TẬP ĐỘC LẬP CỰC ĐẠI TRÊN ĐỒ THỊ HAI PHÍA

Phạm Lê Quang

A. Bài toán: Tập độc lập cực đại trên đồ thị hai phía(Maximum Independent set on bipartite graph)

Cho đồ thị hai phía G = ($X \cup Y$, E), trong đó X, Y là tập đỉnh và E là tập cạnh.

Một tập hợp con IS của $X \cup Y$ được gọi là tập độc lập nếu như với $\forall u, v \in IS$ thì $(u, v) \notin E$.

Tập độc lập IS được gọi là cực đại trên G nếu như không tồn tại một tập độc lập IS' nào khác trên G mà $|IS'| > |IS|$

Bài toán đặt ra: Tìm một tập độc lập cực đại trên đồ thị 2 phía G. **(1)**

B. Hướng giải quyết:

1. Xét bài toán ngược: Tập phủ đỉnh cực tiểu trên đồ thị hai phía (Minimum vertex covering on the bipartite graph)

Cho đồ thị hai phía G = (X ∪ Y, E), hãy chỉ ra một tập S gồm ít nhất các đỉnh sao cho với $\forall(u, v) \in E$ thì ít nhất một trong 2 đỉnh u, v phải $\in S$. Ta gọi S là tập phủ đỉnh cực tiểu trên G.

Các đỉnh còn lại sau khi giải bài toán trên sẽ là các đỉnh thuộc tập độc lập cực đại. Hay nói cách khác, $IS = \{X \cup Y\} \setminus S$ **(2)**

Chứng minh khẳng định *(2)*:

a. *Chứng minh IS gồm là một tập độc lập:*

Giả sử tồn tại một cặp $u, v \in IS$ mà cạnh $(u, v) \in E$ thì khi đó ta phải có ít nhất một trong 2 đỉnh u, v phải $\in S$. Điều này trái với cách chọn tập IS ở trên.

Vậy ta có với $\forall u, v \in IS$ thì $(u, v) \notin E$. Suy ra IS là một tập độc lập.

b. *Chứng minh IS là cực đại:*

Giả sử tồn tại một tập độc lập lập IS' trên G mà $|IS'| > |IS|$ thì suy ra sẽ tồn tại một tập phủ đỉnh $S' = \{X \cup Y\} \backslash IS'$ trên G mà $|S'| < |S|$. Điều này vô lý vì S là tập phủ đỉnh cực tiểu trên G.

Vậy không tồn tại tập độc lập IS' nào khác trên G mà $|IS'| > |IS|$. Suy ra IS là cực đại.

<u>2. Giải bài toán "Tập phủ đỉnh cực tiểu":</u>

a. Ta đưa bài toán này về mô hình luồng bằng cách:

Thêm vào 2 đỉnh giả s và t. Xây dựng các cung nối s với tất cả các đỉnh thuộc tập X, và các cung nối mọi đỉnh thuộc Y với t, với khả năng thông qua ∞. Đặt khả năng thông qua của các đỉnh thuộc X và Y là 1, các cung nối giữa các đỉnh thuộc X và Y là ∞.

Tìm luồng cực đại và lát cắt $s - t$ hẹp nhất. Lát cắt này chắc chắn cắt tại các đỉnh và những đỉnh bị cắt đó sẽ được chọn vào tập S.

(Lát cắt chia tập đỉnh thành 2 tập con là L và R. Lát cắt cắt tại đỉnh u có nghĩa là nếu ta coi u là một cung có dạng (ux, uy) thì $ux \in L$ và $uy \in R$)

<u>Tại sao lát cắt hẹp nhất chắc chắn cắt tại các đỉnh?</u>

Giả sử lát cắt hẹp nhất cắt cung (u, v) với $u \in X, v \in Y$, thì dễ thấy nếu ta thay nhát cắt đó bằng nhát cắt đi qua đỉnh u hoặc đỉnh v sẽ có lợi hơn, vì ngoài cung (u, v) ta còn có thể cắt được một số cung khác liên thuộc với u hoặc v mà vẫn chỉ tốn chi phi tương đương.

<u>Tại sao tập S được chọn theo cách này là tập phủ đỉnh cực tiểu?</u>

1. *S là tập phủ đỉnh:*

   Giả sử tồn tại cạnh $(u, v) \in E$ mà cả u và v đều không $\in S$ thì suy ra ta vẫn còn một đường đi từ s đến t là $s \to u \to v \to t$. (Vô lý)

   Chứng tỏ với $\forall (u, v) \in E$ thì ít nhất một trong 2 đỉnh u, v phải $\in S$. Suy ra S là một tập phủ đỉnh trên G.

2. *S cực tiểu:*

   Lát cắt ta chọn là lát cắt $s - t$ hẹp nhất, tức là có khả năng thông qua nhỏ nhất (bằng giá trị luồng cực đại trên mạng). Mặt khác, mỗi đỉnh thuộc lát cắt có khả năng thông qua là 1. Điều này cho thấy khả năng thông qua của lát cắt chính bằng tổng số đỉnh trong tập S. Do khả năng thông qua là nhỏ nhất nên số đỉnh trong tập S sẽ là cực tiểu.

Vậy S là tập phủ đỉnh cực tiểu.

b. Đưa bài toán từ dạng luồng về dạng đơn giản hơn để dùng cặp ghép

Vấn đề của bài toán bây giờ chỉ là tìm luồng cực đại trên mạng rồi xác định lát cắt hẹp nhất.

Nhớ lại thuật toán Ford-Fulkerson, ta biết rằng để xác định lát cắt $s-t$ hẹp nhất, ta chỉ cần quan tâm đến lần tìm đường tăng luồng cuối cùng không thành công. Trong lần tìm đường này, những đỉnh nào đến được từ s sẽ được chọn vào một tập L, các đỉnh còn lại (không đến được từ s nhưng chắc chắn đến được t) sẽ thuộc tập R kia. Các cung thuộc lát cát sẽ là các cung (u, v) với $u \in L$, $v \in R$.

Trong bài toán này, ta đang làm việc trên đồ thị 2 phía, nên việc tìm luồng cực đại cũng tương đương với việc tìm bộ ghép cực đại trên G. Việc chọn các cung thuộc lát cắt chính là việc chọn ra một số đỉnh thuộc tập $X \cup Y$. Ta hãy xem xét 2 trường hợp:

1. *Đỉnh được chọn thuộc tập Y: $v \in Y$*

   Điều này có nghĩa là, khi ta tìm đường tăng luồng lần cuối cùng, ta đến được đỉnh $v \in Y$ thông qua một đỉnh $u \in X$.

   Xem xét dưới góc độ của bài toán tìm bộ ghép thì đỉnh u này hiển nhiên chưa được ghép (vì nếu nó được ghép rồi, có nghĩa là luồng tại đỉnh u đó đã đạt tới khả năng thông qua của nó, khi đó thì ta sẽ không thể đi qua u để đến v).

2. *Đỉnh được chọn thuộc tập X: $u \in X$*

   Xem xét dưới góc độ luồng thì luồng tại u lúc này phải đạt tới khả năng thông qua của đỉnh u.

   Nhìn dưới góc độ cặp ghép, thì đỉnh u này đã được ghép với một đỉnh $v \in Y$ mà v không được chọn.

<u>Dựa vào 2 nhận xét trên, ta có thể chuyển bài toán về mô hình bài toán tìm bộ ghép cực đại như sau:</u>

- *Tìm bộ ghép cực đại trên G.*

- *Khi tìm xong bộ ghép, tức là thủ tục tìm đường mở không tìm ra đường mở, ta xác định được:*

  Tập Y là tập các đỉnh $v \in Y$ mà đến được từ một trong số các đỉnh chưa ghép $u \in X$, qua một đường pha.*

  Tập X là tập các đỉnh đã ghép $u \in X$ mà đỉnh ghép với nó là $v \notin Y^*$*
- *Tập S = X* ∪ Y**

Đến đây, tập độc lập cực đại cũng đã được tìm ra: $IS = \{X \cup Y\} \backslash S$

Thuật toán trên là đúng vì nó được suy trực tiếp từ mô hình luồng, mà ta đã chứng minh thuật toán trên mô hình luồng hoạt động đúng.

Ta cũng có thể chứng minh trực tiếp mà không cần động đến bài toán luồng, như sau:

1. ***Chứng minh S là tập phủ đỉnh:***

   Giả sử còn tồn tại một cạnh $(u, v) \in E$ mà cả $u, v \notin S$. Ta có các trường hợp:
   - Nếu u không được ghép: Suy ra v là một đỉnh đến được từ một đỉnh chưa ghép thuộc X (Vô lý – vì nếu thế, v phải được chọn vào S rồi)
   - Nếu u đã ghép với một đỉnh $v' \in Y$: Thì $v' \in S$ (để cạnh (u, v') có ít nhất 1 đỉnh thuộc S). Suy ra v' đến được từ một đỉnh $u' \in X$ chưa ghép. Suy ra ta có đường $u' \to v' \to u \to v$, tức là v đến được từ một đỉnh u' chưa ghép. (Vô lý – vì nếu thế, v phải được chọn vào S rồi.)

   Vậy rõ ràng $\forall (u, v) \in E$ thì ít nhất một trong 2 đỉnh u, v phải $\in S$. Do đó S là tập phủ đỉnh.

2. ***Chứng minh S là cực tiểu:***

   Nhận xét đầu tiên là với cách chọn của ta, mỗi cạnh trong bộ ghép cực đại đều có duy nhất một đỉnh thuộc S.

   Chứng minh điều trên rất đơn giản: Nhìn lại bước 1, ta chọn các đỉnh $v \in Y$ đến được từ một đỉnh $u \in X$ chưa ghép, nên hiển nhiên đỉnh v này đã được ghép rồi (vì nếu không ta có một đường mở). Tiếp tục nhìn bước 2, ta chọn các đỉnh $u \in X$ đã ghép mà đỉnh ghép với nó chưa được chọn. Dễ thấy với mỗi cặp được ghép (u, v) ta chỉ lấy hoặc u hoặc v mà thôi.

   Do đó số đỉnh ta chọn đúng bằng số cạnh M trong bộ ghép cực đại.

   Số đỉnh này là nhỏ nhất vì tối thiểu ta cũng phải chọn ra M đỉnh để phủ hết M cạnh (do các cạnh này không chung đỉnh với nhau).

Vậy S là tập phủ đỉnh cực tiểu.

C. Kết luận:

Như vậy ta đã giải quyết được cả 2 bài toán về tập độc lập cực đại và tập phủ đỉnh cực tiểu trên đồ thị hai phía mà chỉ đơn giản dùng kiến thức về cặp ghép.

Tham khảo: DSAP Text book – Thầy Lê Minh Hoàng