TD V : Convergences

- 6 Octobre 2025-10 octobre 2025
- Master I ISIFAR
- **Probabilités**

Loi des grands nombres

Exercice 1

Exercice 2

Convergence en distribution

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

Exercice 6

Exercice 7

a. Si f est une fonction croissante sur $[a,b]$, on définit son inverse généralisée $f^{\leftarrow}$ par

$$f^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : x \in [a,b],\ f(x) \geq y\} \qquad \text{pour } y \in [f(a), f(b)]\,.$$

Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions croissantes sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ qui converge *simplement* vers f une autre fonction croissante sur $[a,b]$ en tout point de continuité de f, alors la suite $(f_n^{\leftarrow}(y))$ converge simplement vers $f^{\leftarrow}(y)$ en tout $y \in [f(a), f(b)]$ où $f^{\leftarrow}$ est continue.

b. Soit F une fonction de répartition, on définit la fonction quantile associée $F^{\leftarrow}$ par

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} \qquad \text{pour } p \in]0,1[\,.$$

Vérifier que si deux fonctions de répartitions ont même fonction quantiles alors elles sont égales.

Dans cette définition F est une fonction de répartition, $F^{\leftarrow}$ la fonction quantile associée.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, p \in]0,1[$,

c. $F^{\leftarrow}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F(x)$.

d. $F \circ F^{\leftarrow}(p) \geq p$ avec égalité si et seulement si il existe x tel que $F(x) = p$.\ Si $F \circ F^{\leftarrow}(p) > p$ alors $F^{\leftarrow}$ est discontinue en p.

e. $F^{\leftarrow} \circ F(x) \leq x$.\ Si $F^{\leftarrow} \circ F(x) < x$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $F(x - \epsilon) = F(x)$.

f. $(F \circ G)^{\leftarrow} = G^{\leftarrow} \circ F^{\leftarrow}$

Exercice 8

Si $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \ldots \leq Y_{n:n}$ forme les statistiques d'ordre d'un n-échantillon de la loi exponentielle d'espérance 1, et si $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ désigne les statistiques d'ordre d'un n-échantillon d'une loi de fonction de répartition F qui admet une densité partout positive, montrer que

$$(X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}) \sim (F^{\leftarrow}(1 - \exp(-Y_{1:n})), \ldots, F^{\leftarrow}(1 - \exp(-Y_{n:n})))\ .$$

La fonction quantile empirique $F_n^{\leftarrow}$ est la fonction quantile associée à la fonction de répartition empirique F_n. Si les points de l'échantillon sont deux à deux distincts

$$F_n^{\leftarrow}(p) = X_{k:n} \qquad \text{pour } \frac{k-1}{n} < p \leq \frac{k}{n}\,.$$

Soit F une fonction de répartition qui est dérivable en $F^{\leftarrow}(p)$ de dérivée non nulle notée $f(p)$ pour une valeur $p \in]0,1[$. Montrer que

$$\sqrt{n}\,(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p)) + \sqrt{n}\frac{1}{f(p)}\,(F_n(F^{\leftarrow}(p)) - p) = o_P(1)\,.$$

Quelle est la loi limite de $\sqrt{n}\,(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p))$?