CC I :

- 7 Octobre 2025
- Master I ISIFAR
- Durée : 1 heure 30
- **Probabilités**

- Aide-mémoire : une feuille A4 recto verso autorisée
- Aucun autre document autorisé
- Aucun moyen de communication électronique autorisé

Exercice 1.

Soit X une variable binomiale à paramètres n (fixé) et V aléatoire uniformément distribué sur $[0, 1]$ ($X \sim \text{Binom}(n, V)$).

i. Calculer la fonction génératrice des probabilités de la loi de X
ii. Quelle est l'espérance de X ?
iii. Que vaut $P\{X = k\}$ pour $k \in \{0, n\}$?

Exercice 2.

On se donne un processus de branchement avec une distribution de reproduction Poissonienne de paramètre $\mu > 0$. On note $Z_0 = 1, Z_1, \ldots$ les effectifs des différentes générations.

i. Calculer la fonction génératrice de la loi de Z_2
ii. Quelle est la probabilité que l'extinction ait lieu exactement à la génération 2 ?
iii. Quelle est la probabilité que que l'extinction ait lieu exactement à la génération n ?

Exercice 3.

Soit $X \sim \mathrm{U}(-\pi/2, \pi/2)$ (loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$), on définit $Y = \cos(X)$.

i. La loi de Y est-elle absolument continue ?
ii. Si oui, déterminer une version de sa densité.

Exercice 4.

Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires distribuées indépendamment selon une loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$, $P\{X_1 \geq t\} = t^{-\alpha}, t \geq 1$. Soit N indépendante des X_i, distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. On définit Z par $Z = \max_{i \leq N} X_i$.

Remarque : Si $N = 0$, on convient de $\max_{i \leq N} X_i = 0$.

i. Calculer la fonction de répartition de la loi de Z.
ii. La loi de Z possède-t-elle une espérance finie ?

Exercice 5.

Le couple aléatoire (X, Y) à valeur sur $]0, \infty)^2$ admet pour densité f.

i. Si elle existe, quelle est la densité de la loi de XY (une expression intégrale peut suffire) ?
ii. Préciser la densité lorsque X, Y sont indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 1]$