

**i CC I :**

- 7 Octobre 2025
- Master I ISIFAR
- Durée : 1 heure 30
- **Probabilités**



- Aide-mémoire : une feuille A4 recto verso autorisée
- Aucun autre document autorisé
- Aucun moyen de communication électronique autorisé

**Exercice 1**

Soit  $X$  une variable binomiale à paramètres  $n$  (fixé) et  $V$  aléatoire uniformément distribué sur  $[0, 1]$  ( $X \sim \text{Binom}(n, V)$ ).

- Calculer la fonction génératrice de la loi de  $X$
- Quelle est l'espérance de  $X$  ?
- Que vaut  $P\{X = k\}$  pour  $k \in \{0, n\}$  ?

**Exercice 2**

On se donne un processus de branchement avec une distribution de reproduction Poissonnienne de paramètre  $\mu > 0$ . On note  $Z_0 = 1, Z_1, \dots$  les effectifs des différentes générations.

- Calculer la fonction génératrice de la loi de  $Z_2$
- Quelle est la probabilité que l'extinction ait lieu exactement à la génération 2 ?
- Quelle est la probabilité que l'extinction ait lieu exactement à la génération  $n$  ?

**Exercice 3**

Soit  $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$  (loi uniforme sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ ), on définit  $Y = \cos(X)$ .

- La loi de  $Y$  est-elle absolument continue ?
- Si oui, déterminer une version de sa densité.

**Exercice 4**

Soit  $X_1, \dots, X_n, \dots$  des variables aléatoires distribuées indépendamment selon une loi de Pareto de paramètre  $\alpha > 0$ ,  $P\{X_1 \geq t\} = t^{-\alpha}$ ,  $t \geq 1$ . Soit  $N$  indépendante des  $X_i$ , distribuée selon une loi de Poisson de paramètre  $\mu > 0$ . On définit  $Z$  par  $Z = \max_{i \leq N} X_i$ .

*Remarque :* Si  $N = 0$ , on convient de  $\max_{i \leq N} X_i = 0$ .

- Calculer la fonction de répartition de la loi de  $Z$ .
- La loi de  $Z$  possède-t-elle une espérance finie ?

**Exercice 5**

Le couple aléatoire  $(X, Y)$  à valeur sur  $]0, \infty)^2$  admet pour densité  $f$ .

Quelle est la densité de la loi de  $XY$  ?