数字图象分析

中国科学技术大学
信息科学技术学院
电子工程与信息科学系
李厚强，周文罡
Email: {lihq, zhwg}@ustc.edu.cn

课件下载：http://staff.ustc.edu.cn/~lihq/download/

第2.4章 图象变换

2.4.0 可分离和正交图象变换

2.4.1 离散傅立叶变换(DFT)

2.4.2 离散余弦变换(DCT)

2.4.3 哈达玛变换(WHT)

2.4.4 斜变换（ST）

2.4.5 K-L变换

2.4.6 小波变换

2.4.0 可分离和正交图象变换

1-D变换

正变换

$$T(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)h(x,u) \qquad u=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

正向变换核

反变换

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1} T(u)k(x,u) \qquad x=0,1,\cdots,N-1$$

反向变换核

2.4.0 可分离和正交图象变换

2-D可分离变换

（傅里叶变换是一个例子）

正向变换核

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)h(x,y,u,v) \quad (1)$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} T(u,v)k(x,y,u,v) \quad (2)$$

反向变换核

变换核与原始函数及变换后函数无关

2.4.0 可分离和正交图象变换

可分离

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_2(y,v)$$

1个2-D变换分成2个1-D变换

$$T(x,v)=\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)h_2(y,v) \qquad T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}T(x,v)h_1(x,u)$$

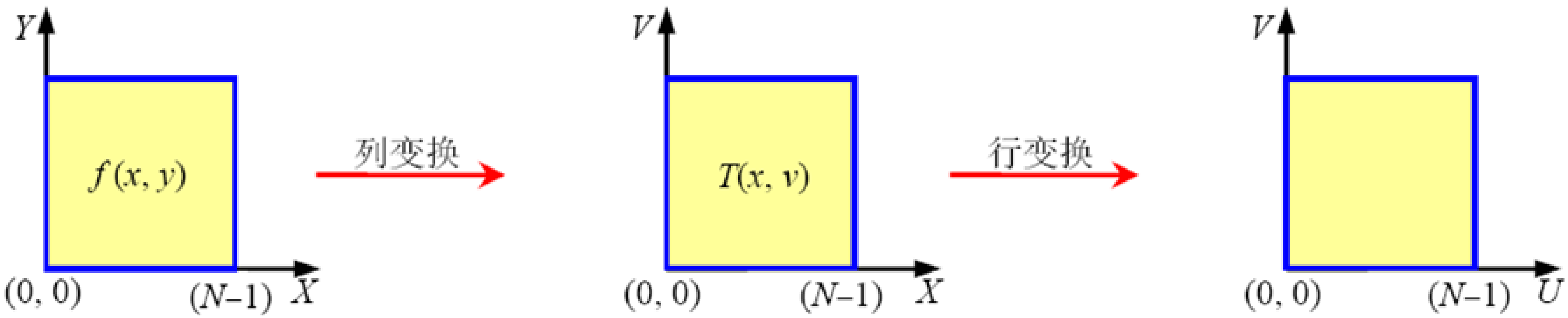
对称

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_1(y,v)$$

(h_1与h_2的函数形式一样)

2.4.0 可分离和正交图象变换

具有可分离变换核的2-D变换可以分成两个步骤计算，每个步骤用一个1-D变换



由 2 步 1-D 变换计算 2-D 变换

2.4.0 可分离和正交图象变换

可分离且对称

对称变换矩阵

变换结果

$$T = AFA$$

图象矩阵

反变换矩阵

$$BTB = BAFAB$$

$$F = BTB \qquad B = A^{-1}$$

$$\hat{F} = BAFAB \qquad B \neq A^{-1}$$

2.4.0 可分离和正交图象变换

正交

考虑变换矩阵： $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$　　$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{BTB}$

酉矩阵（*代表共轭）： $A^{-1} = A^{*T}$

如果A为实矩阵，且：

则A为正交矩阵，构成正交变换对

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

2.4.1 离散傅立叶变换(DFT)

- 二维离散傅立叶变换式

  对于N×N的二维矩阵（方阵）

  二维离散傅立叶变换对为：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp\left\{\frac{+2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

DFT矩阵的元素

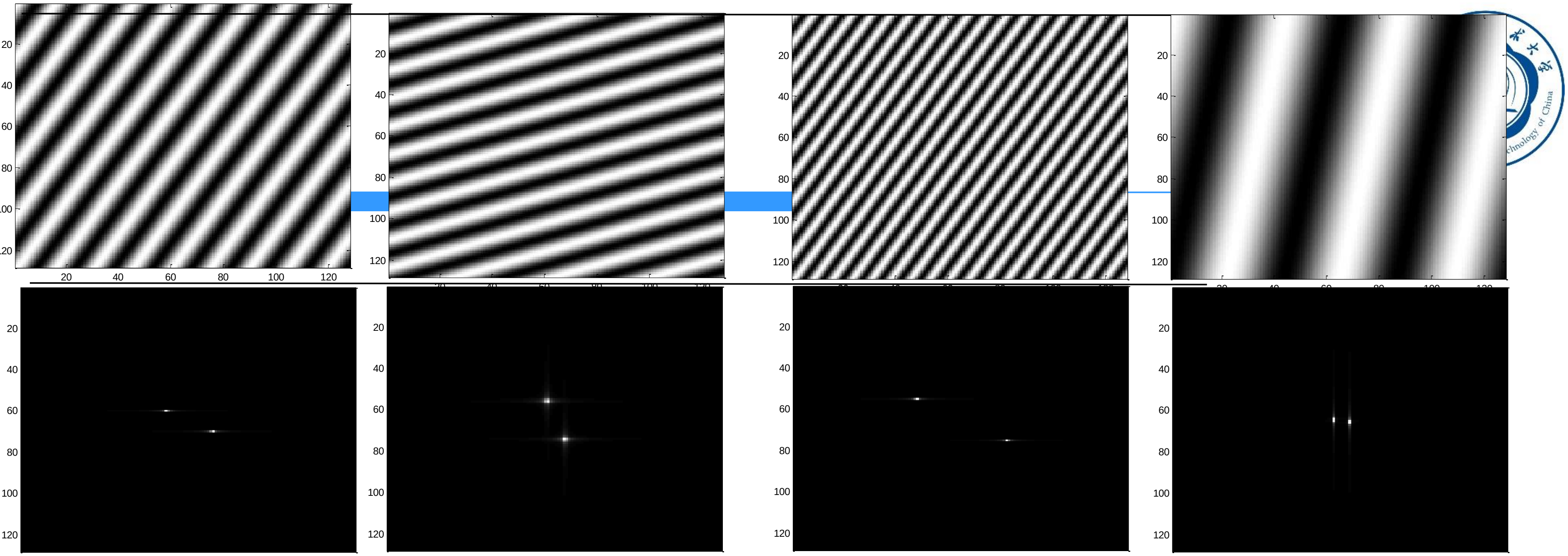
$$f_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi mn/N}$$

（适用于方阵）

二维DFT的性质

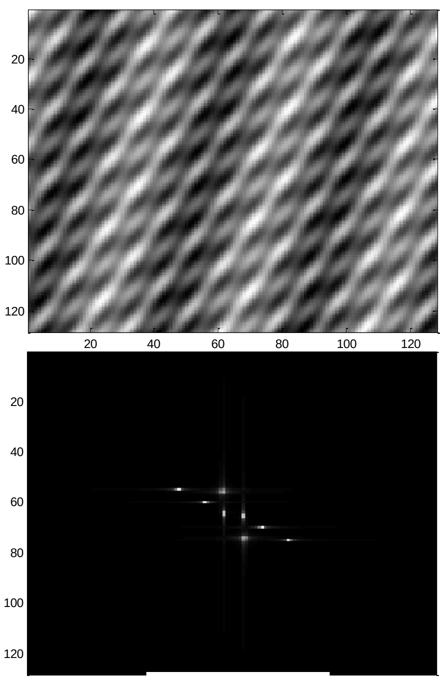
- **线性** $f_1(x,y)+f_2(x,y)$ $F_1(u,v)+F_2(u,v)$
- **比例** $f\ (ax,by)$ $\frac{1}{ab}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$
- **平移** $f(x-a,y-b)$ $e^{-j2\pi(au+bv)}F(u,v)$
  $e^{j2\pi(cx+dy)}f(x,y)$ $F(u-c,v-d)$
- **卷积** $f_1(x,y)*f_2(x,y)$ $F_1(u,v)F_2(u,v)$
  $f_1(x,y)f_2(x,y)$ $F_1(u,v)*F_2(u,v)$
- **旋转**

$$f(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+ycon\theta)$$
$$F(u\cos\theta+v\sin\theta,-u\sin\theta+vcon\theta)$$

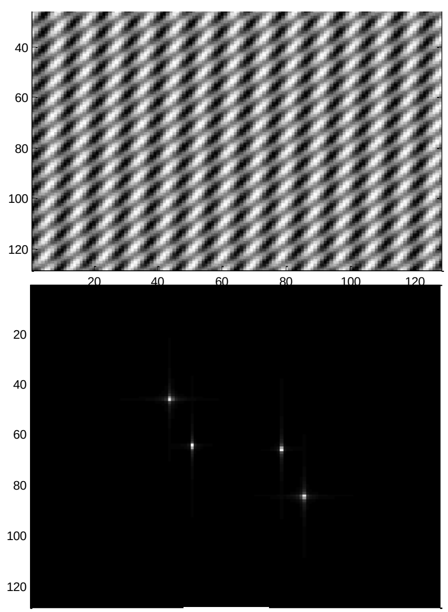


$F_1: R=10, \theta=30^O$ $F_2: R=10, \theta=70^O$ $F_3: R=20, \theta=30^O$ $F_4: R=5, \theta=10^O$

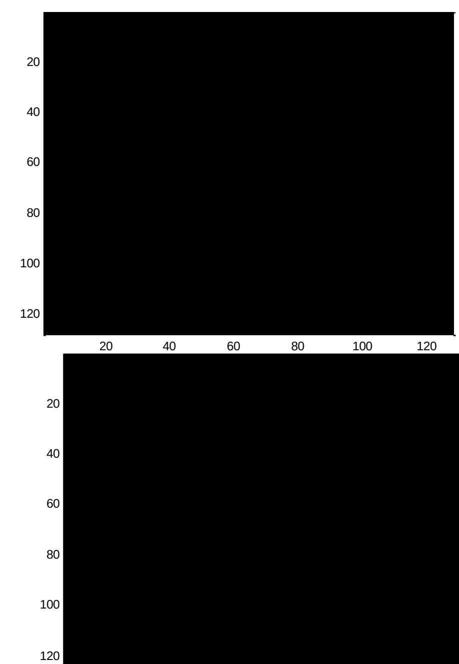
$$\cos[\frac{\pi}{N}(u \cdot x + v \cdot y)] \quad u = R\cos\theta, v = R\sin\theta$$



$F_1+F_2+F_3+F_4$

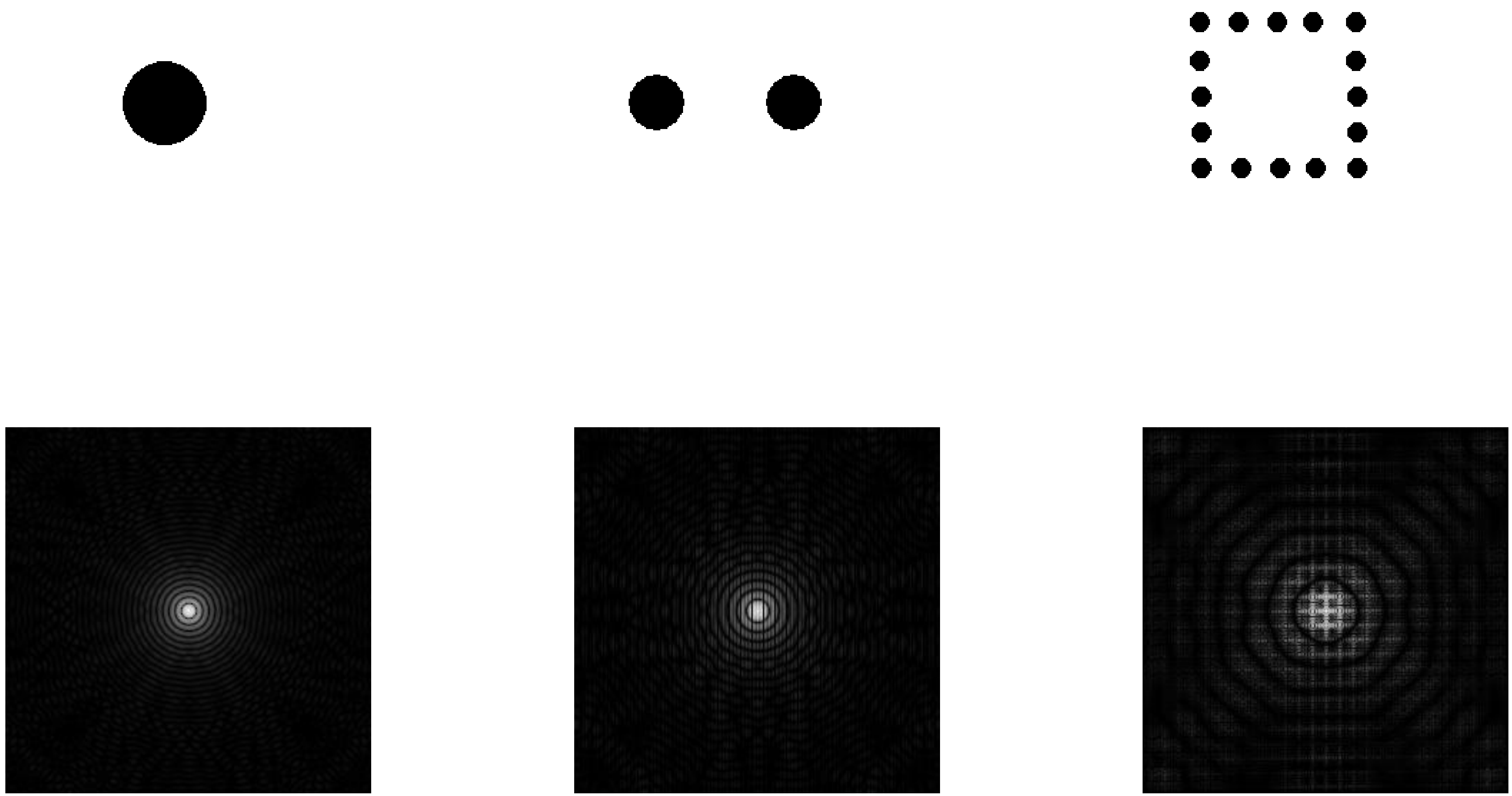


$F_2 \times F_3$

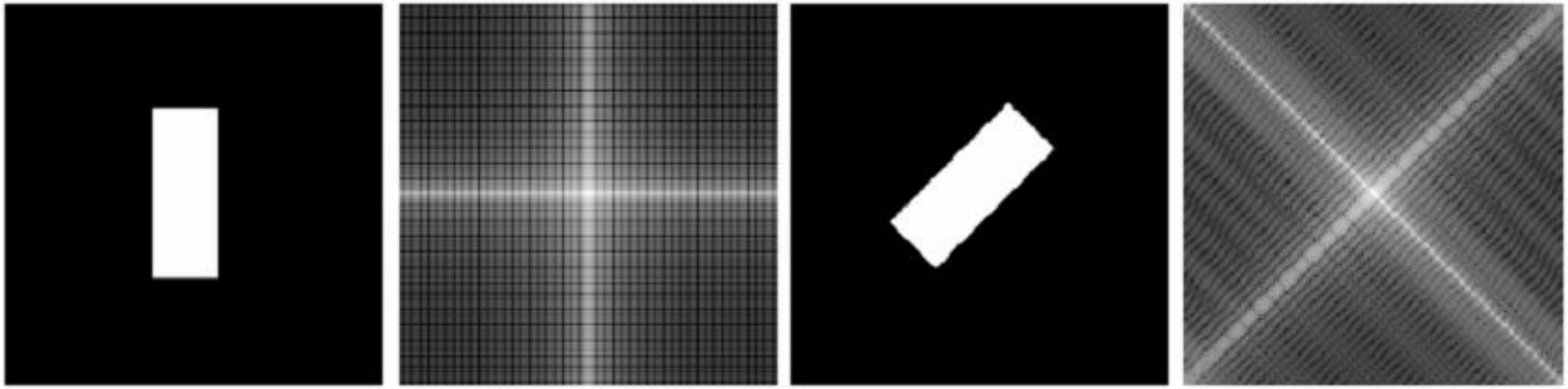


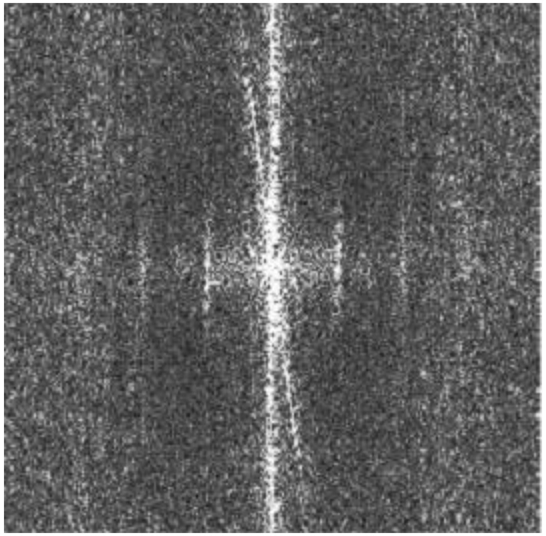
$F_i \otimes F_j \; i \neq j$

线性叠加及尺度变化

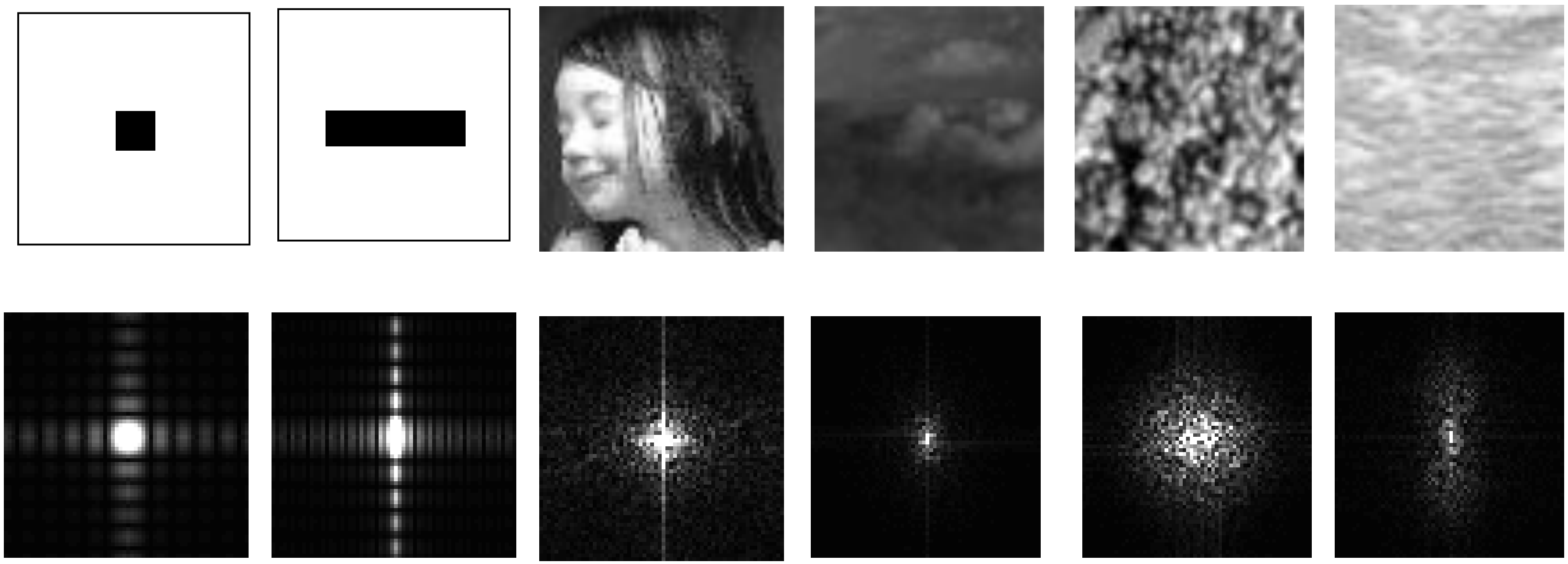


旋转性





典型图象的频谱



2.4.2 离散余弦变换

一种可分离、正交、对称的变换

1-D离散余弦变换（DCT）

$$C(u)=a(u)\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad u=0,1,\cdots,N-1$$

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1} a(u)C(u)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad x=0,1,\cdots,N-1$$

$$a(u)=\begin{cases}\sqrt{1/N} & \text{当} \quad u=0\\ \sqrt{2/N} & \text{当} \quad u=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

2.4.2 离散余弦变换

2-D离散余弦变换（DCT）

$$C(u,v)=a(u)a(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

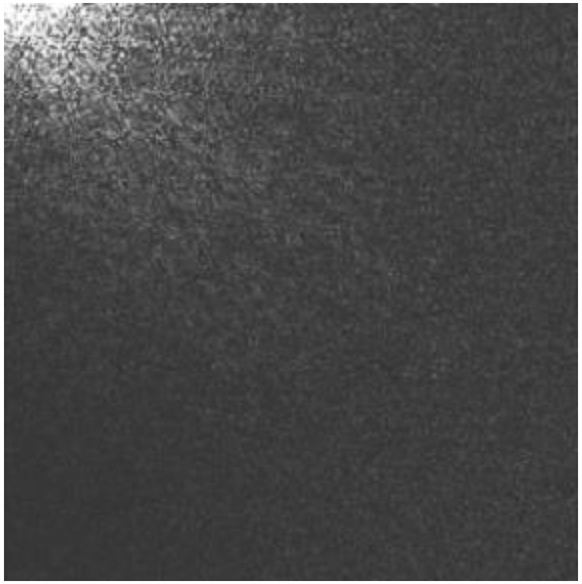
$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}a(u)a(v)C(u,v)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

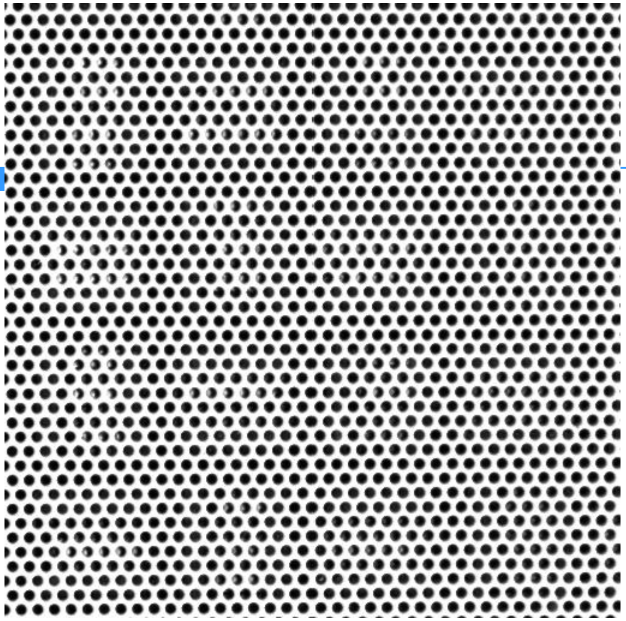
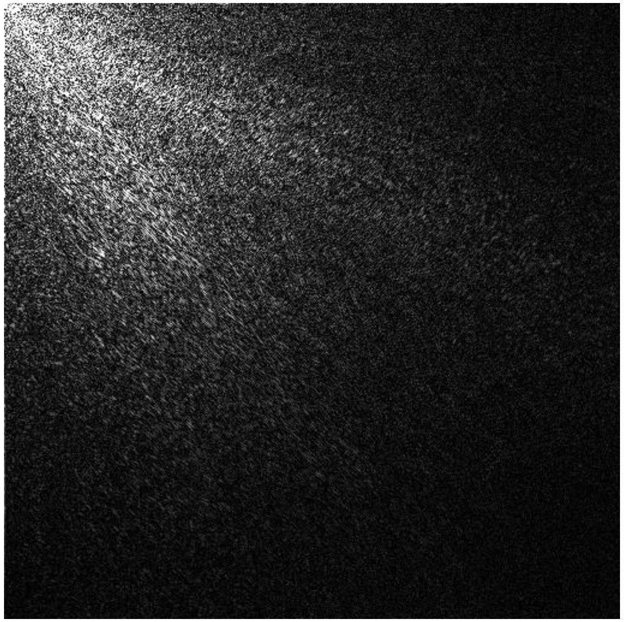
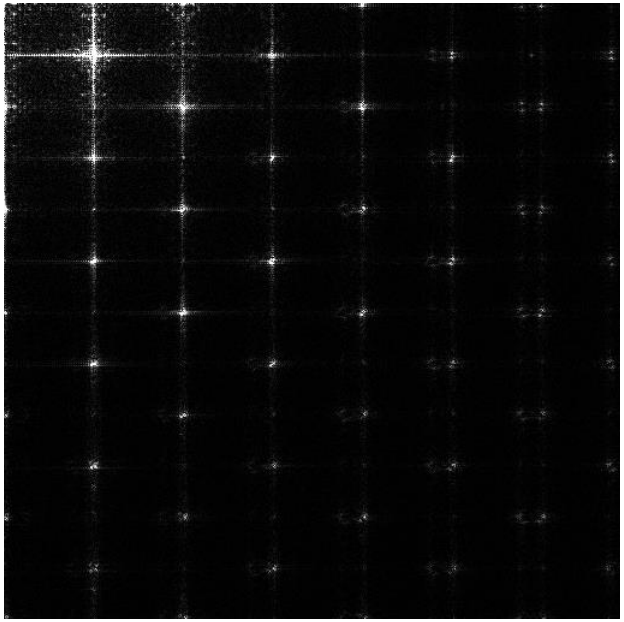
+ 讨论可分离性和对称性

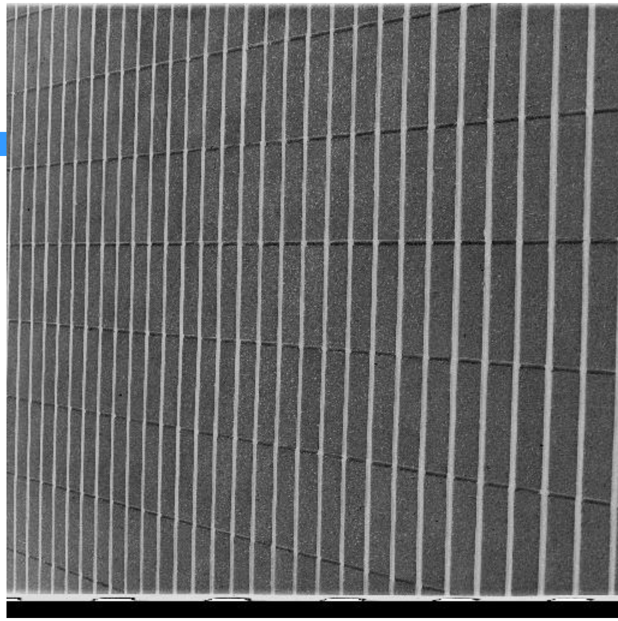
$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_2(y,v) \qquad h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_1(y,v)$$

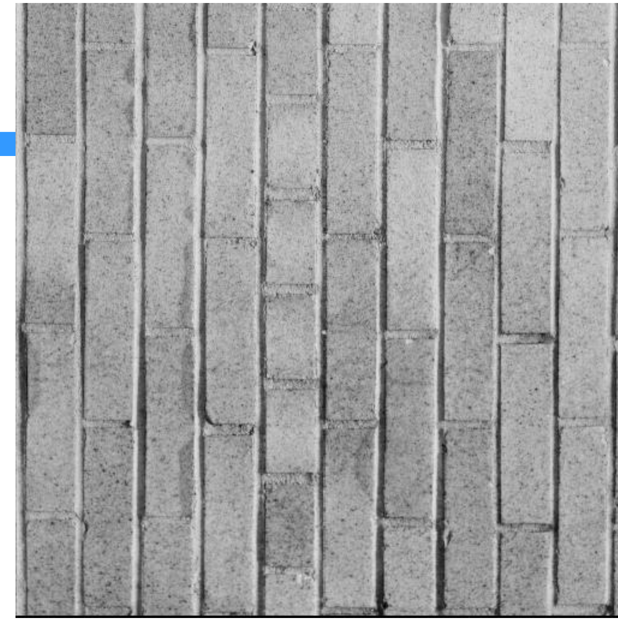
DCT的性质

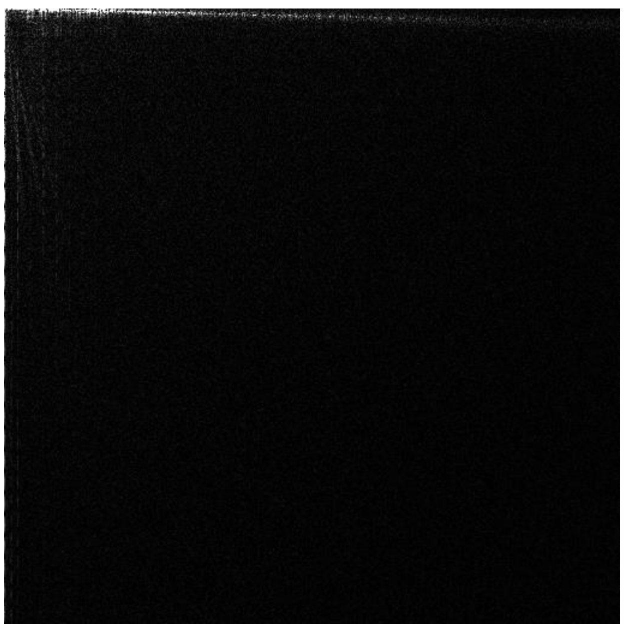
- 实规范正交基
- 与DFT的关系
- 有快速算法
- 能量压缩

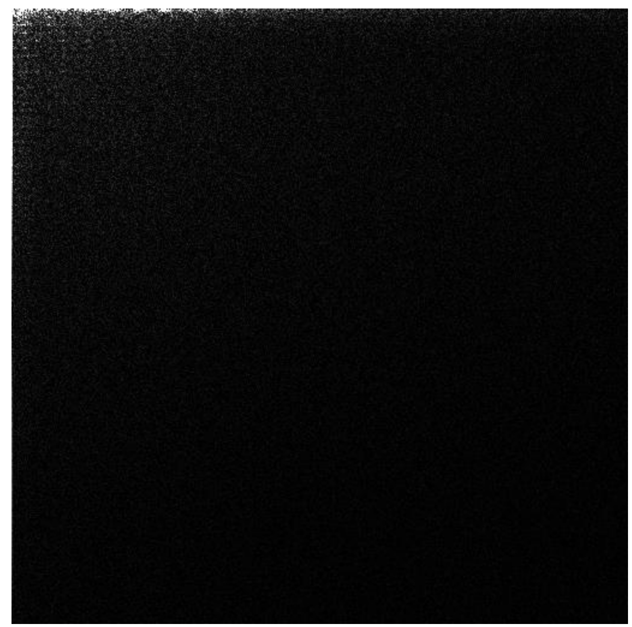










2.4.3 沃尔什/哈达玛变换

- 沃尔什(Walsh)/哈达玛变换,其基函数与DFT和DCT不同，不是正弦形的，而是方波的各种变形
- 在这类变换中，哈达玛(Hadamard)变换在图象处理中应用比较广泛
- 运算简单，只需加减运算
- 缺乏明确物理意义和较直观的解释

哈达玛变换的递推式

- $2^K \times 2^K$哈达玛递推式：

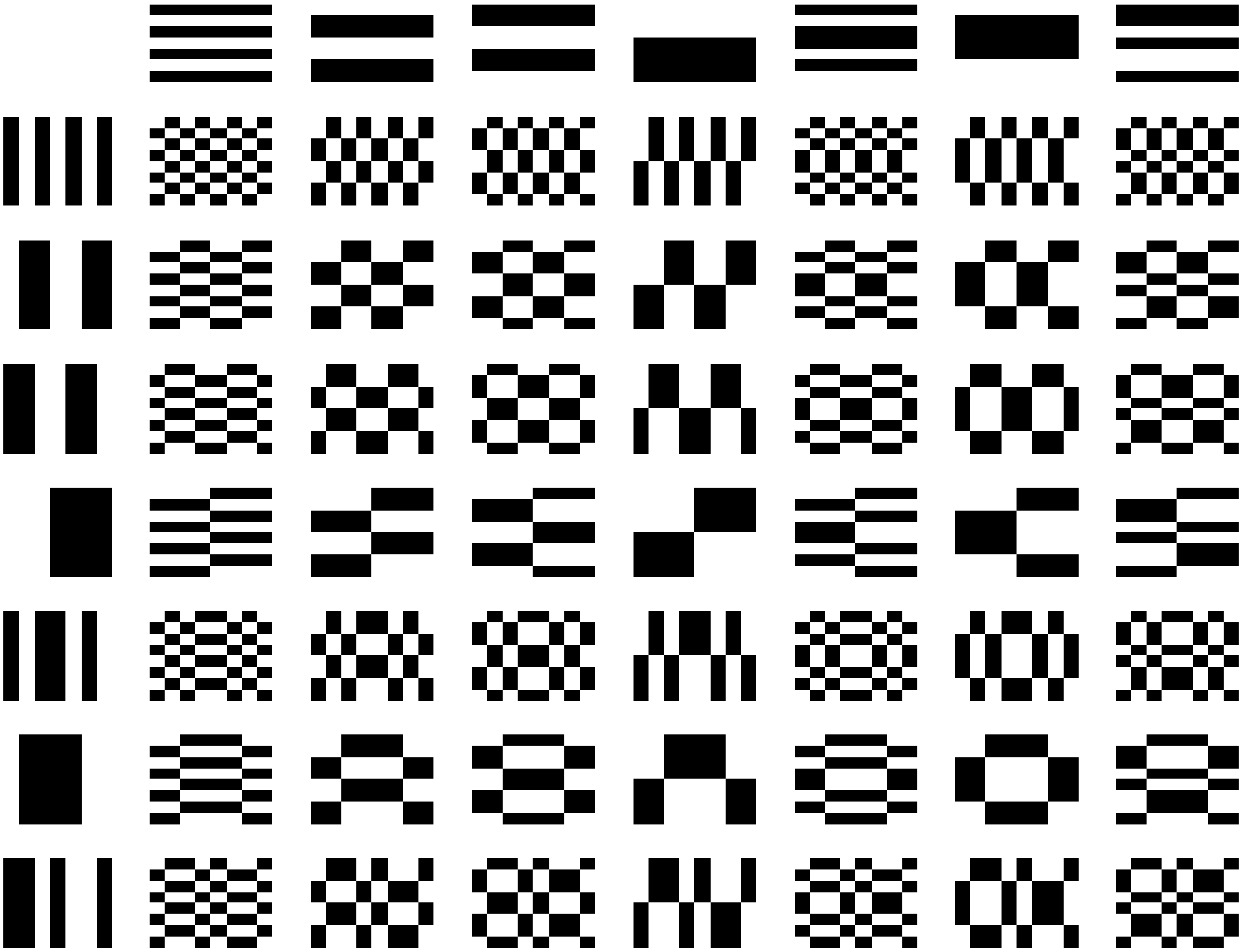
$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

- WHT的变换对：

F = H f H

f =H F H

基图像



2.4.4 斜变换(The Slant Transform, ST)

- 变换矩阵的基矢量与原图象的相似程度和去相关的程度有密切的关系。
  - 若变换矩阵的基矢量与图象越相象，则变换后能量的集中程度越高。
- 大部分图象的灰度分布呈如下特征：
  - 有恒定不变的部分，也有随距离线性增加和减少的部份。
- 若变换矩阵有“倾斜”的特征，性能会比较好。
- 斜变换就是把“倾斜”的基本矢量引入沃尔什变换，加以改造而形成的。
- 斜变换适于灰度逐渐改变的图象信号，已成功用于图象编码

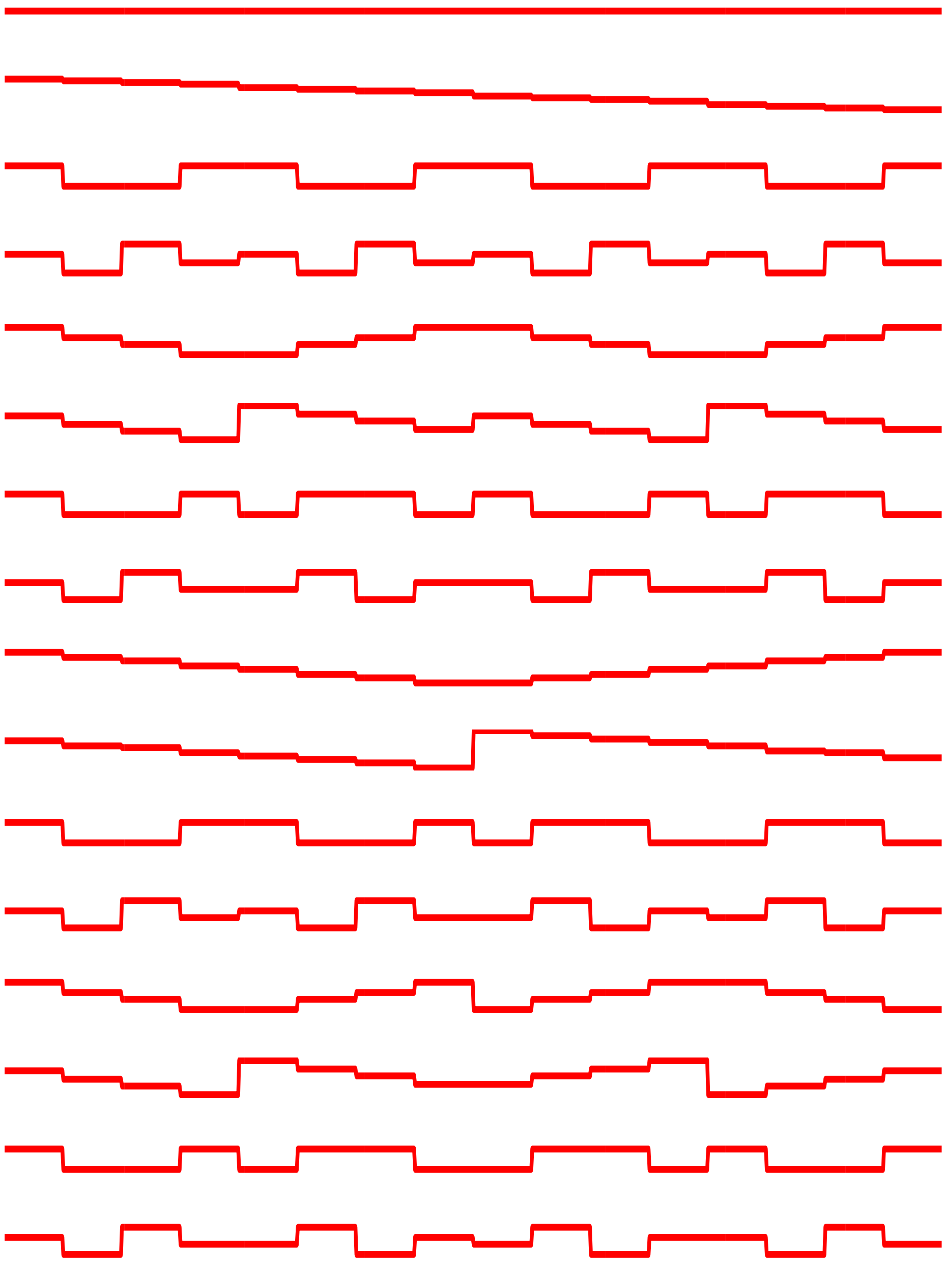
ST的递推式

- **$2^K \times 2^K$ ST的递推式：**

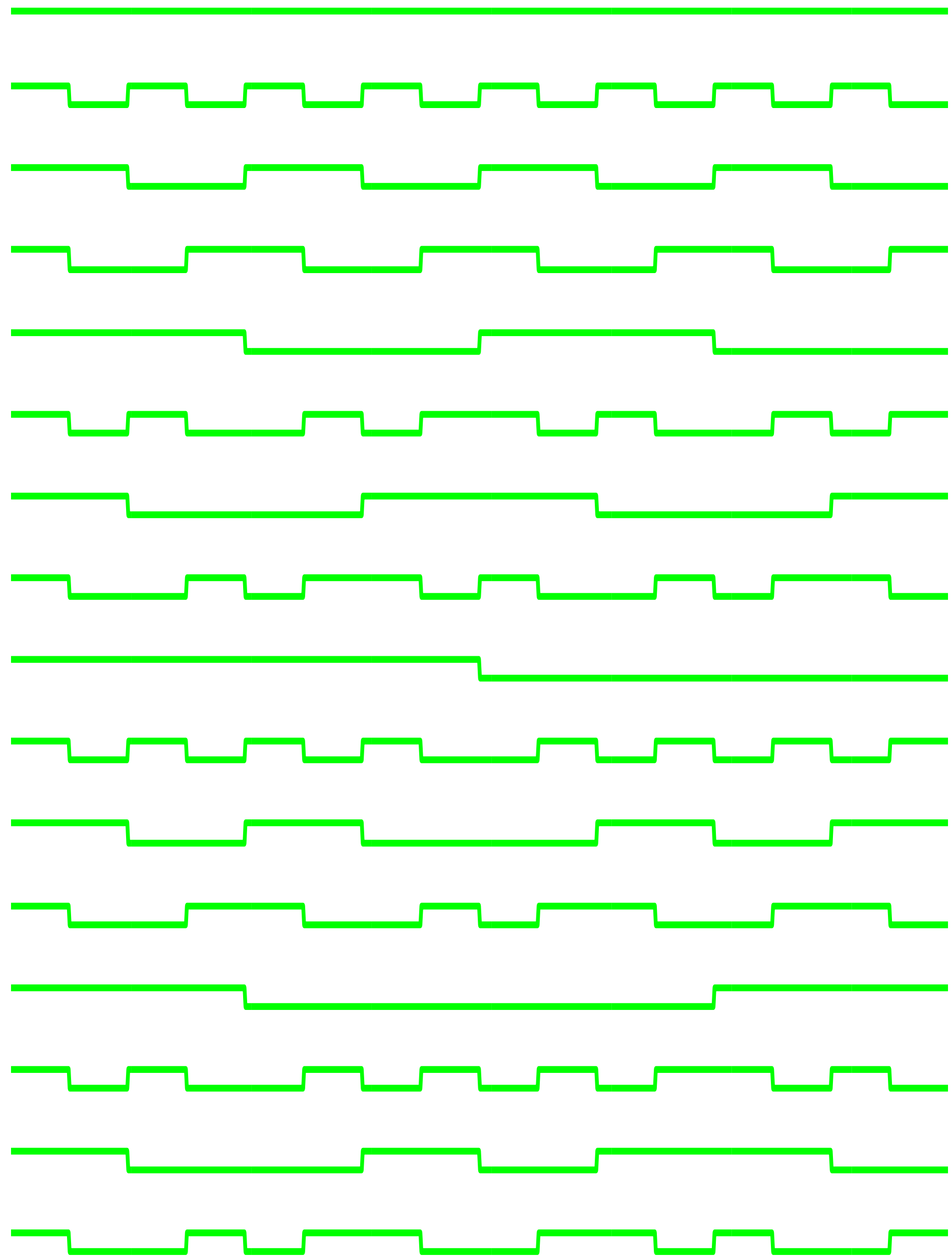
$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{cc:c:cc:c} 1 & 0 & \multirow{2}{*}{0} & 1 & 0 & \multirow{2}{*}{0} \\ a_N & b_N & & -a_N & b_N & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{0} & I_{(N/2)-2} & \multicolumn{2}{c:}{0} & I_{(N/2)-2} \\ \hdashline 1 & 0 & \multirow{2}{*}{0} & 0 & -1 & \multirow{2}{*}{0} \\ -b_N & a_N & & b_N & a_N & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{0} & I_{(N/2)-2} & \multicolumn{2}{c:}{0} & -I_{(N/2)-2} \end{array}\right]\begin{bmatrix} S_{N/2} & 0 \\ 0 & S_{N/2} \end{bmatrix}$$

$$a_N = \left[\frac{3N^2}{4(N^2-1)}\right]^{1/2} \qquad b_N = \left[\frac{N^2-4}{4(N^2-1)}\right]^{1/2}$$

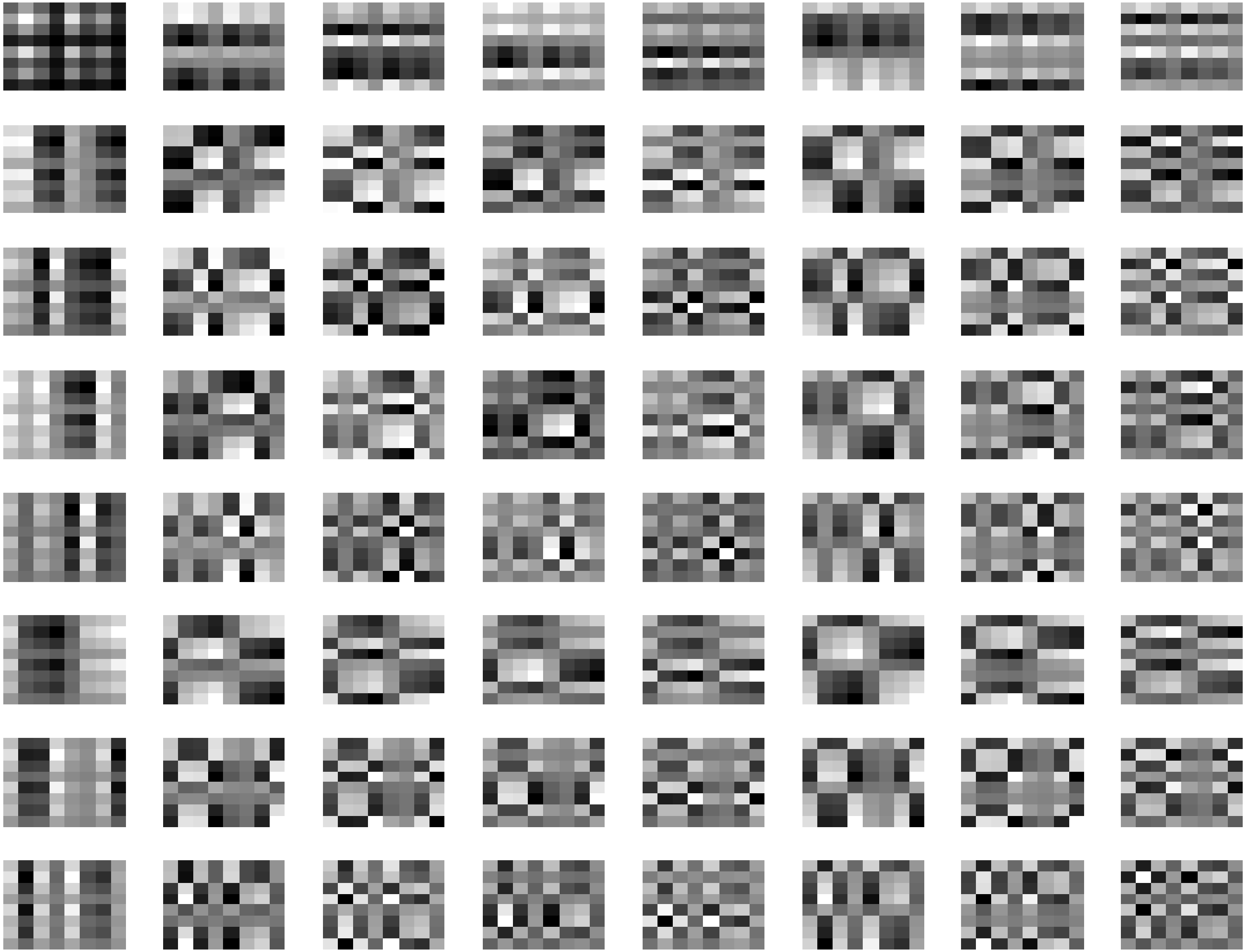


Slant transform



Hadamard transform

ST基矢量



2.4.5 K-L变换(Principle Component analysis)

- 对于零均值的f(x,y)，可以找到一组正交变换基ϕ_{mn}，ϕ_{mn}满足积分方程：

$$\iint R_{ff}(x,y,u,v)\phi_{mn}(u,v)dudv = \gamma_{mn}\phi_{mn}(x,y)$$

- 用这样的正交基系列进行变换，可使变换后完全去相关。
- 该变换的变换核要根据原信号的统计性质求出。

以一维矢量为例导出K-L变换对

1、一维列矢量 $\vec{x}^T = [x_1, x_2, \cdots, x_N]$

2、求其协方差矩阵 $\sum_X$

3、求协方差矩阵的特征矢量和特征值

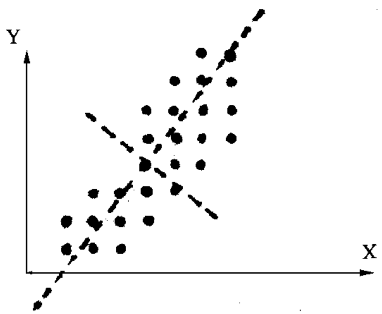
$$\sum_X \vec{\phi}_i = \lambda_i \vec{\phi}_i$$

4、按特征值由大到小排列，将对应的特征矢量组成变换核[T]。

$$[T] = \begin{bmatrix} \vec{\phi}_1^T \\ \vec{\phi}_2^T \\ \vdots \\ \vec{\phi}_N^T \end{bmatrix}$$

K-L变换一例(1)

图象点序列：



（**1**，**1**），（**1**，**2**），

（**2**，**1**），（**2**，**2**），（**2**，**3**），

（**3**，**1**），（**3**，**2**），（**3**，**3**),

(4，**2)**, **(4**，**3)**, **(4**，**4)**, **(4**，**5)**,（**4**，**6**），

（**5**，**3**），（**5**，**4**），（**5**，**5**），（**5**，**6**），（**5**，**7**），

（**6**，**4**），（**6**，**5**），（**6**，**6**），（**6**，**7**），（**6**，**8**），

（**7**，**5**），（**7**，**6**），（**7**，**7**），（**7**，**8**）

均值 $$\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{bmatrix}=E\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.4\\ 4.3\end{bmatrix}$$

协方差 $$\Sigma_X=E\left\{\begin{bmatrix}x-\bar{x}\\ y-\bar{y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-\bar{x} & y-\bar{y}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}3.286 & 3.099\\ 3.099 & 4.579\end{bmatrix}$$

K-L变换一例(2)

在维数小时，可由本征多项式为零求协方差矩阵的本征值，有：

$$\begin{bmatrix} 3.268-\lambda & 3.099 \\ 3.099 & 4.579-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7.865\lambda + 5.443 = 0$$

$$\lambda_1 = 7.098 \quad \lambda_2 = 0.768$$

再把本征值代入 $\Sigma_X \vec{\phi}_i = \lambda_i \vec{\phi}_i$ 求出特征矢量：

$$\vec{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.23 \end{bmatrix} \qquad \vec{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -1.23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

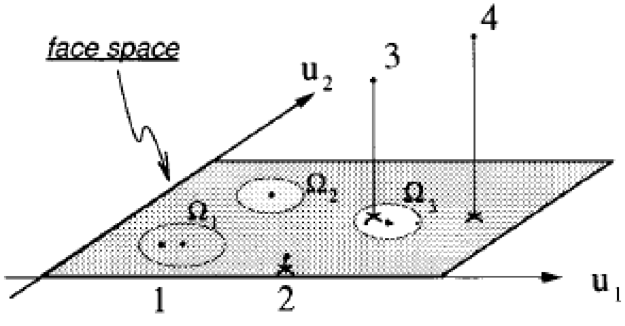
把相互垂直的二特征矢量作为新的坐标，新坐标的主轴方向为所变换数据方差最大的方向 。

KL变换应用实例 —— 人脸识别

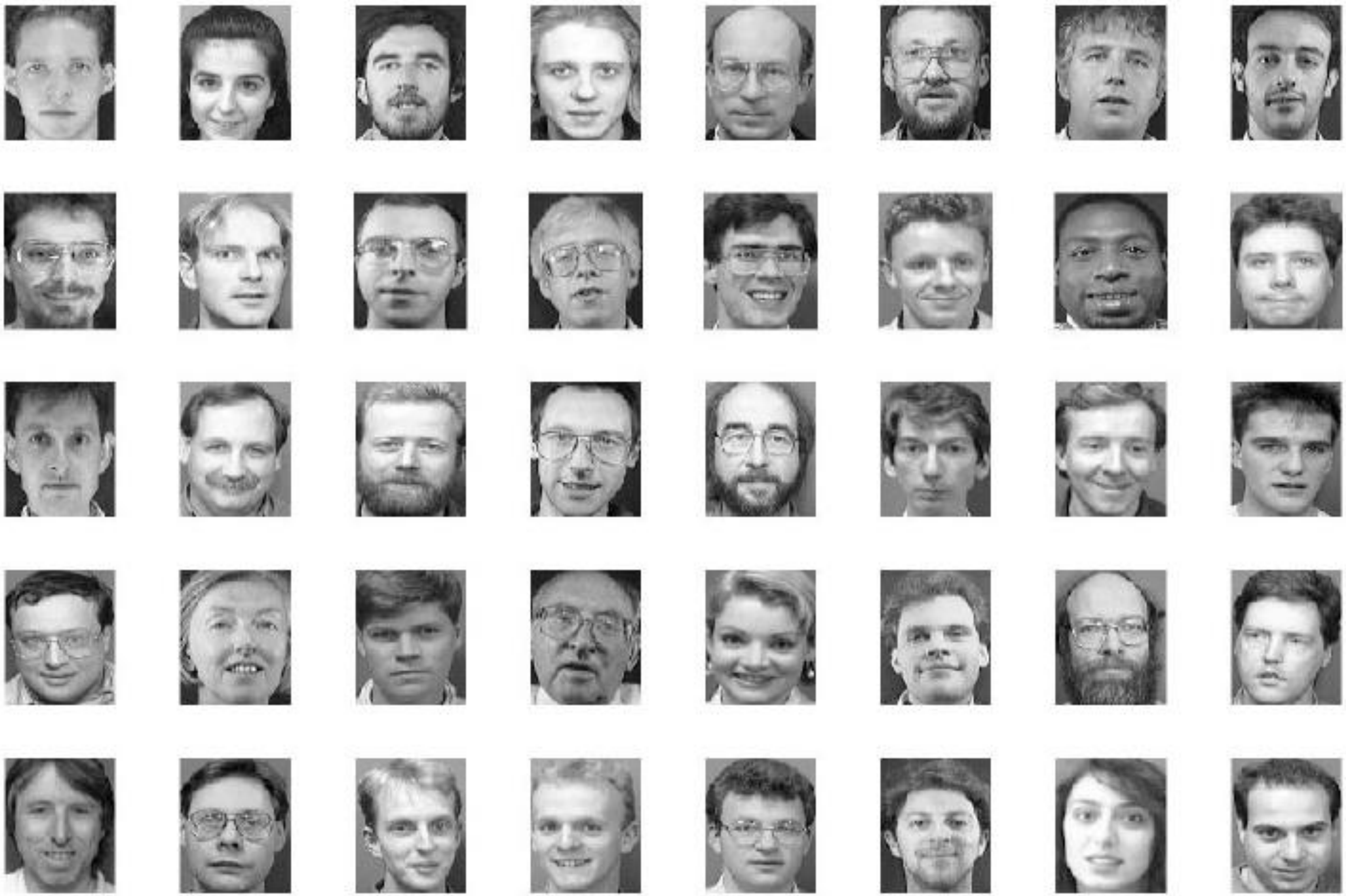
1. 把每一幅人脸列化，视为随机向量F的不同实现。
2. 估计F协方差矩阵C，并计算其特征值特征向量。

   (C是半正定矩阵，维数不大于图像数，对应不同特征值的特征向量正交，特征脸）
3. 选择对应少量最大特征值的特征向量组成特征脸空间
4. 每张脸映射为特征脸空间的点，以其坐标作为特征向量。
5. 采用模式识别方法，进行分类识别。

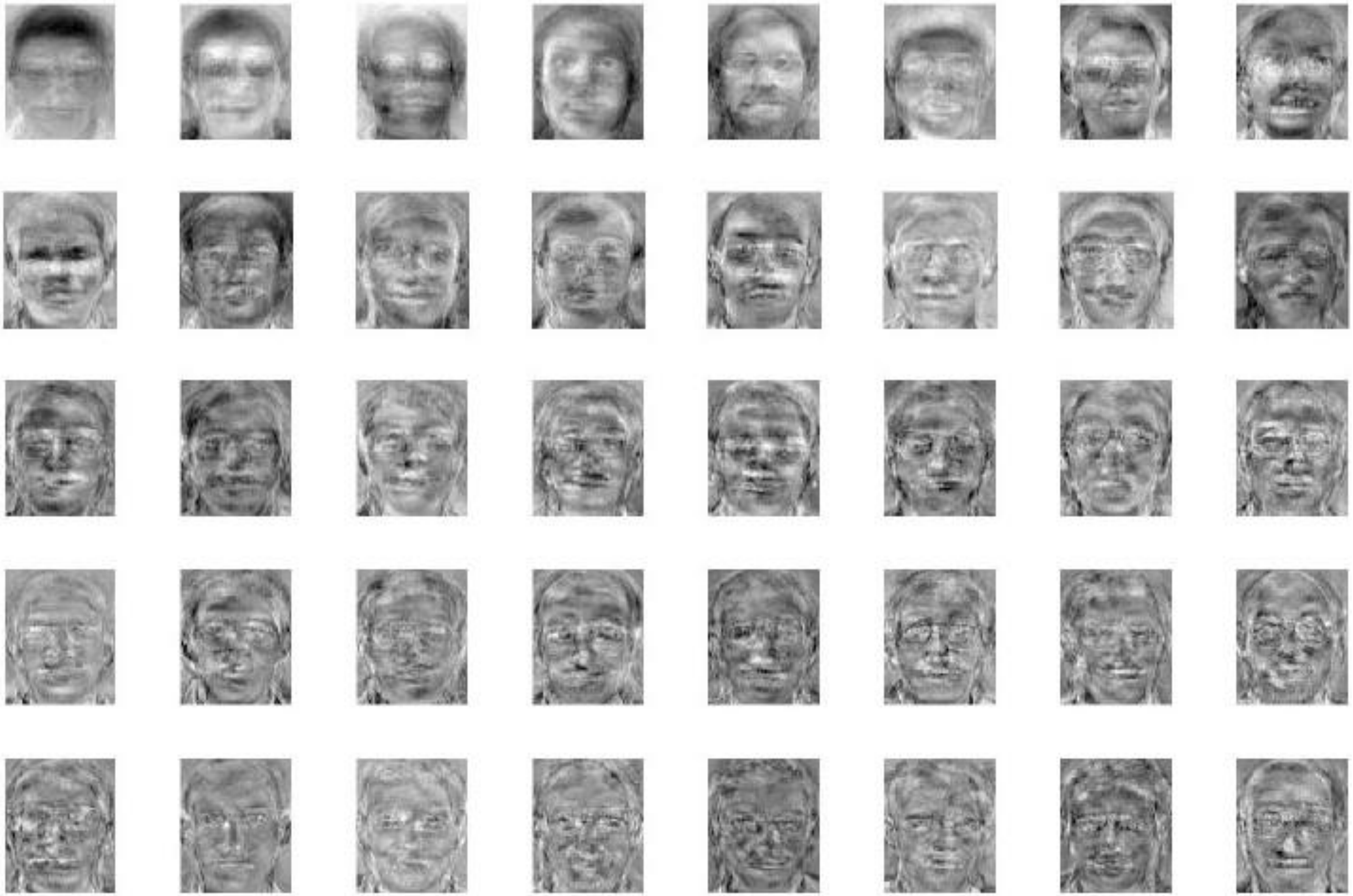
   （如欧式距离)



人脸库



特征脸



特征脸空间 （top 8）

性能比较（粗略表示）

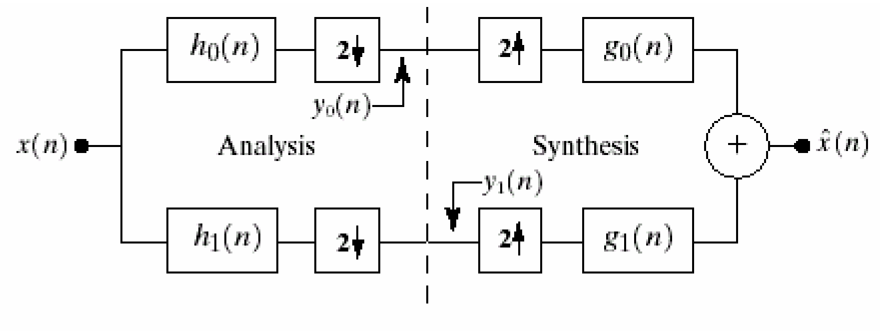
	计算量	误差
K-L	大	小
DCT	↓	↑
DFT	↓	↑
ST	↓	↑
WHT	小	大

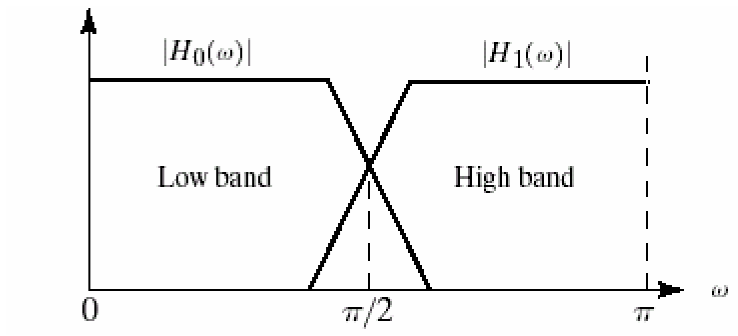
2.4.6 小波变换

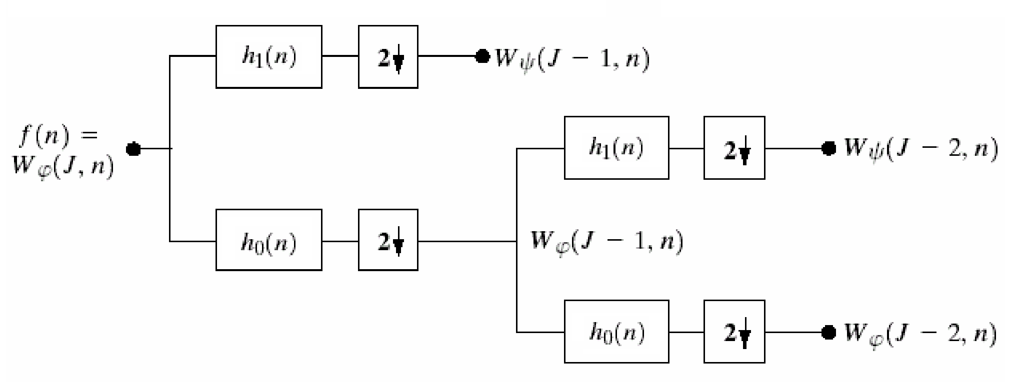
小波变换是一种比较新、也很有用的方法

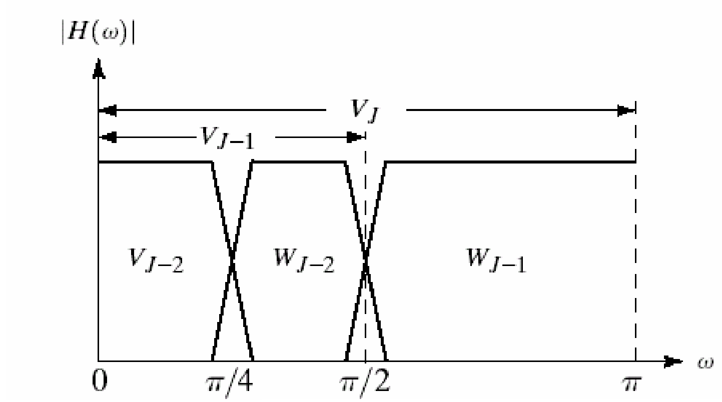
- 傅立叶和小波
  - 傅立叶变换在分析瞬态信号时仍有不足
  - 小波是一组衰减的波
- 时频域分析
  - 小波变换在二维时频空间分析信号
- 变换
  - 理想的基本小波是过程很短的振荡函数
  - 如同傅立叶变换有连续、离散的变换，小波也有连续、离散的变换

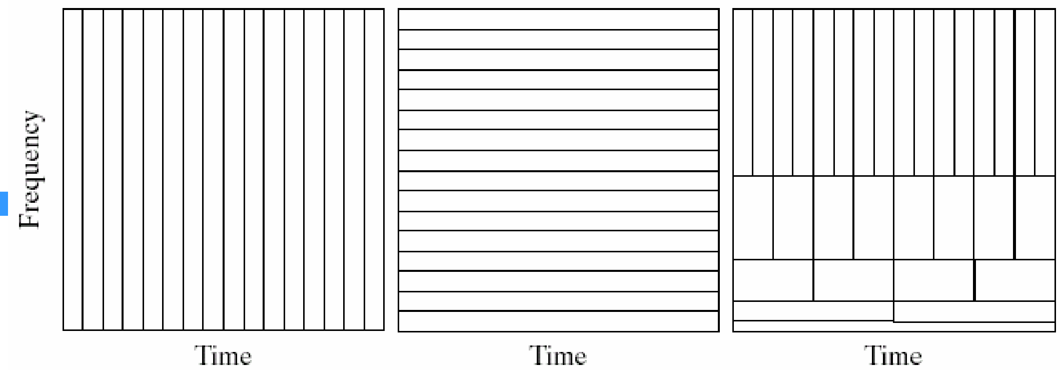
1维离散小波变换（DWT）



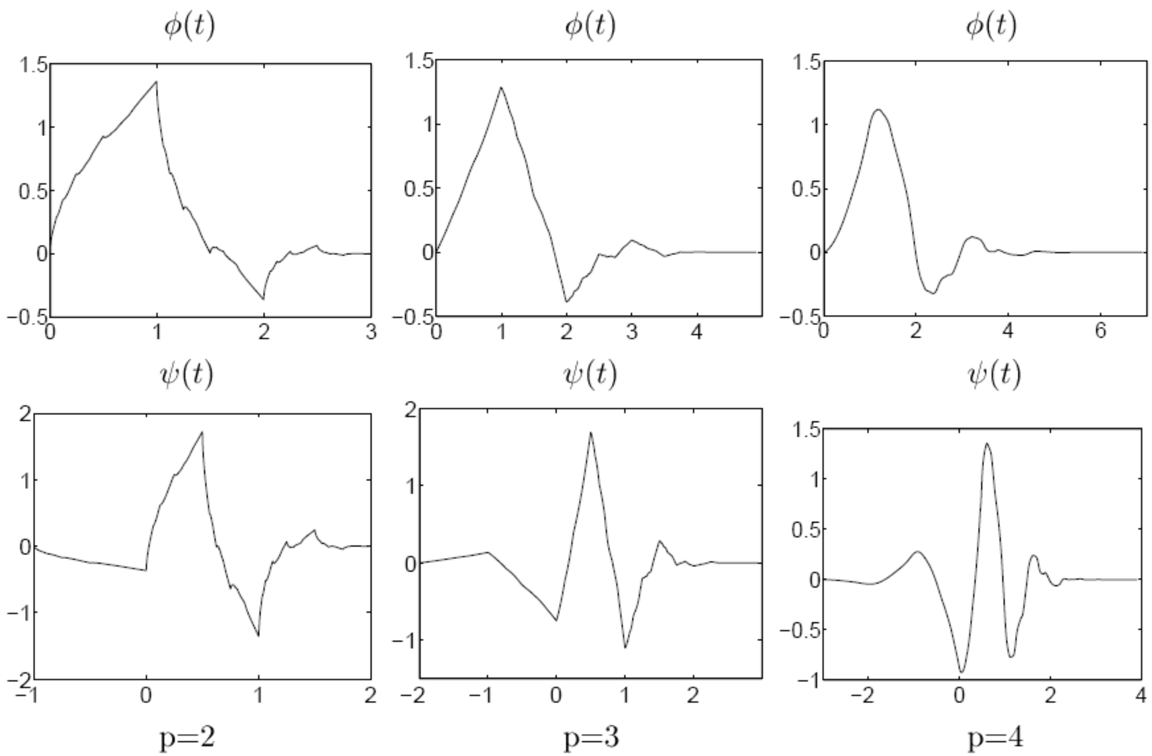






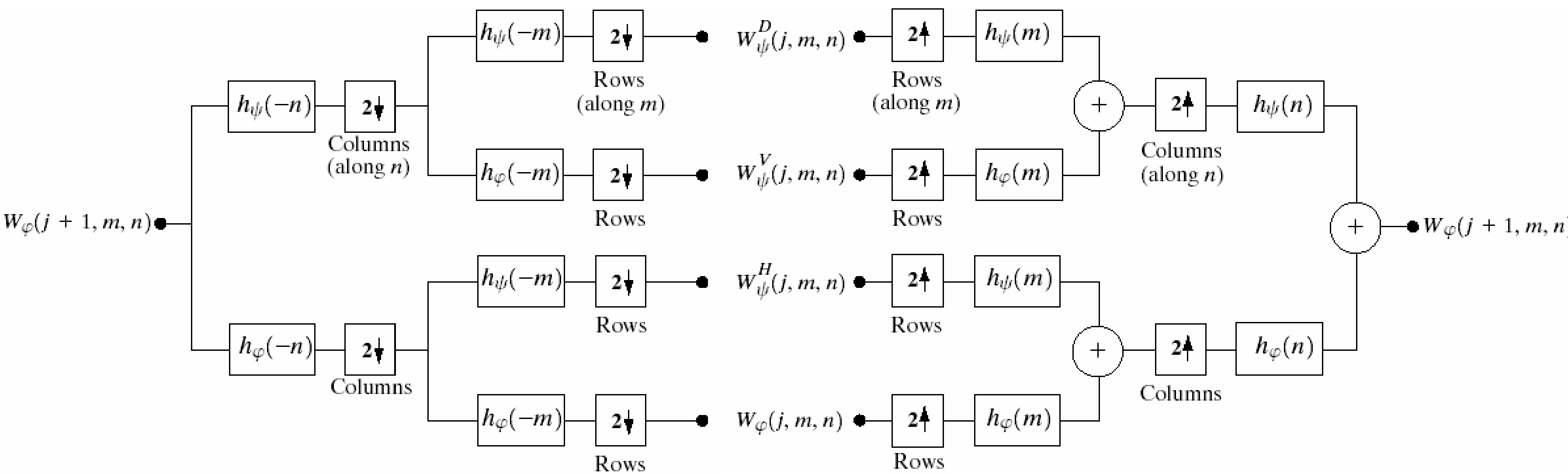


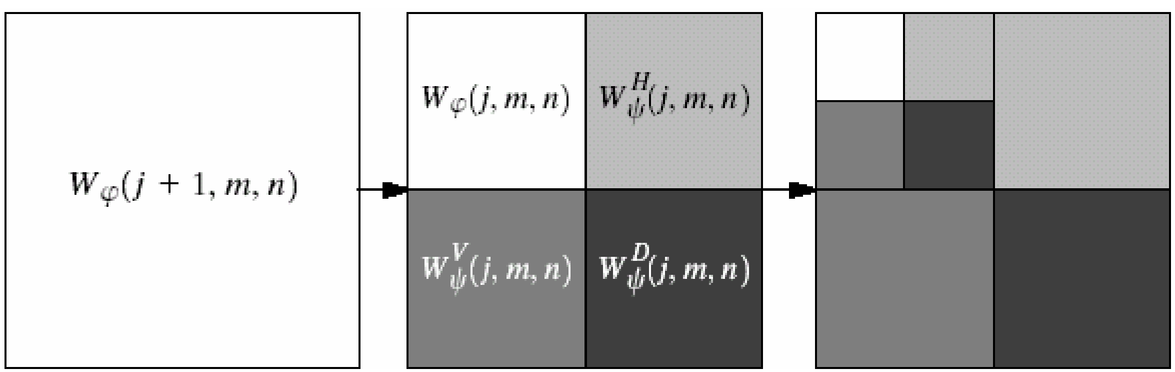
时频铺叠（从左到右：Dirac、Fourier、wavelet）

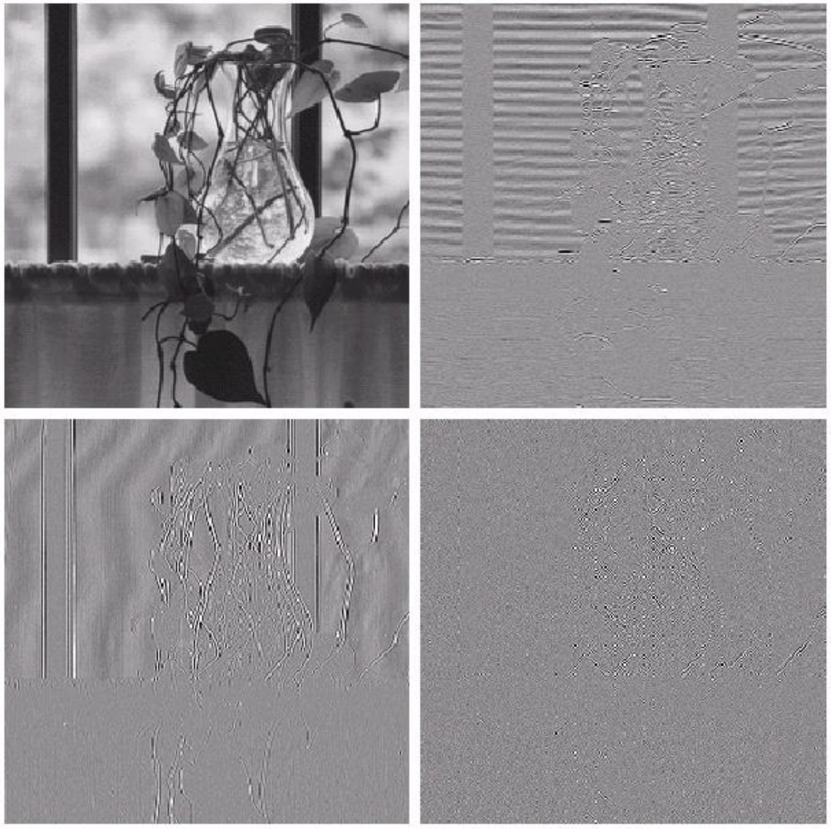


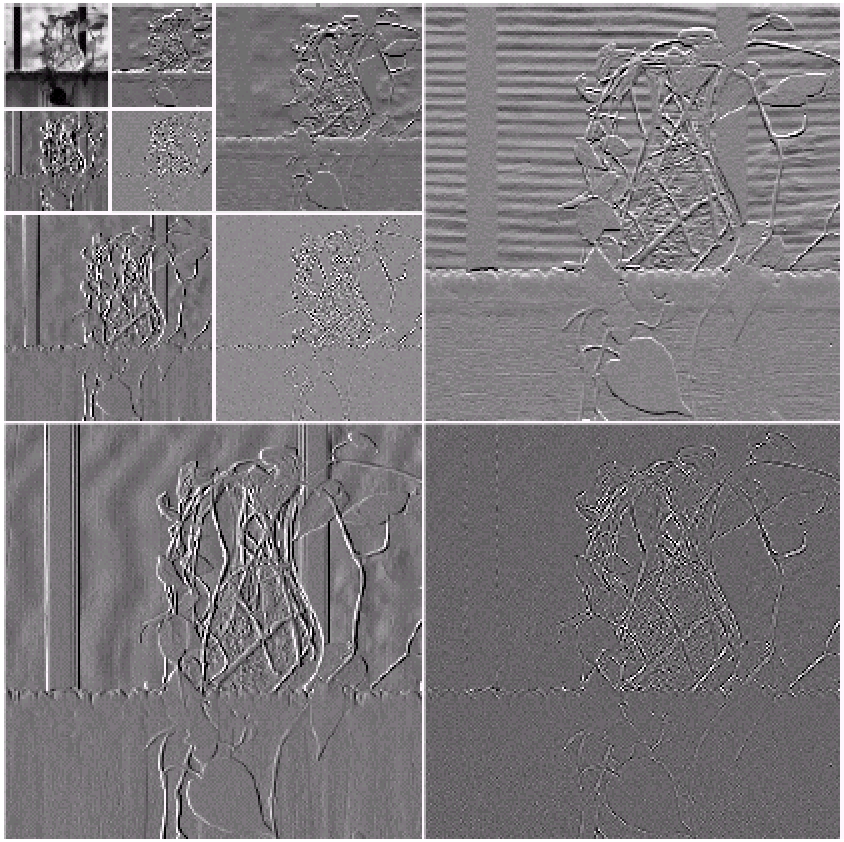
Daubechies 小波及尺度函数。（p为消失矩 Vanishing Moment）

2维DWT


$W_\varphi(j+1,m,n)$
$h_\psi(-n)$
$2\downarrow$
Columns (along n)
$h_\varphi(-n)$
$2\downarrow$
Columns
$h_\psi(-m)$
$2\downarrow$
Rows (along m)
$h_\varphi(-m)$
$2\downarrow$
Rows
$h_\psi(-m)$
$2\downarrow$
Rows
$h_\varphi(-m)$
$2\downarrow$
Rows
$W_\psi^D(j,m,n)$
$W_\psi^V(j,m,n)$
$W_\psi^H(j,m,n)$
$W_\varphi(j,m,n)$
$2\uparrow$
Rows (along m)
$h_\psi(m)$
$2\uparrow$
Rows
$h_\varphi(m)$
$2\uparrow$
Rows
$h_\psi(m)$
$2\uparrow$
Rows
$h_\varphi(m)$
+
$2\uparrow$
Columns (along n)
$h_\psi(n)$
+
$2\uparrow$
Columns
$h_\varphi(n)$
+
$W_\varphi(j+1,m,n)$


$W_\varphi(j+1,m,n)$
$W_\varphi(j,m,n)$
$W_\psi^H(j,m,n)$
$W_\psi^V(j,m,n)$
$W_\psi^D(j,m,n)$





其它的离散小波

- 非抽样小波（UWT:Undecimated Wavelet）

  完全非抽样，具有平移不变性。

- 复数小波

  代表性的是双树复小波，近乎具有平移不变性，相位信息可以利用。

- 方向小波

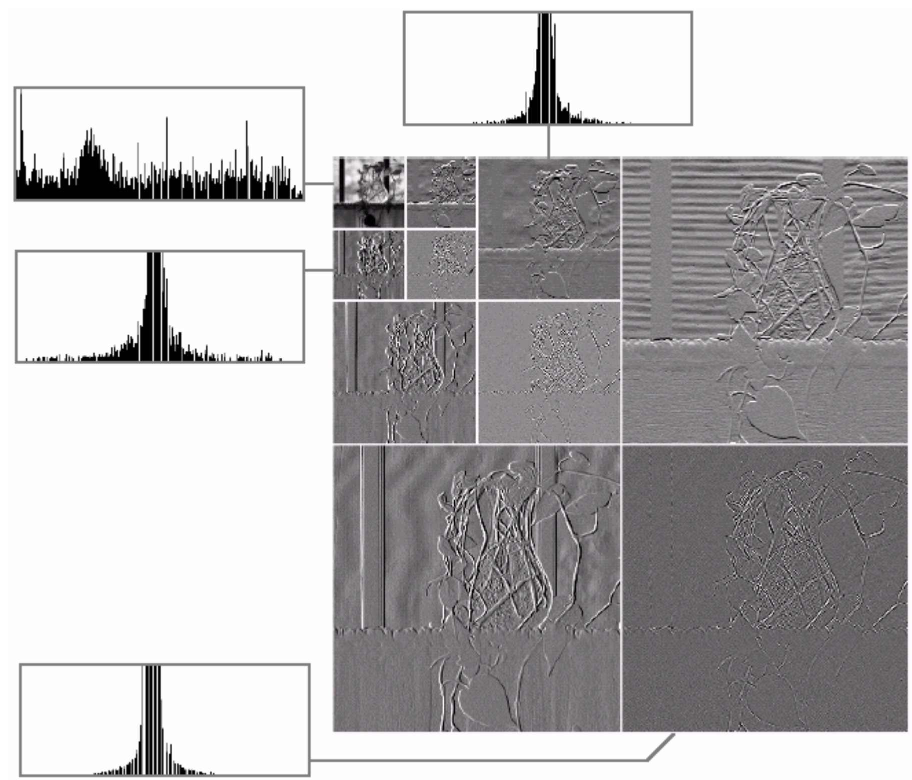
  可以提供具有更多方向的变换基，而DWT只有3个方向：0，90，±45。

小波变换的主要应用

- **图像去噪与压缩 (Image Denoising and Compression)**
- **图像增强 (Image Enhancement)**
- **图像融合 (Image Fusion)**

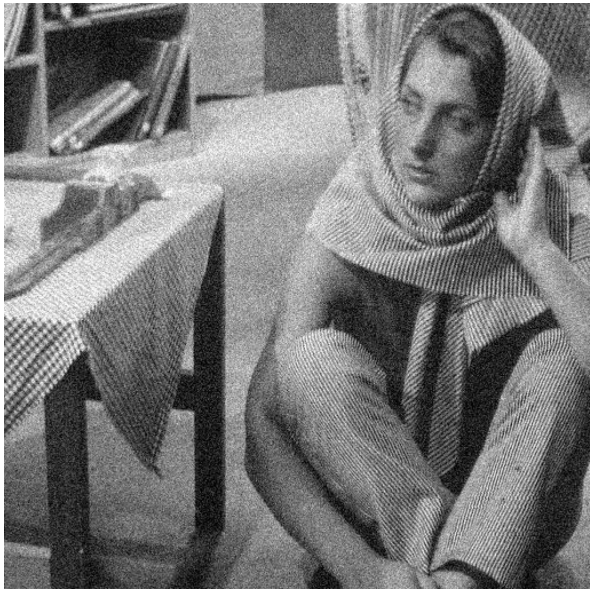
图像去噪与压缩

- 去噪和压缩的本质都是逼近，即用少量能反映主要特征的高模值系数对原图进行逼近。
- 相对于三角函数而言，小波对图像局部细节的逼近效率很高。
- 压缩和去噪在系数的选择上原则大体相同，只是前者要把编码效率加以考虑。



去噪

- 低通滤波（三角函数Fourier去噪）
- 阈值处理 （wavelet 去噪）


含噪图， std = 20


低通滤波


DWT阈值，约4%系数

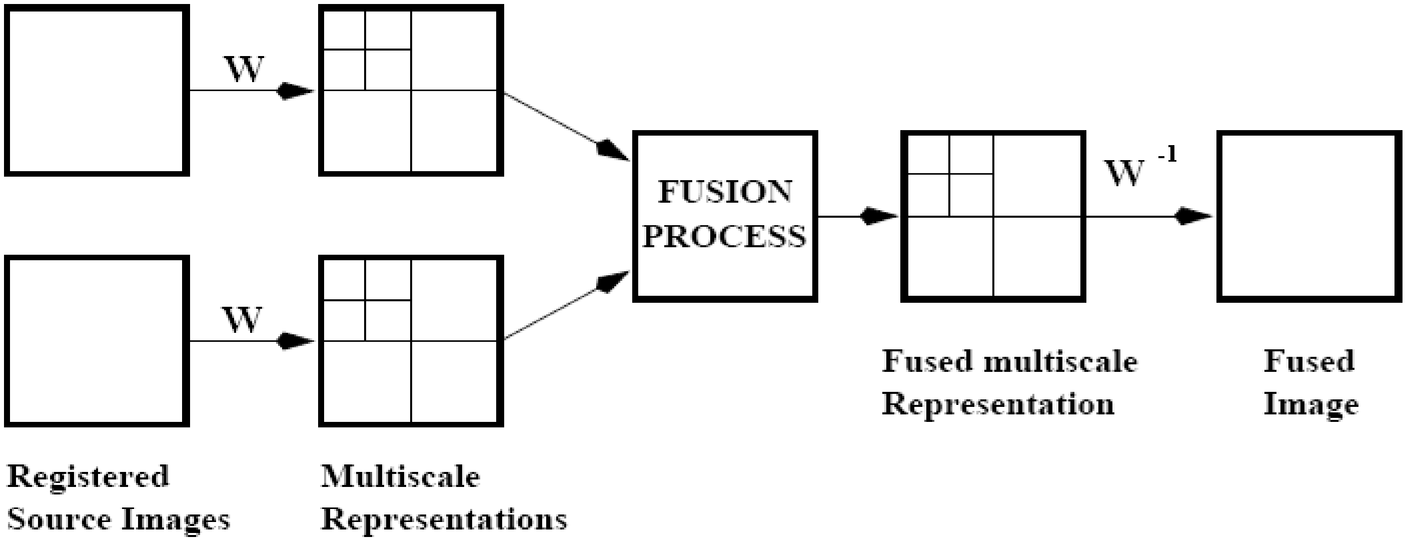
压缩

- JPEG （三角函数 DCT）
  分块，Z字型编码
- JPEG 2000 (Wavelet ）
  分级，零树编码

相同码率的 JPEG 和 JPEG2000对比（80倍压缩）

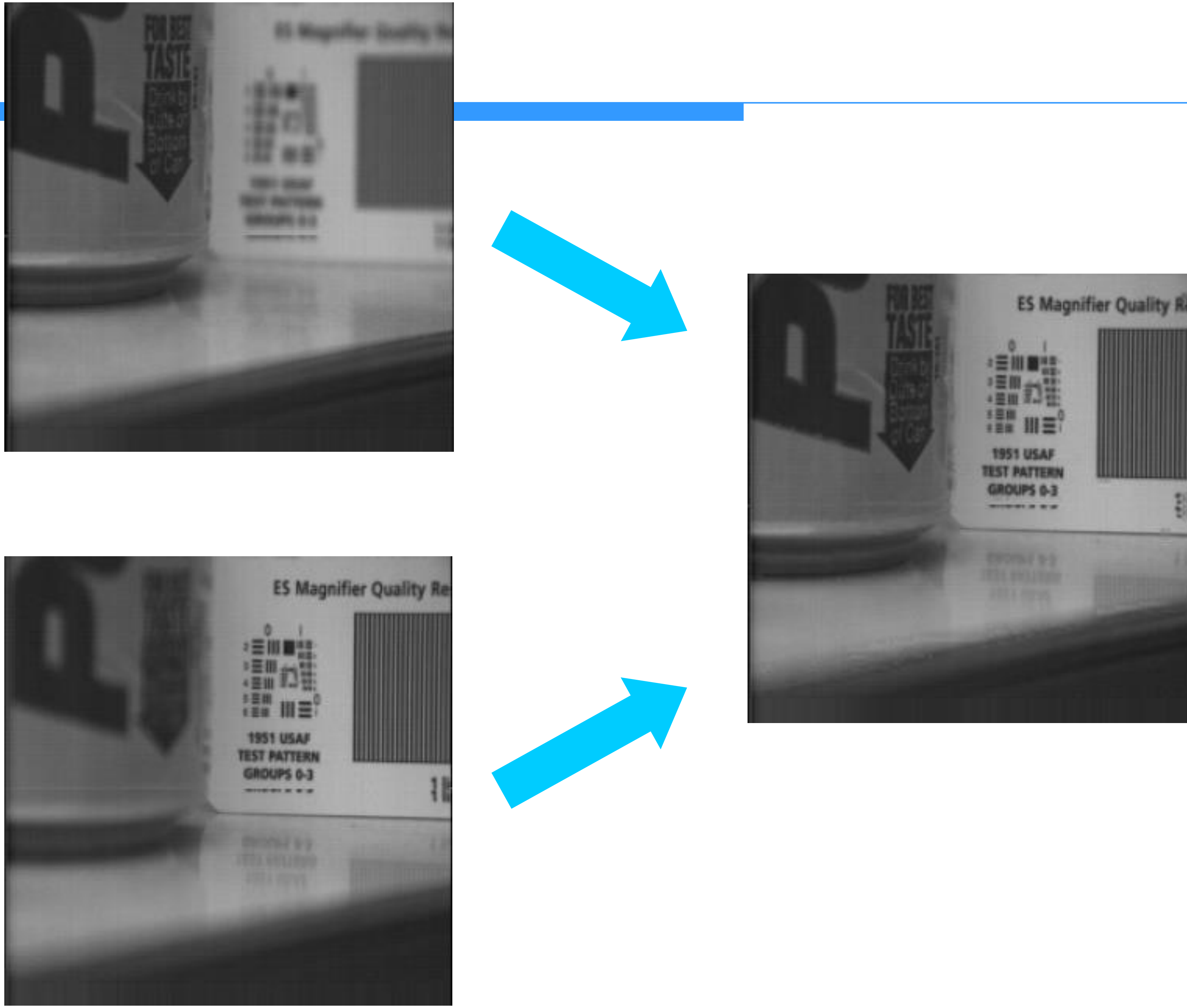
图像融合



$$I(x,y) = \omega^{-1}(\phi(\omega(I_1(x,y)), \omega(I_2(x,y))))$$

融合方法 ϕ大约有三类：

- 取最大值*maximum selection scheme*、
- 加权平均 *weighted average scheme*
- 和加窗选择*window based verification*


ES Magnifier Quality Re
1951 USAF
TEST PATTERN
GROUPS 0-3