alpha} du$ converge près de 0 si et seulement si $-1/\alpha > -1$, i.e. si et seulement si $\alpha > 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{E}[Z] < \infty \iff \alpha > 1.}$$

Si $\alpha > 1$, une expression utile est

$$\boxed{\mathbb{E}[Z] = 1 - e^{-\mu} + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (1 - e^{-\mu u}) u^{-1/\alpha-1} du.}$$

(Autrement dit l'espérance est finie pour $\alpha > 1$ et infinie pour $\alpha \leq 1$.)

Exercice 5.

Le couple aléatoire (X, Y) à valeur sur $]0, \infty)^2$ admet pour densité f .

- Si elle existe, quelle est la densité de la loi de XY (une expression intégrale peut suffire) ?
- Préciser la densité lorsque X, Y sont indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 1]$

Solution

- La transformation $]0, \infty)^2 \rightarrow]0, \infty)^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$ est bijective, continuellement différentiable, de matrice Jacobienne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ partout inversible et de déterminant Jacobien x .

La loi de $\begin{pmatrix} X \\ XY \end{pmatrix}$ admet une densité sur $]0, \infty)^2$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \frac{f(u, v/u)}{u}$$

La densité de la loi de XY sur $]0, \infty)$ en v est obtenue en intégrant :

$$\int_{]0, \infty)} \frac{1}{u} f(u, v/u) du$$

- Dans cette configuration $f(x, y) = \mathbb{1}_{0 < x < 1} \mathbb{1}_{0 < y < 1}$. Pour $v \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}\int_{]0,\infty)} \frac{1}{u} f(u, v/u) du &= \int_{]0,\infty)} \mathbb{1}_{0 < u < 1} \mathbb{1}_{0 < v/u < 1} \frac{1}{u} du \\ &= \int_v^1 \frac{1}{u} du \\ &= \ln \frac{1}{v}.\end{aligned}$$

La fonction de répartition associée est $v \mapsto v - v \ln v$.