

修士論文

運動学的特異点を考慮した作業空間に基づく剛体の動作生成および運動制御

東京都市大学大学院工学研究科
機械システム工学専攻
滝 将太
指導教官 金宮 好和 教授
佐藤 大祐 准教授

2014年1月30日

目 次

第1章 序論	15
1.1 はじめに	15
1.2 運動学に基づく制御とアプリケーション	16
1.3 研究背景	18
1.3.1 三次元空間上の姿勢制御(人工衛星)	18
1.3.2 ロボットマニピュレータの運動制御	23
1.4 特異点問題と特異点適合法	26
1.5 本論文の取り組み	28
1.6 本論文の構成	29
1.7 本論文で用いる記号	31
第2章 逆運動学解法と特異点問題	37
2.1 概要	37
2.2 運動学	38
2.2.1 位置に関する運動学	38
2.2.2 姿勢に関する運動学	39
2.3 特異点	42
2.3.1 特異点の分類	42
2.3.2 Saturation Singularity	43
2.3.3 Internal Singularity	43
2.3.4 具体例	46
2.4 列拡張ヤコビ行列による逆運動学解法	48
2.4.1 非冗長マニピュレータ	48
2.4.2 冗長マニピュレータ	50
2.5 特異点適合法	51
2.5.1 非冗長マニピュレータ	52
2.5.2 冗長マニピュレータ	53
2.5.3 姿勢に関する特異点適合法	55

第3章 特異点適合法に基づくオイラー角による姿勢制御	61
3.1 概要	61
3.2 姿勢表現	61
3.2.1 オイラー角	61
3.2.2 単位クォータニオン	62
3.2.3 Modified Rodriguez Parameter: MRP	63
3.3 運動方程式	63
3.4 単位クォータニオンに基づく姿勢制御の問題点	64
3.4.1 単位クォータニオンと正規直交群	64
3.4.2 Unwinding phenomenon	65
3.4.3 積分誤差	67
3.5 モデリング	67
3.5.1 NP特異点とSP特異点	70
3.5.2 修正オイラー角	74
3.6 四つのオイラー角による姿勢表現	78
3.6.1 姿勢表現手法	78
3.6.2 逆運動学計算	79
3.7 オイラー角に基づく固定軸回転制御	79
3.7.1 オイラー角の切替	80
3.7.2 シミュレーションによる検証	82
3.8 動作空間に基づく固定軸回転制御	84
3.8.1 誤差オイラー角	84
3.8.2 安定性	88
3.8.3 シミュレーションによる検証	90
3.9 Full attitude maneuver	92
3.9.1 シミュレーションによる検証	92
3.9.2 考察	97
第4章 非冗長マニピュレータにおける逆運動学解法の比較解析	101
4.1 概要	101
4.2 経路追従制御	101
4.2.1 等速軌道追従制御 (CS: constant speed control)	101
4.2.2 Constant arc length control: CAL	101
4.2.3 Global optimization control: GO	102

4.3 比較シミュレーション	102
4.3.1 2R平面マニピュレータによる円経路追従制御	102
4.3.2 3R非冗長マニピュレータによる円経路追従制御	109
4.4 解析	115
4.4.1 運動学解析	115
4.4.2 動力学解析	118
4.4.3 まとめ	119
第5章 分解特異点適合法による逆運動学解法	121
5.1 概要	121
5.2 分解特異点適合法	121
5.3 定常特異点	123
5.4 分解特異点適合法による定常特異点問題対策	124
5.4.1 円経路の定常特異点対策	124
5.4.2 直線経路の定常特異点対策	126
5.5 6Rマニピュレータへの適用	131
5.5.1 モデリング	131
5.5.2 Positioning subchain	132
5.5.3 Orientation subchain	135
5.5.4 シミュレーションによる検証	136
第6章 冗長マニピュレータにおける逆運動学解法と制御への適用	139
6.1 概要	139
6.2 モデリング	139
6.2.1 Positioning subchain	141
6.2.2 Orientation subchain	142
6.3 内部障害	143
6.3.1 特異点適合法の従来手法	143
6.3.2 内部障害の解析	144
6.4 分解特異点適合法の適用	147
6.4.1 特異方向と非特異方向の分解	147
6.4.2 手首速度の拘束	150
6.4.3 シミュレーションによる検証	151
6.5 手先姿勢の考慮	156

6.5.1	冗長性を利用した特異点回避	156
6.5.2	シミュレーションによる検証	157
6.6	冗長自由度の利用	158
6.6.1	冗長自由度の独立性	158
6.6.2	関節速度の拳動解析	160
6.6.3	シミュレーションによる検証	164
6.7	制御系の設計	166
6.7.1	制御式	166
6.7.2	シミュレーションによる検証	166
第7章	結言	169
7.1	結論	169
7.2	今後の課題	172
謝辞		175
参考文献		177
研究成果		191
付録A	オイラー角による変換行列のパラメータ化	193
A.1	右特異ベクトル	193
A.2	特異値	194
A.3	左特異ベクトル	194
A.4	余因子行列	195
A.5	Self-motion	195
A.6	Self-adaptation	197
付録B	幾何	199
B.1	三角関数の基礎式	199
B.1.1	加法定理	199
B.1.2	倍角の定理	199
B.1.3	半角の定理	199
B.1.4	和積変換	200
B.2	球面幾何	200
B.2.1	球面三角形の余弦定理	201

B.2.2 球面三角形の正弦定理	201
B.3 位相幾何	201
B.3.1 境界	201
B.3.2 コンパクト	202
B.3.3 ハイネ・ボレルの被覆定理	202
B.3.4 トーラスと種数	203
B.4 一般的な曲線の曲率の求め方	203
B.5 パラメータ曲線の曲率の求め方	204
付録C 行列論とシステムの安定性	205
C.1 回転群	205
C.1.1 群の定義と表現	205
C.1.2 正規直交行列	206
C.1.3 特殊ユニタリ行列	206
C.2 特異値分解と特異値	206
C.3 ノルム	207
C.4 システムの安定性	208
C.4.1 リアブノフの意味で安定	208
C.4.2 漸近安定	208
C.4.3 指数安定	209
C.4.4 ラサールの不变原理	209
C.4.5 具体例	210
C.5 非線形システムの安定性	211
C.5.1 非線形システムとその線形化	211
C.5.2 重複固有値	211
C.5.3 ジョルダン形式への変換	212
C.5.4 状態遷移行列	212
C.5.5 状態遷移行列の決定	212
C.5.6 非線形システムの安定解析	213
付録D 7自由度可搬式汎用知能アーム PA-10	215
付録E 姿勢制御に関するハードウェアシステム	219
E.1 姿勢角の計測原理	219
E.1.1 Gyro Sensor: ジャイロ計	219

E.1.2	Inclino Meter: 傾斜計	220
E.1.3	誤差補正	220
E.2	Control Moment Gyro : CMG	220
E.2.1	特徴	220
E.2.2	特異点問題	221

図 目 次

1.1	High-altitude exploration robot (©Honda and AIST).	15
1.2	SmartPal (©YASKAWA).	15
1.3	Example of factory automation.	16
1.4	MOTOMAN (©YASKAWA).	16
1.5	Spacecraft ©ESA.	18
1.6	International space station (ISS) ©NASA.	18
1.7	Autonomous underwater vehicle (AUV) ©SAAB.	18
1.8	Unmanned aerial vehicle (UAV) ©DT.	18
1.9	Attitude controller.	19
1.10	Examples of actuator to control satellites: (a) control momentum gyro ©Boeing) and (b) reaction wheel (©NASA).	20
1.11	Examples of sensor to estimate attitude of satellites: (a) sun sensor ©SSC) and (b) star tracker (©Ball Corp.).	20
1.12	Manipulator positioning: (a) nonredundant manipulator and (b) redundant manipulator.	25
1.13	Research area of this paper.	29
2.1	A sample coordinate rotation about the z -axis by an angle α	41
2.2	Model of 3R manipulator to classify the singularities.	47
2.3	Saturation singular configuration.	47
2.4	Elliptic singular configuration.	48
2.5	Hyperbolic singularity: (a) manipulator configuration and (b) avoidance motion to non singular configuration using self-motion.	48
2.6	Augmented manipulator model.	49
2.7	Geometric interpretation of augmented C-space.	49
2.8	Simple 2R limb following linear paths.	53

2.9	Simulation results applying Singularity-Consistent method to the 2R planar manipulator with linear path: (a) joint angle, (b) determinant of Jacobian \mathbf{J} , (c) end-effector position and (d) end-effector velocity	54
2.10	Model of left-singular vector in the three-dimensional Euclid space.	57
2.11	Simulation results using Singularity-Consistent method: (a) rotation angle, (b) angular velocity, (c) joint angle, (d) joint speed (e) singular value and (f) determinant of rotational Jacobian matrix.	59
3.1	Double covering \mathbb{S}^3 and $\text{SO}(3)$	65
3.2	Unwinding phenomenon.	66
3.3	Integration error: (a) quaternion and (b) determinant of rotation matrix	68
3.4	3-1-3 Euler angle attitude representation.	69
3.5	Parameterization of rotation axis $\hat{\omega}$	70
3.6	Example of north pole and south pole singular configuration.	71
3.7	Geometric model to describe Euler angle under eigenaxis maneuver. . . .	73
3.8	Angular path to clarify each modified Euler angle behavior.	76
3.9	Description of each angular path.	76
3.10	Modified Euler angle behavior around each singularity: (a) path N1, (b) path N2, (c) path S1, (d) path S2 (e) path N0 and (f) path S0.	77
3.11	Block diagram of proposed Euler-angle-based attitude controller.	80
3.12	Simulation results with proposed Euler-angle-based attitude controller under Case I (a) Euler angles, (b) angular velocity, (c) Euler angle error, (d) Euler angle rate error, (e) control torque and (f) singularity index.	85
3.13	Simulation results with proposed Euler-angle-based attitude controller under Case II (a) Euler angles, (b) angular velocity, (c) Euler angle error, (d) Euler angle rate error, (e) control torque and (f) singularity index.	86
3.14	Block diagram of proposed motion-space-based attitude controller.	87
3.15	Spherical geometry model to represent attitude error based on Euler angles.	88

3.16 Simulation results with proposed motion-space-based attitude controller around NP under Case I (a) Euler angles, (b) Euler angles rate, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of \mathbf{A} and (h) spherical triangle parameter.	93
3.17 Simulation results with proposed motion-space-based attitude controller around NP under Case II (a) Euler angles, (b) Euler angles rate, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of \mathbf{A} and (h) spherical triangle parameter.	94
3.18 Simulation results with proposed motion-space-based attitude controller around SP under Case III (a) Euler angles, (b) Euler angles rate, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of \mathbf{A} and (h) spherical triangle parameter.	95
3.19 Simulation results with proposed motion-space-based attitude controller around SP under Case IV (a) Euler angles, (b) Euler angles rate, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of \mathbf{A} and (h) spherical triangle parameter.	96
3.20 Simulation results of full attitude maneuver with proposed motion-space-based attitude controller (a) Euler angles, (b) modified Euler angles, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of \mathbf{A} and (h) motion trajectory on the spherical plane.	99
3.21 Simulation results of full attitude maneuver that needs to perform 180 deg rotation around specified axis (a) Euler angles, (b) modified Euler angles, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of \mathbf{A} and (h) motion trajectory on the spherical plane.	100
4.1 A simple 2R planar limb following circular path. q_* is the path parameter, d is the shortest distance to the folded-arm singular point.	103

4.2	Variation in peak joint speed, peak joint torque and total mechanical power for the circular path following cases.	104
4.3	Circular path following with a planar 2R limb under natural motion, the distance to singularity is ($d = 0.226$ m).	105
4.4	Circular path following with a planar 2R limb under constant speed control, the distance to singularity is ($d = 0.226$ m).	106
4.5	Circular path following with a planar 2R limb under constant arc length control, the distance to singularity is ($d = 0.226$ m).	107
4.6	Circular path following with a planar 2R limb under global optimization control, the distance to singularity is ($d = 0.226$ m).	108
4.7	Spatial 3R limb following a circular path.	109
4.8	Circular path following with a spatial 3R limb under natural motion.	111
4.9	Circular path following with a spatial 3R limb under constant speed control.	112
4.10	Circular path following with a spatial 3R limb under constant arc length control.	113
4.11	Circular path following with a spatial 3R limb under global optimization control.	114
4.12	Performance index moving along circular path $d = 0.226$: (a) NM, (b) CS, (c) CAL and (d) GO.	117
4.13	Summation of performance index for respective simulation: $d = 0.226$, $d = 0.489$ and $d = 0.74$	117
4.14	Each peak joint torque with CAL.	120
4.15	End-effector position when peak joint torque arises.	120
5.1	Reference frame is transformed to identify the x -axis with singular direction.	122
5.2	Stationary point singularity: (a) outer workspace boundary and (b) inner workspace boundary.	123
5.3	Geometrical parameter to determine how to create the end-effector motion following circular path.	125
5.4	Simulation results of stationary point singularity circular path applying proposed singularity-consistent method.	127

5.5	Geometrical parameter to determine how to create the end-effector motion following linear path.	128
5.6	Simulation results of stationary point singularity linear path applying proposed singularity-consistent method.	130
5.7	Kinematic model of 6R nonredundant manipulator.	131
5.8	Positioning subchain of 6R manipulator applying proposed singularity-consistent method.	133
5.9	Linear path following with a positioning subchain of 6R manipulator applying proposed singularity-consistent method.	135
5.10	Linear path following with 6R manipulator considering both the end-effector position and orientation.	138
6.1	PA-10 kinematic model.	140
6.2	Kinematic structure of S-R-S type manipulator.	140
6.3	Internal singularity of positioning subchain (Shoulder singularity). . .	142
6.4	Extended singularity of positioning subchain (elbow singularity). . .	142
6.5	Inner boundary of the work space when $c = 0$: (a) $q_3 = 1$ deg and (b) $q_3 = 90$ deg.	144
6.6	Linear path following with a positioning subchain of S-R-S type manipulator with conventional singularity-consistent method. Inner obstacle is appeared when $c = 0$	146
6.7	S-R-S manipulator remodeled with a virtual prismatic joint.	148
6.8	Singular region.	150
6.9	Linear path following with a positioning subchain of S-R-S type manipulator with proposed singularity-consistent method. Inner obstacle is not appeared when $c = 0$	152
6.10	Circular path parameter for S-R manipulator.	153
6.11	The end-effector following the desired circular path and moving in the non-singular direction at the elbow singularity.	154
6.12	Simulation results illustrate that the motion can be generated in a stable way even when the end-effector follows a path tangent to the outer workspace boundary.	155
6.13	The end-effector moving along y -axis and rotating around x -axis. . .	158

6.14 The desired path of the end-effector is parallel to the y -axis of the base frame. Simulation results illustrate that the motion can be generated without unstable conditions in the singularity neighborhood, i.e. joint velocity can be obtained when approaching and moving away from the elbow singularity.	159
6.15 Spherical motion when rotating around the most optimized axis.	163
6.16 The desired path of the end-effector is parallel to the y -axis with respect to the base frame. Simulation results illustrate that the wrist singularity can be avoided with singularity-consistent-method instead of using the redundancy.	165
6.17 Block diagram of kinematic controller with proposed method.	167
6.18 Simulation results of kinematic controller with proposed method. There- sults illustrate that the motion can be generated without unstable con- ditions in the singularity neighborhood. Also, the end-effector reaches both the desired position and orientation.	168
A.1 Attitude transition under self-motion.	197
A.2 Attitude transition under self-adaptation.	197
B.1 Spherical geometry.	200
B.2 Model of first-dimensional manifold.	202
B.3 Image of curve.	203
D.1 PA-10 joint limits.	215
E.1 SG-CMG Unit.	222
E.2 Pyramid mounting arrangement of four SGCMGs.	223

表 目 次

1.1	The summary of the symbols.	31
2.1	Numerical simulation applying Singularity-Consistent method to the 2R planer manipulator.	52
2.2	Numerical simulation using Singularity-Consistent method.	57
3.1	Simulation condition to create each angular path.	75
3.2	Parameters for numerical simulation I with proposed Euler-angle-based attitude controller.	82
3.3	Parameters for numerical simulation II with proposed Euler-angle-based attitude controller.	83
3.4	Parameters for numerical simulation with proposed motion-space-based attitude controller around NP singularity.	90
3.5	Definition of singularity region around NP.	91
3.6	Parameters for numerical simulation with proposed motion-space-based attitude controller around SP singularity.	91
3.7	Definition of singularity region around SP.	92
3.8	Numerical simulation of full attitude maneuver with proposed motion-space-based controller.	92
3.9	Numerical simulation of full attitude maneuver that needs to perform 180 deg rotation around specified axis.	97
4.1	Initial conditions for the circular path following cases.	104
4.2	Clarification of respective simple timing generator.	115
5.1	D-H parameters description of the manipulator.	132
6.1	D-H parameter of 7 DOF manipulator.	141
C.1	Stable/unstable node of self-motion.	213

D.1 Specifications of PA-10.	216
D.2 Specification of actuator.	217

第1章 序論

1.1 はじめに

宇宙空間や災害現場など人の立ち入りが危険な場所では、ロボットに代替して目的の作業を実現することが多く、今後ますますその活躍が期待される。最近では、株式会社本田技術研究所と独立行政法人産業技術総合研究所が共同で開発した福島第一原子力発電所向けの高所調査用ロボットなどがその例である（Fig. 1.1）。また、自動車の製造ラインや食品移載工程の自動化などのファクトリーオートメーション分野への利用も増加しており、これら需要は作業者の安全、コスト、生産性などの観点から、その市場規模は拡大傾向にある。その他には、Fig. 1.2 に示すホームロボットによる人間の生活サポートするロボットのように、我々の住環境にまで進出し、生活の一部になりつつある。

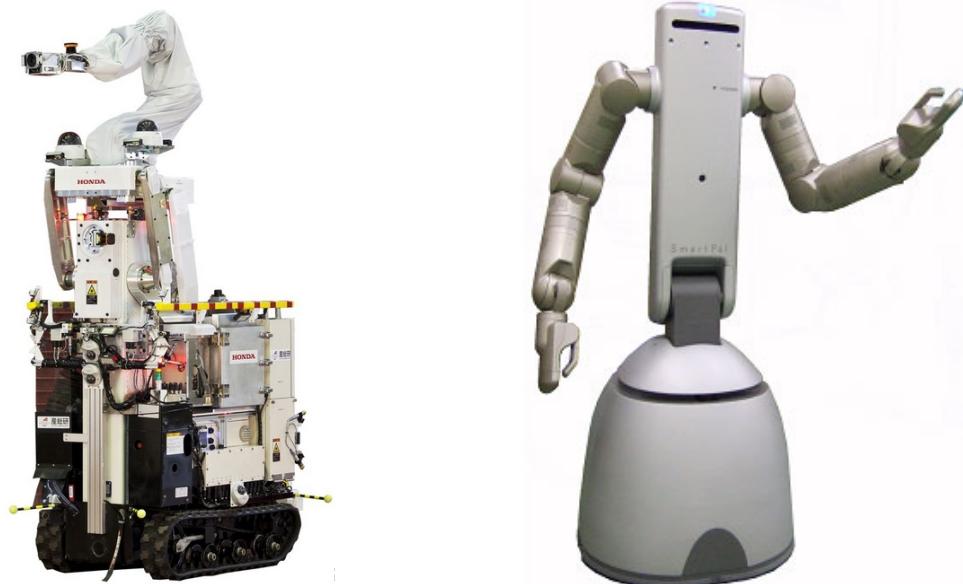


Fig. 1.1: High-altitude exploration robot (©Honda and AIST).
Fig. 1.2: SmartPal (©YASKAWA).

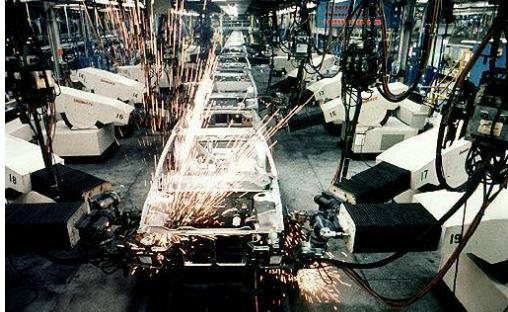


Fig. 1.3: Example of factory automation.



Fig. 1.4: MOTOMAN (©YASKAWA).

これらのロボットは、作業目的によって必要な機能は異なるものの、マニピュレータの機構を有するシステムとして設計されることが多い。その理由の一つに、人間の腕部のように、我々の住環境に適した構造であることが挙げられる。前出の高所調査用ロボットでのマニピュレータは主に、手先に取り付けられたカメラを用いた原子炉内の調査で役割を果たし、自動車の製造ラインの場合は、自動車の部品同士を溶接する作業などに使われる(Fig. 1.3)。また、マニピュレータの自由度も汎用性の向上などの理由から増加してきており、Fig. 1.4 のような人間の腕を模擬した7自由度マニピュレータなども多用されるようになってきた。このようなマニピュレータ型ロボットを扱う際のマニピュレーション技術は、安全性、合理性、利便性などの点から非常に重要である。特に、マニピュレータ型ロボットの動作を生成するためには順運動学と逆運動学に基づく計算が必要不可欠であり、これら計算手法の適用法がマニピュレーション技術を決定するといっても過言ではない。

1.2 運動学に基づく制御とアプリケーション

運動学とはマニピュレータの関節運動と手先運動の関係を幾何学的に記述する学問である。その中でも、順運動学計算はマニピュレータの各関節からマニピュレータ手先状態を得る計算手法で、逆運動学計算はその反対に、マニピュレータ手先の状態から各関節の運動を表現する計算手法である。一般的に、各関節で表される空間を関節空間(コンフィギュレーション空間)といい、実際にマニピュレータが動作するユークリッド空間(多くの場合、マニピュレータ手先を指す)を作業空間という。関節空間の次

元はマニピュレータの自由度と等しく、作業空間の次元はマニピュレータの機構的拘束を除く三次元空間では、一般に六次元である。したがって、三次元空間で任意の位置/姿勢にマニピュレータを制御する場合は、マニピュレータの自由度は最低6自由度必要である。作業空間と関節空間の次元数が同じマニピュレータを非冗長マニピュレータといい、目標手先状態が指令されたときの関節空間の組み合わせ（関節変位ベクトル）は一意に存在する。つまり、逆運動学計算による関節変位解を容易に得ることができる。機構的な制約を除けば、目標の手先運動を表現するのに必要十分となる関節数で設計されたマニピュレータとなり、非常に理に適っている。一方、作業空間よりも関節空間の次元数が多いマニピュレータのことを冗長マニピュレータという。このとき、作業空間に対して余分な関節自由度は冗長自由度と呼ばれる。冗長マニピュレータの手先に目標状態が指令され拘束されるとき、それを表現する関節の組み合わせは、冗長自由度の次元数に応じた多様体となる。つまり、作業空間の位置/姿勢による拘束以外に、目的関数を与えるなど他の条件を加える必要がある。このように、マニピュレータによって何かしらの作業を行わせる際、その多くは作業空間に基づいて動作を指令させて制御する。すなわち、目標の位置/姿勢あるいは軌道を達成するための各関節状態を得る逆運動学計算は、ロボティクス分野における基本的な計算手法である。

上記で述べたロボットマニピュレータのような運動学を必要とする制御は、広い意味で剛体の運動制御として拡大解釈することができる。すなわち、ある作業空間に定義された剛体を任意の位置/姿勢あるいは目標の運動となるように制御するということである。特に、作業空間の指令を姿勢のみにして考えた場合、三次元空間に定義された剛体の姿勢制御としてみなすことができる。これは人工衛星（Fig. 1.5）や国際宇宙ステーション（Fig. 1.6）などの軌道上システム、潜水艦（Fig. 1.7）、無人航空機（Fig. 1.8）など数多くのアプリケーションがそうである。このような三次元空間上の剛体の姿勢は一般に三次元直交群 $SO(3)$ によって表すことができる。しかし、姿勢そのものをベクトル空間で記述できないため、角速度ベクトルの時間積分によって姿勢を得ることはできない。そのため、一般的には単位クオータニオンやオイラー角などへのパラメータ化によって時間に対して可積分な形に変換し、それから姿勢 $SO(3)$ を計算する。これらのパラメータがロボットマニピュレータでいう関節空間に相当し、結果として姿勢制御には運動学による計算過程が必要となる。



Fig. 1.5: Spacecraft ©ESA.



Fig. 1.6: International space station (ISS) ©NASA.

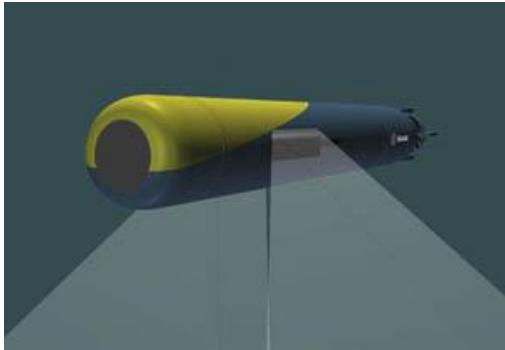


Fig. 1.7: Autonomous underwater vehicle (AUV) ©SAAB.



Fig. 1.8: Unmanned aerial vehicle (UAV) ©DT.

1.3 研究背景

1.3.1 三次元空間上の姿勢制御（人工衛星）

科学技術の発展とともに宇宙空間を利用した研究開発が盛んに行われてあり、すでに、気象衛星や放送衛星など宇宙空間の位置による利用は実用化に至っている。これから宇宙活動には通信・放送などの位置としてだけでなく、太陽系の惑星への進出、宇宙探査・観測などの科学的な利用やエネルギー、環境、資源などの分野への進展が期待される。このような活動を進めるためには、人工衛星、月面基地、宇宙ステーションのような軌道上でミッションを行うための軌道上システムが必要で、さらにその姿勢制御は不可欠である。人工衛星の場合について考えると、姿勢制御が要求される具体的なミッションは次のようなものがある。

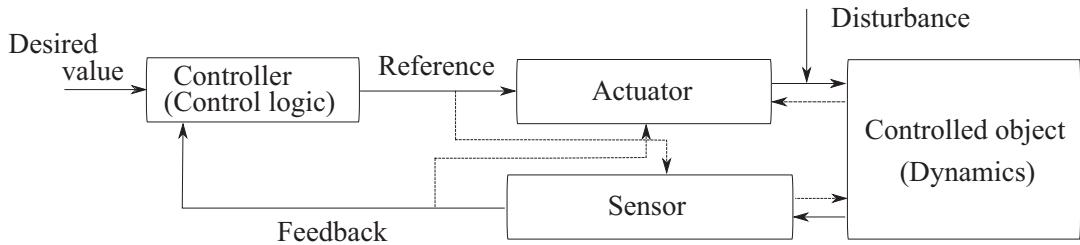


Fig. 1.9: Attitude controller.

1. 制御局 , 移動局および他の衛星との通信時におけるアンテナ指向要求
2. リモートセンシング用カメラの観測域指向要求
3. 天体観測時の精密指向および安定要求
4. 宇宙環境の調査
5. 他システムとのドッキングやデブリ回収などにおける姿勢同期 etc...

ミッションによって要求される姿勢精度はさまざまであるが , 例えば , 通信系などの光ミッションは 1.0×10^{-4} deg , 天体観測の場合には , 1.0×10^{-5} deg であり , 近年では特に , 高い姿勢精度が求められるミッションが多い .

一般的な人工衛星の姿勢制御システムを Fig. 1.9 に示す . 制御論理を介して目標姿勢に近づけるための制御トルクを決定し , 指令されたトルクを出力するためにアクチュエータを駆動させる . 軌道上システムのアクチュエータは , 主に Fig. 1.10 に示すリアクションホイールや CMG (Control Momentum Gyros) , あるいはモーメンタムホイールなどが挙げられる . これらによって , 機体の姿勢を変動させ , 各種センサによって得られた姿勢情報をフィードバックさせて姿勢を制御する . 軌道上システムに用いられるセンサの例を Fig. 1.11 に示す . (a) は太陽センサ , (b) はスタートラッカーである . これら以外にも , 地球センサや慣性基準装置 (IRU : Inertial Reference System) など , 要求されるミッションに応じて複合的にセンサ系を構築し , 姿勢情報を得る .

人工衛星のような三次元空間上の剛体の姿勢制御は , 一つの非線形制御理論問題 [1][2] として広く知られており , 宇宙機や水中機などの汎用性の高さから数十年に及んで研究されている . 長きにわたり議論されてい

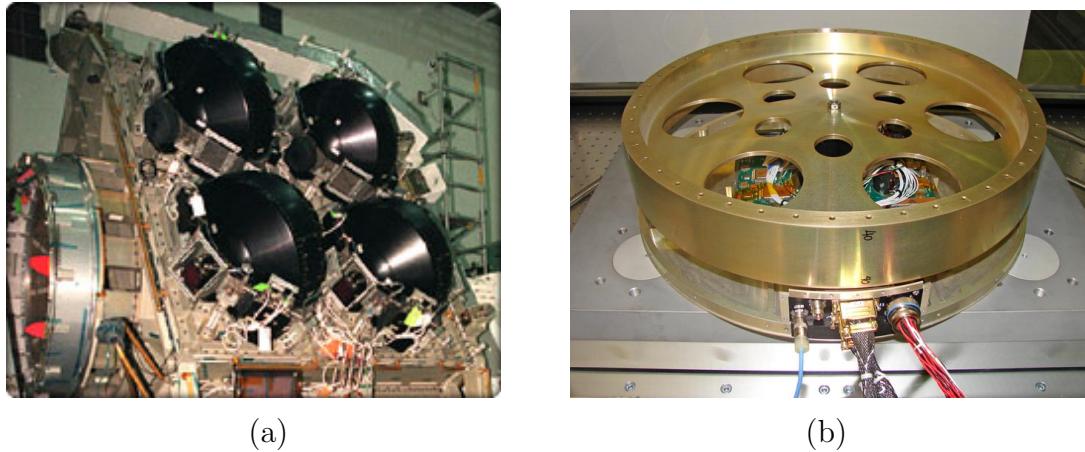


Fig. 1.10: Examples of actuators to control satellites: (a) control momentum gyro (©Boeing) and (b) reaction wheel (©NASA).

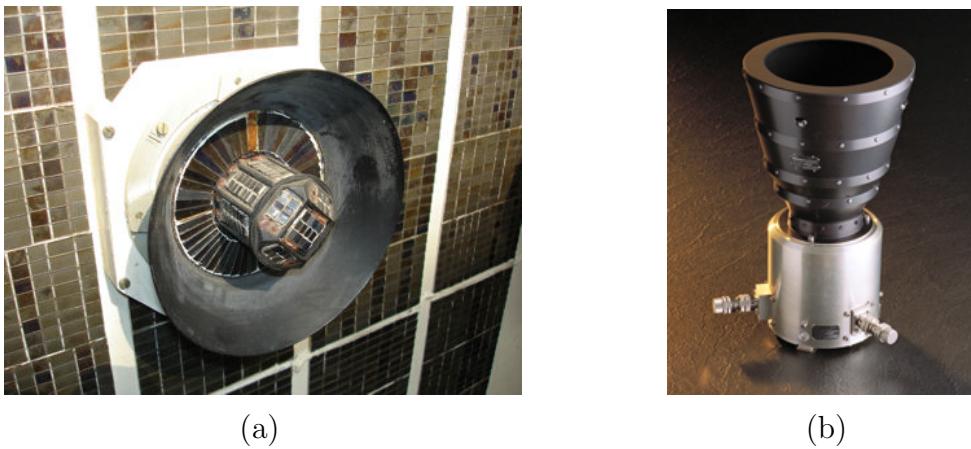


Fig. 1.11: Examples of sensors to estimate attitude of satellites: (a) sun sensor (©SSC) and (b) star tracker (©Ball Corp.).

る理由は，三次元上の剛体の姿勢表す状態空間 $SO(3)$ が複雑な位相を有するためである。 $SO(3)$ は境界のないコンパクト多様体でベクトル空間でないため，特定の姿勢を一定に保つ大域的漸近安定な状態フィードバック制御は存在しない[3]。そのため，ミッションの要求に適した姿勢制御手法が議論され，逐次提案されている。また，このような三次元空間の姿勢制御は重力場の有無に関わらず動力学的に3D Pendulum[4]と呼ばれるシステムに分類され，Chaturvediらによってその解析が行われている[5][6]。

人工衛星に取り付けられたセンサーによって角速度ベクトルが計測可能であるとすると、姿勢は次の二つによって得られる。

1. 角速度から姿勢行列 $SO(3)$ の時間微分値に変換して時間積分
2. 角速度からオイラー角や単位クオータニオンの時間微分に変換し、それらを時間微分したのち姿勢行列の再計算

いずれにせよ、角速度ベクトルの非可積分性により別の形式に変換する操作が必要となる。前者の場合、この変換による特異点は存在しない。しかし、姿勢を表現するパラメータが九つと多いことや、時間積分過程で生じる誤差（積算誤差）が大きく姿勢表現の厳密性が問題である。そのため、一般的には後者であるオイラー角（パラメータ数3）や単位クオータニオン（パラメータ数4）など、少ないパラメータにより $SO(3)$ を覆うことで姿勢制御系を構築することが多い[7]–[9]。ところが、オイラー角には、角速度ベクトルからオイラー角の時間変化率を求める逆変換に全射性がなく、特定の姿勢に対して表現上の特異点が存在する。以上の理由から、非特異で最も少ないパラメータで姿勢を表すことができる単位クオータニオンが広く用いられており、数多くの姿勢制御系の提案や安定性の議論がされており[3][10]–[33]、実機への適用も行われている[34][35]。また、姿勢制御だけでなく、人工衛星のナビゲーションシステム[36]や姿勢推定[37]、3Dアニメーションの表現[38]などにも利用されている。

単位クオータニオンは三つのベクトル成分と一つのスカラー量から成る四つのパラメータで三次元空間を表現する数学的手法である。単位クオータニオンで三次元空間上の姿勢を表現する場合、その状態空間 \mathbb{S}^3 がコンパクト多様体でハイネ・ボイルの被覆定理より、姿勢から単位クオータニオンへの変換が单射であるが全射でない。これは、 \mathbb{S}^3 が $SO(3)$ に対して二重被覆性（Double covering）を有することに由来する[11][39]。すなわち、一つの姿勢に対応する単位クオータニオンが二つ存在し、単位クオータニオンは冗長性のある姿勢表現となる。このため、角速度からの逆運動学計算には冗長性が障害となるが、B. Wie らの姿勢制御手法に代表されるように、状態空間 \mathbb{S}^3 を $SO(3)$ へ持ち上げて制御系を構築することで、この問題を回避している[10]。しかし、この操作は状態空間 \mathbb{S}^3 に制限を与えることで成立するため、制御範囲が制限されるという別の問題が生じる。さらに、機体に大きな外乱が加わり、目標姿勢からの誤差が大きくなると、目

標姿勢から離れていくような現象 (Unwinding phenomenon) を引き起こす [12][13]。これは単位クオータニオン特有の問題である。一方で、Mayhew らは単位クオータニオンのスカラー成分に閾値を設けて単位クオータニオンを区別することにより、 $SO(3)$ と \mathbb{S}^3 を結ぶ関係性を全単射なものとしている [3]。しかし、 $SO(3)$ から \mathbb{S}^3 へのアルゴリズムが複雑でかつ、切り替え操作を必要とし、姿勢制御への適用が明確とはいえない。その他にも、単位クオータニオンの時間変化率の積分操作には、一般的な積分方法では誤差が大きく (Drift problem) なり、表現の厳密性も問題として挙げられている [40]。また、これらは総じて回転範囲を制限して用いることから、姿勢同期や天体観測などの継続的な回転あるいは大回転を伴う操作 (Large-angle maneuver) には不向きであることも問題である [26][41][42]。この問題に対して、Cong らは単位クオータニオンに基づく修正ロドリゲスパラメータ (Modified Rodriguez parameter[8]) を用いた三つのパラメータによる対策を提案している [43]–[45]。しかし、累積した回転角度が 360 度を上回ると特異点となり、姿勢を表すことが不可能で、根本的な解決とはいえない。

以上を要約して、単位クオータニオンによる姿勢制御の特徴を以下にまとめることとする。

1. 非特異で最小の姿勢表現が可能
2. Unwinding phenomenon
3. 積分誤差による姿勢表現の厳密性
4. Tracking problem
5. 回転角度の制限

Ting ら [14] によって指摘されているように、単位クオータニオンは総じて非線形性や $SO(3)$ からの非全射性などの本質的な問題により姿勢制御への適用に課題が多い。特に、多くのミッションで要求される追従性が大きな問題 (Tracking problem) で頻繁に議論されている [10]–[23]。

上記の理由により、回転行列の九つの変数を直接用いて、単位クオータニオンの利用を回避した制御系も提案されている [46]。その特徴として、回転行列は $SO(3)$ の位相をそのまま適用するため、目標姿勢が唯一に定まる。そのため、設計の仕方次第で目標姿勢に対して最短となる制御入力を指令できる。しかし、 $SO(3)$ の非ユークリッド性のため、設計時に複数の

不安定点を併発し、安定性に問題がある。前述のとおり、積分操作に伴う姿勢表現の厳密性が欠点として残る。

以上のように、単位クオータニオンや $SO(3)$ を直接用いた姿勢制御はミッションによって困難な操作や安定性の問題が存在する。一方で、オイラー角を用いた姿勢制御系はあまり議論されておらず、特に特異点問題との対応を考慮に入れた制御手法はこれまで提案されていない。オイラー角の特異点対策や制御への適用を考察することで、単位クオータニオンや $SO(3)$ を用いる際に生じる特有の問題を解消し、有用性を見出すことが期待できる。

1.3.2 ロボットマニピュレータの運動制御

ロボットマニピュレータを運動学に基づいて制御する際に必要な逆運動学計算の従来手法は大別して、解析的に解を得る方法と数値的に解を得る方法がある。前者は、作業空間から幾何学的に関節変位を得る方法で、特異点問題の回避や関節可動域を考慮するのに有効である。しかし、手先に指令した軌道を正確に追従することが困難であることや、マニピュレータのコンフィギュレーションに強く依存するため追従性や汎用性が課題である。これは解析的逆運動学解法が幾何学的特性の考慮に加え関節変位空間に基づいて解を得ることに由来する。これに対し、後者は、手先速度と関節速度の関係を表すヤコビ行列を通して関節速度解を得る手法である。速度空間で解を得るために、手先軌道を容易に生成することが可能である。しかし、マニピュレータの機構の特異点が軌道計画に大きな障害となる。

数値的逆運動学解法を用いた作業空間に基づく制御を指令する際、多くの場合次の二つの手順が必要である。

1. 作業空間の経路の設定
2. 経路の追従速度の設定

一般的に経路は変更が不可能なことが多く、指定された経路から外れることなく追従することが重要とされ、一方で経路の追従速度は自由に設定できる場合が多い。

非冗長マニピュレータ

非冗長マニピュレータの場合，追従速度の最適化に対する研究は多く行われてあり，最小の時間で決められた経路を追従する制御[48]–[50] や関節トルクのリミットで制御を行う手法[51]–[53] などがある．また，それらの目的を単一の評価関数として与える手法も提案されている[54]．しかし，これらの方法は最適解を得るための拘束条件が複雑になることや，特異軌道が存在することが指摘されており，特異点問題も解決していない[48]．制御する際の別の問題としては，その他にベースとなる運動学関係の線形化問題が挙げられる．三平らは新時間軸によるスケーリング手法によって線形化問題にアプローチし[55]，運動学的特異点周りの安定性解析に適用している[56][57]．

一般的に，ロボットマニピュレータの手先経路が指令されると，制御する際に必要となる駆動力の次元は減少する[58]．その代わり，制御器にはロバスト性を持たせることができる．これは手先に与えられた拘束が経路のみで，追従速度が不定であるためである．この手先速度を決定する制御は経路追従制御(Path-following)と呼ばれ，ロボットマニピュレータの制御だけでなく，飛翔体[59] や自動水中機[60] に適用されている．このように，非冗長マニピュレータであっても作業空間の指令(拘束)の仕方によっては関節速度が定まらない冗長系と成り得る．その中で如何にして逆運動学を計算するかは未だ十分議論の余地がある．

冗長マニピュレータ

現在活躍しているロボットマニピュレータの多くは目的に応じて設計され，必要最低限の自由度のみで構築された非冗長マニピュレータである．これに対し，必要な自由度より多くの自由度を持つ冗長マニピュレータは，その余った自由度(冗長自由度)を活用することで，障害物や特異点の回避，可操作性の向上が可能である．冗長自由度による運動はセルフモーションと呼ばれ，この運動の制御方法は多くの研究が行われており，特異姿勢回避，障害物回避，機構的な制限の回避などの，制御範囲の拡張を図る制御や，角度レベル，速度レベル，加速度レベル，トルクレベルでの局所最適解を得る方法などがある[61]–[64]．しかし，欠点として，制御の複雑化や特異点の増加や，前節で述べた作業空間に対して関節の自由度が多いことにより，手先の位置，姿勢情報から関節変位を一意に得ること

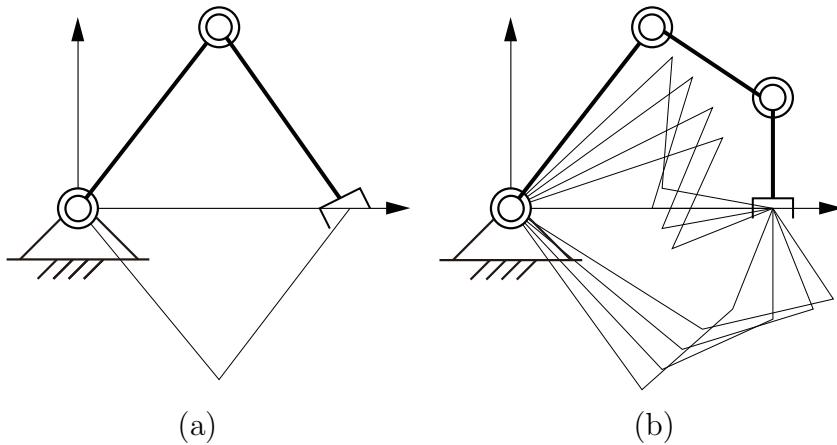


Fig. 1.12: Manipulator positioning: (a) nonredundant manipulator and (b) redundant manipulator.

とができない(Fig. 1.12)。そのため、冗長マニピュレータの逆運動学計算には、関節空間を拘束する評価関数を与える必要がある。

冗長マニピュレータの代表的なものとして、7つの関節で構成されるS-R-S型マニピュレータがある。Fig. 1.4に示した株式会社安川電機社製のMOTOMANや三菱重工業社製のPA-10[65]、DLRアーム[66]などが代表例である。その他にも、ヒューマノイドロボットの腕部にもS-R-S型で設計されているものがある[67][68]。S-R-S型マニピュレータを制御する際、逆運動学計算は必要不可欠であるが、自由度が多いため特異姿勢は非常に複雑である[69][70]。しかし、その重要性から特異点を考慮したS-R-Sマニピュレータの逆運動学解法が解析的なものから数値的な手法に渡って多く提案されている[71]–[74]。それでもなお、特異点問題に対しては特異点低感度法[75][76]に基づくアプローチが多く、追従性の問題が存在する（次節参照）。また、Nenchevらは特異点適合法によって追従性を保証したS-R-S型マニピュレータの逆運動学解法を提案しているが[77][78]、別の問題として内部障害（Inner obstacle）が報告されている。これにより、生成できない動作や冗長自由度が拘束される問題が残り、汎用性の高いマニピュレーションとはいえない。報告されている資料では、この点について解析が不十分であり、追従性と特異点を考慮に入れたS-R-S型マニピュレータの逆運動学解法の実現に向けた改善案を議論する余地がある。

1.4 特異点問題と特異点適合法

前節までで示してきたように、ロボットマニピュレータの手先から関節角度を得る操作や三次元空間上の姿勢を表すためのパラメータ化には、逆運動学計算が要求される。逆運動学計算に内在する大きな問題として、冗長性の考慮の他に、特異点問題が挙げられる。これはマニピュレータの場合は特定の関節の組み合わせ、姿勢表現の場合はそれを表すパラメータのある組み合わせによって、絶対的に生じる問題である。そのときの剛体の状態は特異姿勢 (Singular configuration) と呼ばれる。特異点にはいくつかの種類があるが、逆運動学計算に伴う特異点は運動学的特異点 (Kinematic singularity) と分類される。ロボットマニピュレータの場合、特異点では逆運動学を解く際に数値的に解が得られず発散するため、マニピュレータは暴走する。また、特異点付近を通過するだけでも、関節速度やトルクが過大に発生するなど、制御が不安定となる。そのため、一般的には特異点付近を避けるようにマニピュレータを制御するが、マニピュレータの稼働範囲を十分に活かすことができないなどの問題が発生する。また、この特異点はマニピュレータの自由度が多くなるほど表れやすくかつ複雑で、リアルタイムで操作する場合、操作者が知らないうちに特異点付近を通過してしまうなどの問題も発生する。姿勢表現の場合、特異姿勢では姿勢を表すことができない。そのため一般的には、マニピュレータへのアプローチと同様に、特異点を回避するか、パラメータに冗長性を与えて非特異な姿勢表現方法を用いる。しかし一方で、関節角度と異なり、姿勢表現パラメータが物理量ではないため、特異点に達しない範囲で特異点近づくことが可能である。

この特異点問題に対しては、特にロボットマニピュレータの特異点対策に関する研究が多い。最も代表的な手法が、中村らによって提案された特異点低感度運動分解 (Damped-least square: DLS) 法 [75][76] である。これは特異点近傍において、関節速度が過大となる要因であるヤコビ行列の最小特異値を連続的に修正する手法で、これにより、逆運動学計算を解くことが可能で、滑らかな関節速度を得ることができる。また、DLS法に基づいて冗長マニピュレータへの適用や作業に応じた逆運動学解法の研究も行われている [79]–[82]。しかし、特異点近傍で修正されるヤコビ行列の逆変換によって得られた関節変位解は作業空間の状態を正確に表現できない。すなわち、DLS法による逆変換は目標とする作業空間上のベクトルに対

応する関節ベクトルに対して，曲げられた形で射影される。これはDLS法の大きな欠点である。ロボットマニピュレータの場合は目標とする手先経路を正確に追従することができない。つまり，特異点近傍での手先制御が不可能で，その姿勢でのマニピュレータによる作業は困難となる。結果として，DLS法は単に関節変位解が求められない状態を回避する手法に過ぎず，特異点問題の根本的な解決とはいい難い。

これに対し，NenchevらはKiefferの概念[83]に基づく特異点適合法を提案している[84]–[86]。これは，作業空間の状態を方向ベクトルと大きさに分解して表現した列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトルに基づくアプローチで，手先速度の大きさのみを特異点との距離に応じて拘束することにより，特異点に達しても関節速度解を得ることができる。この手法の最大の特徴は，逆運動学計算による変換過程で特異点においても，関節速度ベクトルの方向が一般性を失わないところである。すなわち，DLS法の問題である追従性を保証することができる。これにより，特異点を考慮に入れながらマニピュレータの安定した動作生成や稼働範囲の拡張が期待できる。過去に，Nenchevは妻木や内山らとともに，あらゆるマニピュレータに対して実機実験による検証を行い，[87]–[90]でその有用性について報告している。また，冗長性を有するシステムに対してもモデリングされ，適用が議論されている[77][78]。さらに，特異点適合法の考え方に基づいた逆運動学解法の一つとしてNatural motion (NM)[91]が提案されており，半田らとともに数値シミュレーションや実機実験を通して，その利点が示されている[92]。一方で，特異点適合法にはいくつかの問題が残る。一つは定常特異点(Stationary-point singularity)と呼ばれる特異適合法の特有のアルゴリズミック特異点が存在するということである[86]。これにより，特異姿勢において物理的に出力可能な特定の方向への動作が不可能で，生成できない運動が存在する。その他には，前節で取り上げた冗長マニピュレータの内部障害の問題である[77][78]。定常特異点問題と同様に，これも特異点適合法固有のアルゴリズミック特異点で，冗長自由度の活用が制限される。

1.5 本論文の取り組み

本論文のメインテーマは逆運動学計算上の特異点問題の対策と制御への適用である。その取り組み範囲は、作業空間の拘束の仕方やシステムの違いによってFig. 1.13のように分類される。それぞれ特異点については、特異点適合法に基づくモデリングを応用し、問題の解消を図る。また、特異点適合法に存在するアルゴリズミック特異点の解決を目指す。具体的なアプローチは次に示す通りである。

1. オイラー角に基づく姿勢表現に伴う特異点問題に特異点適合法を用いた対応策を示す。
2. オイラー角による姿勢制御系を構築し、その有用性を数値シミュレーションにより示す。
3. NMやその他の経路追従制御法それぞれの性能について、シミュレーションによる定量的な比較に加え、運動学/動力学解析に基づく定性的な評価を交えて検証する。
4. 特異点適合法の定常特異点問題の解消に向けた新たな手法を提案する。
5. 提案手法を用いて非冗長マニピュレータに適用し、従来手法では困難な動作を数値シミュレーションで実現する。
6. 冗長マニピュレータについて特異点適合法と内部障害が存在しない逆運動学解法を組み合わせることで、内部障害を解消した特異点適合法を提案する。
7. 提案手法を用いた冗長マニピュレータの制御系を設計し、S-R-S型マニピュレータへ適用する。

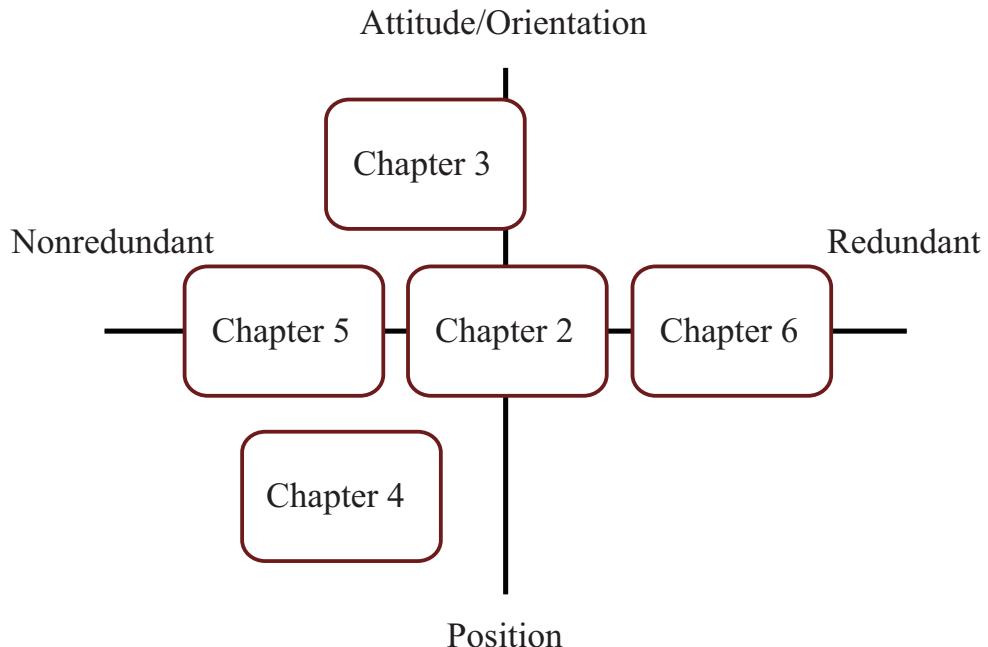


Fig. 1.13: Research area of this paper.

1.6 本論文の構成

本論文は7章構成である。詳細を以下に示す。

第1章「序論」では、本研究の背景、目的などについて述べた。

第2章「逆運動学解法と特異点問題」では、非冗長マニピュレータと冗長マニピュレータの運動学について示し、位置と姿勢による逆運動学の違いを明確にする。また、逆運動学計算における特異点問題とその分類について具体例とともに説明する。さらに、列拡張ヤコビ行列による逆運動学解法を定式化する。その上で、それに基づく特異点適合法の性質および条件をシミュレーションを交えて述べる。

第3章「特異点適合法に基づくオイラー角による姿勢制御」では、姿勢に関する非冗長システムとして、三次元空間上の剛体を表現するオイラー角と姿勢変化の運動学関係に注目し、特異点適合法による特異点問題の解消ならびに、姿勢制御への適用を議論する。まず、これまでの姿勢制御手法に頻繁に用いられていた単位クォータニオンやMRP、回転行列による姿勢制御の問題点を示し、オイラー角を用いて姿勢を表すことの優位性について述べる。そして、特異点周りにおけるオイラー角の挙動を解析し、それぞれの特徴と特異点適合法の適用について議論する。また、四つ

のオイラー角を用いた非特異な姿勢表現と運動学へのアプローチについても考察する。以上の議論を踏まえ、オイラー角に基づく姿勢制御系を構築し、数値シミュレーションを用いて検証する。その結果から、オイラー角を用いることによる利点について述べる。

第4章「非冗長マニピュレータにおける逆運動学解法の比較解析」では、NMを含めた四つの経路追従制御の比較を行い、特異点が与える影響について検証する。比較する制御手法は、特異点によって手先速度の大きさを拘束するNM、与えた経路に対して一定の速度で制御するCS、手先空間の拘束によって生じる関節空間の一次元多様体に対し、その弧長を一定にして制御するCAL、列拡張空間を含めた関節空間の二次元多様体から最適解を選んで与えた経路を追従させるGOである。2Rマニピュレータ、3R非冗長マニピュレータによる二次元と三次元の作業空間でシミュレーションを行い、定量的に評価する。その結果を考察するため、運動学/動力学それぞれで解析を行って定性的に評価し、各手法を利点、欠点および特徴について述べる。

第5章「分解特異点適合法による逆運動学解法」では、非冗長マニピュレータが特異姿勢となる場合を考慮した逆運動学解法について述べる。まず、作業空間が二次元の2Rマニピュレータに対し、手先の運動方向を特異方向と非特異方向に分解したモデリングについて示し、特異点適合法に基づく新たな手法を提案する。その上で、幾何学的な拘束を用いることにより、定常特異点問題が解消されることを数値シミュレーションを通して示す。さらに、提案手法を作業空間が三次元のものに拡張し、6Rマニピュレータの逆運動学解法への適用を議論する。

第6章「冗長マニピュレータにおける逆運動学解法と制御への適用」では、冗長マニピュレータの逆運動学解法と特異点問題の対策について議論する。冗長マニピュレータは手先の位置/姿勢を六次元で表現可能なS-R-S型マニピュレータを用いる。特に実機への適用を見据えて、三菱重工業株式会社製可搬式汎用知能アームPA-10を基にモデリングを行う。その後、冗長マニピュレータで特異点適合法を適用する際に生じる内部障害について述べ、S-R-S型マニピュレータにおける内部障害を解析する。その上で、第5章で提案した手法を応用して特異点適合法の内部障害問題の解消した逆運動学解法を定式化する。また、それを適用した数値シミュレーションを行い、有用性を検証する。

第7章「結言」では、以上の議論を要約する。

1.7 本論文で用いる記号

変数名を Tables 1.1 に示す .

Table 1.1: The summary of the symbols.

a		circular path parameter link length
\mathbf{A}	$\in \mathbb{R}^{3 \times n}$	transformation matrix
\mathbf{A}_p	$\in \mathbb{R}^{3 \times n}$	transformation matrix of positioning subchain
\mathbf{A}_ω	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	transformation matrix of orientation subchain
\mathbf{A}_{3123}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 4}$	transformation matrix of 3-1-2-3 Euler angle
\mathbf{A}_{3213}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 4}$	transformation matrix of 3-2-1-3 Euler angle
\mathbf{A}_ω^{mod}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	modified \mathbf{A}_ω
$\bar{\mathbf{A}}_\omega^{mod}$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 4}$	\mathbf{A}_ω^{mod} including redundancy
b		magnitude of $\text{Ker } \mathbf{A}_{3213}$ magnitude of $\bar{\mathbf{n}}$
b_{cal}		natural parameter of CAL
b_{cs}		natural parameter of CS
b_{ep}		magnitude of \mathbf{n}_{ep}
b_{go}		natural parameter of GO
b_{nm}		natural parameter of NM
b_{sm}		magnitude of \mathbf{n}_{sm}
b_z		magnitude of \mathbf{n}_z
\mathbf{B}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	transformation matrix ϕ from θ
c		magnitude of admissible null space vector shoulder singularity index
\mathbf{c}	$\in \mathbb{R}^{(n-\text{rank } \mathbf{J}(\mathbf{q}^s))}$	magnitude of admissible null space vector set
C		configuration (joint) space
C_{ep}		elements of $\bar{\mathbf{n}}_{ep}$
C_{sm}		elements of $\bar{\mathbf{n}}_{sm}$
C_*		augmented configuration space
\mathbf{C}		coriolis term
d		distance from singular point link length
\mathbf{e}	$\in \mathbb{R}^3$	attitude error vector
\mathbf{e}_p	$\in \mathbb{R}^3$	position error vector

e_W	$\in \mathbb{R}^3$	orientation error vector
\hat{e}_i	$\in \mathbb{R}^3$	normalized axis vector of i -th coordinate rotation
E		energy
f	$\in \mathbb{R}^3$	geometrical constraint of singular configuration
g	$\in \mathbb{R}^3$	gravity vector field
i		arbitrary integer
H	$\in \mathbb{R}^{m+1}$	column-augmented Jacobian of attitude kinematics
\tilde{H}		Hessian matrix of $\tilde{\omega}$
I		object function
I_*		object function including end-link parameter
I	$\in \mathbb{R}^{n \times n}$	identity matrix
j		elements of Jacobian matrix
J	$\in \mathbb{R}^{m \times n}$	Jacobian matrix
	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	inertia matrix of rigid-body on three dimensional space
J_v	$\in \mathbb{R}^{m \times n}$	Jacobian matrix of positioning subchain
J^{mod}	$\in \mathbb{R}^{m \times n}$	modified Jacobian matrix
J_v^{mod}	$\in \mathbb{R}^{m \times n}$	modified J_v
\bar{J}	$\in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$	column-augmented Jacobian of manipulator kinematics
	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	estimated inertia matrix
\bar{J}_v^{mod}	$\in \mathbb{R}^{(m-1) \times n}$	J_v^{mod} removed third row
k		stationary singularity passing coefficient
K_d	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	feedback gain for angular velocity
K_{dp}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	feedback gain for linear velocity
K_{dw}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	feedback gain for end-point angular velocity
K_p	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	feedback gain for attitude
K_{pp}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	feedback gain for position
K_{pw}	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	feedback gain for orientation
l		link length of 2R manipulator
l	$\in \mathbb{R}^3$	angular momentum vector
m		element count of Euclidean space
M	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	inertia matrix of robot manipulator
n		element count of joint space
n	$\in \mathbb{R}^m$	joint vector part of \bar{n}
n_{ep}	$\in \mathbb{R}^n$	joint vector part of \bar{n}_{ep}
n_{sm}	$\in \mathbb{R}^{n+1}$	joint vector part of \bar{n}_{sm}
n_z	$\in \mathbb{R}^n$	joint velocity vector along singular direction

$\bar{\mathbf{n}}$	$\in \mathbb{R}^{m+1}$	kernel of column-augmented Jacobian
$\bar{\mathbf{n}}_{ep}$	$\in \mathbb{R}^n$	end-point motion vector from $\text{Ker } \bar{\mathbf{J}}$
$\bar{\mathbf{n}}_{sm}$	$\in \mathbb{R}^{n+1}$	self-motion vector from $\text{Ker } \bar{\mathbf{J}}$
\mathbf{N}	$\in \mathbb{R}^n$	null space vector at singular configuration
\mathbf{p}	$\in \mathbb{R}^m$	position vector
\mathbf{p}'	$\in \mathbb{R}^m$	decomposed position vector
q_{sm}		angle under self-motion of positioning subchain
q_*		magnitude of end-link speed
\mathbf{q}	$\in \mathbb{R}^n$	joint vector
	$\in \mathbb{S}^3$	unit quaternion
\mathbf{q}_a	$\in \mathbb{R}^n$	joint vector of admissible null space
\mathbf{q}_{cal}	$\in \mathbb{R}^n$	joint angle CAL
\mathbf{q}_{cs}	$\in \mathbb{R}^n$	joint angle CS
\mathbf{q}_{go}	$\in \mathbb{R}^n$	joint angle GO
\mathbf{q}_{nm}	$\in \mathbb{R}^n$	joint angle NM
\mathbf{q}_p	$\in \mathbb{R}^n$	joint angle of positioning subchain
\mathbf{q}_w	$\in \mathbb{R}^n$	joint angle of orientation subchain
\mathbf{q}_{xy}	$\in \mathbb{R}^n$	joint angle along nonsingular direction
\mathbf{q}_z	$\in \mathbb{R}^n$	joint angle along singular direction
\mathbf{q}^s	$\in \mathbb{R}^n$	joint vector set of singular configuration
\mathbf{q}^{so}	$\in \mathbb{R}^n$	joint vector set of singular orientation
$\bar{\mathbf{q}}$	$\in \mathbb{R}^3$	modified Rodriguez parameter
	$\in \mathbb{R}^{n+1}$	joint vector including q_*
$\bar{\mathbf{q}}_w$	$\in \mathbb{R}^n$	\mathbf{q}_w including redundancy
r		radius of circular path
r_c		distance from inner obstacle
r_s		distance of end-position from reference frame
\mathbf{r}	$\in \mathbb{R}^3$	vector element of rotation matrix
\mathbf{R}	$\in SO(3)$	rotation matrix
\mathbf{R}_{313}	$\in SO(3)$	rotation matrix via 3-1-3 Euler angle
\mathbf{R}^y	$\in SO(3)$	coordinate rotation around y -axis
\mathbf{R}^z	$\in SO(3)$	coordinate rotation around z -axis
\mathbf{R}^μ	$\in SO(3)$	unstable attitude
\mathbf{R}^ν	$\in SO(3)$	unstable attitude
\mathbf{s}	$\in \mathbb{R}^m$	singular direction

t	time
t_f	elements of \mathbf{t}_{ast}
t_0	end time
$\mathbf{t}_{ast} \in \mathbb{R}^m$	start time
$\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$	constraint in task-space
$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$	i -th left singular vector
$\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$	left singular vector set
$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	i -th right singular vector
W	right singular vector set
x_i	work
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$	magnitude of x -axis of coordinate frame i
$\in \mathbb{R}^3$	geometrical constraint in Euclidean space
y_i	x -axis vector
$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$	magnitude of y -axis of coordinate frame i
$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$	y -axis vector
α	z -axis vector
	rotation angle around $\hat{\omega}$
$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{(n-\text{rank } \mathbf{J}(\mathbf{q}^s))}$	arm plane angle
$\in \mathbb{R}^n$	higher order of partial differential term of \mathbf{N}
β	parameter of adjoint matrix
	magnitude of $\text{Ker } \mathbf{H}$
	parameter of determinant
	arm plane angle
β_t	stationary singularity path parameter
γ	rotation axis parameter
	circular path angle
$\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^2$	geometrical parameter of S-R manipulator
δ	small displacement
Δ	small displacement per unit time
ϵ	perturbation
$\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^3$	vector part of unit quaternion
ε	singularity region
ε_N	singularity region around north pole singularity
ε_S	singularity region around south pole singularity
ζ	parameter of error Euler angle

η		scalar part of unit quaternion
$\boldsymbol{\eta}$	$\in \mathbb{R}^n$	arbitrary vector of homogeneous solution
θ	$\in \mathbb{R}^3$	Euler angle
θ_{NP}	$\in \mathbb{R}^3$	Euler angle set of north pole singularity
θ_{SP}	$\in \mathbb{R}^3$	Euler angle set of south pole singularity
θ_{3123}	$\in \mathbb{R}^4$	3-1-2-3 Euler angle
θ_{3213}	$\in \mathbb{R}^4$	3-2-1-3 Euler angle
θ^s	$\in \mathbb{R}^3$	Euler angle set of singular attitude
ξ		rotation axis parameter
π		circumference ratio
λ		arc length of C -space
		parameter of error Euler angle
λ_*		arc length of C_* -space
$\boldsymbol{\lambda}$	$\in \mathbb{R}^3$	eigenvector
σ_i		i -th singular value
σ_3^{th}		threshold of the least singular value
$\boldsymbol{\sigma}$	$\in \mathbb{R}^3$	singular value vector
$\boldsymbol{\Sigma}$	$\in \mathbb{R}^{m \times n}$	singular value matrix
$\boldsymbol{\tau}$	$\in \mathbb{R}^3$	torque
$\tilde{\phi}_2^d$		switching parameter of desired Euler angle
ϕ	$\in \mathbb{R}^3$	modified Euler angle
ψ	$\in \mathbb{R}^3$	switching parameter of Euler angle
ψ^d	$\in \mathbb{R}^3$	Euler angle set of stable equilibrium point
ψ^u	$\in \mathbb{R}^3$	Euler angle set of unstable equilibrium point
ψ^v	$\in \mathbb{R}^3$	Euler angle set of unstable equilibrium point
$\tilde{\omega}$		manipulability measurement
$\boldsymbol{\omega}$	$\in \mathbb{R}^3$	angular velocity
$\hat{\boldsymbol{\omega}}$	$\in \mathbb{R}^3$	rotation axis on three dimensional Euclidean space
$\boldsymbol{\Omega}^\times$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	skew-symmetric matrix for $\boldsymbol{\omega}$
$\hat{\boldsymbol{\Omega}}^\times$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	skew-symmetric matrix for $\hat{\boldsymbol{\omega}}$
\mathcal{E}		Euler angle manifold of equilibrium point
\mathcal{Q}^s		joint space manifold of singular configuration
\mathcal{M}		joint space manifold of non-singular configuration
\mathcal{V}		spatial velocity

第2章 逆運動学解法と特異点問題

2.1 概要

ロボットマニピュレータの場合，関節の角度から手先の位置/姿勢を求める操作を順運動学，手先の位置/姿勢から関節角度を得る操作を逆運動学という。特に，それぞれを時間微分した速度空間に基づいて運動学計算を行うことが一般的である。つまり，順運動学は各関節の速度から先端の速度を求める方法，逆運動学は手先の速度から各関節の速度を求める計算手法として解釈されることが多い。速度空間に基づく逆運動学計算では，得られた関節速度解を時間積分することによってマニピュレータの状態を得る。この計算処理の方がマニピュレータの状態から幾何学的に関節角度を解くより，容易でかつ一般性がある。マニピュレータを制御する場合，マニピュレータ手先の経路を設定し，逆運動学により関節変位解を得る操作が必要になる。制御する際の経路を追従する速度は自由に設定できるが，多くの場合，経路を最短時間で動作するような制御や，追従速度を一定にする制御など，何かしらのタスクを持たせる。しかし，逆運動学を用いる際，特異点というアームを制御できないマニピュレータの状態が存在する。逆運動学を解く際に発生する特異点を運動学的特異点といい，手先を制御する状態で運動学的特異点付近を通過すると，関節の角速度が過大となり，実機への適用は困難となる。そこで，Nenchevらは追従速度をマニピュレータの姿勢により変化させる，Natural motion (NM) を用いることで運動学的特異点付近においても関節角速度が過大にならない手法を提案している[85]。さらに運動学特異点上を一般性を失わずに通過できる特異点適合法を提案している[86]。本章では基本的な逆運動学の説明と，そのときに発生する特異点問題，NMと運動学的特異点の通過を可能にする特異点適合法について説明する。

2.2 運動学

2.2.1 位置に関する運動学

ロボットマニピュレータの場合，関節空間を \mathbb{R}^n ，作業空間を \mathbb{R}^m とすると，作業空間に定義される位置ベクトル $p \in \mathbb{R}^m$ と関節の集合ベクトル $q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ の間には，マニピュレータのコンフィギュレーションに応じた幾何学的関係

$$p = x(q) \quad (2.1)$$

によって拘束される。ここで，両辺を時間微分して，速度に関する運動学関係

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i = J(q) \dot{q} \quad (2.2)$$

を得る。ただし， $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ はヤコビ行列である。 $J(q)$ が正方行列 ($m = n$) でかつ正則であるとき，上式の逆元が一意に存在し，

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \dot{p} \quad (2.3)$$

と表すことが可能である。上の操作が速度空間における逆運動学計算の基本形である。また，逆行列 $J^{-1}(q)$ は，行列式 $\det J(q)$ と余因子行列 $\text{adj } J(q)$ を用いると，以下のように表せる。

$$J^{-1}(q) = \frac{\text{adj } J(q)}{\det J(q)} \quad (2.4)$$

一方，冗長マニピュレータ ($n > m$) の場合，目標の先端速度に対し，逆元となる関節速度解は冗長自由度に応じた次元数に依存し，無数に存在する。このような関節速度解が不定となるような劣決定系システムにおける逆運動学計算を Redundancy resolution という。この場合は関節速度空間に冗長自由度の次元数に相当する拘束が必要となる。冗長マニピュレータの場合の一般的な解法として，擬似逆行列を用いる方法がよく知られている[93]。擬似逆行列は関節速度ベクトルのユークリッドノルム $\|\dot{q}\|$ を最小とする目的関数を与える。これによって得られる解は冗長運動 (Self-motion) を許容しない。つまり，関節速度 $\text{Ker } J(q)$ の空間にベクトルを持たない。擬似逆

行列は次式で定義される .

$$\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} = \mathbf{J}^T \frac{\text{adj}(\mathbf{J} \mathbf{J}^T)}{\det(\mathbf{J} \mathbf{J}^T)} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (2.5)$$

擬似逆行列を用いて , 冗長マニピュレータにおける逆運動学を定式化すると ,

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \boldsymbol{\eta} \quad (2.6)$$

となる . $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は単位行列 , $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ は任意ベクトルである . 右辺第2項は , 一般に同次解と呼ばれ , 関節空間の零空間解を指す . このとき ,

$$\mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{p}} \perp (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \boldsymbol{\eta} \quad (2.7)$$

を満たす .

2.2.2 姿勢に関する運動学

三次元空間に定義される姿勢はベクトルで表すことができず , 前節のような各関節と手先位置ベクトルとの幾何学的関係は得られない . 一般に , 三次元空間上の姿勢はユークリッド空間に定義される三つのベクトルの集合によって表される . 特にそれらが互いに直交し合う回転行列 (姿勢行列) のような形で表現されることが多い .

回転行列とは , 回転をユークリッド空間で行う行列のことである . 任意のベクトルを回転行列で写像したとき , 変換されるベクトルはそのユークリッドノルムを保持したまま回転行列が示す任意の方向と大きさで回転する . 回転行列を \mathbf{R} とすると , 三次元空間の回転行列は三次正規直交群の部分群 $\mathbf{R} \in SO(3)$ であり , 行列のサイズは $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ である . 回転行列 \mathbf{R} は次の性質を有する .

$$\det \mathbf{R} = \pm 1 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad (2.9)$$

$\det \mathbf{R} = 1$, $\det \mathbf{R} = -1$ それぞれは固有回転 , 非固有回転と呼ばれる . 非固有回転は固有回転を回反操作したものである . 以後 , 回転行列はすべて固有回転について述べる .

回転行列の各要素を以下のように定義する .

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

回転行列で表される回転運動の回転角 α , 回転軸 $\hat{\omega}$ とすると , それらは次式で表される .

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad (2.11)$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2 \sin \alpha} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ただし , (2.12) において $\sin \alpha \neq 0$ である . 逆に , 回転軸 $\hat{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ で角度 α で回転するとき , 回転行列は以下で導出される .

$$\mathbf{R}(\alpha, \hat{\omega}) = \mathbf{I} + \sin \alpha \hat{\Omega}^\times + (1 - \cos \alpha)(\hat{\Omega}^\times)^2 \quad (2.13)$$

ただし , $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は単位行列である . $\hat{\Omega}^\times \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は $\hat{\omega}$ の歪対称行列であり , 以下のように定義される .

$$\hat{\Omega}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\omega}_3 & \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 & 0 & -\hat{\omega}_1 \\ -\hat{\omega}_2 & \hat{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

座標系の各軸を x, y, z とすると , 各軸の座標回転を表す回転行列 $\mathbf{R}_i : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ は次式となる .

$$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{R}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{R}_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

定義した座標系のいずれかの軸で回転させる操作のことを座標回転と呼び z 軸に α 回転した座標回転 $[x_1 \ y_1 \ 0]^T = \mathbf{R}_3(\alpha)[x_2 \ y_2 \ 0]^T$ を Fig. 2.1 に示す .

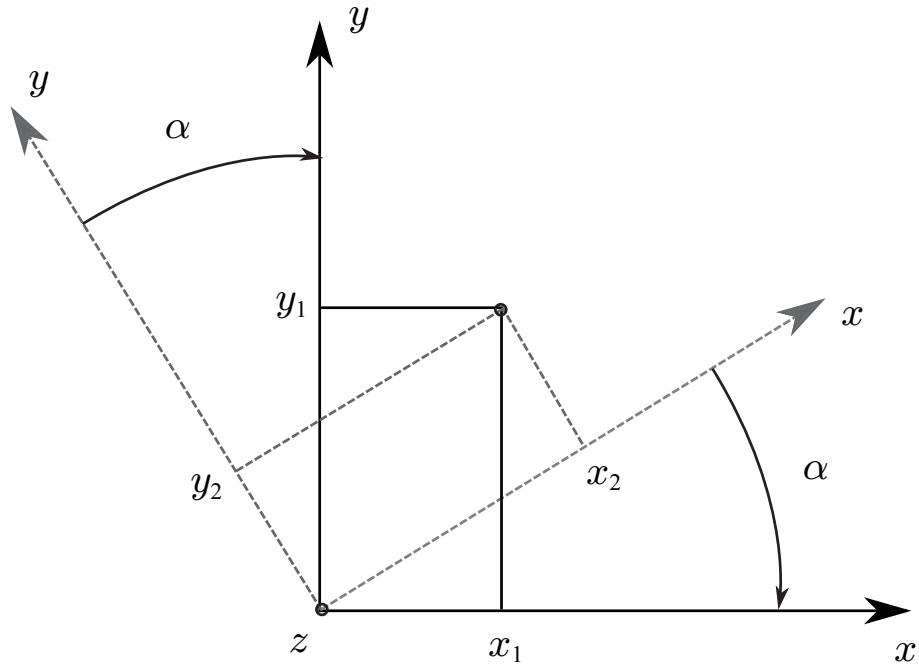


Fig. 2.1: A sample coordinate rotation about the z -axis by an angle α .

以上の議論より，三次元空間上の姿勢は一般に複雑な位相を持つコンパクト多様体 $SO(3)$ によって表されるが，ある回転軸周りの瞬間的な運動として速度空間で定義される場合は角速度ベクトル $\omega \in \mathbb{R}^3$ として記述可能である。つまり，角速度ベクトル $\omega \in \mathbb{R}^3$ と \dot{q} の関係を結ぶ変換行列 $A \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ によって

$$\omega = A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \quad (2.18)$$

で表される。このとき A は次式で定義される。

$$A = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_i & \mathbf{R}_i(q_i)\hat{\mathbf{e}}_{i+1} & \mathbf{R}_i(q_i)\mathbf{R}_{i+1}(q_{i+1})\hat{\mathbf{e}}_{i+2} & \cdots \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

ただし， $\hat{\mathbf{e}}_i$ は i 番目座標回転の回転軸を正規化したベクトルである。前節で示した位置に関する運動学と同様に， A が正方でかつ正則 ($n = 3$) ならば，上式の逆元となる解が一意に存在し，

$$\dot{\boldsymbol{q}} = A^{-1}(\boldsymbol{q})\omega \quad (2.20)$$

として逆運動学を解くことができる。また，劣決定系では，前節と同様に

擬似逆行列を用いて、

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^+(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}^T \frac{\text{adj}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)}{\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)} \boldsymbol{\omega} \quad (2.21)$$

関節速度解を得ることができる。

このように、位置と姿勢に関する運動学では速度空間については同様の系としてみなすことができる。しかし、位置に関しては可積分系、姿勢は非可積分系であるという点で本質は大きく異なる。

2.3 特異点

マニピュレータ手先を逆運動学を用いて制御する場合、運動学的特異点というアームを制御できない状態が存在する。(2.4) や (2.20) に注目すると、ヤコビ行列の逆行列の大きさは $1/\det \mathbf{J}$, $1/\det \mathbf{A}$ に依存しており、方向は $\text{adj} \mathbf{J}$, $\text{adj} \mathbf{A}$ にそれぞれ依存する。そこで、ヤコビ行列 \mathbf{J} , \mathbf{A} がランク落ちするとき、 $\det \mathbf{J} = 0$, $\det \mathbf{A} = 0$ となることで $1/\det \mathbf{J}$, $1/\det \mathbf{A}$ が無限大となり、関節の角速度が過大となる。さらに、特異点付近においても急激な速度変化が発生し、マニピュレータを制御する上で大きな障害となる。また、冗長マニピュレータにおいても同様に、ヤコビ行列の擬似逆行列の大きさは $1/\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$, $1/\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ に依存しており、 $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = 0$, $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 0$ のとき特異点となる。

2.3.1 特異点の分類

非冗長系の運動学上の特異状態では、ヤコビ行列を特異値分解 $\mathbf{J} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ したときに少なくとも一つの特異値 σ_i が 0 となることを意味している。このとき、 σ に応じた \mathbf{U} の列ベクトル \mathbf{u}_i は零空間ベクトルとなり、 \mathbf{u}_i 方向の動作が瞬間的に制限される。特異姿勢において動作が許容されない方向を特異方向といい、 s と表記する。特異姿勢となる関節座標系の集合を \mathbf{q}^s と定義し、 \mathbf{q}^s が成す関節空間の多様体を $\mathcal{Q}^s \in \mathcal{Q}^n$ とすると、 \mathcal{Q}^s は

$$\mathcal{Q}^s = \{ \mathbf{q}^s \in \mathcal{Q}^n \mid s^T \mathbf{J}(\mathbf{q}^s) = 0 \} \quad (2.22)$$

である。

特異状態はマニピュレータ先端とワークスペースとの相対的な位置関係から以下のように分類される [94]–[97]。

- Saturation Singularities (飽和特異点)
- Internal Singularities (内部特異点)
 - Elliptic or Unescapable (楕円型)
 - Hyperbolic (双曲型)

2.3.2 Saturation Singularity

Saturation Singularities (以降 , 飽和特異点と呼ぶ) はマニピュレータの先端がそのワークスペース上の境界にある姿勢状態のことである . 飽和特異点の指標を下記にまとめる (ただし , 回転運動は考慮しない .)

- $\text{rank}(\mathbf{J}) < 3$
- $\mathbf{s}^T \mathbf{x}_i(\mathbf{q}^s) = \max[\mathbf{s}^T \mathbf{x}_i(\mathbf{q})] \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\mathbf{x}_i(\mathbf{q}^s)$ は基準座標系に対する i 番目のリンクの向きを表す . このとき , マニピュレータの先端に影響を与えないリンクの運動が存在しないことは明らかである .

2.3.3 Internal Singularity

マニピュレータの先端がワークスペースの境界上にあるときの特異姿勢を飽和特異点と呼ぶのに対し , ワークスペース内部で特異姿勢となる状態を内部特異点と呼ぶ . 内部特異点はマニピュレータ先端部に影響を与えないセルフモーションがマニピュレータのコンフィギュレーションに与える影響によって , 非特異姿勢へ回避できる場合があり , 分類をさらに細分化することができる . その基準を次にまとめる .

まず , 特異状態から以下に示す多様体 \mathcal{M} 上への接続が可能かどうかを決定する .

$$\mathcal{M} = \{ \mathbf{q} \in \mathcal{Q}^n \mid \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}(\mathbf{q}^s) \} \quad (2.23)$$

\mathbf{q}^s の接ベクトルあるいは零空間ベクトル $\delta\mathbf{q}$ が特異状態を回避するために満たすべき条件は ,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}^s)\delta\mathbf{q} = 0 \quad (2.24)$$

である。しかし、(2.24)を満たす、すべての接ベクトルが非特異姿勢に回避できるとは限らない。(2.24)を満たすすべてのベクトルを admissible null vector と呼び、その中で非特異姿勢への回避操作が可能であるものを feasible null vector と呼ぶ。admissible null vector に沿って微小な大きさ ϵ の摂動を与えたとき、次式の関係は保持される。

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}^s + \epsilon \delta \mathbf{q}) = \mathbf{x}(\mathbf{q}^s) \quad (2.25)$$

(2.25) の左辺にティラー級数を適用すると、

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}^s + \epsilon \delta \mathbf{q}) = \mathbf{x}(\mathbf{q}^s) + \epsilon \mathbf{J}(\mathbf{q}^s + \epsilon \delta \mathbf{q}) \delta \mathbf{q}$$

となる。すなわち、

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}^s + \epsilon \delta \mathbf{q}) \delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.26)$$

を満たす。

微小摂動 ϵ 対する admissible null vector $\delta \mathbf{q}_a$ の必要十分条件をまとめると、

1. $\delta \mathbf{q}_a = c \mathbf{N}(\mathbf{q}^s)$ が成り立つ。ただし、 $\mathbf{N} \in \text{Ker } \mathbf{J}(\mathbf{q}^s)$ 、 c は重み係数で任意の定数である。
2. $\mathbf{J}(\mathbf{q}^s + \epsilon \delta \mathbf{q}_a) \delta \mathbf{q}_a = 0$ が成り立つ。

マニピュレータ先端を admissible null vector の方向に大きさ ϵ で動作させた位置ベクトルの変化 $\mathbf{x}(\mathbf{q}^s + \epsilon \delta \mathbf{q}) - \mathbf{x}(\mathbf{q}^s)$ をティラー展開すると、次式となる。

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}(\mathbf{q}^s + \epsilon \delta \mathbf{q}) - \mathbf{x}(\mathbf{q}^s) \\ &= \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}^s} \delta q_i + \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}^s} \delta q_i \delta q_j + \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

(2.22) より、特異姿勢 \mathcal{Q}^s では $s^T \mathbf{J}(\mathbf{q}^s) = 0$ の関係から、

$$s^T \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}^s} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

が成り立つ . (2.27) , (2.28) から次式を得る .

$$\begin{aligned} & \mathbf{s}^T(\mathbf{x}(\mathbf{q}^s + \epsilon\delta\mathbf{q}) - \mathbf{x}(\mathbf{q}^s)) \\ &= \frac{\epsilon^2}{2!} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{s}^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}^s} \delta q_i \delta q_j \\ &+ \frac{\epsilon^3}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \mathbf{s}^T \frac{\partial^3 \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}^s} \delta q_i \delta q_j \delta q_k + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

(2.25) , $\delta\mathbf{q}_a = c\mathbf{N}(\mathbf{q}^s)$ を適用すると ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\epsilon^2}{2!} \sum_{i,j=1}^m \alpha_{i,j} c_i c_j \\ &+ \frac{\epsilon^3}{3!} \sum_{i,j,k=1}^m \alpha_{i,j,k} c_i c_j c_k + \dots \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる . α は $\mathbf{N}(\mathbf{q})$ の高次の偏微分項 , $m = n - \text{rank } \mathbf{J}(\mathbf{q}^s)$ である . (2.30) の右辺第1項を二次形式に改めると以下となる .

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon^2}{2!} \mathbf{c}^T \mathbf{Q}(s, \mathbf{q}^s) \mathbf{c} \\ \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{Q}(s, \mathbf{q}^s) &= \mathbf{N}^T(\mathbf{q}^s) P(s, \mathbf{q}^s) \mathbf{N}(\mathbf{q}^s) \\ P_{i,j}(s, \mathbf{q}^s) &= \mathbf{s}^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}^s} \end{aligned}$$

admissible null vector の方向にマニピュレー多先端を動作させたとき , 可操作性が増加するための十分条件は , 吉川による可操作性測定法 ($\tilde{\omega} = \det[\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^T]$) を用いて ,

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{q}^s) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q}^s) \mathbf{N}(\mathbf{q}^s) > 0 \quad (2.31)$$

である . $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q}^s)$ は $\tilde{\omega}$ のヘッセ行列である .

また，(2.30)がテイラー展開に基づくことから，次式の関係が得られる．

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m \alpha_{i,j} c_i c_j &= 0 \\ \sum_{i,j,k=1}^m \alpha_{i,j,k} c_i c_j c_k &= 0 \\ \sum_{i,j,k,l=1}^m \alpha_{i,j,k,l} c_i c_j c_k c_l &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.32}$$

前述の内部特異点が橍円型あるいは双曲型であるかどうかは，(2.32)で評価される．(2.32)の解が $c = 0$ のみである場合，admissible null vector は存在せず，特異姿勢を回避できない．二次形式が要求される $m = 2$ でかつ， $Q(s, q^s) > 0$ の場合がそうである．このような特異点は橍円型（内部）特異点呼ばれ，(2.32)の二次形式が橍円型円錐曲線となることに由来する．したがって，橍円型特異点は多様体 \mathcal{M} 上の孤立点（isolated point）となる．橍円型特異点は運動学における最も扱いの難しい特異点として知られており，一般的には避けられる．

一方で c が非零の場合，(2.32)の解のうちマニピュレータ先端の動作に影響を与える退化解を除いた解（非退化解=特殊解）はセルフモーションを生成し，特異姿勢を回避することができる．このような特異点を双曲型（内部）特異点といい，(2.32)の二次形式が双曲型円錐曲線となることに由来する．

2.3.4 具体例

ここでは，Fig. 2.2 に示す 3R マニピュレータを例にとり，それぞれの特異点について具体的にまとめる．

Fig. 2.2 における飽和特異点は，定義より，マニピュレータの手先がワークスペースの境界（boundary）に達する状態と等価である．モデルで示すと，Fig. 2.3 のような場合である．このとき，手先はワークスペースの外側（ s 成分）への動作が許容されない．反対に， s に対し，垂直な方向 ($s^T x = 0$) であるならば，動作可能である．非冗長マニピュレータにおける特異点適合法で用いられている，ヤコビ行列の余因子行列による関節空間への射影は必ず，条件 $s^T x = 0$ を満たす．

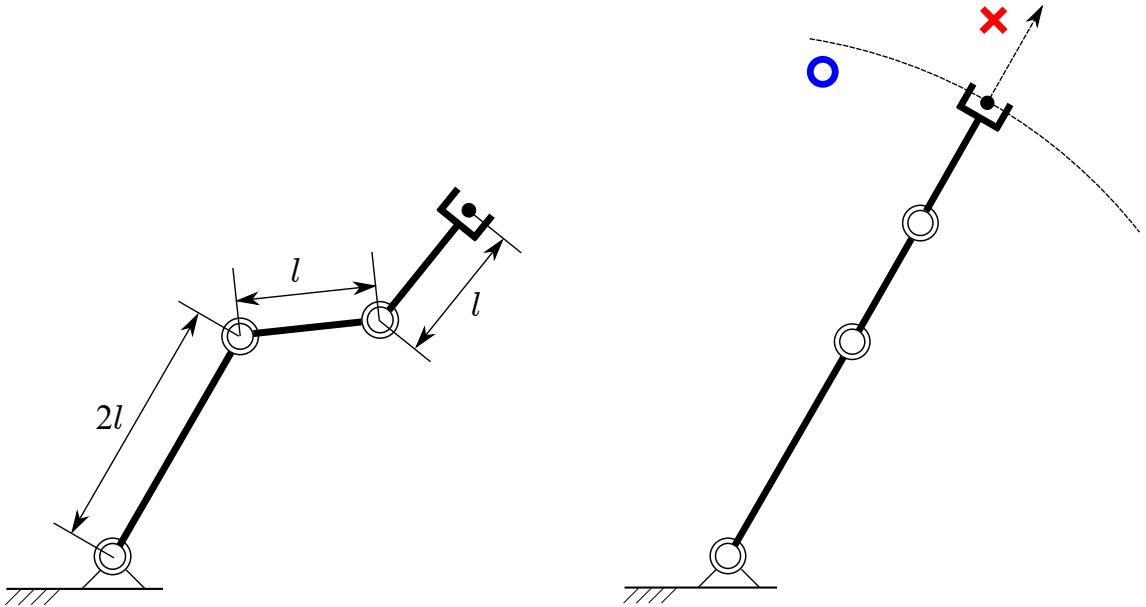


Fig. 2.2: Model of 3R manipulator to classify the singularities.

Fig. 2.3: Saturation singular configuration.

次に、橢円型内部特異点について具体例を Fig. 2.4 に挙げる。内部特異点は、前述のとおり手先位置がワークスペース内で生じる特異姿勢であるが、Fig. 2.4 に示すような状態では、手先の動作方向が制限される。ここでいうワークスペース内あるいは内部とは、手先位置がワークスペースの境界に達していないすべてのマニピュレータの状態を指す。

これに対し、双曲型内部特異点の例を Fig. 2.5 に示す。橢円型内部特異点と同様に、手先位置がワークスペース内であることは明らかである。橤円型特異点との違いは、前述のとおり、手先に影響を与えない冗長運動によって、非特異姿勢に回避し、手先の可操作度を向上させることができる点である。非特異姿勢への回避モデルを Fig. 2.5 に示す。

このように、一重に特異点といつてもその性質はさまざまである。

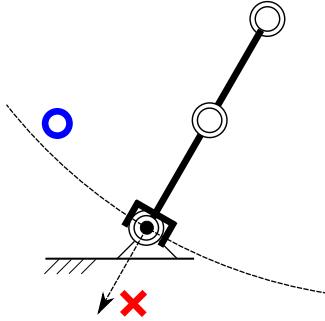


Fig. 2.4: Elliptic singular configuration.

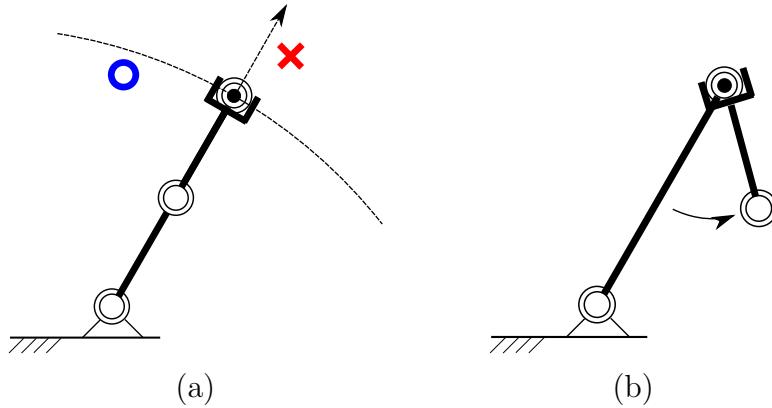


Fig. 2.5: Hyperbolic singularity: (a) manipulator configuration and (b) avoidance motion to non singular configuration using self-motion.

2.4 列拡張ヤコビ行列による逆運動学解法

2.4.1 非冗長マニピュレータ

まず非冗長マニピュレータ ($n = m$) について説明する。 (2.2) を以下のように書き換える。

$$J\dot{q} - \dot{p} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \quad (2.33)$$

さらに, \dot{p} を方向を表す $t_*(q_*)$ と, 大きさを表す \dot{q}_* を用いて $\dot{p} = t_*(q_*)\dot{q}_*$ と表すと, 以下の同次方程式として表せる。

$$\begin{bmatrix} J & -t_*(q_*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{q}_* \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

$$\bar{J}(\bar{q})\dot{\bar{q}} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

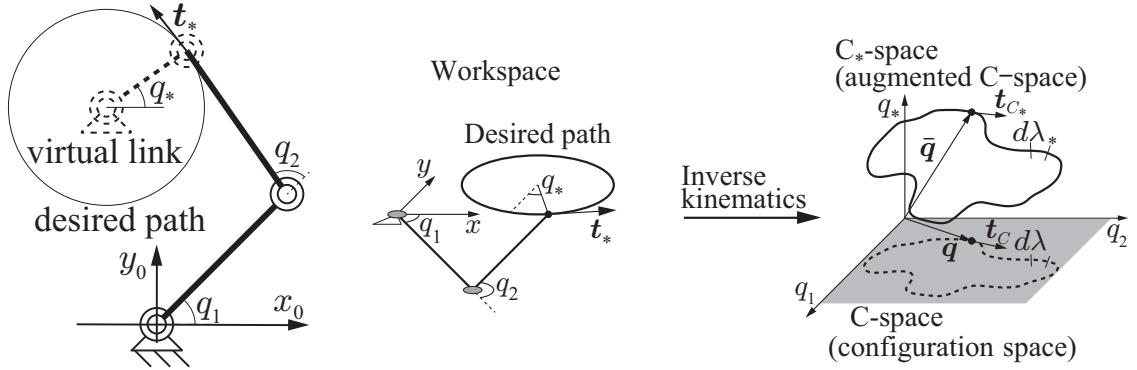


Fig. 2.6: Augmented manipulator model. Fig. 2.7: Geometric interpretation of augmented C-space.

$\bar{J}(\bar{q}) = [\mathbf{J}(q) - \mathbf{t}_*(q_*)]$ は列拡張ヤコビ行列 , $\dot{\bar{q}} = [\dot{q}^T \dot{q}_*]^T$ である . 次に $\dot{\bar{q}}$ の解を \bar{J} の零空間ベクトルに基づき同時方程式を解くと以下のようなになる .

$$\dot{\bar{q}} = b\bar{n}(\bar{q}) \quad (2.36)$$

b は任意のスカラー量で , $\bar{n}(\bar{q}) \in \text{Ker}\bar{J}(\bar{q}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトルである . $\bar{n}(\bar{q})$ は以下のように表される [98] .

$$\bar{n}(\bar{q}) = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_{n+1}]^T \quad (2.37)$$

$$C_i = (-1)^{i+1} \det \bar{J}_i(\bar{q}) \quad (2.38)$$

\bar{J}_i は \bar{J} の第 i 列目を取り除いた行列である . 最終的に , $\bar{n}(\bar{q})$ は以下のように表される .

$$\bar{n}(\bar{q}) = [\mathbf{n}^T(\bar{q}) \ \det \mathbf{J}]^T \quad (2.39)$$

$n(\bar{q}) \equiv [\text{adj } \mathbf{J}(\bar{q})] \mathbf{t}_*(q_*)$ であり , (2.36) , (2.39) から以下のように表すことができる .

$$\dot{\bar{q}} = b\bar{n}(\bar{q}) \quad (2.40)$$

$$\dot{q}_* = b \det \mathbf{J}(q) \quad (2.41)$$

(2.41) から手先速度の大きさ \dot{q}_* を $\det \mathbf{J}(q)$ に比例させることによって , $\det \mathbf{J}(q)$ が 0 に近づいた場合でも安定的に関節速度を得ることができる . このとき , b を定数として扱い動作させた動作を NM という .

列拡張ヤコビ行列を用いた逆運動学解法の概念図を Fig. 2.7 に示す . ただし , 表現が分かりやすいよう $n = 2$, $m = 2$ としており , 先端の追従軌道は

円軌道にしている。作業空間で経路追従制御を行った際の、拡張関節空間(C_* -space)での軌道は一つの曲線で描かれ、マニピュレータの機構により変化し、冗長1自由度マニピュレータのセルフモーションと同じことを表している。つまり、Fig. 2.6のように t_* 方向に動作する仮想リンクを設け、仮想リンクを含んだマニピュレータ先端が動作しないよう、セルフモーションするのと同等である。この C_* -spaceの曲線のことを self motion manifold と呼ばれ、self motion manifold の弧長 λ_* は不变の値であり、natural parameter と呼ばれる。Natural parameter は独自の付加定数 $\lambda_* = \|\bar{n}\|$ で構成され、 λ_* は natural speed と呼ばれる。NMでは b を定数として扱い natural speed に比例させる。その際先端の経路追従速度は $|\det(\mathbf{J})|$ に比例する。また、 C_* -space の軌道を関節空間(C-space)に射影することで、関節空間の軌道を表すことができる。その際、単位時間あたりの C_* -space の軌道の弧長は $\Delta\lambda_* = \|\dot{\bar{q}}\|$ で表し、C-space の軌道の弧長は $\Delta\lambda = \|\dot{q}\|$ で表す。

2.4.2 冗長マニピュレータ

冗長マニピュレータ($n > m$)の場合、冗長自由度に加え、 C^* -space を加えた次元数 $n - m + 1$ の独立した零空間ベクトルが存在する。例えば、冗長1自由度 $n - m = 1$ のとき以下の式のように表現される。

$$\dot{\bar{q}} = b_{sm} \bar{n}_{sm}(\bar{q}) + b_{ep} \bar{n}_{ep}(\bar{q}) \quad (2.42)$$

ただし、 b_{sm} , b_{ep} は任意のスカラー量、 \bar{n}_{sm} は、セルフモーション呼ばれる手先に影響を与えない冗長運動を決める関節空間に定義されるベクトル場であり、 \bar{n}_{ep} は t_* で拘束された手先運動を決めるベクトルである。

\bar{n}_{sm} は以下のように定義される。

$$\bar{n}_{sm} = [C_{sm_1} \ C_{sm_2} \ \cdots \ C_{sm_{n+1}} \ 0]^T = [\mathbf{n}_{sm} \ 0]^T \quad (2.43)$$

$$C_{sm_i} = (-1)^{i+1} \det \mathbf{J}_i(\mathbf{q}) \quad (2.44)$$

ただし、 \mathbf{J}_i は \mathbf{J} から第 i 列目を取り除いた行列である。

\mathbf{n}_{ep} は \mathbf{n}_{sm} に従属しない t_* で拘束される関節空間の二次元多様体で定義され、無数に存在する。ここで、そのうちの一つを \bar{n}_{ep} を関節を拘束することによって明示的にすると、

$$\bar{n}_{ep} = [C_{ep_1} \ C_{ep_2} \ \cdots \ C_{ep_j} \ \cdots \ C_{ep_{n+2}}]^T \quad (2.45)$$

$$C_{ep_i} = (-1)^{i+1} \det \bar{\mathbf{J}}_{ep_i}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (2.46)$$

$$C_{ep_j} = 0 \quad (2.47)$$

となる。ただし、 $\bar{\mathbf{J}}_{ep_i}$ は $\bar{\mathbf{J}}$ からセルフモーションに関係する第 j 列目を取り除いた行列から、さらに第 i 列目を取り除いた行列であり、さらに $\bar{\mathbf{n}}_{ep}$ の第 j 列目を 0 とする。 j は自由に設定することができるが、 j により運動が制限される場合があるため、マニピュレータの機構から選ぶ必要がある。また、 b_{sm} を定数とし、 $b_{ep} = 0$ としたときの運動を NSM といい、 $b_{sm} = 0$ とし、 b_{ep} を定数としたときの運動を NM という。

以下に冗長 1 自由度の平面 3R マニピュレータの零空間ベクトルの求め方の例を示す。 $\bar{\mathbf{J}}$ を

$$\bar{\mathbf{J}} = [\mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad -\mathbf{t}_*(q_*)] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & t_1 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & t_2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

とすると、 $\bar{\mathbf{n}}_{sm}$ 、 $\bar{\mathbf{n}}_{ep}$ は以下のように求められる。ただし、 $j = 3$ とした。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\bar{\mathbf{J}}_{ep} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & t_1 \\ j_{21} & j_{22} & t_2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_{sm} = [j_{12}j_{23} - j_{13}j_{22} \quad - (j_{11}j_{23} - j_{13}j_{21}) \quad j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21} \quad 0]^T \quad (2.51)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_{ep} = [j_{12}t_2 - t_1j_{22} \quad - (j_{11}t_2 - t_1j_{21}) \quad 0 \quad j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}]^T \quad (2.52)$$

ただし、(2.52) は $\bar{\mathbf{n}}_{ep}$ の一例である。

列拡張ヤコビ行列による逆運動学解法はマニピュレータ手先に仮想リンクを設け仮想リンクを含めたマニピュレータをセルフモーションをするように関節速度解を解くことで、マニピュレータ手先の運動を決定する方法である。零空間ベクトルの扱う個数は違うが、冗長、非冗長に関わらず特性は変化しない。

2.5 特異点適合法

本節では、前節で示した列拡張ヤコビ行列に基づく逆運動学解法を用いた特異点適合法について、非冗長マニピュレータ、冗長マニピュレータおよび姿勢運動に分類し、その特徴についてまとめる。

2.5.1 非冗長マニピュレータ

前節で用いた列拡張ヤコビ行列による表現を用いると，非冗長マニピュレータの関節速度は(2.40)より，

$$\dot{\mathbf{q}} = b[\text{adj}\mathbf{J}(\mathbf{q})]\mathbf{t}_*(q_*) \quad (2.53)$$

b は手先速度の大きさを決定する係数で，手先速度に対して $\dot{\mathbf{p}} = b\det\mathbf{J}(\mathbf{q})$ の関係を満たす．ここで，特異姿勢を $\mathbf{q}^s \in \{\mathbf{q} \mid \det\mathbf{J}(\mathbf{q}) = 0\}$ とすると，次の条件を満たすとき，特異点において関節速度解を持つ．

1. $b \neq 0$
2. $[\text{adj}\mathbf{J}(\mathbf{q}^s)]\mathbf{t}_*(q_*) \neq \mathbf{0} \in \text{Ker}\mathbf{J}(\mathbf{q}^s)$

つまり，関節速度ベクトルが特異姿勢時に拘束される作業空間の自由度によって生じる零空間ベクトル($\text{Ker}\mathbf{J}(\mathbf{q}^s)$)に定義されることにより関節速度解を得る．上記の条件に満たすことによって逆運動学を解く手法を特異点適合法といい，特異点の通過およびその近傍においての安定的なマニピュレータの動作生成を可能にする．また，特異点適合法は非冗長マニピュレータにおけるNMを含む．一方で，手先運動方向 \mathbf{t}_* が特定の方向において $[\text{adj}\mathbf{J}(\mathbf{q})]\mathbf{t}_*(q_*) = \mathbf{0}$ なる特異点が存在する．これは定常特異点(Stationary-point singularity)と呼ばれる[86]．

非冗長マニピュレータにおける特異点適合法の適用例としてFig. 2.8に示すような平面2Rマニピュレータの手先を直線経路で拘束した数値シミュレーションを行う．シミュレーション条件はTable. 2.1に示すとおりである．

Table 2.1: Numerical simulation applying Singularity-Consistent method to the 2R planer manipulator.

Initial joint angle \mathbf{q}	$\begin{bmatrix} 0 & 40 \end{bmatrix}^T$ deg
Path parameter \mathbf{t}_*	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$
b	2
d	0.3728 m
Link length	$l_1 = 0.45$ m, $l_2 = 0.58$ m
Simulation time	10 s

b は定数であるため生成される運動はNMである．

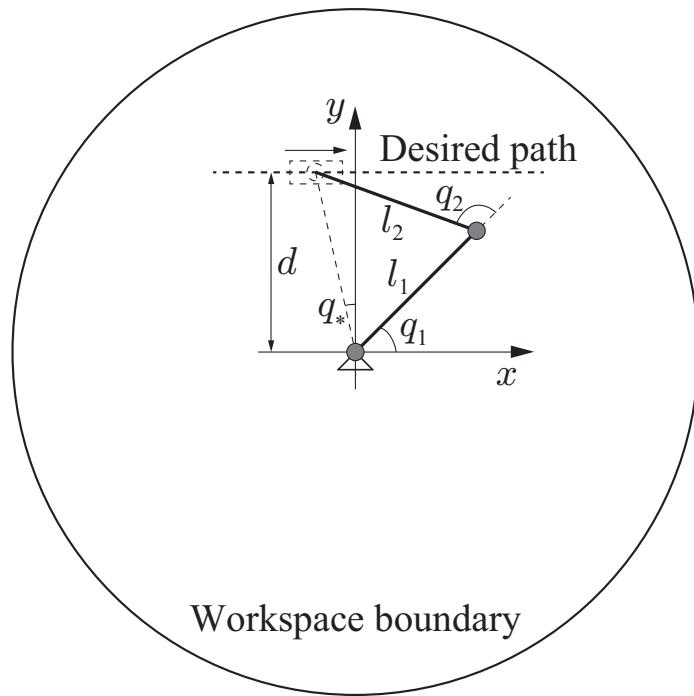


Fig. 2.8: Simple 2R limb following linear paths.

シミュレーション結果を Fig. 2.9 に示す。手先運動に関する結果 (c), (d) より t_* によって y 軸方向が拘束されていることが確認できる。また、各関節の挙動を表す (a), $\det J$ を表す (b) より、特異点に達しているにも関わらず、安定的に関節角度解を得ていることがわかる。特異姿勢はマニピュレータの手先がワークスペースの外部境界となる場合で、手先は t_* について一般性を失わずに、特異点に入る前とは逆の方向に運動する（跳ね返り運動）。数値シミュレーションを通して、特異点適合法の適用することで特異点問題が生じないことが確認された。

2.5.2 冗長マニピュレータ

冗長マニピュレータの場合、列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトルに基づき (2.42) の関節速度成分を抜き出した

$$\dot{\mathbf{q}} = b_{sm} \mathbf{n}_{sm}(\mathbf{q}) + b_{ep} \mathbf{n}_{ep}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (2.54)$$

の形で一般化される。この場合、次の条件

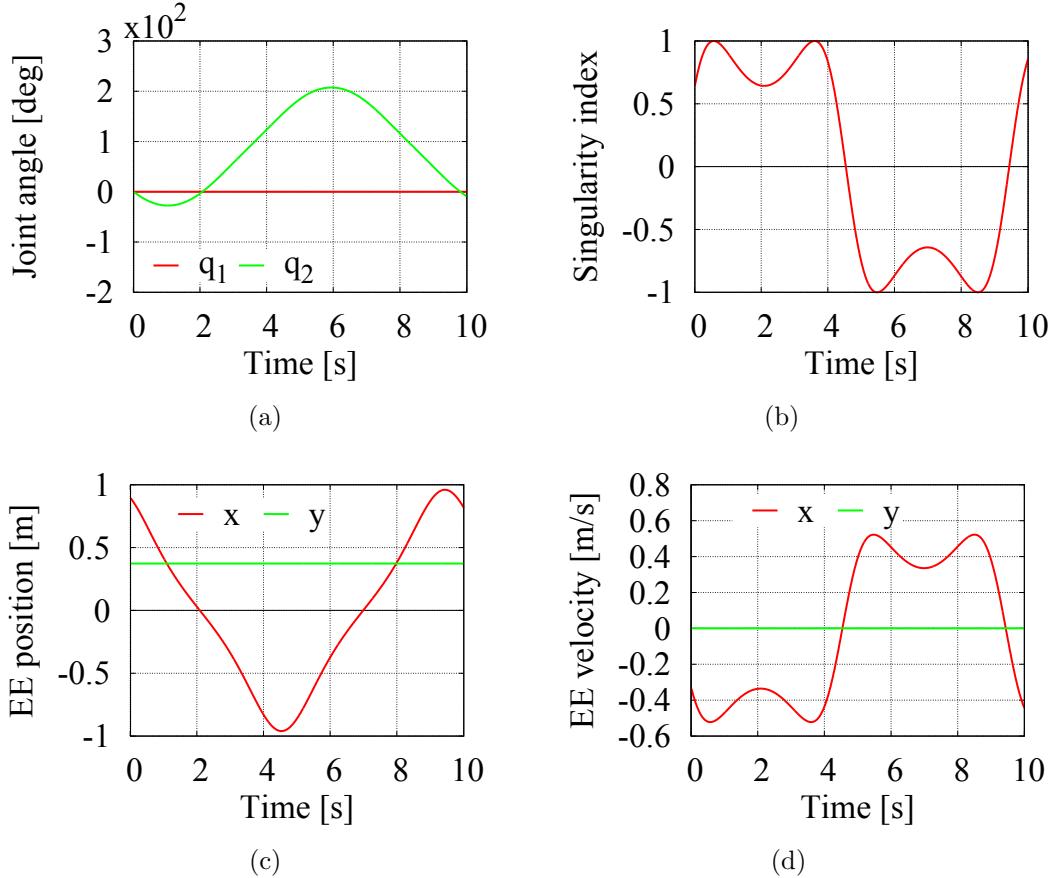


Fig. 2.9: Simulation results applying Singularity-Consistent method to the 2R planar manipulator with linear path: (a) joint angle, (b) determinant of Jacobian \mathbf{J} , (c) end-effector position and (d) end-effector velocity.

1. $b_{ep} \neq 0$
2. $n_{ep}(\bar{\mathbf{q}}) \neq 0$

を満たすとき、特異点であるか否かに関わらず関節速度空間に t_* で拘束された手先運動を与えるベクトルが定義される。つまり、特異点問題が生じることなく関節速度解が得られる。しかし、 n_{ep} によって系(2.54)の特異点は異なり、多くの場合、マニピュレータが実際の特異点 $\det(\mathbf{JJ}^T) = 0$ でないにも関わらず、(2.54)の特異姿勢となり、 n_{ep} が \mathbf{J} の零空間に写像される。このとき、手先は瞬間に停止し、その後、前節で示した非冗長マニピュレータの外部境界と同様 t_* について一般性を失わずに進行方向とは反対方向に動作する。この現象はワークスペース内部で生じることから、内部障害 (Inner obstacle) と呼ばれ、冗長マニピュレータによる特異点適合

法特有の問題である。内部障害はマニピュレータの状態に依存し、かつ非線形であるため、予測することが難しく扱いづらい。

内部障害に陥ることなく n_{ep} を選ぶ方法は特異点 $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = 0$ のみで表される場合、つまり、次の場合は内部障害が存在しない。

$$\mathbf{n}_{ep} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\text{adj}(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q}))^T\mathbf{t}_* \quad (2.55)$$

しかし、このとき、

$$\text{adj}(\mathbf{J}(\mathbf{q}_s)\mathbf{J}(\mathbf{q}_s))^T\mathbf{t}_* = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

となるため、特異点適合法の適用条件を満たさない。

このように、冗長マニピュレータにおける特異点適合法は内部障害の問題が避けられず、目的に応じて n_{ep} を使い分けることが必要である。

2.5.3 姿勢に関する特異点適合法

ここでは、非冗長系の姿勢運動における特異点適合法の理論を示す。マニピュレータの運動学と同様、列拡張ヤコビ行列の零空間による考え方に基づき角速度を大きさと方向に分解して、 $\omega = \omega\hat{\omega}$ と表し、(2.18)を次のような劣決定系の同次方程式に書き直す [99]。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} &= 0 \\ \mathbf{H}(\bar{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{q}) & -\hat{\omega} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T & \omega \end{bmatrix}^T$$

(2.57) の一般解は次式となる。

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \beta\mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) = \beta \begin{bmatrix} \text{adj}\mathbf{A}\hat{\omega} \\ \det\mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

(2.58) を展開して、

$$\dot{\mathbf{q}} = \beta\text{adj}\mathbf{A}\hat{\omega} \quad (2.59)$$

$$\omega = \beta\det\mathbf{A} \quad (2.60)$$

と表す. ただし, β は任意の定数で, $n(\bar{q}) \in \text{Ker } \mathbf{H}(\bar{q})$ である. このとき, 角速度の方向成分の特性から次の関係を満たす.

$$\text{adj } \mathbf{A}(\mathbf{q}^{so}) \hat{\omega} \neq \mathbf{0} \in \text{Ker } \mathbf{A}(\mathbf{q}^{so}) \quad (2.61)$$

ただし, $\mathbf{q}^{so} \in \{\mathbf{q} \mid \det \mathbf{A} = 0\}$. マニピュレータの手先速度に関する運動学では特異姿勢で瞬間的に表れる J の零空間ベクトルによるセルフモーションが特異姿勢を回避するのに対し, 姿勢運動における運動学はセルフモーションを用いても回避することができない. つまり, マニピュレータの運動学的特異点は双曲型特異点, 姿勢運動における特異点は橢円型特異点である. したがって, これまでに示してきた特異点適合法を適用することができない.

そこで, 回転ヤコビ行列を特異値分解を施して以下のように表す.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T & (2.62) \\ \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \\ \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

\mathbf{U} および \mathbf{V} は三次元の正規直交行列 $SO(3)$ であり, それらを構成するベクトル $\sigma_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \mid i \in \{1, 2, 3\}$ は, それぞれ特異値, 左特異ベクトルおよび右特異ベクトルである. ただし, 特異値分解の定義より, 特異値に関して $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ の関係がある. 特異値分解によって, 得られた変数から A の余因子行列および行列式を求めるとき以下となる.

$$\text{adj } \mathbf{A} = \text{sgn}(\det \mathbf{A})(\sigma_2 \sigma_3 \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^T + \sigma_1 \sigma_3 \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_2^T + \sigma_1 \sigma_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{u}_3^T) \quad (2.63)$$

$$\det \mathbf{A} = \text{sgn}(\det \mathbf{A}) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.64)$$

(2.59) に (2.60), (2.63) および (2.64) を代入すると, 次式が得られる.

$$\dot{\mathbf{q}} = \omega \left(\frac{1}{\sigma_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^T \hat{\omega} + \frac{1}{\sigma_2} \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_2^T \hat{\omega} + \frac{1}{\sigma_3} \mathbf{v}_3 \mathbf{u}_3^T \hat{\omega} \right) \quad (2.65)$$

特異値の関係と (2.64) より, 特異点近傍に近づくと $\sigma_3 \approx 0$ となり, (2.65) の右辺第3項が発散する. 特異点適合法では特異点の近傍において次式に切り替える.

$$\dot{\mathbf{q}} = \omega \left(\frac{1}{\sigma_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^T \hat{\omega} + \frac{1}{\sigma_2} \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_2^T \hat{\omega} \right) \quad (2.66)$$

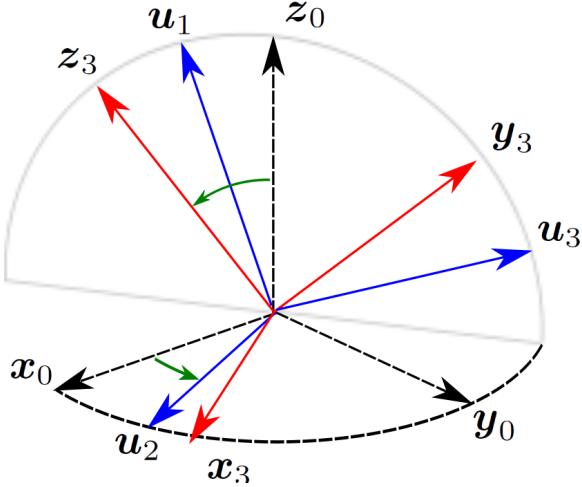


Fig. 2.10: Model of left-singular vector in the three-dimensional Euclid space.

(2.66) のように (2.65) の右辺第3項を取り除くことで特異点付近での不安定な挙動を回避することができる。ここで特異姿勢における u_3 を u_s と定義し、特異方向とすると、特異点では u_s 成分に角速度を出力することができない。そのため、(2.66) によって正確な姿勢を表現するためには、動作空間の拘束

$$u_s^T \hat{\omega} = 0 \quad (2.67)$$

を満たさなければならない。ここで、特異値分解の動作空間要素である左特異ベクトルを表すモデルを Fig. 2.10 示す。

特異点適合法による姿勢表現を確認するためのシミュレーションを行った。シミュレーション条件を以下に示す。 $q_2^{init} \neq 0$ とするのは、初期姿勢で構

Table 2.2: Numerical simulation using Singularity-Consistent method.

Initial joint angle \mathbf{q}	$[0 \ 0.001 \ 0]^T$ deg
Rotation axis $\hat{\omega}$	$[0.88 \ 0.44 \ 0.176]^T$
Initial β	-5
Simulation time	10 s
Threshold σ_3^{th}	0.2

円特異点となるのを回避するためである。シミュレーション結果を Fig. 2.11 に示す。Fig. 2.11(a) は回転角を表し、示されたパラメータは次式で定義さ

れる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \alpha \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.68)$$

Fig. 2.11(b) は角速度, (c), (d) は関節角とその時間微分を表し, (e) は特異値の変化, (f) は A の行列式で, 特異点適合法におけるそれぞれの Phase を示している。この結果から, 特異点適合法による式の切り替えにより, 特異点においても関節角が発散することなく, 指令通りの姿勢運動を表せることが確認できる。

示された運動は大きく分けて以下の 3 つの Phase に分類される。

- Phase I

初期姿勢を特異姿勢として, (2.59) を用いることにより, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 周りの初期運動を表す。

- Phase II

$\det A = \pm 1$ のとき, (2.65) に切り替え, $\boldsymbol{\omega}$ で姿勢運動させる,

- Phase III

特異点付近のとき, (2.66) に切り替えることで, 特異点においても不安定な挙動を創出することなく, $\boldsymbol{\omega}$ で姿勢運動させる, ただし, 切り替えの指標として σ_3 に閾値 σ_3^{th} を与える。

以後, 閾値 σ_3^{th} によって, Phase 2, Phase 3 を繰り返す。また, [99] では, Phase 1 における動作を Self-motion および Self-adaptation と呼ぶ。

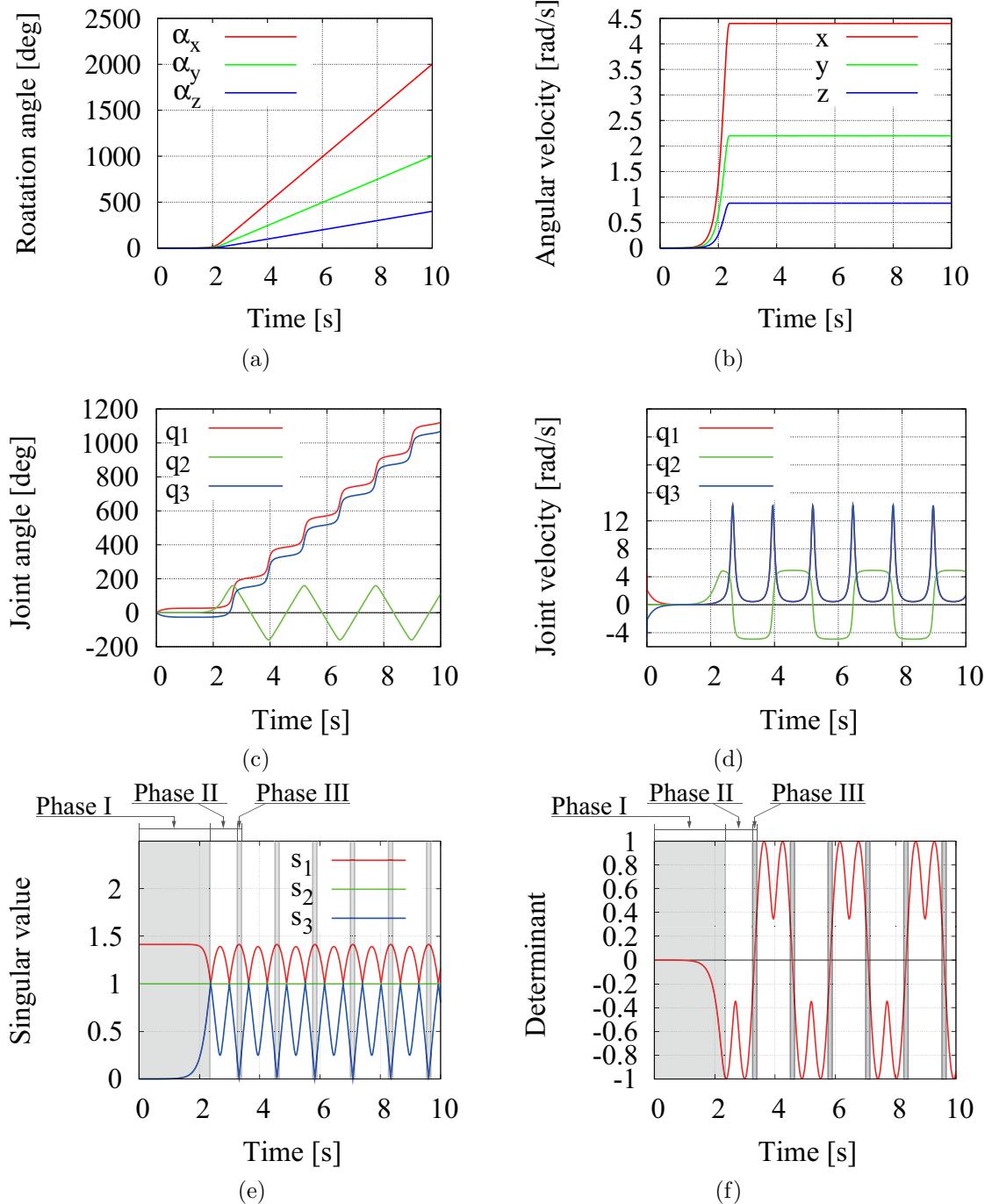


Fig. 2.11: Simulation results using Singularity-Consistent method: (a) rotation angle, (b) angular velocity, (c) joint angle, (d) joint speed (e) singular value and (f) determinant of rotational Jacobian matrix.

第3章 特異点適合法に基づくオイラー角による姿勢制御

3.1 概要

前章では、マニピュレータの手先位置/姿勢による運動学について述べ、逆運動学計算に伴う特異点問題について示した。また、特異点問題を回避する一つの手法である特異点適合法について述べた。本章では、マニピュレータの姿勢に関する運動学的特異点と同等のシステムとしてみなせるオイラー角による姿勢表現上の特異点問題に対して、特異点適合法を適用し、三次元空間上の姿勢制御へ応用する。三次元空間上に定義される姿勢制御は人工衛星や水中機、高性能飛翔体など、さまざまな分野への適用が期待できる。

3.2 姿勢表現

3.2.1 オイラー角

三つの座標回転を連続的に掛け合わせることで、あらゆる回転を表すことができる。最初の座標回転を i 軸周りに θ_1 、次に j 軸周りに θ_2 、最後に k 軸周りに θ_3 の順に回転させる場合について考える。このとき θ_1, θ_2 および θ_3 はオイラー角と呼ばれ、オイラー角によって構成される三次元ベクトル $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ をオイラー角ベクトルと呼ぶ。オイラー角ベクトルに対応した回転行列 $\mathbf{R}_{ijk} \in SO(3)$ は以下で表される。

$$\mathbf{R}_{ijk}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{R}_i(\theta_1)\mathbf{R}_j(\theta_2)\mathbf{R}_k(\theta_3) \quad (3.1)$$

ここで，3-1-3オイラー角の例を示す。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{313} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_1 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_1 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

3.2.2 単位クオータニオン

単位二元数が二次元の多様体となって円を表すのに対し，単位クオータニオン $\mathbf{q} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T \in \mathbb{S}^3$ は三次元多様体の構造を成し，球面を表すことができる。単位クオータニオンは次式を満たすクオータニオンの集合である。

$$\|\mathbf{q}\| = 1 \quad (3.3)$$

単位クオータニオンを用いた三次元空間表現は三次元のベクトル成分 ϵ と一つのスカラー量 η から成る四成分で以下のように表す。

$$q_0 = \eta = \cos \frac{\alpha}{2} \quad (3.4)$$

$$q_i = \epsilon = \hat{\omega}_i \sin \frac{\alpha}{2}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.5)$$

単位クオータニオンは，オイラー角と同様に $SO(3)$ の元となる。 $SO(3)$ への写像は以下で表される。

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{I} + 2\eta\mathbf{E}^\times + 2(\mathbf{E}^\times)^2 \quad (3.6)$$

ただし， \mathbf{E} は ϵ の歪対称行列である。

単位クオータニオンの時間微分を $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_0 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$ と表すと，剛体の角速度との関係は次式となる。

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^\times \mathbf{q} + \frac{1}{2}\eta\boldsymbol{\omega} \quad (3.7)$$

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q} \quad (3.8)$$

3.2.3 Modified Rodriguez Parameter: MRP

Modified Rodriguez Parameter とは、単位クオータニオンによって定義される変数である。ここで、MRP を $\bar{q} = [\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{q}_3]^T$ とすると、単位クオータニオンを用いて、

$$\begin{aligned}\bar{q} &= \frac{\epsilon}{1 + \eta} = \frac{\hat{\omega} \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{2\hat{\omega} \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}} = \hat{\omega} \tan \frac{\alpha}{4} \in \mathbb{R}^3\end{aligned}\quad (3.9)$$

と表される。明らかなように、単位クオータニオンは四つの変数であるのに対し、MRP は三変数で姿勢を表現できる。ただし、回転角によって特異点となり姿勢が表現できない（例： $\alpha = 2\pi$ ）。しかし MRP には、単位クオータニオンのように、位相空間 \mathbb{S}^3 が $SO(3)$ に対して二重被覆であるような特別な関係は存在しないため、 $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$ の範囲で、大回転操作を伴う姿勢制御に度々用いられている。

3.3 運動方程式

剛体の回転運動は、次のオイラーの運動方程式によって記述される。

$$\frac{dl}{dt} = \tau \quad (3.10)$$

l は対象とする剛体全体の角運動量ベクトルであり、 τ は機体に加わるトルクである。

ただし、(3.10) は座標系が動いていない場合の運動方程式である。このときの運動を角速度 ω で回転している座標系の上で記述すると、次式となる。

$$\frac{dl}{dt} + \omega \times l = \tau \quad (3.11)$$

左辺第2項 $\omega \times l$ は人工衛星自体の姿勢運動により生じる見かけ上のトルクである。

ここで、角運動量ベクトルは次式で表せる。

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (3.12)$$

(3.12) を (3.11) に代入して姿勢運動を記述する関係を得る。

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega}^{\times}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.13)$$

3.4 単位クオータニオンに基づく姿勢制御の問題点

3.4.1 単位クオータニオンと正規直交群

単位クオータニオンは三次元多様体 \mathbb{S}^3 の状態空間である。 \mathbb{S}^3 の定義は以下である。

$$\mathbb{S}^3 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = 1\} \quad (3.14)$$

(3.6) より、単位クオータニオンが $SO(3)$ の元となることは明らかである。ところが、(3.6) に関して次式が成り立つ。

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{R}(-\boldsymbol{q}) \quad (3.15)$$

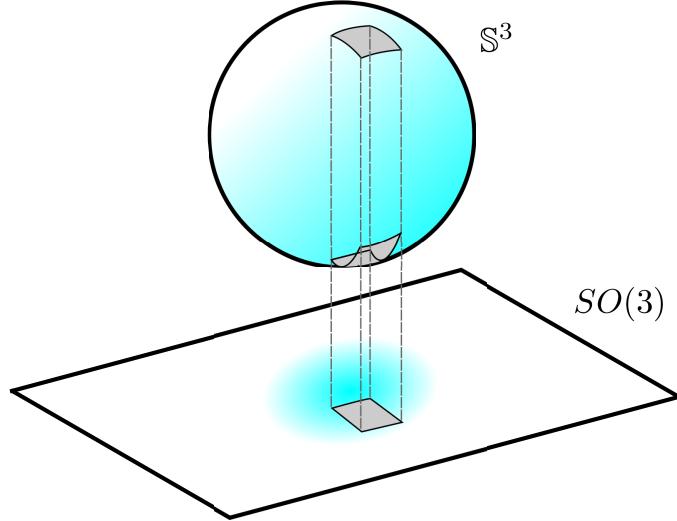
これは、 \boldsymbol{q} の状態空間 \mathbb{S}^3 が底空間 $SO(3)$ の被覆空間群であるためである。被覆空間群の持ち上げ特性により、被覆空間から底空間への連続写像は一意に存在するため、 $\mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$ は全射である。これに対し、 $SO(3) \rightarrow \mathbb{S}^3$ は、単位クオータニオンが一意に定まらず全射とはならない。

このことは、 \boldsymbol{q} の部分群である特殊2次ユニタリ群 $SU(2)$ と $SO(3)$ の関係（準同型）から容易に理解できる。その関係は以下である [39]。

$$SO(3) = SU(2)/Z_2 \quad (3.16)$$

Z_2 は位数2の巡回群である。(3.16) より、 $SU(2)$ は $SO(3)$ の二重被覆群である。この性質は、特殊ユニタリ変換を受けるスピノールに見られるような被覆空間群の濃度の同一性であり、(3.4) の単位クオータニオンが $\alpha/2$ で表現されることに由来する。すなわち、回転角が $\alpha = \{4n\pi \leq 2\pi(2n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ および $\alpha = \{2\pi(2n-1) \leq 4n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で巡回性を有する。この性質より、位相 \mathbb{S}^3 上で制御システムを構築することは、特に回転角が大きい操作で注意が必要となる。Fig. 3.1 にその概念図を示す。

Gollu らは、単位クオータニオンによる姿勢制御における大角度回転操作に対して、特殊な評価関数を与えることで、対策を図っているが、パラメータの増加に加え、数値シミュレーションの結果では明確に示せていない [100]。

Fig. 3.1: Double covering \mathbb{S}^3 and $SO(3)$.

3.4.2 Unwinding phenomenon

単位クオータニオンによる姿勢制御上の問題点の一つとして Unwinding phenomenon が挙げられる。これも前述のとおり、単位クオータニオンの位相空間 \mathbb{S}^3 が姿勢を表す位相空間 $SO(3)$ に対して、二重被覆性があることに由来する。

ここで、B. Wie ら [10] によって提案された最も代表的な単位クオータニオンによるレギュレータを示す。

$$\tau = \omega \times J\omega - K_d\omega - K_p \begin{bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \\ q_3^e \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

q_i^e ($i \in \{1, 2, 3\}$) は誤差単位クオータニオンのベクトル成分で、目標単位クオータニオン q^d と q を用いて、

$$\begin{bmatrix} q_0^e \\ q_1^e \\ q_2^e \\ q_3^e \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0^d & q_1^d & q_2^d & q_3^d \\ -q_1^d & q_0^d & q_3^d & -q_2^d \\ -q_2^d & -q_3^d & q_0^d & q_1^d \\ -q_3^d & q_2^d & -q_1^d & q_0^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

と表される（ただし、 q_0 はスカラー成分）。このとき、上記制御系における

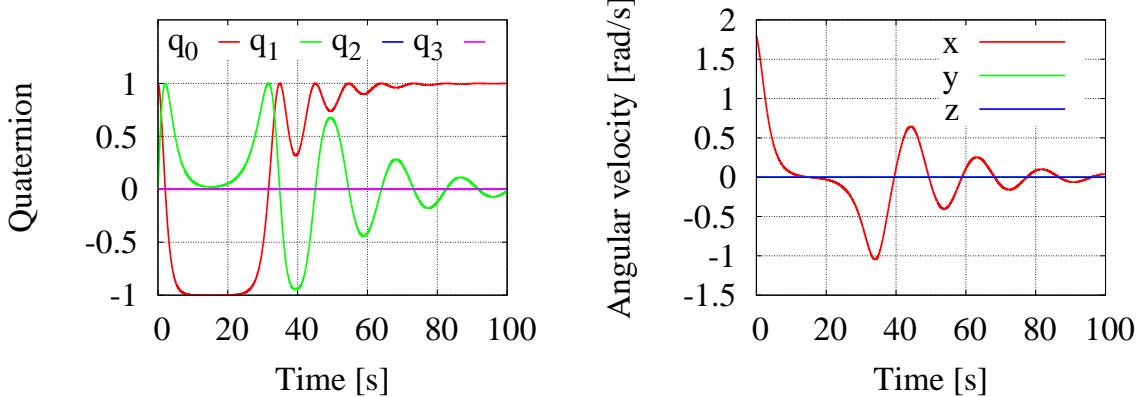


Fig. 3.2: Unwinding phenomenon.

る平衡点は、

$$\begin{bmatrix} q_0^e \\ q_1^e \\ q_2^e \\ q_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

である。 $q_0^e = 1$ の平衡点は、安定平衡点であるが、 $q_0^e = -1$ における平衡点は不安定平衡点となる。これは、誤差単位クオータニオンのベクトル成分が誤差回転軸 $\hat{\omega}^e \in \mathbb{S}^2$ 、誤差回転角 α^e としたとき、 $\hat{\omega}^e \sin(\alpha^e/2)$ で定義されることによるもので、 $q_0^e = 1$ の周りでシステムを線形化した際は、固有値が負となり平衡点に向けて、収束するのに対し、 $q_0^e = -1$ の周りのシステムの固有値は正となり、平衡点から離れていく運動を引き起こす。この平衡点から離れる現象を総じて、単位クオータニオンにおける Unwinding phenomenon という。

Unwinding phenomenon を検証するため、(3.17) の制御式に次の条件を与えてシミュレーションを行った。初期姿勢 $q(0) = [1\ 0\ 0\ 0]^T$ 、角速度 $\omega(0) = [1.798\ 0\ 0]^T \text{ rad/s}$ 、慣性行列 $J = \text{diag}(1, 1, 1) \text{ kgm}^2$ 、フィードバックゲインを $K_d = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1) \text{ s}^{-1}$ 、 $K_d = \text{diag}(0.237, 0.237, 0.237) \text{ s}^{-2}$ とした。シミュレーション結果を Fig. 3.2 に示す。約 10s から 20s の間で、目標姿勢近傍に達しているが、その後、目標姿勢から離れている挙動が確認できる。

3.4.3 積分誤差

その他の問題として、積分誤差が大きいことによる姿勢表現の曖昧さが挙げられる。一般的な姿勢制御系は、人工衛星などに搭載されたジャイロセンサから角速度を計測し、姿勢表現のため単位クオータニオンの時間変化率(3.7)より得る。得られた \dot{q} から単位クオータニオンを得る際に、時間積分操作が必要となる。ここでの積分誤差とは、数値積分による単純な誤差ではなく、積分過程で単位クオータニオンの位相空間 S^3 の性質が失われることを意味する。

この積分誤差については、回転行列についても同様のことがいえる。回転行列の場合、センサから計測した角速度値から、

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega}^\times \mathbf{R} \quad (3.20)$$

によって時間変化率を求め、それぞれの成分で時間積分するものである。このとき、積分過程で回転行列 \mathbf{R} が $SO(3)$ の位相を保てなくなる。

単位クオータニオンと回転行列、それぞれの積分誤差の確認のため、次の条件でシミュレーションを行った。初期クオータニオン $q(0) = [1\ 0\ 0]^T$ 、回転行列 \mathbf{R} は単位行列とし、回転軸 $[0.88\ 0.44\ 0.176]^T$ に回転角 2.5×10^4 deg を 2.4s で達するよう、固定軸回転の角速度指令値を与えた。シミュレーションの刻み幅は $1.0 \times 10^{-2}\text{s}$ である。

シミュレーション結果をFig. 3.3に示す。(a)は単位クオータニオンのユークリッドノルム、(b)は回転行列の行列式の時間遷移である。結果は、それぞれ位相が保たれていないことを表しており、特に、回転行列の積分誤差が大きいことが示された。

3.5 モデリング

剛体の姿勢運動は、姿勢を表す一般的な位相空間 $SO(3)$ の非ユークリッド性のため、ベクトルの線形結合で表すことができない。ゆえに、角速度を直接時間積分するだけでは姿勢を表現することができない。そのため、姿勢表現にはオイラー角や単位クオータニオンなどによって変数化する操作が必要となる。

本研究で扱うオイラー角による姿勢表現は、すべて3-1-3オイラー角 $\theta = [\theta_1\ \theta_2\ \theta_3]^T$ である。Fig. 3.4に姿勢表現モデルを示す。Fig. 3.4は、空間に

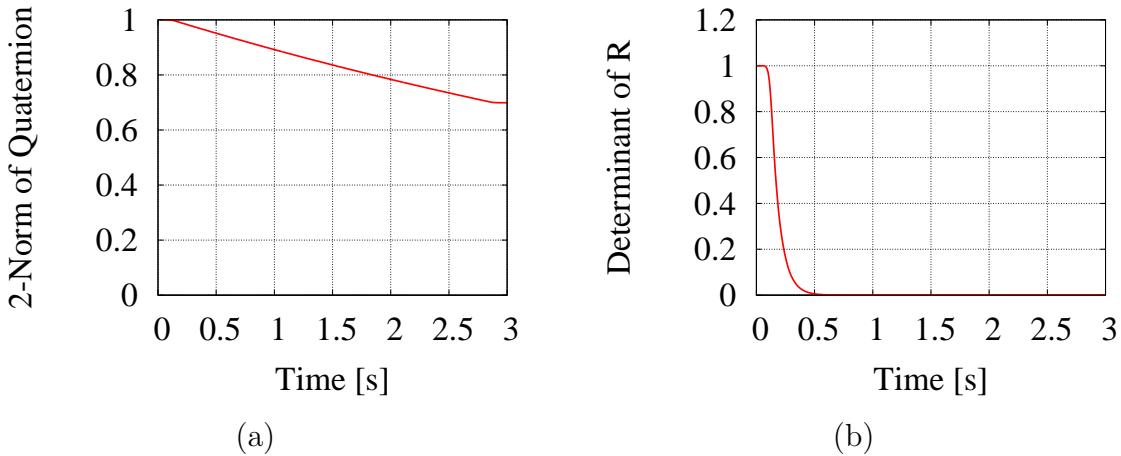


Fig. 3.3: Integration error: (a) quaternion and (b) determinant of rotation matrix

固定した慣性座標系，モデルに固定した座標系（以降，機体座標系と呼ぶ）と回転軸，そしてモデルの周りには，オイラー角のそれぞれの角度を表現する3つのリングを示している。 θ_1 が慣性座標系の z 軸周りでなく，3-1-3 オイラー角で姿勢を表すとき，機体座標系から見た角速度ベクトル $\omega \in \mathbb{R}^3$ を求める順運動学計算は，次式で定義される．

$$\omega = A(\theta_1, \theta_2) \dot{\theta} \quad (3.21)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ 1 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.22)$$

また，その逆演算は

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\sin \theta_2} \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

と表される。ただし、 $\sin \theta_2 = 0$ のとき、特異点となり姿勢を表現できない。また、そのときの姿勢（特異姿勢）を

$$\theta^s = \{\theta \mid \sin \theta_2 = 0, \forall \theta_1, \theta_3\} \quad (3.24)$$

と表記する。

角速度を方向 $\hat{\omega} \in \mathbb{S}^2$ と大きさ ω に分解し、

$$\omega = \omega \hat{\omega} \quad (3.25)$$

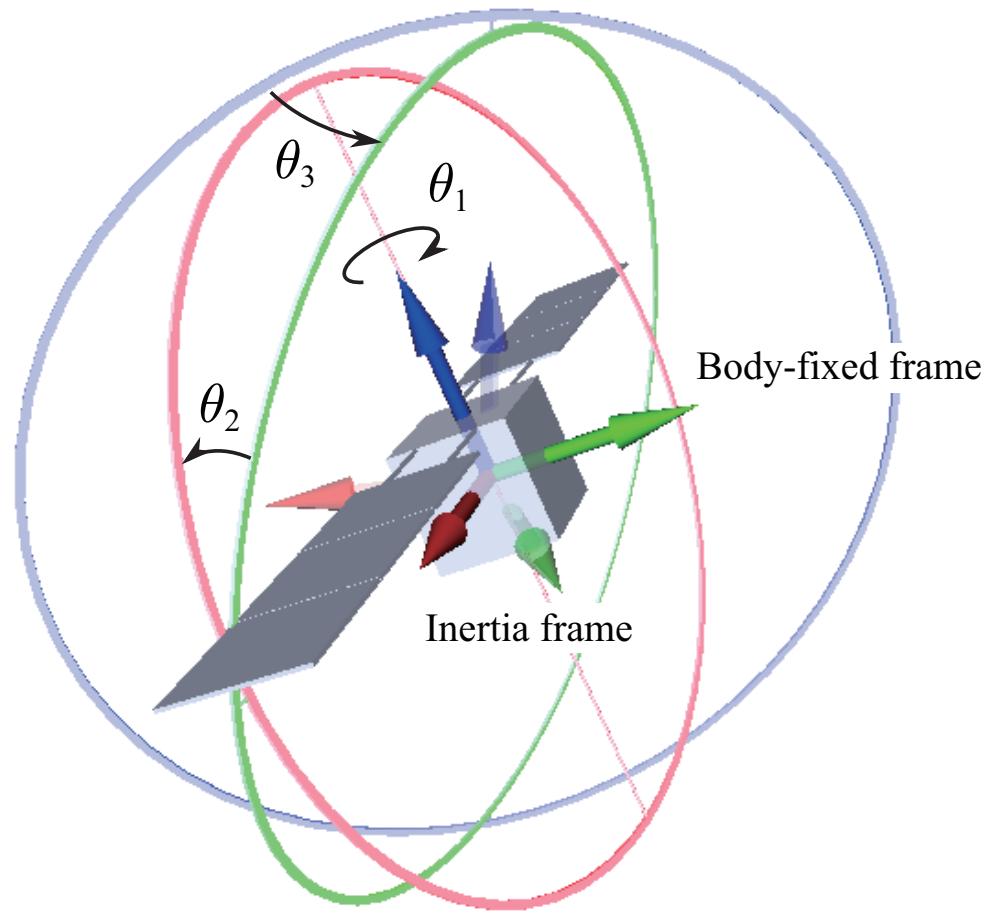


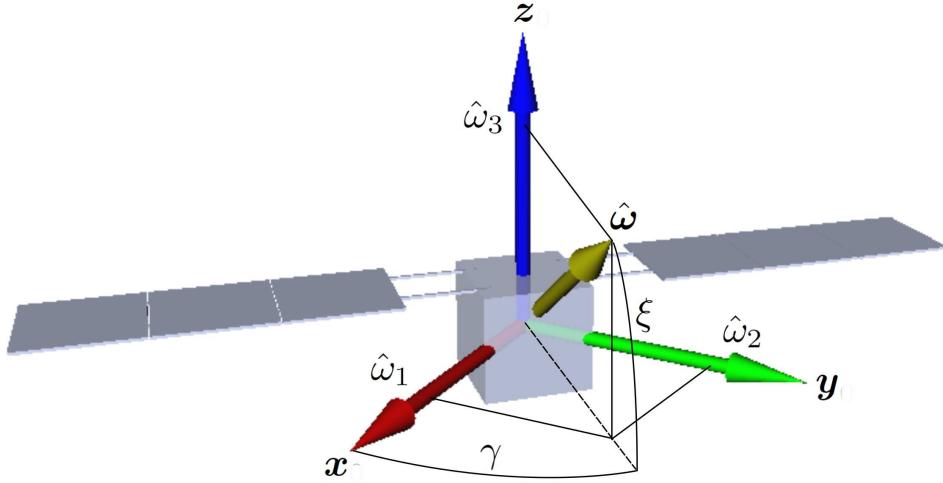
Fig. 3.4: 3-1-3 Euler angle attitude representation.

とするとき、回転軸を γ, ξ の二つ変数で次のように表す。

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{\hat{\omega}_2}{\hat{\omega}_1} \quad (3.26)$$

$$\xi = \sin^{-1} \hat{\omega}_3 \quad (3.27)$$

各変数と姿勢表現モデルとの関係は、Fig. 3.5 に示すとおりである。 γ および ξ がともに、定数となる姿勢運動を本稿では固定軸回転と定義する。

Fig. 3.5: Parameterization of rotation axis $\hat{\omega}$.

3.5.1 NP特異点とSP特異点

オイラー角と姿勢の運動学的関係を結ぶ変換行列 A について、特異値分解(付録C.2)を施すと、次式で表される。

$$A^{-1} = A_1^{-1} + A_2^{-1} + A_3^{-1} \quad (3.28)$$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta_2}{2}} \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \frac{\theta_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix},$$

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3^{-1} = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta_2}{2}} \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & -\cos \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & \sin \frac{\theta_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & \cos \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & -\sin \frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix}$$

(3.28)より、特異点は左特異ベクトルの違いから、 $\sin(\theta_2/2) = 0$ と $\cos(\theta_2/2) = 0$ の二種類に分類できる。 $\sin(\theta_2/2) = 0$ のときの特異点を North Pole (NP) 特異点、 $\cos(\theta_2/2) = 0$ のときの特異点を South Pole (SP) 特異点と呼び、それ

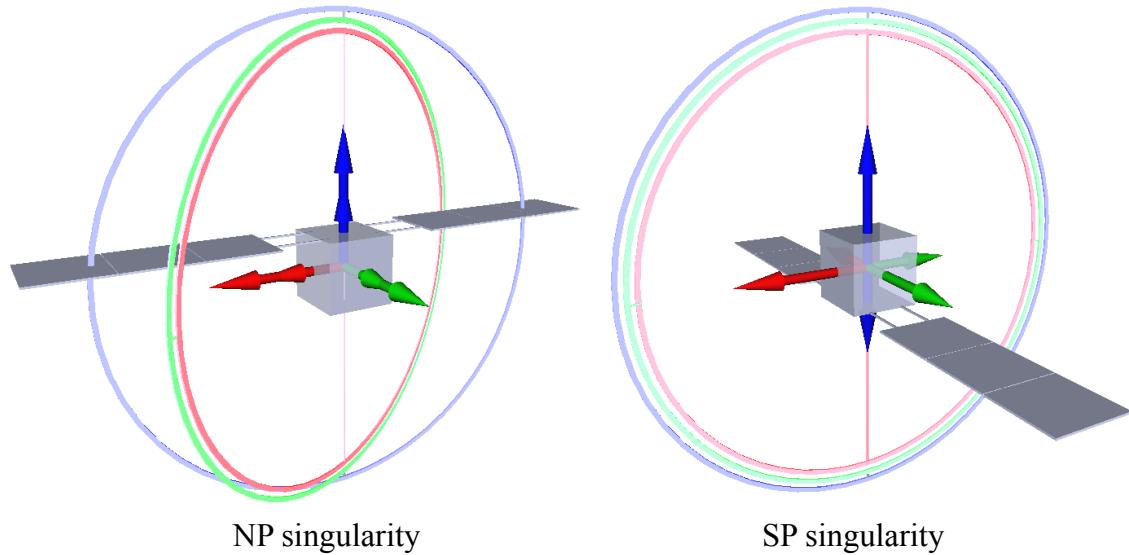


Fig. 3.6: Example of north pole and south pole singular configuration.

それ、

$$\boldsymbol{\theta}_{NP} = \{\boldsymbol{\theta} \mid \sin(\theta_2/2) = 0, \forall \theta_1, \theta_3\} \quad (3.29)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{SP} = \{\boldsymbol{\theta} \mid \cos(\theta_2/2) = 0, \forall \theta_1, \theta_3\} \quad (3.30)$$

と定義する。NP特異点、SP特異点の姿勢の例をFig. 3.6に示す。

このとき次の命題が成り立つ。

命題

NP特異点 ($\theta_2 = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$) を初期姿勢とする固定軸回転ならば、3-1-3オイラー角は次式で拘束される。

$$\sin(\theta_1 + 2\gamma) = \sin \theta_3 \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & -\cos \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & \sin \frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad (3.32)$$

証明

(2.12) および (3.2) より、固定軸回転における 3-1-3 オイラー角は次式を満たす。

$$2 \sin \alpha \begin{bmatrix} \cos \xi \cos \gamma \\ \cos \xi \sin \gamma \\ \sin \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \theta_1 + \cos \theta_3) \sin \theta_2 \\ -(\sin \theta_1 - \sin \theta_3) \sin \theta_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_3)(1 + \cos \theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

(3.33)を用いて、

$$\tan \gamma = -\frac{\sin \theta_1 - \sin \theta_3}{\cos \theta_1 + \cos \theta_3} \quad (3.34)$$

が得られる。NP特異点の通過条件 $\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_1$ から両辺を時間積分して $\theta_3 = \theta_1 + x, x \in [-\pi, \pi]$ とおき、(3.34)に代入すると、

$$\tan \gamma = -\frac{\sin \theta_1 - \sin(\theta_1 + x)}{\cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + x)} = \tan \frac{x}{2} \quad (3.35)$$

が成り立つ。ゆえに、定義域を考慮して $x = 2\gamma$ を得る。さらに、(3.33)の関係から、

$$\begin{aligned} \tan \xi &= -\left(\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3) \sin \gamma}{\sin \theta_1 - \sin \theta_3} \right) \frac{1 + \cos \theta_2}{\sin \theta_2} \\ &= -\left(\frac{\sin 2(\theta_1 + \gamma) \sin \gamma}{\sin \theta_1 - \sin(\theta_1 + 2\gamma)} \right) \cot \frac{\theta_2}{2} \\ &= \sin(\theta_1 + \gamma) \cot \frac{\theta_2}{2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} -\cos \xi (\sin \theta_1 \cos \gamma + \cos \theta_1 \sin \gamma) \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \xi \sin \frac{\theta_2}{2} &= \\ \left[-\sin \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} \quad -\cos \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} \quad \sin \frac{\theta_2}{2} \right] \hat{\boldsymbol{\omega}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

を満たす。□

つまり、NP特異点上を通過する固定軸回転は次の関係を満たす。

$$\mathbf{A}_3(\boldsymbol{\theta})^{-1} \hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

証明された関係を幾何学的に示したモデルをFig. 3.7に示す。

同様にして、SP特異点上での固定軸回転は次の命題が成り立つ。

命題

SP特異点 ($\theta_2 = \{2(k+1)\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$) を初期姿勢とする固定軸回転ならば、3-1-3オイラー角は次式で拘束される。

$$\begin{aligned} -\sin(\theta_1 + 2\gamma) &= \sin \theta_3 \\ \left[\sin \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} \quad \cos \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} \quad \cos \frac{\theta_2}{2} \right] \hat{\boldsymbol{\omega}} &= 0 \end{aligned}$$

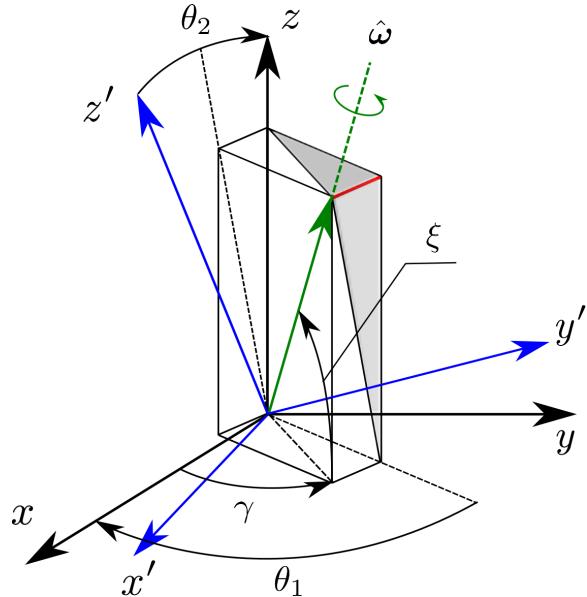


Fig. 3.7: Geometric model to describe Euler angle under eigenaxis maneuver.

証明

(2.12) および (3.2) より、固定軸回転における 3-1-3 オイラー角は次式を満たす¹。

$$2 \sin \alpha \begin{bmatrix} \cos \xi \cos \gamma \\ \cos \xi \sin \gamma \\ \sin \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\cos \theta_1 + \cos \theta_3) \sin \theta_2 \\ (\sin \theta_1 + \sin \theta_3) \sin \theta_2 \\ \sin(\theta_1 - \theta_3)(1 - \cos \theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

(3.39) を用いて、

$$\tan \gamma = -\frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_3}{\cos \theta_1 + \cos \theta_3} \quad (3.40)$$

が得られる。SP 特異点の通過条件 $\dot{\theta}_3 = -\dot{\theta}_1$ から両辺を時間積分して $\theta_3 = -\theta_1 + x$, $x \in [-\pi, \pi]$ とおき、(3.40) に代入すると、

$$\tan \gamma = -\frac{\sin \theta_1 + \sin(-\theta_1 + x)}{\cos \theta_1 + \cos(-\theta_1 + x)} = -\tan \frac{x}{2} \quad (3.41)$$

¹SP 特異点を初期姿勢とするため、 θ_2 には 180 deg のオフセット、さらに θ_3 は回転方向が反対となるため、その挙動は $-\theta_3$ となる。

が成り立つ。ゆえに、定義域を考慮して $x = -2\gamma$ を得る。さらに、(3.39) の関係から、

$$\begin{aligned}\tan \xi &= \left(\frac{\sin(\theta_1 - \theta_3) \sin \gamma}{\sin \theta_1 + \sin \theta_3} \right) \frac{1 - \cos \theta_2}{\sin \theta_2} \\ &= \left(\frac{\sin 2(\theta_1 + \gamma) \sin \gamma}{\sin \theta_1 - \sin(\theta_1 + 2\gamma)} \right) \tan \frac{\theta_2}{2} \\ &= -\sin(\theta_1 + \gamma) \tan \frac{\theta_2}{2}\end{aligned}\quad (3.42)$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}\cos \xi (\sin \theta_1 \cos \gamma + \cos \theta_1 \sin \gamma) \sin \frac{\theta_2}{2} + \sin \xi \cos \frac{\theta_2}{2} &= \\ \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} &= 0\end{aligned}\quad (3.43)$$

を満たす。□

つまり、SP 特異点上を通過する固定軸回転は常に次の関係を満たす。

$$\mathbf{A}_1(\boldsymbol{\theta})^{-1} \hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

これらの性質は、角加速度が連続であるならば、特異点を通過するオイラー角の解が存在することを表している。すなわち、制御対象が正確に回転軸ベクトルを追従することが保証される姿勢制御の場合、特異点適合法により、特異点通過解をオイラー角の解空間に落とし込むことができ、オイラー角による高精度な姿勢制御は達成できる。しかし、正しく追従できることを仮定すること自体、制御の考え方には反しており、この仮定の下で議論する余地はない。つまり、動作空間を瞬間的に拘束する特異点適合法は、特異点通過に伴う姿勢表現誤差を考慮する必要がある。

3.5.2 修正オイラー角

これまでの議論で示してきたように、姿勢運動を表すオイラー角の挙動は複雑であり、また、NP および SP 特異点それぞれで影響の仕方が異なる。NP/SP 特異点でのオイラー角の挙動を区別するため、修正オイラー角

Table 3.1: Simulation condition to create each angular path.

Path	Rotation angle	Rotation axis	Initial attitude ϕ [deg]
N1	180 deg	[0 $-1/\sqrt{2}$ $1/\sqrt{2} + \delta$] ^T	[54.74 59.99 -125.26] ^T
N2		[0 $-1/\sqrt{2}$ $1/\sqrt{2} - \delta$] ^T	
N0		[0 $-1/\sqrt{2}$ $1/\sqrt{2}$] ^T	
S1		[0 $-1/\sqrt{2}$ $-1/\sqrt{2} - \delta$] ^T	
S2		[0 $-1/\sqrt{2}$ $-1/\sqrt{2} + \delta$] ^T	
S0		[0 $-1/\sqrt{2}$ $-1/\sqrt{2}$] ^T	

$\phi = [\phi_1 \phi_2 \phi_3]^T$ を次式で定義する .

$$\phi = \mathbf{B}\theta \quad (3.45)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

修正オイラー角による挙動を示すため , NP/SP 特異点における通過/非通過の 6 通りの指令を与えたシミュレーションを行った . このときの機体座標系の z 軸ベクトルが指す経路を Fig. 3.8 に示す . また , それぞれの経路名を Fig. 3.9 で定義する . それぞれの経路の条件を Table. 3.1 に示す . ただし , $\delta = 1.0 \times 10^3$. 経路 N0 , S0 はそれぞれ NP/SP 特異点を通過する姿勢運動である .

それぞれの経路における修正オイラー角の変化を Fig. 3.10 に示す . (a) は経路 N1 , (b) は経路 S1 , (c) は経路 N2 , (d) は経路 S2 (e) は経路 N0 および (f) は経路 S0 である . 修正オイラー角を用いることで , NP 特異点では ϕ_1 が影響し , SP 特異点では ϕ_3 が影響することがわかる . また , どちらも特異点通過する場合は影響しないことがわかる . さらに , 修正オイラー角には , (3.38) および (3.44) より , 固定軸回転ならばオイラー角の増減に一貫性がある . つまり ,

$$\dot{\phi}_1 = \begin{cases} > 0 & \text{if } N1 \\ < 0 & \text{if } N2 \\ = 0 & \text{if } N0 \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\dot{\phi}_3 = \begin{cases} > 0 & \text{if } S1 \\ < 0 & \text{if } S2 \\ = 0 & \text{if } S0 \end{cases} \quad (3.48)$$

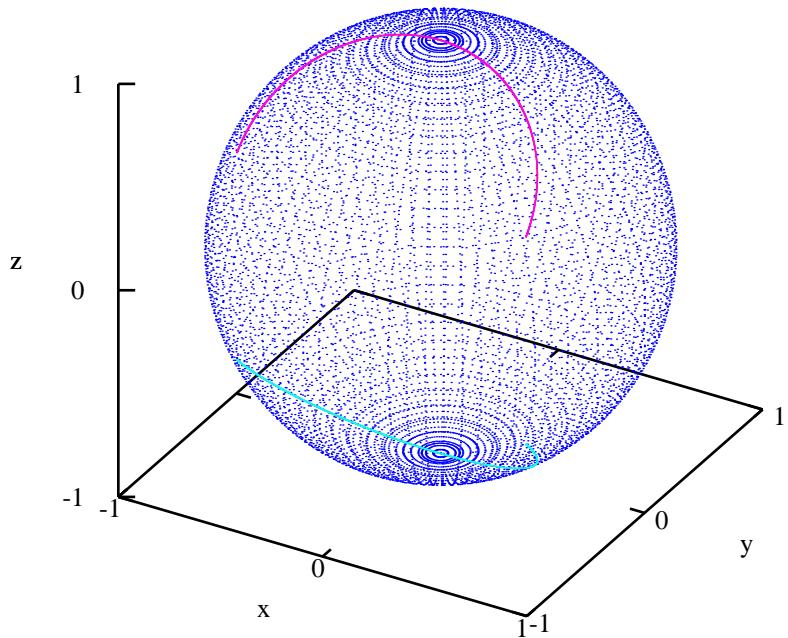


Fig. 3.8: Angular path to clarify each modified Euler angle behavior.

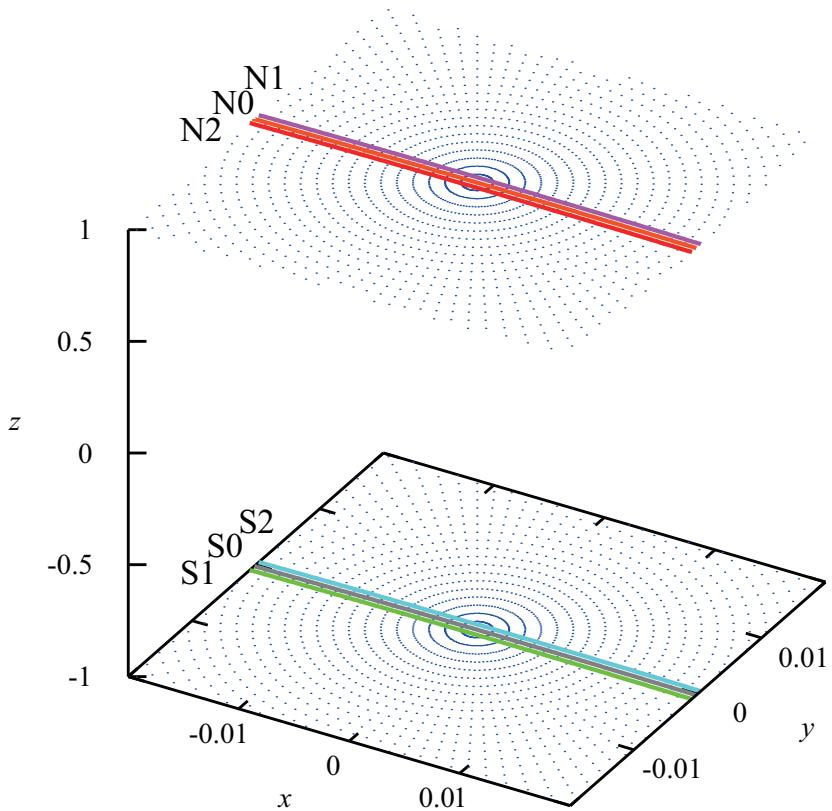


Fig. 3.9: Description of each angular path.

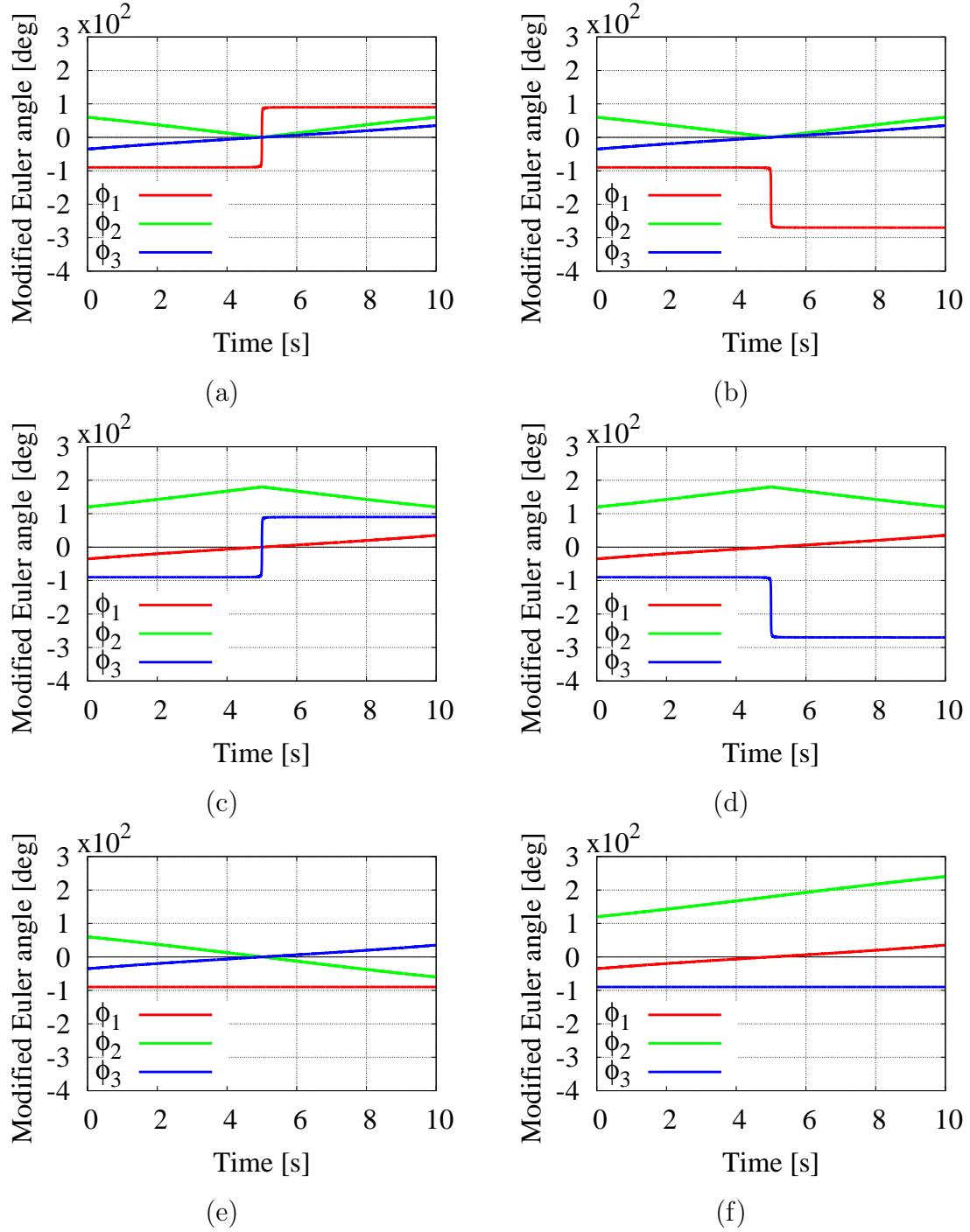


Fig. 3.10: Modified Euler angle behavior around each singularity: (a) path N1, (b) path N2, (c) path S1, (d) path S2 (e) path N0 and (f) path S0.

がすべての状態で成り立つ。

このように、修正オイラー角を用いることで、NP/SP特異点による影響を区別することができる。また、示された結果のように、特異点周りではオイラー角挙動が非常に不安定であり、姿勢制御ではそれぞれの特異点をどのように回避（あるいは通過）するのかを明確に分ける必要がある。

3.6 四つのオイラー角による姿勢表現

3.6.1 姿勢表現手法

三次元の姿勢表現は、オイラー角やModified Rodriguez Parameter(3.2.3項)のような三つの変数では、表すことができない。NP特異点、SP特異点をを別々に対処することはできるが、同時に解消することはできない。それゆえ、正確な姿勢表現を達成するためには、単位クォータニオン(3.2.2項)のような四つ以上の変数が必要となる。本稿では、四つのオイラー角を用いる姿勢表現について議論する。議論する四つのオイラー角は3-1-3オイラー角を基本とし、3-1-3オイラー角の特異点の近づく際に制限される動作方向に対し、回転軸を付与し、動作を許容する考え方である。

まず、次に示す3-1-3オイラー角の3番目の回転軸に、y軸方向の回転を許容したオイラー角を提案し、これを3-1-2-3オイラー角と定義する。このとき、3-1-2-3オイラー角と角速度の関係を結ぶ変換行列は次式で表される。

$$\mathbf{A}_{3123} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_3 \\ 1 & 0 & -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

このとき、 \mathbf{A}_{3123} の零空間ベクトルは、

$$\text{Ker } \mathbf{A}_{3123} = \left[-\frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_2} \quad \sin \theta_3 \quad -\tan \theta_2 \cos \theta_3 \quad 1 \right]^T \quad (3.50)$$

となる。3-1-3オイラー角の特異点付近において、3-1-2-3オイラー角として付与した θ_3 の回転を許容し、特異点から遠ざかると同時に、上式によるSelf-motionを用いて、 $\theta_3 = 0$ とすることで、3-1-3オイラー角に基づいた正確な姿勢表現が達成できる。しかし、提案した3-1-2-3オイラー角は θ_3 によるセルフモーション項に θ_3 に依存した $\cos \theta_3$ により、 $\theta_3 = \pm(\pi/2)$ で平衡点となり、 $\theta_3 = 0$ とならない可能性があり、複雑である。

この問題を解決するため、3-1-3オイラー角の2番目にy軸回転を許容した3-2-1-3オイラー角を提案する。このとき、3-2-1-3オイラー角と角速度の関係を結ぶ変換行列は次式で表される。

$$\mathbf{A}_{3213} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_3 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3 \\ 1 & 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

また、その零空間は次となる。

$$\text{Ker } \mathbf{A}_{3213} = \left[-\frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_2} \quad -\sin \theta_3 \quad \tan \theta_2 \cos \theta_3 \quad 1 \right]^T \quad (3.52)$$

特異点から遠ざかるとき、上式を用いたセルフモーションによって θ_2 を0にする。このとき、3-1-2-3オイラー角とは異なり、 θ_2 のセルフモーションに関する成分が、 θ_2 に依存しないため、容易な姿勢表現が期待できる。

3.6.2 逆運動学計算

以上の議論に基づき、角速度からオイラー角の角速度への変換を次式とする手法を提案する。

$$\dot{\theta}_{3213} = \mathbf{A}_{3213}^+ \boldsymbol{\omega} + b \sin \theta_2 \text{sgn}(\sin \theta_3) \text{Ker } \mathbf{A}_{3213} \quad (3.53)$$

ただし、 θ_{3213} は3-2-1-3オイラー角($\theta_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$)、 $(\circ)^+$ は擬似逆行列、 b は正の定数である。これにより、3-1-3オイラー角の特異点を除き、 θ_2 の平衡点は0の唯一に定まる。

3.7 オイラー角に基づく固定軸回転制御

オイラー角に基づく姿勢制御として、オイラー角の角速度およびオイラー角の誤差をフィードバックして制御するPD制御を設計する。制御式は、オイラーの運動方程式に基づき次式で表される。

$$\tau = \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{A}\ddot{\theta}^r + \dot{\mathbf{A}}\dot{\theta}) + \Omega^\times \bar{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \quad (3.54)$$

$$\ddot{\theta}^r = \ddot{\theta}^d - \mathbf{K}_d \dot{\theta}^e - \mathbf{K}_p \theta^e \quad (3.55)$$

$$\dot{\theta}^e = \dot{\theta} - \dot{\theta}^d, \theta^e = \theta - \theta^d$$

ただし、 $\bar{\mathbf{J}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は制御対象の慣性行列の予測値、 $\mathbf{K}_d, \mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ はフィードバックゲイン行列、 $(\circ)^d$ は目標値を表す。(3.54)のブロック線図をFig. 3.11に示す。

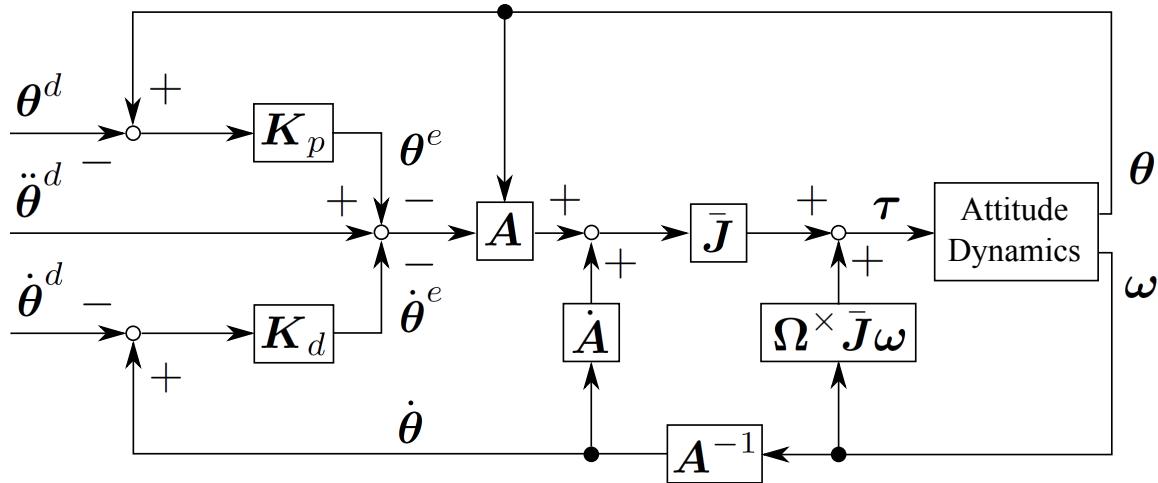


Fig. 3.11: Block diagram of proposed Euler-angle-based attitude controller.

3.7.1 オイラーー角の切替

提案制御(3.54)はオイラー角が定義される限り安定であり、目標オイラー角に対し、指数的に収束する(付録C.4.5)。しかし一方で、それぞれのオイラー角の誤差の大きさが π radを上回るとき、冗長な制御入力が与えられる。これに対し、誤差の大きさにより、オイラー角を次式で修正することで上記の問題を回避する。

$$\theta_1^d = \theta_1^d - \text{sgn}(\theta_1^d - \theta_1)2\pi, \quad |\theta_1^d - \theta_1| > \pi \quad (3.56)$$

$$\theta_3^d = \theta_3^d - \text{sgn}(\theta_1^d - \theta_1)2\pi, \quad |\theta_3^d - \theta_3| > \pi \quad (3.57)$$

3.5.2で示したように、特異点を通過するときとそうでない場合でオイラー角空間の位相が異なるため、オイラー角と目標オイラー角の $\text{sgn}(\det A)$ には一貫性を持たせる必要がある。この条件により、(3.56)において θ_2 は $|\theta_2| > \pi$ を満たさないため考慮しない。

本手法における特異点対策は、上記の理由による θ_2 を制限する方法と特異点適合法によりオイラー角の位相を意図的に変える手法が挙げられる。どちらの場合においても、特異点を防ぐため、NP, SP それぞれの特異点周りに微小領域 $\varepsilon_N \in \varepsilon, \varepsilon_S \in \varepsilon$ を定義し、領域内で姿勢が表現されるとき特異姿勢とみなす。

θ_2 を制限する最も単純な手法は、それぞれのNP/SP特異点で次のように

オイラー角を切り替える手法である。

$$\phi_1 = \phi_1 - \text{sgn}(\dot{\phi}_1), \boldsymbol{\theta} \in \varepsilon_N \quad (3.58)$$

$$\phi_3 = \phi_3 - \text{sgn}(\dot{\phi}_1), \boldsymbol{\theta} \in \varepsilon_S \quad (3.59)$$

上式を適用することで θ_2 の挙動が特異点から離れるようになる。しかし、このとき最大 ε の姿勢表現誤差が必ず表れる。

この切り替え手法に対して、姿勢の回転運動方向を考慮することで、回転方向の誤差を小さくし、制御トルクへの影響を抑える切り替え手法を次に示す。

$$\phi_1 = \phi_1 + \psi_1, \boldsymbol{\theta} \in \epsilon_N \quad (3.60)$$

$$\psi_1 = 2\text{sgn}(\dot{\phi}_1^d) \cos^{-1}(\text{sgn}(\det \mathbf{A}) \sin(\theta_1 + \gamma))$$

$$\phi_3 = \phi_3 + \psi_3, \boldsymbol{\theta} \in \epsilon_S \quad (3.61)$$

$$\psi_3 = 2\text{sgn}(\dot{\phi}_3^d) \cos^{-1}(\text{sgn}(\det \mathbf{A}) \sin(\theta_1 + \gamma))$$

しかし、この手法も同様に切り替え操作に伴う姿勢誤差が必ず生じる

上述のとおり、 θ_2 を制限するオイラー角の切り替え手法は、姿勢誤差が生じやすく、 ε に差し掛かった瞬間に切り替えるため、 ε 内部の姿勢を表すことができない。すなわち、大域的な姿勢表現でない。さらに、切り替えが非常に複雑である。そのため、提案制御手法におけるオイラー角の特異点対策は、大域的な姿勢表現を実現するため NP/SP 特異点に特異点適合法を適用する。

本制御手法において、特異点適合法は次式のように表される。

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_1^{-1} + \mathbf{A}_2^{-1}, \boldsymbol{\theta} \in \epsilon_N \quad (3.62)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_2^{-1} + \mathbf{A}_3^{-1}, \boldsymbol{\theta} \in \epsilon_S \quad (3.63)$$

特異点適合法で、特異点を通過し $\det \mathbf{A}$ の符号が変わると、目標オイラー角に対して、次のような切り替え操作を施す。

$$\phi_1^d = \phi_1^d - \text{sgn}(\dot{\phi}_1^d)\pi, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{NP} \quad (3.64)$$

$$\phi_3^d = \phi_3^d - \text{sgn}(\dot{\phi}_3^d)\pi, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{SP} \quad (3.65)$$

$$\phi_2^d = \phi_2^d - \text{sgn}(\sin 2\phi_2^d)\tilde{\phi}_2^d \quad (3.66)$$

ただし、 $\tilde{\phi}_2 \in [0, \pi]$ は、

$$\tilde{\phi}_2^d = 2\cos^{-1}|\cos \phi_2^d| \quad (3.67)$$

である。

3.7.2 シミュレーションによる検証

提案手法による姿勢制御の有用性の検証を行った。シミュレーションは二つ行い、どちらもNP特異点を初期姿勢とする固定軸回転制御である。そのため、双方ともに、NP特異点を通過する際に特異点適合法が適用される。このとき、 θ_2 に関して、次の関係が成り立つ。

$$\hat{\omega}_3 = \min \left(\cos \frac{\theta_2}{2} \right) \quad (3.68)$$

すなわち、NP特異点を初期姿勢とするとき、 $\hat{\omega}$ の z 軸成分 $\hat{\omega}_3$ によって、目標姿勢運動がその過程でどの程度SP特異点に近づくかを評価することができる。二つのシミュレーションをそれぞれ Case I, Case II とし、それぞれの条件を Table. 3.2, 3.3 に示す。Case I より、Case II の方が SP 特異点に近づくことがわかる。さらに (3.68) より、Case II は最も SP 特異点に近づくときで $\theta_2^d = 179.43 \text{ deg}$ となり、オイラー角の挙動に非常に大きな影響を与える。

Table 3.2: Parameters for numerical simulation I with proposed Euler-angle-based attitude controller.

Euler angle definition	3-1-3
Initial Euler angle	$[-26.57 \ 0 \ 26.57]^T \text{ deg}$
Rotation axis	$[0.88 \ 0.44 \ 0.176]^T$
Rotation angle	800 deg
Simulation time	100 s
Feedback gain	$\mathbf{K}_d = \text{diag}(10, 10, 10) \text{ s}^{-1}$ $\mathbf{K}_p = \text{diag}(10, 10, 10) \text{ s}^{-2}$
Estimated inertia matrix	$\bar{\mathbf{J}} = \text{diag}(1200, 2200, 3300) \text{ kg m}^2$

Case I と II の違いは回転方向である。それにより、Case II は SP 特異点近傍を通過するような条件を与えた。さらに、どちらのシミュレーションに対してもモデル誤差を生み出すため、慣性の推定値を

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 1200 & 100 & -200 \\ 100 & 2200 & 300 \\ -200 & 300 & 3300 \end{bmatrix} \text{ kg m}^2 \quad (3.69)$$

として与え、姿勢運動に伴い、ジャイロ効果による外乱が加わる条件とし

Table 3.3: Parameters for numerical simulation II with proposed Euler-angle-based attitude controller.

Euler angle definition	3-1-3
Initial Euler angle	$[-26.57 \ 0 \ 26.57]^T$ deg
Rotation axis	$[0.8944 \ 0.4472 \ 0.005]^T$
Rotation angle	800 deg
Simulation time	100 s
Feedback gain	$\mathbf{K}_d = \text{diag}(10, 10, 10) \text{ s}^{-1}$
	$\mathbf{K}_p = \text{diag}(10, 10, 10) \text{ s}^{-2}$
Estimated inertia matrix	$\bar{\mathbf{J}} = \text{diag}(1200, 2200, 3300) \text{ kg m}^2$

た。また、NP, SP周辺の特異点領域を次のように設定した。

$$\varepsilon_N = \left\{ \left| \sin \frac{\theta_2}{2} \right| \leq 2.0 \times 10^{-3} \right\} \quad (3.70)$$

$$\varepsilon_S = \left\{ \left| \cos \frac{\theta_2}{2} \right| \leq 2.0 \times 10^{-3} \right\} \quad (3.71)$$

動作指令値は、回転軸周りの回転角について5-1-5次で多項式補間し、80sで目標姿勢に達するものとした。

シミュレーション結果をFigs. 3.12, 3.13に示す。示された結果はそれぞれ(a)オイラー角、(b)角速度、(c)オイラー角の誤差、(d)オイラー角の時間変化率の誤差、(e)制御入力、そして(f)特異点指標である。

Case I, IIとともに、目標姿勢に達していることが確認できる。Case Iでは、初期加速に伴う外乱の影響でオイラー角の誤差が一時的に1 degオーダーで表れるが、その後は目標姿勢へと収束し、十分な追従性が確認できる。また、NP特異点通過により、制御トルクへの影響が確認されたが、オイラー角は物理的な変数でないことから、特異点領域は十分に小さくすることができるため、領域を見直すことで問題の解消が期待できる。

一方、Case IIではCase Iと同様にNP特異点通過による制御トルクの影響が確認されるが、その影響よりも顕著であるのが、SP特異点近傍を通過する際に表れるオイラー角およびその時間変化率の誤差である。これはSP特異点による目標オイラー角の急激な変化に対し、追従できていないことを表している。この対策として、PD制御のフィードバックゲインを大きくすることで、追従性を上げることが考えられる。しかし、オイラー角の変化が三角関数で支配されており C^∞ 級となるため、たとえ複数の積分器を加えたとしても完全な解消は期待できない。

以上より、提案制御はほとんどの固定軸回転制御に対して有効であり、目標姿勢に対して可制御である。しかし、オイラー角の非線形な挙動により、特異点付近の姿勢運動では、制御トルクに影響を及ぼし、冗長な制御トルクを出力し兼ねない。

3.8 動作空間に基づく固定軸回転制御

3.7節で示したように、オイラー角空間で指令値を決定する姿勢制御手法は、制御トルクがオイラー角の挙動に強く依存し、特異点の影響を受けやすい。この影響を回避するため、姿勢運動の一般的な動作空間である正規直交系に基づく姿勢誤差計算を適用し、指令値として与える制御則を考え、次のような姿勢制御を提案する。

$$\tau = \bar{\mathbf{J}}\dot{\omega}^r - \Omega^\times \bar{\mathbf{J}}\omega \quad (3.72)$$

$$\dot{\omega}^r = -\mathbf{K}_d\omega^e - \mathbf{K}_p e \quad (3.73)$$

$$\omega^e = \omega - \omega^d \quad (3.74)$$

本手法のブロック線図をFig. 3.14に示す。

ここで、目標姿勢を $\mathbf{R}^d(\theta^d) \in SO(3)$ 、現在の姿勢を $\mathbf{R}(\theta) \in SO(3)$ とするとき、 $\mathbf{R}^d(\theta^d)$ に対する $\mathbf{R}(\theta)$ の誤差ベクトル e は一般的に次式で表される。

$$e = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \times \mathbf{x}^d + \mathbf{y} \times \mathbf{y}^d + \mathbf{z} \times \mathbf{z}^d) \quad (3.75)$$

$x, y, z \in \mathbb{S}^2$ は R の座標軸ベクトルで、 $(\circ)^d$ はその目標値 (R^d の座標軸ベクトル) を指す。

3.8.1 誤差オイラー角

e を R^d に固定した座標系から R を指す3-1-3オイラー角 $\theta^e = [\theta_1^e \theta_2^e \theta_3^e]^T$ で表現することを考え、 θ^e を誤差オイラー角と定義する。 θ^e によって、 e を表すと、

$$e(\theta^e) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin \theta_2^e (\cos \theta_1^e + \cos \theta_3^e) \\ \sin \theta_2^e (\sin \theta_1^e - \sin \theta_3^e) \\ (1 + \cos \theta_2^e) \sin(\theta_1^e + \theta_3^e) \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

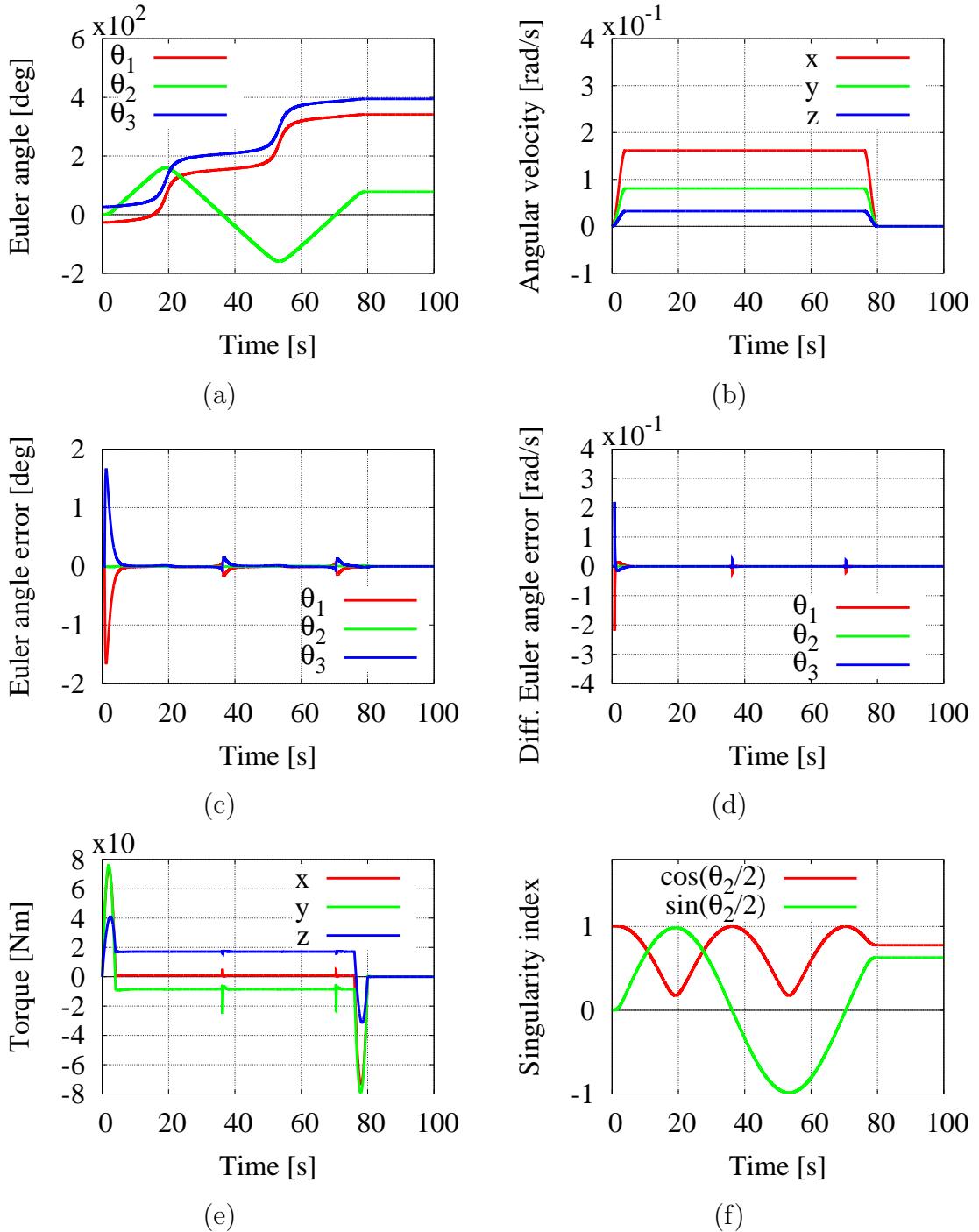


Fig. 3.12: Simulation results with proposed Euler-angle-based attitude controller under Case I (a) Euler angles, (b) angular velocity, (c) Euler angle error, (d) Euler angle rate error, (e) control torque and (f) singularity index.

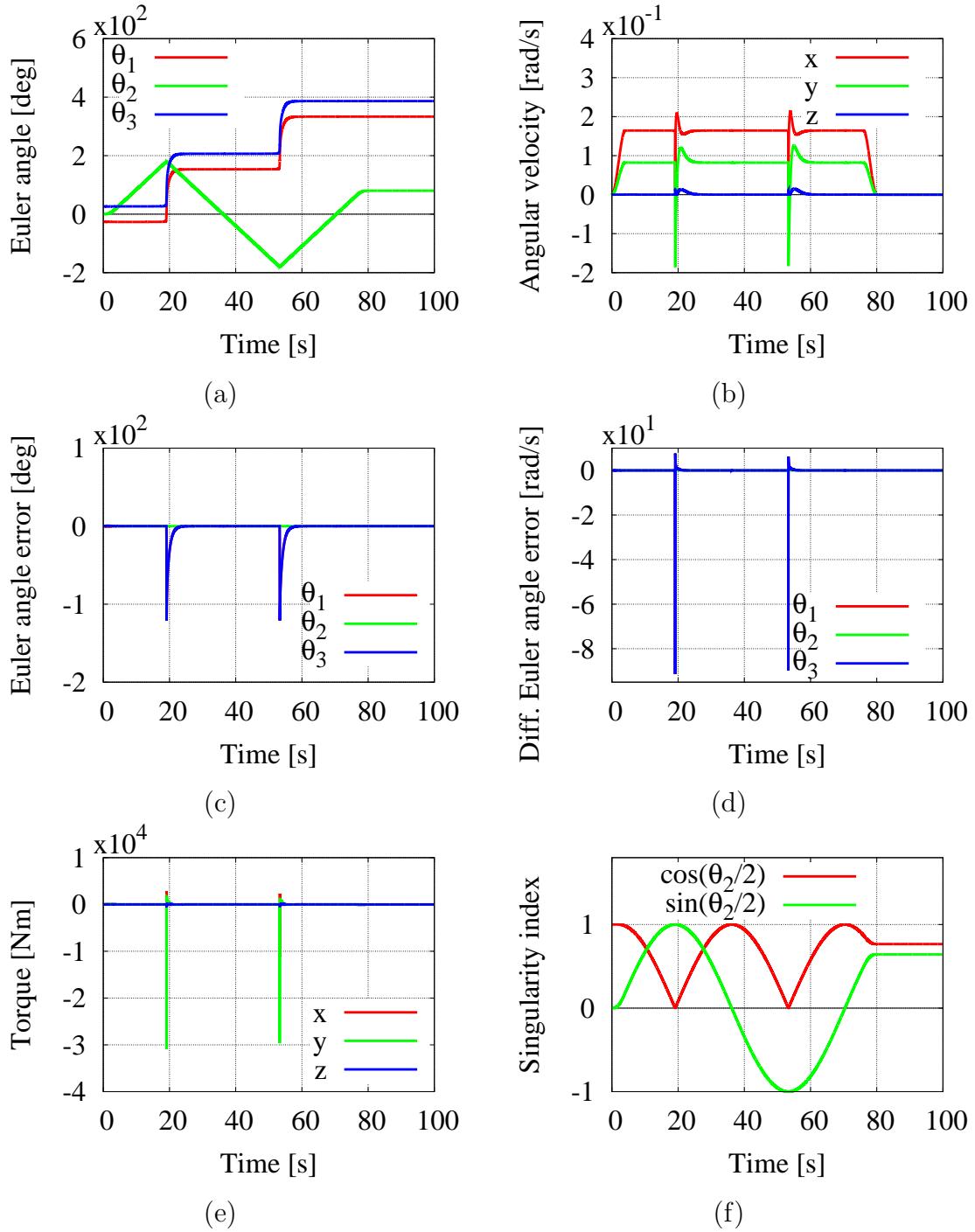


Fig. 3.13: Simulation results with proposed Euler-angle-based attitude controller under Case II (a) Euler angles, (b) angular velocity, (c) Euler angle error, (d) Euler angle rate error, (e) control torque and (f) singularity index.

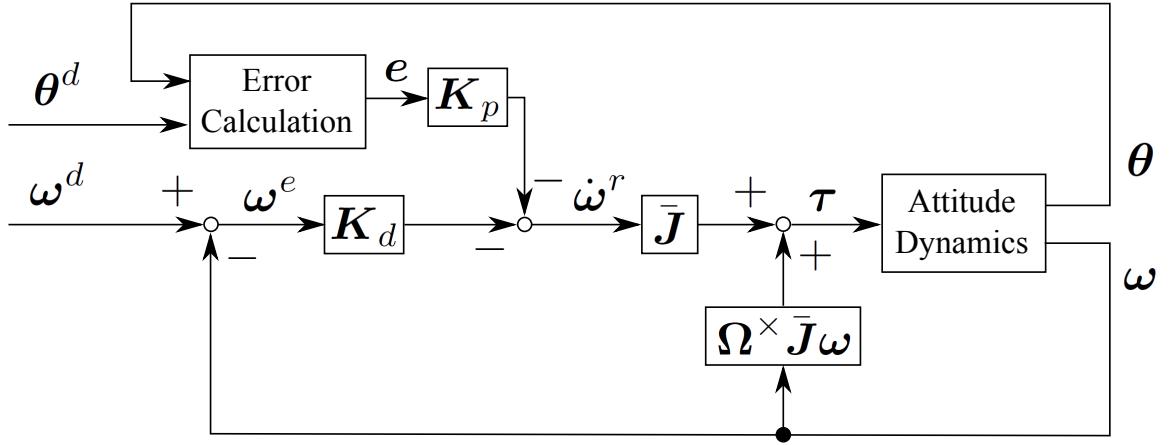


Fig. 3.14: Block diagram of proposed motion-space-based attitude controller.

となる。

誤差オイラー角 θ^e を θ および θ^d を用いて表現することを考える。ただし、オイラー角はベクトル空間で定義されないため、単純な線形結合によって誤差を表現することができない。ここで、球面によって姿勢の動きを幾何学的に扱う考え方を導入する。Fig.3.15に慣性座標系と機体座標系、目標機体座標系を球面でモデル化した図を示す。各座標系の原点を結んで形成される三角形を考えると、それぞれFig. 3.15で表される変数となる。注目するべきは、オイラー角の二つ目の回転角 θ_2 の要素が示された球面三角形の長さを表す変数となる点である。また、球面三角形を表すその他の変数を $\zeta, \zeta^d, \lambda \in [-\pi, \pi]$ として媒介すると、 θ^e は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \\ \theta_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_1^d - \zeta^d \\ -\lambda \\ \theta_1 + \zeta \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

各変数 ζ, ζ^d, λ は球面三角法の余弦定理(付録B.2.1)より、それぞれ次式で定義される。

$$\zeta = \text{sgn}(\sin(\theta_3 - \theta_3^d)) \cos^{-1} \left(-\frac{\cos \theta_2^d - \cos \lambda \cos \theta_2}{|\sin \lambda \sin \theta_2|} \right) \quad (3.78)$$

$$\zeta^d = \text{sgn}(\sin(\theta_3 - \theta_3^d)) \cos^{-1} \left(\frac{\cos \theta_2 - \cos \lambda \cos \theta_2^d}{|\sin \lambda \sin \theta_2^d|} \right) \quad (3.79)$$

$$\lambda = \text{sgn}(\sin \theta_2) \cos^{-1} (\sin \theta_2^d \sin \theta_2 \cos(\theta_3 - \theta_3^d) + \cos \theta_2^d \cos \theta_2) \quad (3.80)$$

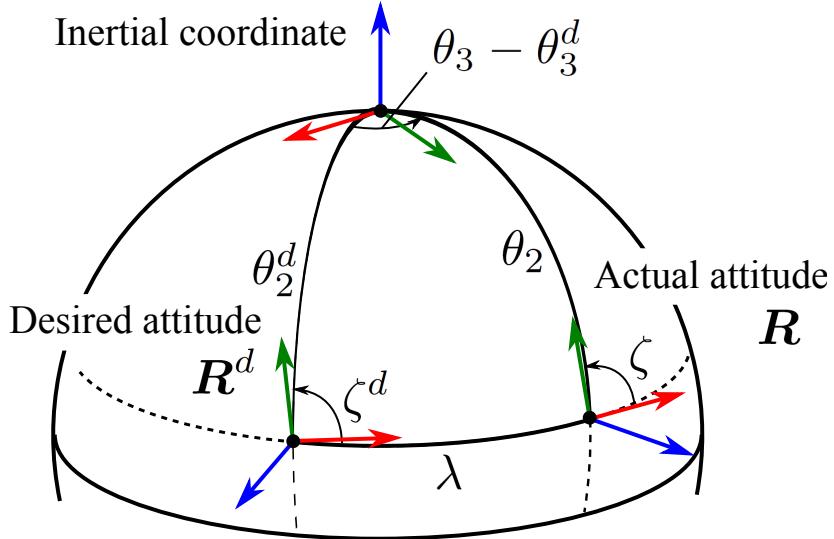


Fig. 3.15: Spherical geometry model to represent attitude error based on Euler angles.

ここで、 θ^e を変換して、

$$\phi^e = B\theta^e \quad (3.81)$$

とし、修正誤差オイラー角 $\phi^e = [\phi_1^e \phi_2^e \phi_3^e]^T$ を定義する。 ϕ^e を用いると、(3.76) はすべて積の形で

$$e(\phi^e) = 2 \cos \frac{\phi_2^e}{2} \cos \phi_3^e \begin{bmatrix} \cos \phi_1^e \sin (\phi_2^e/2) \\ \sin \phi_1^e \sin (\phi_2^e/2) \\ \cos (\phi_2^e/2) \sin \phi_3^e \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

と書き換えられる。ただし、 $\phi_2 \in [-\pi, \pi]$ である。

3.8.2 安定性

提案制御手法 (3.72) の平衡点 $(R^\varepsilon(\phi^e), \omega^\varepsilon)$ は $e(\phi^e) = 0$ かつ $\omega = \omega^d = 0$ である。つまり、 ω^ε は 0 となる。一方、 $e(\phi^e) = 0 \in \mathcal{E}$ を満たす ϕ^e の集合 \mathcal{E} は、(3.82) より、

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{[\phi_1^e \ 0 \ 0]^T, [\phi_1^e \pm \pi \phi_3^e]^T, [\phi_1^e \phi_2^e \pi/2 + k\pi]^T\} \\ &\equiv \{\psi^d, \psi^\mu, \psi^\nu\}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

である（ただし， ϕ_1^e は平衡点上において，冗長運動を司る変数であるため，不定である。）このとき，平衡点上の姿勢 ψ^d は R^d である。また， R^d を除いた平衡点での姿勢を，

$$\mathbf{R}^\mu \equiv \mathbf{R}^e(\psi^\mu) \quad (3.83)$$

$$\mathbf{R}^\nu \equiv \mathbf{R}^e(\psi^\nu) \quad (3.84)$$

とすると，次の命題が成り立つ。

命題

固定軸回転の回転角を $\alpha^e \in (-\pi, \pi]$ とするとき， $\mathbf{R}^\mu, \mathbf{R}^\nu$ は R^d から $\alpha^e = \pi$ で定義される姿勢である。

証明

回転角 α^e と3-1-3オイラー角 θ^e の関係から次式を得る。

$$\cos \alpha^e = \cos(\theta_1^e + \theta_3^e) \frac{1 + \cos \theta_2^e}{2} + \frac{-1 + \cos \theta_2^e}{2} \quad (3.85)$$

(3.85)に $\alpha = \pi$ を代入すると，

$$(\cos(\theta_1^e + \theta_3^e) + 1) \left(\cos \frac{\theta_2^e}{2} \right)^2 = 0 \quad (3.86)$$

が成り立つ。さらに，(3.86)を ϕ^e に書き換えて，

$$(\cos 2\phi_3^e + 1) \left(\cos \frac{\phi_2^e}{2} \right)^2 = 0 \quad (3.87)$$

を得る。(3.87)の解は，

$$\phi_2^e = k\pi, \quad \phi_3^e = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (3.88)$$

となり，命題が証明された。□

上記より， $\mathbf{R}^\mu, \mathbf{R}^\nu$ が目標姿勢と異なることは明らかである。これより，提案制御(3.72)の姿勢フィードバック(3.73)について $e(\phi^e)$ を次式で与えることを提案する。

$$e(\phi^e) = \begin{bmatrix} \cos \phi_1^e \sin (\phi_2^e/2) \\ \sin \phi_1^e \sin (\phi_2^e/2) \\ \cos (\phi_2^e/2) \sin \phi_3^e \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

このとき， ϕ_3^e には誤差範囲によって次の操作を与える。

$$\dot{\phi}_3^e = \phi_3^e - \text{sgn}(\dot{\phi}_3^e)\pi, |\phi_3^e| > \pi/2 \quad (3.90)$$

これにより， ϕ^e はすべての姿勢誤差を被覆性なしで表現でき，(3.72)の平衡点は $(R^d, 0)$ の唯一に定まる。また[46]では，(3.75)の平衡点の一つに $(R^d, 0)$ を持ち，かつ安定であることが証明されているため，本手法(3.72)における平衡点も同様に安定であり，目標姿勢に収束する。

3.8.3 シミュレーションによる検証

提案した動作空間に基づく姿勢制御(3.72)の有用性の検証を行った。シミュレーションはNP特異点の通過/非通過，SP特異点の通過/非通過の四つ行った。NP/SP特異点の通過/非通過には同じ動作指令を与え，それぞれの特異点領域を変更することにより，一方は意図的に通過させる条件とした。

まず，NP特異点に関するシミュレーション条件をTable. 3.4に示す。

Table 3.4: Parameters for numerical simulation with proposed motion-space-based attitude controller around NP singularity.

Euler angle definition	3-1-3
Initial Euler angle	$[0 \ 90 \ 90]^T$ deg
Rotation axis	$[0.57735 \ 0.57735 \ 0.5770]^T$
Rotation angle	400 deg
Simulation time	100 s
Feedback gain	$K_d = \text{diag}(10, 10, 10) \text{ s}^{-1}$
	$K_p = \text{diag}(5, 5, 5) \text{ s}^{-2}$
Estimated inertia matrix	$J = \text{diag}(1200, 2200, 3300) \text{ kg m}^2$

NP特異点非通過のシミュレーションをCase I，NP特異点通過をCase IIとすると，これらをTable. 3.4の条件で区別するため，特異点領域をTable. 3.5のように与えた。また，慣性の推定値に対し，3.7節と同様のモデル誤差を与えた。

シミュレーション結果をFigs. 3.16, 3.17に示す。示された結果はそれぞれ，(a)オイラー角 ϕ ，(b)オイラー角の角速度 $\dot{\phi}$ ，(c)姿勢誤差 e ，(d)角速度誤差 ω^e ，(e)制御入力 τ ，(f)角速度 ω ，(g) A の行列式，そして(h)球面三角形の各

Table 3.5: Definition of singularity region around NP.

Case I	$\varepsilon_N = \left\{ \left \sin \frac{\theta_2}{2} \right \leq 1.0 \times 10^{-4} \right\}$
Case II	$\varepsilon_N = \left\{ \left \sin \frac{\theta_2}{2} \right \leq 2.0 \times 10^{-3} \right\}$

変数である。NP近傍を通過するCase Iの場合、オイラー角の非線形性の影響が大きいにも関わらず、制御トルクに影響していないことが確認された。つまり、3.7節で提案したオイラー角に基づく姿勢制御式の問題点を解消できたといえる。一方、特異点を通過するCase IIの場合は、特異点適合法による動作空間の拘束のため、制御トルクに影響を与えているが、Case IIでは与えた特異点領域は θ_2 の角度にして、約0.46 deg程度とあまりに大きいため、十分見込まれる挙動である。また、3.7節で示したように、オイラー角は物理的な変数でないため、特異点領域は十分に小さくすることができるため、実際に本手法は適用する場合は、特異点による制御トルクへの影響は非常に小さいものと推測できる。

同様のシミュレーションをSP特異点に対しても行った。シミュレーション条件をTable. 3.6に示す。

Table 3.6: Parameters for numerical simulation with proposed motion-space-based attitude controller around SP singularity.

Euler angle definition	3-1-3
Initial Euler angle	$[90 \ 90 \ 0]^T$ deg
Rotation axis	$[0.57735 \ 0.57735 \ -0.5770]^T$
Rotation angle	400 deg
Simulation time	100 s
Feedback gain	$\mathbf{K}_d = \text{diag}(10, 10, 10)$ s ⁻¹
	$\mathbf{K}_p = \text{diag}(5, 5, 5)$ s ⁻²
Estimated inertia matrix	$\bar{\mathbf{J}} = \text{diag}(1200, 2200, 3300)$ kg m ²

SP特異点非通過の条件をCase III、通過をCase IVとして区別すると、それぞれの特異点領域はTable. 3.7に示すとおりである。

シミュレーション結果をFigs. 3.18, 3.19に示す。これにより、NP特異点の場合と同様の性質があることが確認された。ゆえに、本手法による制御は特異点を考慮することができ、オイラー角の挙動によらず、安定した姿勢

Table 3.7: Definition of singularity region around SP.

Case III	$\varepsilon_S = \left\{ \left \cos \frac{\theta_2}{2} \right \leq 1.0 \times 10^{-4} \right\}$
Case IV	$\varepsilon_S = \left\{ \left \cos \frac{\theta_2}{2} \right \leq 2.0 \times 10^{-3} \right\}$

制御が可能である。

3.9 Full attitude maneuver

上記で提案した姿勢制御は制御する前の状態から目標姿勢への姿勢遷移において回転軸を設定し、与えた軸周りの姿勢追従制御(Attitude tracking maneuver)であった。このように三次元空間上の剛体に対してその動作空間を拘束するように与える回転操作のことを Reduced attitude maneuver という。その中でも、これまで示してきた姿勢制御は動作空間を拘束する回転ベクトルを固定した Eigenaxis attitude maneuver に分類される。ところが、ミッションによっては姿勢の運動過程を制御する必要のない場合も存在する。この場合、目標とする姿勢のみを指令値として与え、姿勢を制御する。この操作を Full attitude maneuver と呼ぶ。本節では、前節で提案した制御系を基に Full attitude maneuver への適用について数値シミュレーションを用いて検証し、議論する。

3.9.1 シミュレーションによる検証

Table 3.8: Numerical simulation of full attitude maneuver with proposed motion-space-based controller.

Euler angle definition	3-1-3
Initial attitude	$\boldsymbol{\theta}^{init} = [0 \ 20 \ 90]^T \text{ deg}$
Desired attitude	$\boldsymbol{\theta}^d = [20 \ 20 \ 70]^T \text{ deg}$
Simulation time	100 s
Feedback gain	$\boldsymbol{K}_d = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1) \text{ s}^{-1}$
	$\boldsymbol{K}_p = \text{diag}(1, 1, 1) \text{ s}^{-2}$
Estimated inertia matrix	$\bar{\boldsymbol{J}} = \text{diag}(1200, 2200, 3300) \text{ kg m}^2$

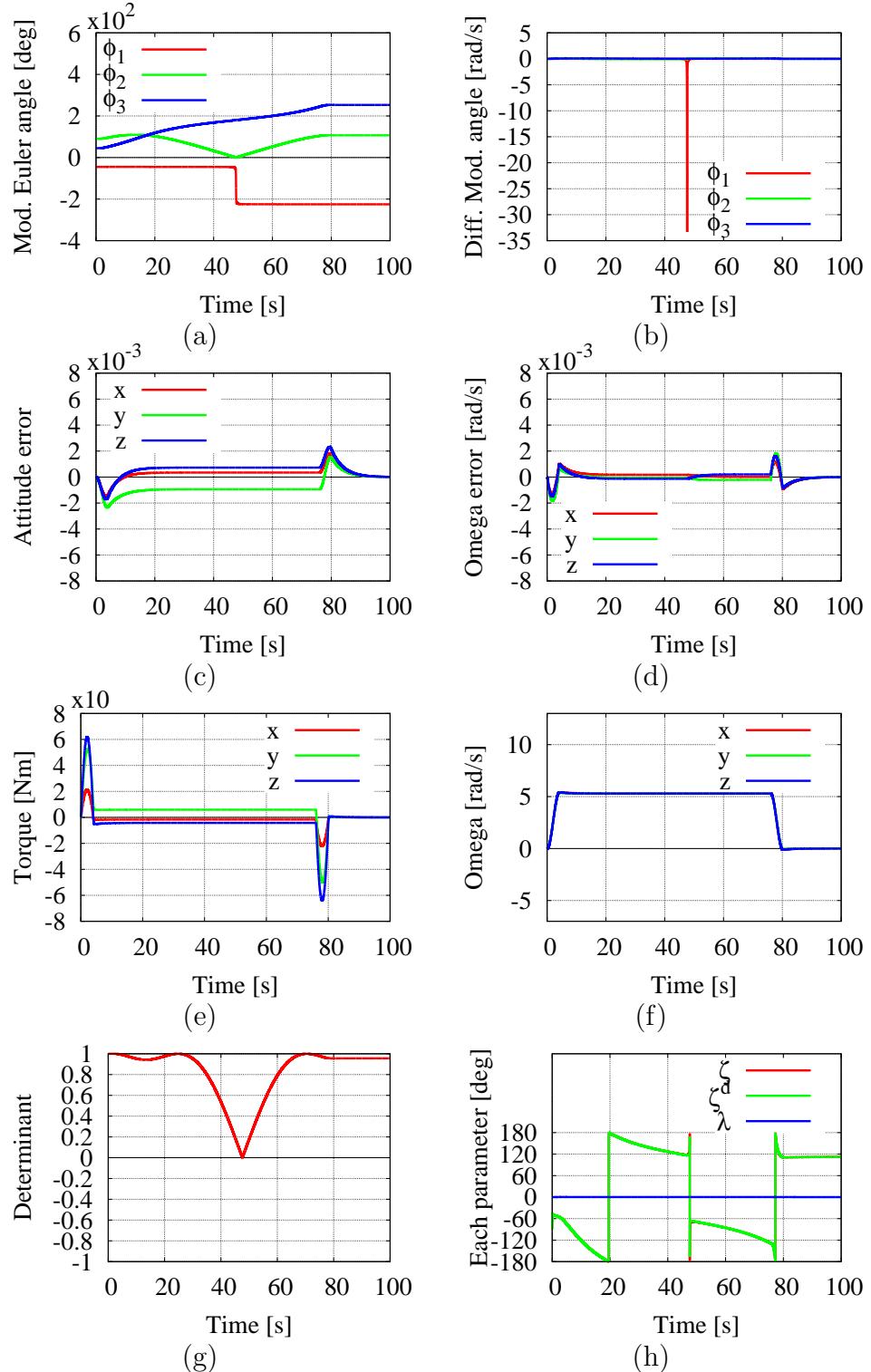


Fig. 3.16: Simulation results with proposed motion-space-based attitude controller around NP under Case I (a) Euler angles, (b) Euler angles rate, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of \mathbf{A} and (h) spherical triangle parameter.

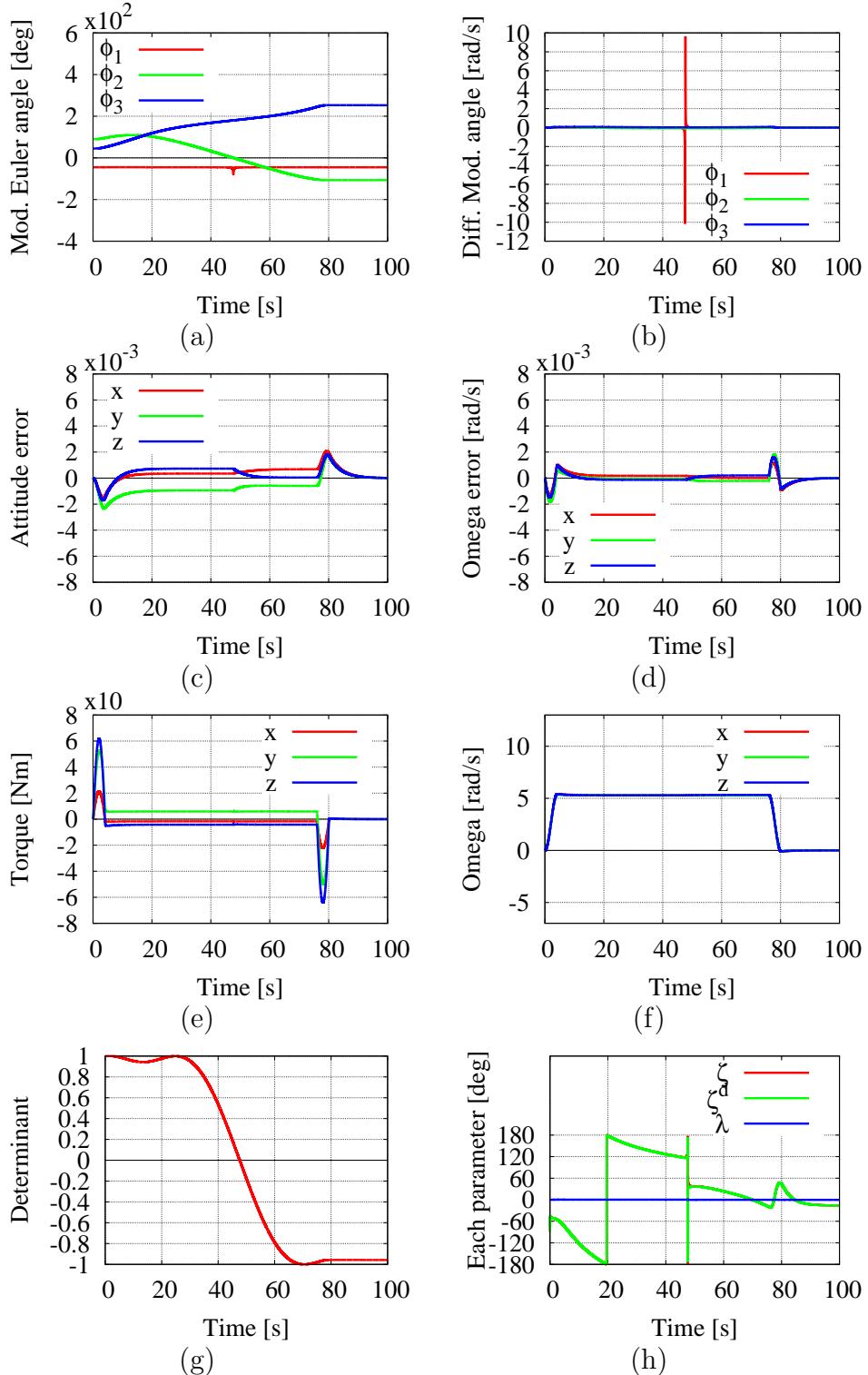


Fig. 3.17: Simulation results with proposed motion-space-based attitude controller around NP under Case II (a) Euler angles, (b) Euler angles rate, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of A and (h) spherical triangle parameter.

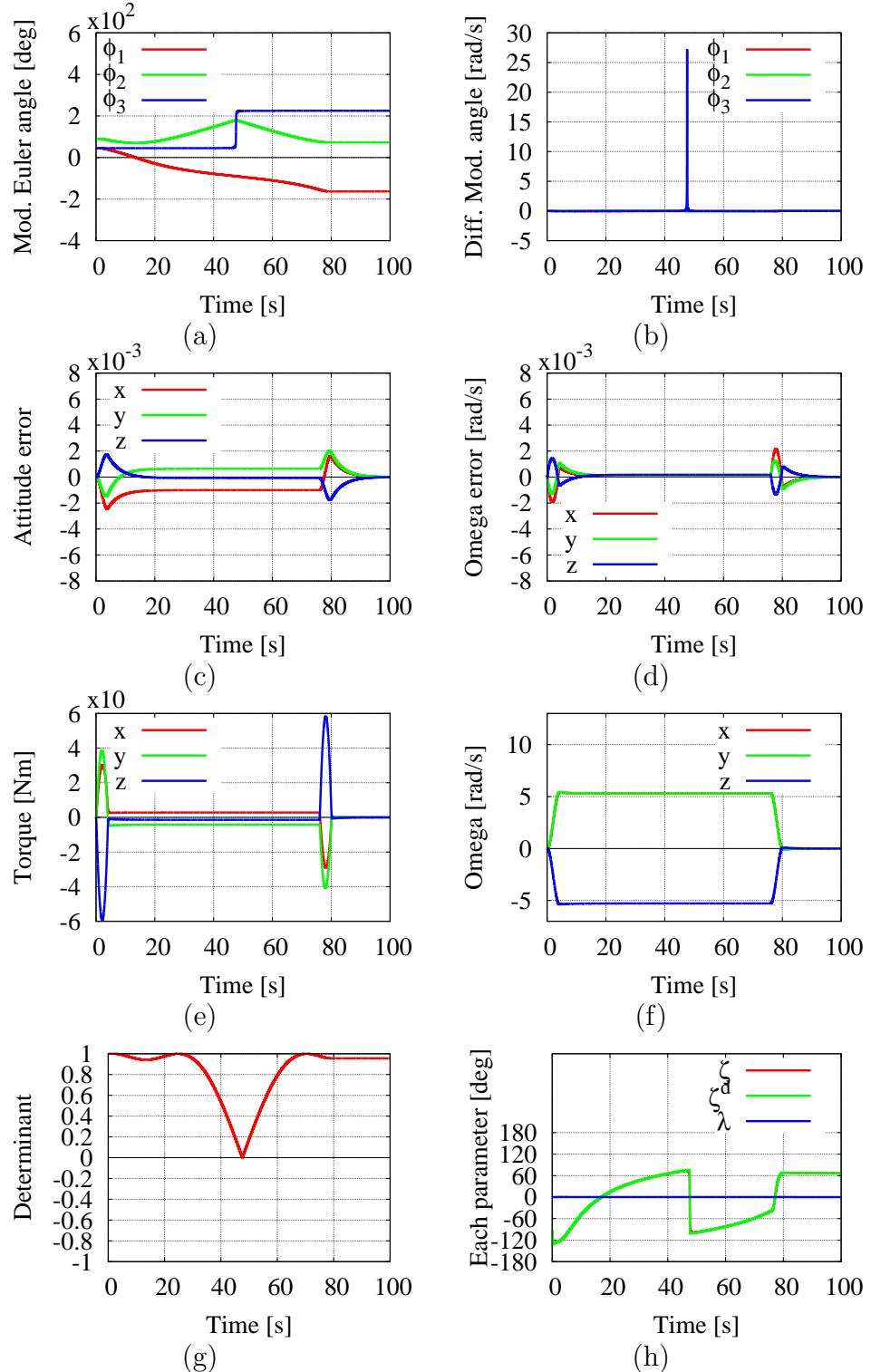


Fig. 3.18: Simulation results with proposed motion-space-based attitude controller around SP under Case III (a) Euler angles, (b) Euler angles rate, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of \mathbf{A} and (h) spherical triangle parameter.

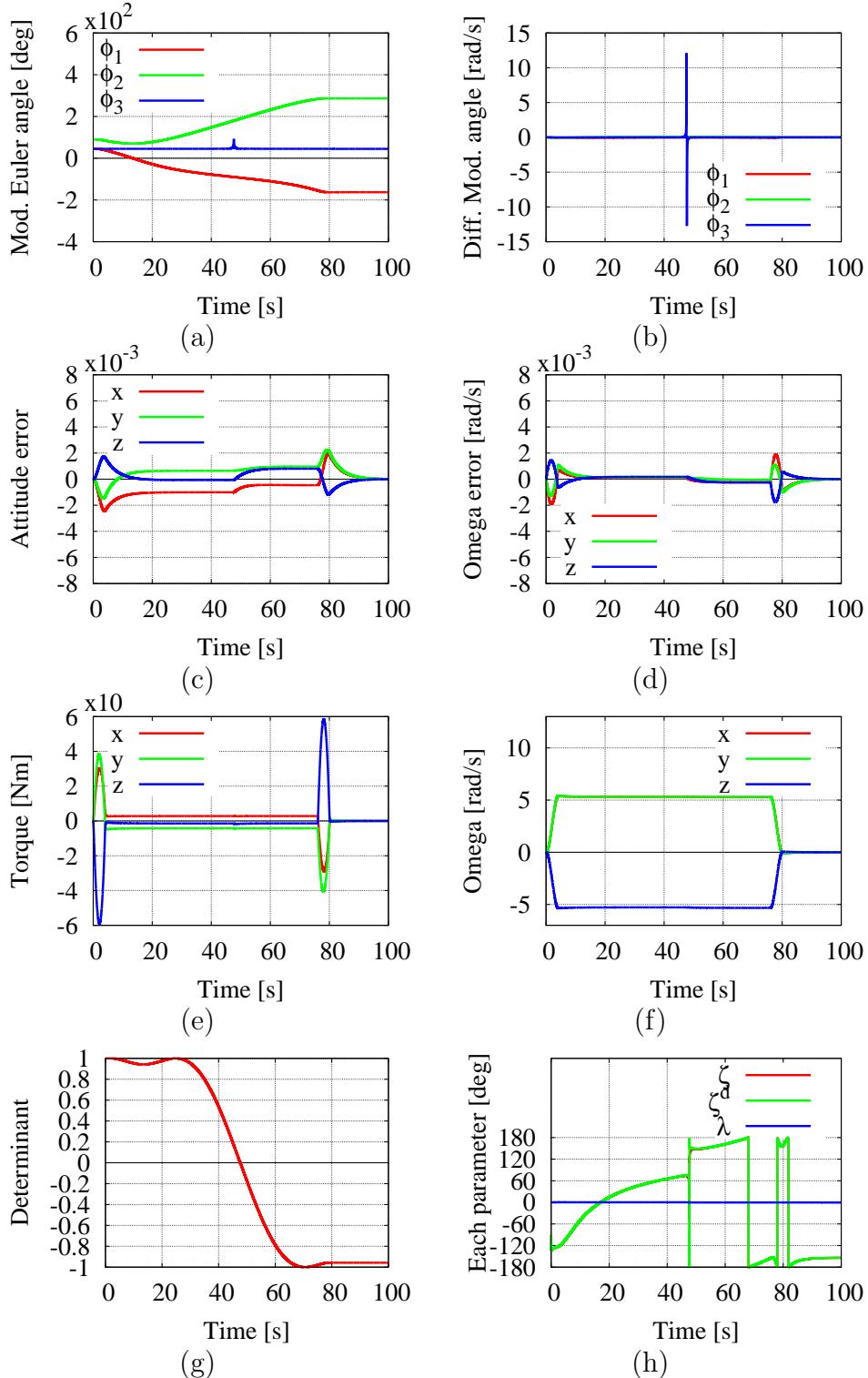


Fig. 3.19: Simulation results with proposed motion-space-based attitude controller around SP under Case IV (a) Euler angles, (b) Euler angles rate, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of A and (h) spherical triangle parameter.

前節で示した姿勢制御系(3.72)および(3.73)について指令値を $\omega^d = 0, \theta^d$ を目標姿勢とすることでFull attitude maneuverを実現する。その有用性の検証のため、Table. 3.8に示す条件で数値シミュレーションを行う。これまでと同様、推定した慣性に対して実際は(3.69)としてジャイロ効果に伴う外乱が存在する条件を与えた。

シミュレーション結果をFig. 3.20に示す。それぞれ(a)はオイラー角、(b)は修正オイラー角、(c)は姿勢誤差、(d)は角速度誤差、(e)は駆動トルク、(f)は剛体の角速度、(g)は変換行列Aの行列式、(h)は実際の運動軌跡を球面上に表したものである。示された結果のオイラー角の挙動および姿勢誤差より、目標姿勢に達し制御できていることが確認できる。

3.9.2 考察

姿勢制御系(3.72)および(3.73)は3.8.2での安定性解析より、目標姿勢で平衡点 R^d となり、 R^d 周りにおいて特異点と特異点領域を除く準大域的な範囲で安定な平衡点であることが示されている。ゆえに、姿勢が特異点以外で表現されるTable. 3.8で与えられた条件では、目標姿勢に対して漸近的に収束する。これらの安定性は、[46]で提案された制御系に対し、不安定平衡点を取り除くことで実現された。ここで、本制御手法が[46]の制御系における不安定平衡点においても制御で可能あることを確認するため、Table. 3.9の条件で数値シミュレーションを行う。目標姿勢以外はTable. 3.8での条件と同じである。

Table 3.9: Numerical simulation of full attitude maneuver that needs to perform 180 deg rotation around specified axis.

Euler angle definition	3-1-3
Initial attitude	$\theta^{init} = [0 \ 20 \ 90]^T \text{ deg}$
Desired attitude	$\theta^d = [20 \ 20 \ -90]^T \text{ deg}$
Simulation time	100 s
Feedback gain	$K_d = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1) \text{ s}^{-1}$ $K_p = \text{diag}(1, 1, 1) \text{ s}^{-2}$
Estimated inertia matrix	$\bar{J} = \text{diag}(1200, 2200, 3300) \text{ kg m}^2$

シミュレーション結果をFig. 3.21に示す。それぞれ(a)はオイラー角、(b)は修正オイラー角、(c)は姿勢誤差、(d)は角速度誤差、(e)は駆動トルク、

(f) は剛体の角速度 , (g) は変換行列 A の行列式 , (h) は球面上の運動軌跡である . これらの結果から , [46] での不安定平衡点であっても姿勢制御できることが確認され , 提案した制御手法の利点が示された .

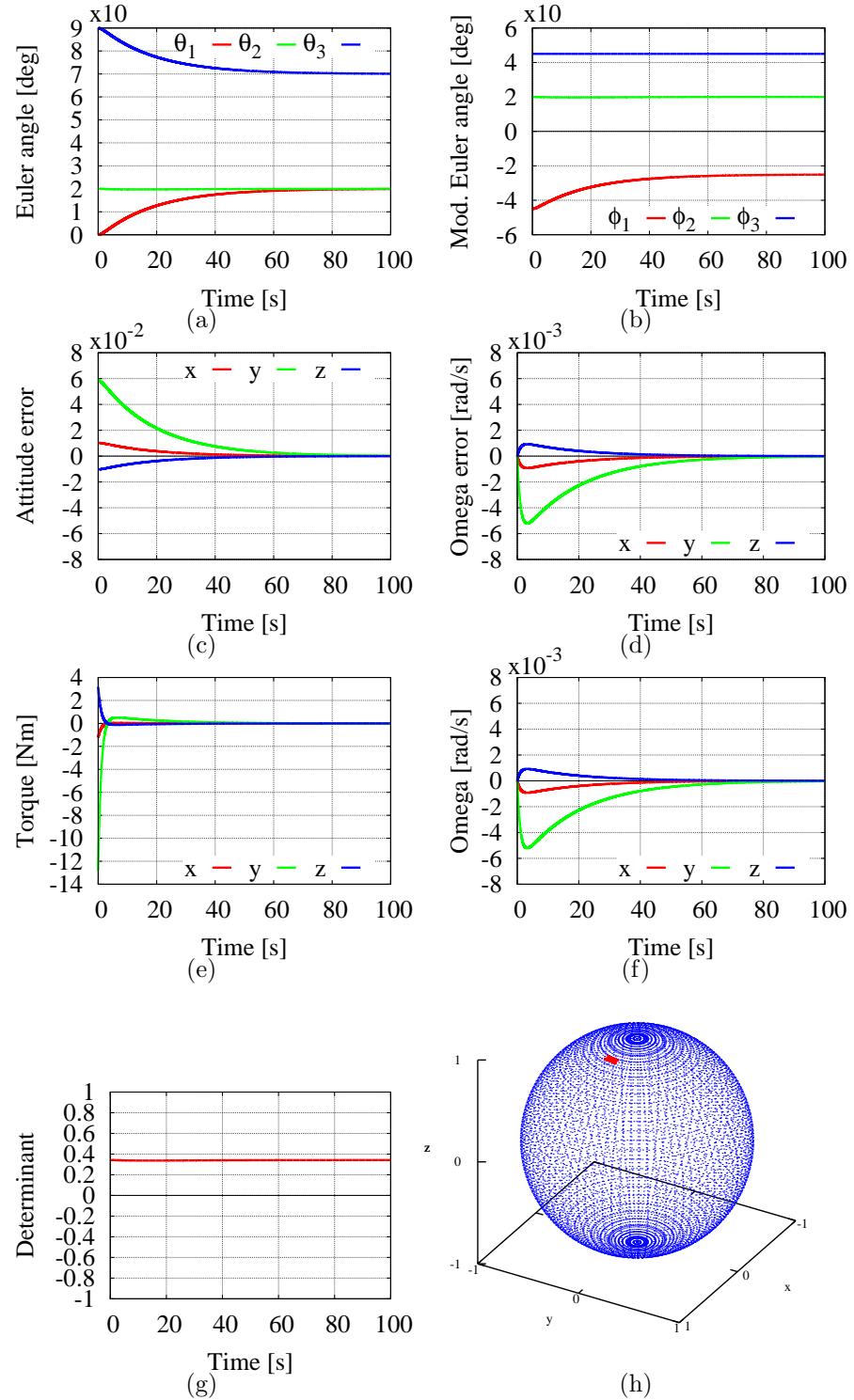


Fig. 3.20: Simulation results of full attitude maneuver with proposed motion-space-based attitude controller (a) Euler angles, (b) modified Euler angles, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of \mathbf{A} and (h) motion trajectory on the spherical plane.

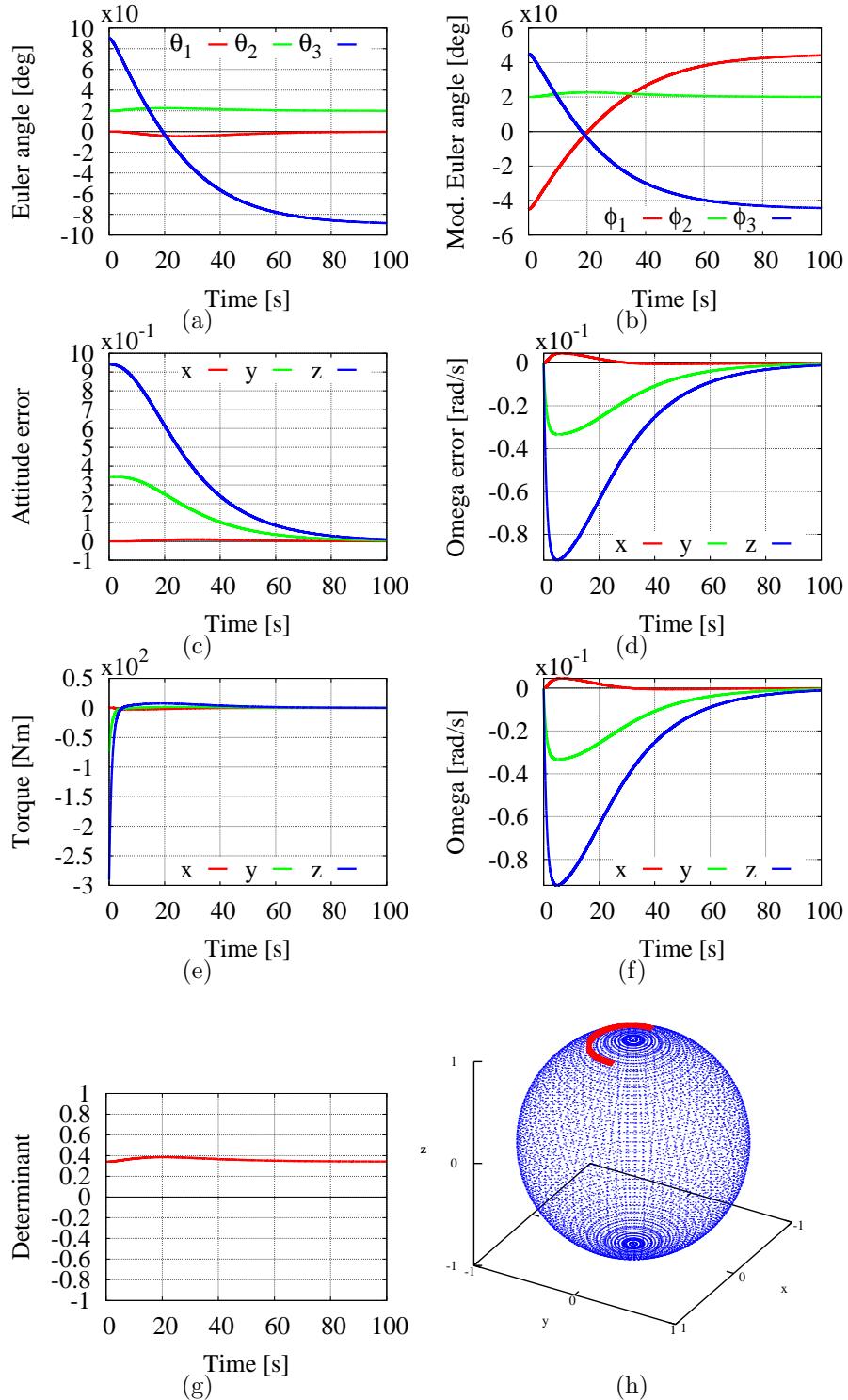


Fig. 3.21: Simulation results of full attitude maneuver that needs to perform 180 deg rotation around specified axis (a) Euler angles, (b) modified Euler angles, (c) attitude error, (d) angular velocity error, (e) control torque, (f) actual angular velocity, (g) determinant of A and (h) motion trajectory on the spherical plane.

第4章 非冗長マニピュレータにおける逆運動学解法の比較解析

4.1 概要

前章では、特異点適合法を用いてオイラー角に内在する特異点問題を考慮し、三次元空間上に定義される剛体の姿勢制御への応用を図った。本章では、非冗長システムの位置に関する逆運動学解法について着目し、NMとその他の手先経路追従手法を比較する。

4.2 経路追従制御

特異点に対して、手先速度を決定する NM の有用性について検証するため、その他の経路追従手法による動作生成と比較する。ここでは、本論文で比較する経路追従制御について示す。

4.2.1 等速軌道追従制御 (CS: constant speed control)

経路追従制御の最も一般的な方法として、等速軌道追従制御 (CS) がある。この制御は決められた先端経路を一定の速度で追従する方法で、(2.3), (2.6) を用いずに一定速度を入力することにより制御できる。また、列拡張ヤコビ行列を用いた制御法を用いても制御することができ、(2.40), (2.41) の b に $1/\det(\mathbf{J})$ 含ませ、 b を $1/\det(\mathbf{J})$ に比例するようにすると q_* が定数となることが分かる。一方 q は $1/\det(\mathbf{J}) \approx 0$ のとき、無限大となり発散する。

4.2.2 Constant arc length control: CAL

NM が拡張関節空間の natural speed に比例するように制御しているのに対し、関節空間の弧長を常に一定になるように制御する手法である。Fig. 2.7

に示した単位時間あたりの C-space の弧長 $\Delta\lambda = \|\dot{q}\|$ を常に一定となるよう制御するには、(2.40) の b に $1/\|n\|$ を含ませる。 b を $1/\|n\|$ に比例させることで、 $\Delta\lambda$ を一定に制御することが可能となる。

4.2.3 Global optimization control: GO

GO は冗長マニピュレータに用いられる制御法で、擬似逆行列では時間ごとの $\|\dot{q}\|$ を最小になる解を得る手法である。この条件から GO を用いた冗長マニピュレータを制御するときの関節角加速度は、以下のように与えられる。

$$\ddot{q} = J^T(JJ^T)^{-1}(\ddot{p} - \dot{J}\dot{q}) \quad (4.1)$$

(4.1) は一般に冗長マニピュレータに用いる式であるが、列拡張ヤコビ行列の場合、仮想リンク先端は動作させないため、(4.1) の $\dot{p} = 0$ となる。結果、関節角加速度は以下のように与えられる。

$$\ddot{\dot{q}} = -\bar{J}^T(\bar{J}\bar{J}^T)^{-1}\dot{\bar{J}}\dot{q} = -\bar{J}^+\dot{\bar{J}}\dot{q} \quad (4.2)$$

(4.1) に目標の経路を追従するよう初期速度を与えることで、経路の追従制御が行える。

4.3 比較シミュレーション

4.3.1 2R平面マニピュレータによる円経路追従制御

まず、動力学シミュレータを用いた 2R 平面マニピュレータによる円経路追従時の NM と他の追従制御との比較を行う。追従方法は前節で述べた、NM, CS, CAL, GO の 4 種類である。Fig. 4.1 に 2R マニピュレータの円経路のモデル図を示す。関節の初期状態で決定される手先位置から半径 r , q_* によって手先円経路はパラメータ化される。

Fig. 4.1 の距離 d が複数の経路に対してシミュレーションによる検証を行った。また、各リンクの長さ $l_1 = 1.0 \text{ m}$, $l_2 = 1.0 \text{ m}$, 重心位置は各リンクの中心とし、重心周りの慣性テンソルは単位行列、各リンクの質量は 1 kg とした。ただし、関節の質量はないものとする。また、半径 $r = 0.4 \text{ m}$, $d = 0.740$, 0.489 , 0.226 m の 3 種類で行い、4s で円経路を 2 周するように与えた。ただし、重力加速度は 0 m/s^2 とする。これらのシミュレーションを実現する初

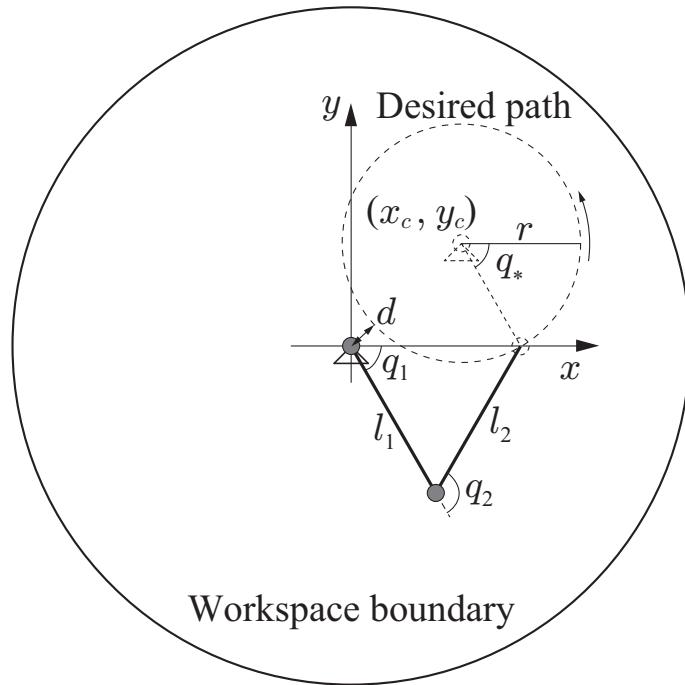


Fig. 4.1: A simple 2R planar limb following circular path. q_* is the path parameter, d is the shortest distance to the folded-arm singular point.

期条件を Table. 4.1 に示す。 b_{init}^o は比較するそれぞれのシミュレーションを実現するための手先初期速度を決定するパラメータで, rad/s m^{-2} の次元を持つ。

それぞれのシミュレーション結果を最大関節速度, 最大関節駆動トルクおよび仕事について Fig. 4.2 にまとめた。また, $d = 0.226 \text{ m}$ 時のそれぞれの結果を Figs. 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 に示す。グラフはそれぞれの制御時の関節角度, 角速度, 角加速度, トルク, 手先の位置, 手先の速度, エネルギ, モーメンタム, 仕事, 単位時間あたりの C-space の弧長, C-space の軌道の曲率, 行列式を示す¹。ただし, NM, CS, CAL 時の行列式は $\det(J)$ を示し, GO では $\det(\bar{J}\bar{J}^T)$ を示す。時刻 $t = t_1, \dots, t_N$ における仕事は関節駆動トルク τ_t から次式で求めた。

$$W = \sum_{t=t_1}^{t_N} \dot{q}_t^T \tau_t \quad (4.3)$$

また, エネルギは重力加速度が 0 m/s^2 であることから運動エネルギーと等価

¹弧長と曲率の求め方については付録 B.4 を参照。

Table 4.1: Initial conditions for the circular path following cases.

d [m]	0.740	0.489	0.226
Initial configuration [deg]	[10, 100]	[10, 125]	[10, 150]
Initial end-effector position [m]	[0.643, 1.11]	[0.278, 0.881]	[0.0451, 0.516]
b_{init}^{CS}	1.28	1.53	2.51
b_{init}^{NM}	1.42	1.68	2.41
b_{init}^{CAL}	0.990	1.34	2.96
b_{init}^{GO}	1.21	1.50	2.67

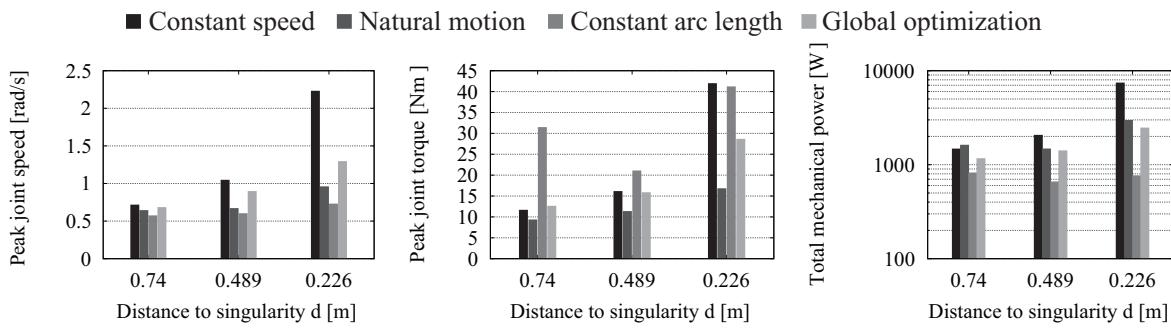


Fig. 4.2: Variation in peak joint speed, peak joint torque and total mechanical power for the circular path following cases.

で、次式によって求められる。

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} \quad (4.4)$$

Fig. 4.2 から最高関節速度は特異点から離れた経路ではすべての制御でほぼ同等なのに対し、特異点が近くなるにつれて全体的に大きくなる傾向が見られ、特にCSにおいては急激に上昇している。また、最高関節トルクも特異点との距離が近づくにつれて増加する傾向で、とくにCSの増加が激しい。一方、NMは一番増加が抑えられることが分かった。仕事についてもすべての制御で特異点に近づくにつれて増加しており、特にCSの増加が激しく、その次にNMが大きい、一方で、CALが最も小さいことがわかる。また、Fig. 4.3 から NM では曲率が高い点や $\det(J)$ が0付近においても、制御が不安定になる点や急激な変化は確認できない。一方で、手先速度は特異点に近づくと減速し、特異点から離れると加速していることが

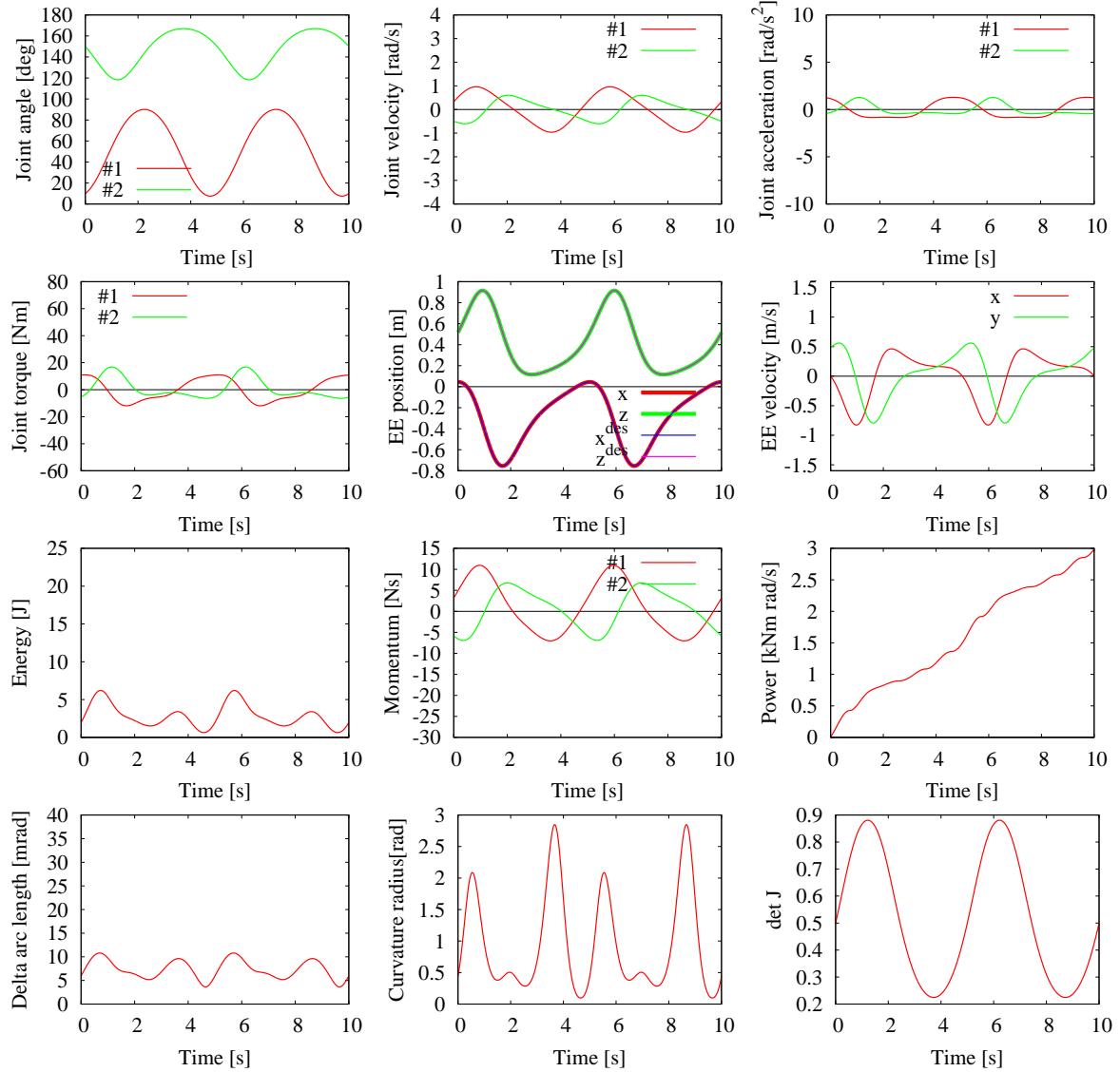


Fig. 4.3: Circular path following with a planar 2R limb under natural motion, the distance to singularity is ($d = 0.226$ m).

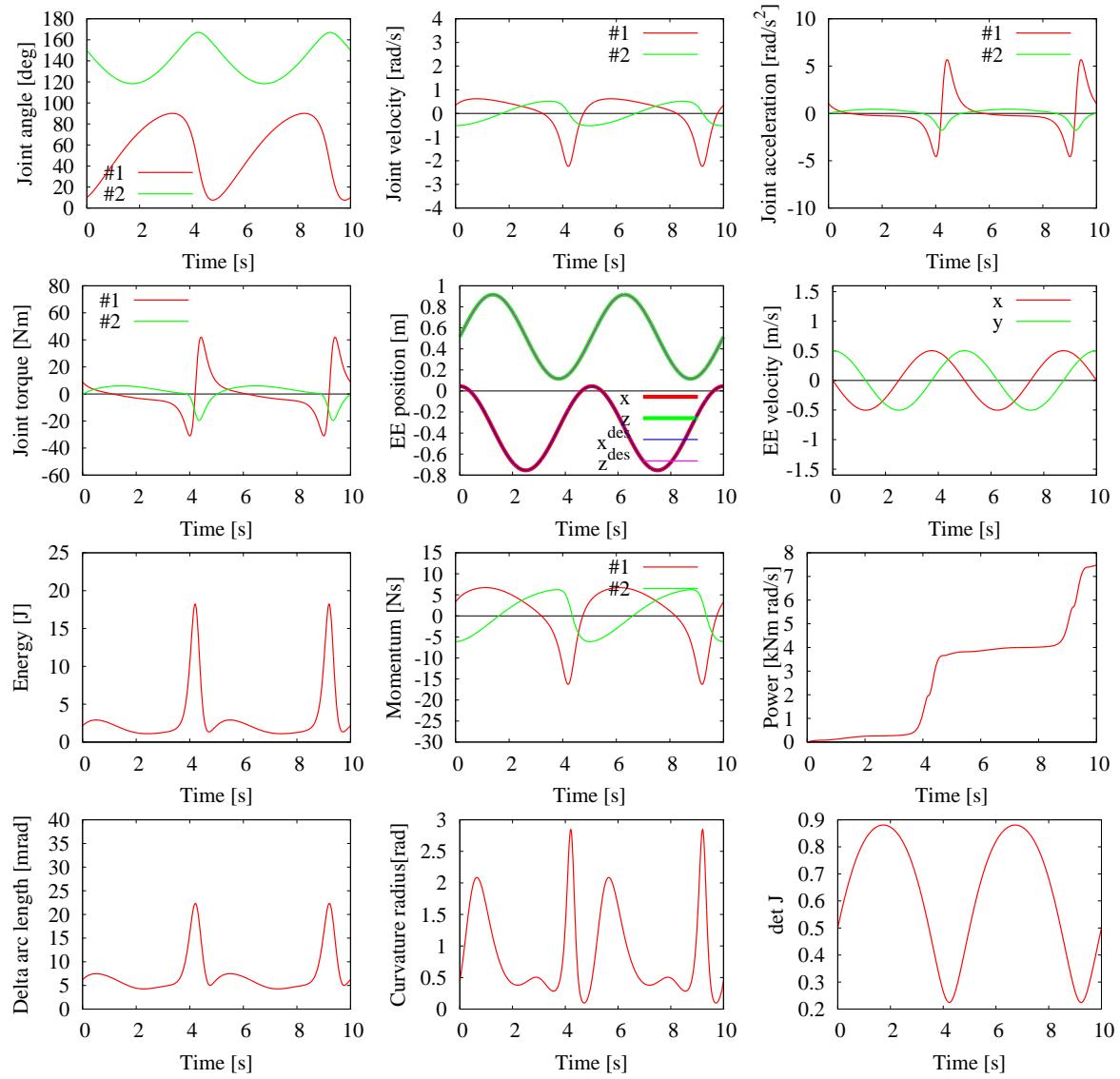


Fig. 4.4: Circular path following with a planar 2R limb under constant speed control, the distance to singularity is ($d = 0.226$ m).

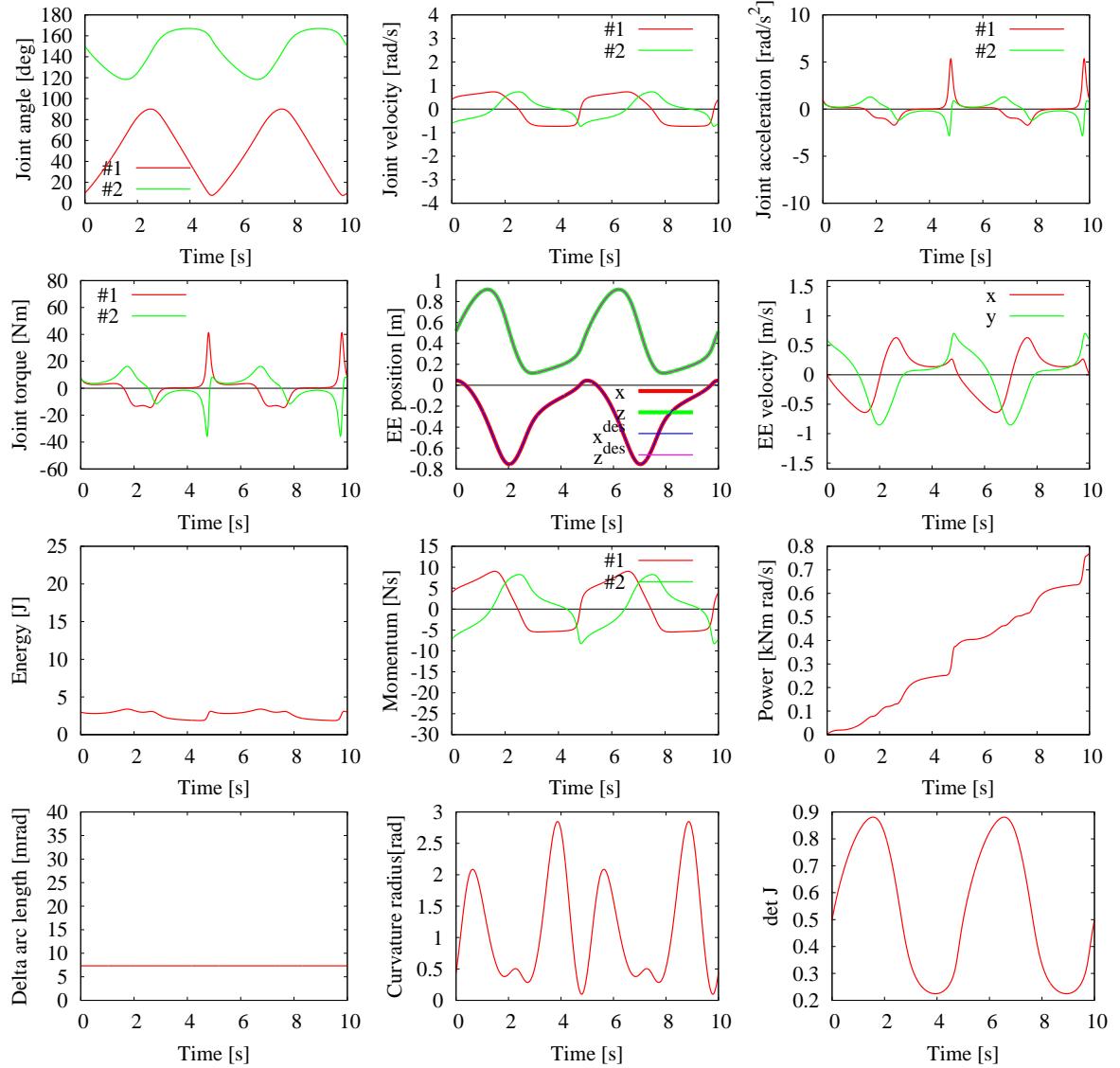


Fig. 4.5: Circular path following with a planar 2R limb under constant arc length control, the distance to singularity is ($d = 0.226$ m).

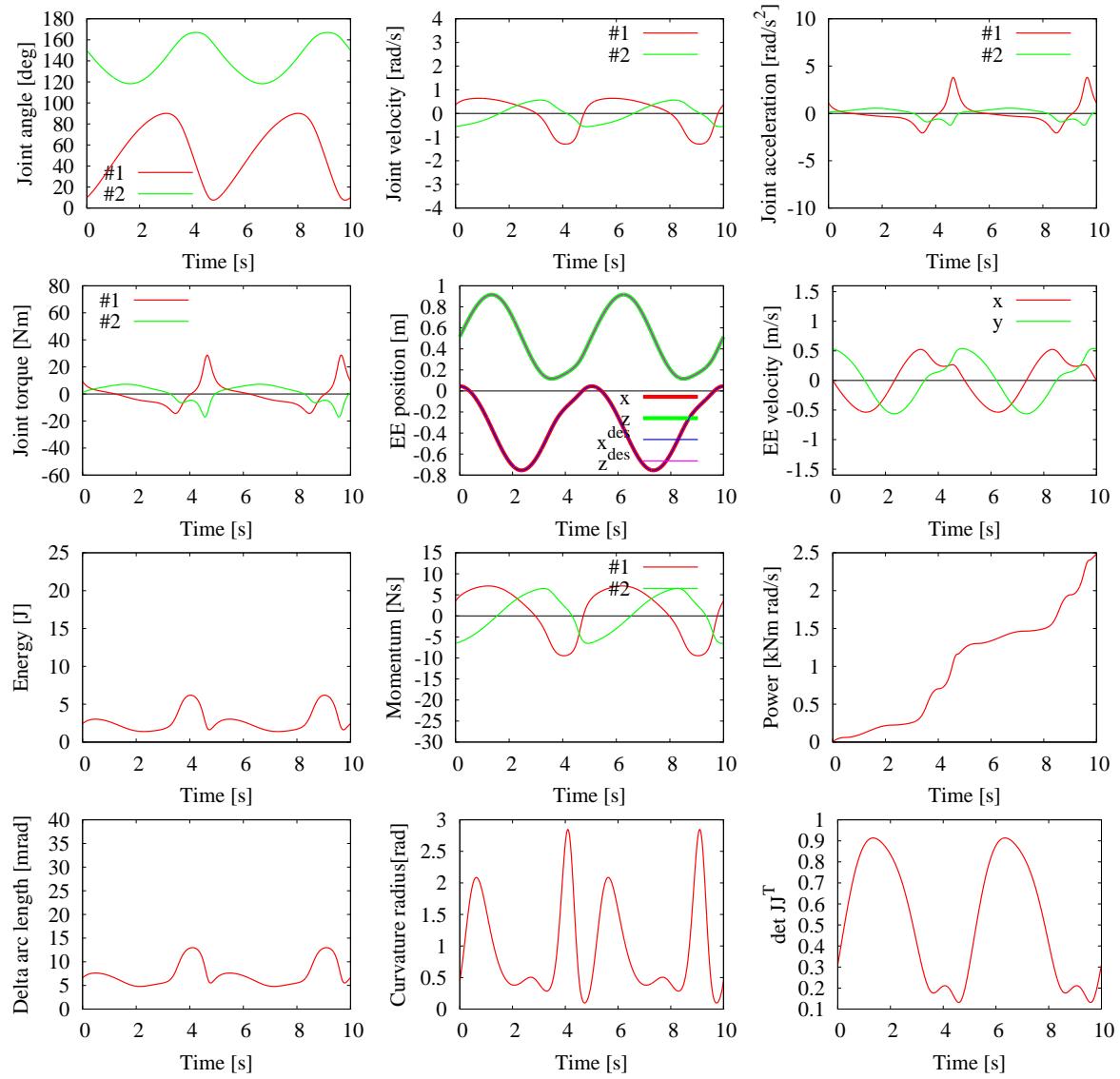


Fig. 4.6: Circular path following with a planar 2R limb under global optimization control, the distance to singularity is ($d = 0.226$ m).

分かる。また、エネルギー、弧長とともに一定ではないことから、NMはエネルギーや弧長を一定にする制御とも異なることは明らかである。Fig. 4.4からCSでは曲率が高い点においても安定した制御が行えているが、 $\det(\mathbf{J})$ が0付近において、関節速度、トルク、エネルギー、弧長に急激な変化が確認できる。一方、Fig. 4.5からCALでは $\det(\mathbf{J})$ が0付近であっても関節の運動は安定しているが、曲率が高い点において先端速度、関節トルク、仕事に大きな変化が確認できる。また、弧長が一定となるように制御できていることも確認できる。Fig. 4.6からGOでは $\det(\bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{J}}^T)$ が0に近づくとき、そして離れるときに関節トルクおよび手先速度に変化が確認できる。これらの変化の大きさはCALより小さいが、CALによる運動と似ている。

4.3.2 3R非冗長マニピュレータによる円経路追従制御

次に、2R平面マニピュレータに見られた経路追従制御それぞれの特性的一般性を検証するため、三つの回転関節で三次元の手先運動を表現する3R非冗長マニピュレータを用いて同様のシミュレーションを行う。Fig. 4.7にマニピュレータのモデルおよび手先経路を示す。それぞれのリンク長さは根元から 0.45 m , 0.5 m , マニピュレータの初期状態は $\mathbf{q}^{init} = [15.0 \ -37.0 \ 80.0]^T \text{ deg}$, x_0-y_0 平面上に定義される円経路の半径を $r = 0.2\text{ m}$ とした。このときの特異

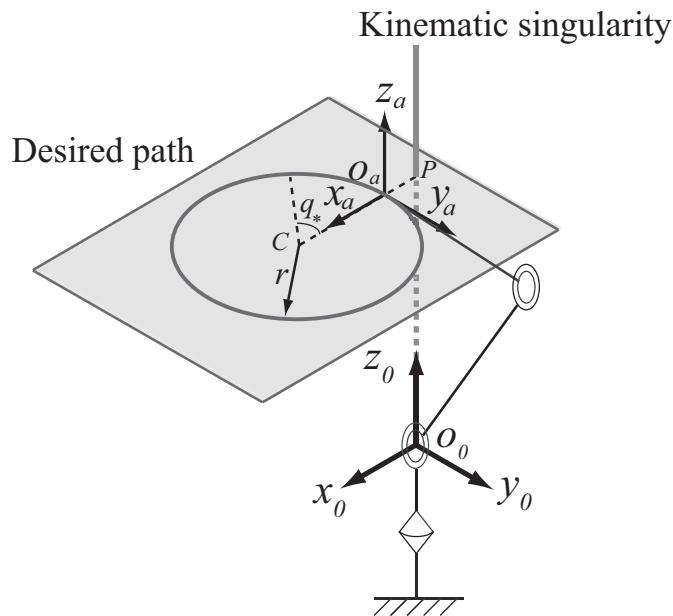


Fig. 4.7: Spatial 3R limb following a circular path.

姿勢の一つは第1関節の回転軸上に手先が定義されるときである。与えた経路ではこの特異姿勢に最も近づくときで 0.07 m である。シミュレーションでは 60 s で円経路を 2 周させるように制御する。

シミュレーション結果を Figs. 4.8, 4.9, 4.10 および 4.11 に示す。グラフはそれぞれの制御時の関節角度、角速度、手先の位置、手先の速度、行列式、駆動トルクを示す。ただし、NM, CS, CAL 時の行列式は $\det J$, GO では $\det(\bar{J}\bar{J}^T)$ を示す。

Fig. 4.8 より、2R マニピュレータと同様に NM では特異点近傍においても制御が不安定になる点や急激な変化は確認できない。また一方で、手先速度は特異点に近づくと減速し、特異点から離れると加速していることが分かる。CS については Fig. 4.9 より、特異点に近づくにつれ関節速度が大きく変化していることが確認できる。また、関節トルクについてもその影響を受けていることがわかる。これらは、2R マニピュレータでも同じような特性が確認された。CAL による結果を表す Fig. 4.10 からは、関節速度、トルクにおいて特異点近傍では安定的な挙動が確認されるが、近傍に近づくときあるいは離れる瞬間に大きな変化が示されている。この特性も 2R マニピュレータで示された結果と類似している。GO のシミュレーション結果 Fig. 4.11 は、CAL の同じように $\det(\bar{J}\bar{J}^T)$ が 0 近傍では、安定的な挙動を示しており、特異点に近づくあるいは遠ざかる瞬間ににおいて大きな変化が確認できる。一方、関節トルクは特異点周りにおいては CAL と同様な挙動が確認できるが、その変化の大きさは CAL より小さい。これらについても 2R マニピュレータによるシミュレーションと同様のことがいえる。

以上より、3R 非冗長マニピュレータによる三次元に拡張した手先経路追従制御は、総じて二次元で確認された特徴が見られた。

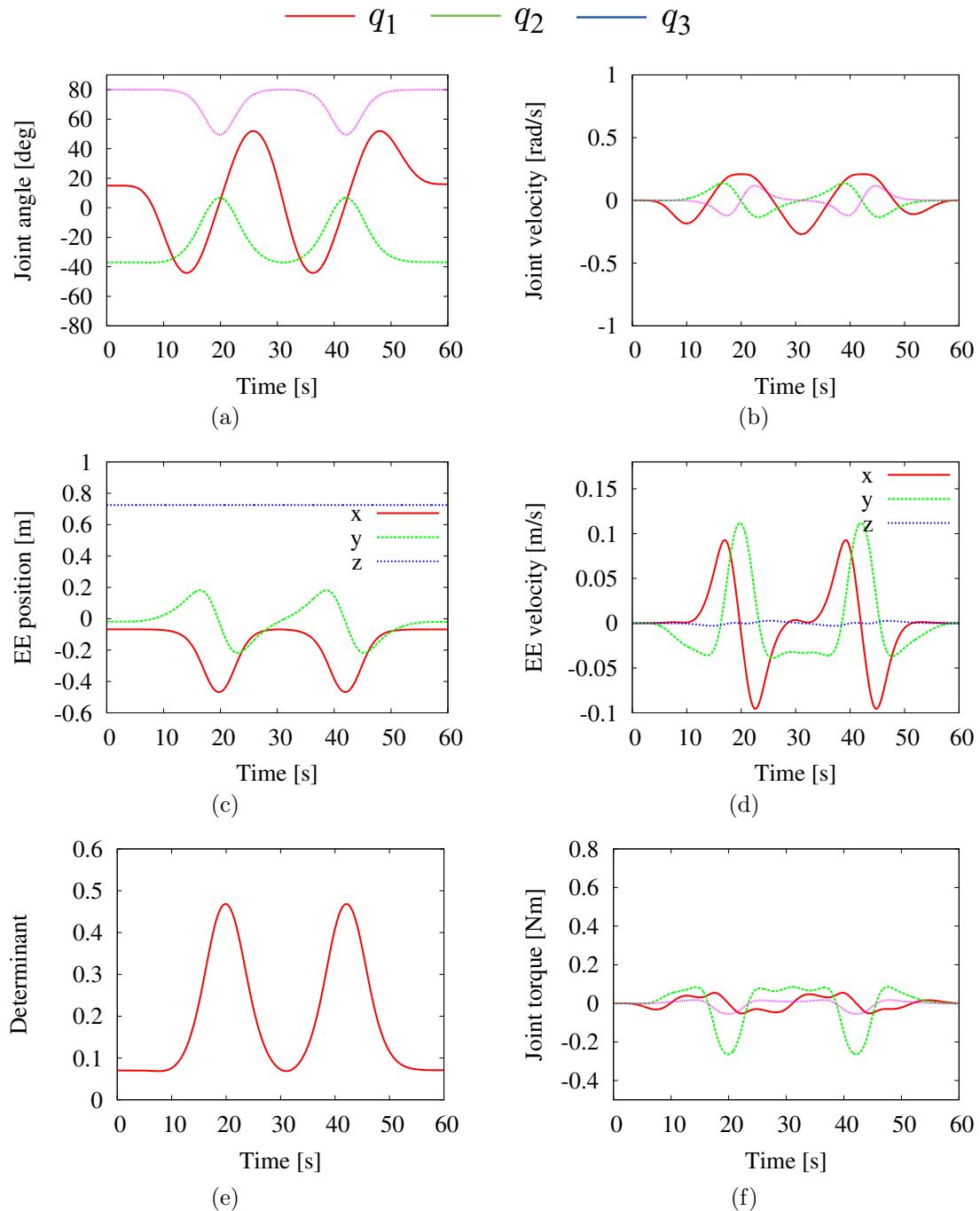


Fig. 4.8: Circular path following with a spatial 3R limb under natural motion.

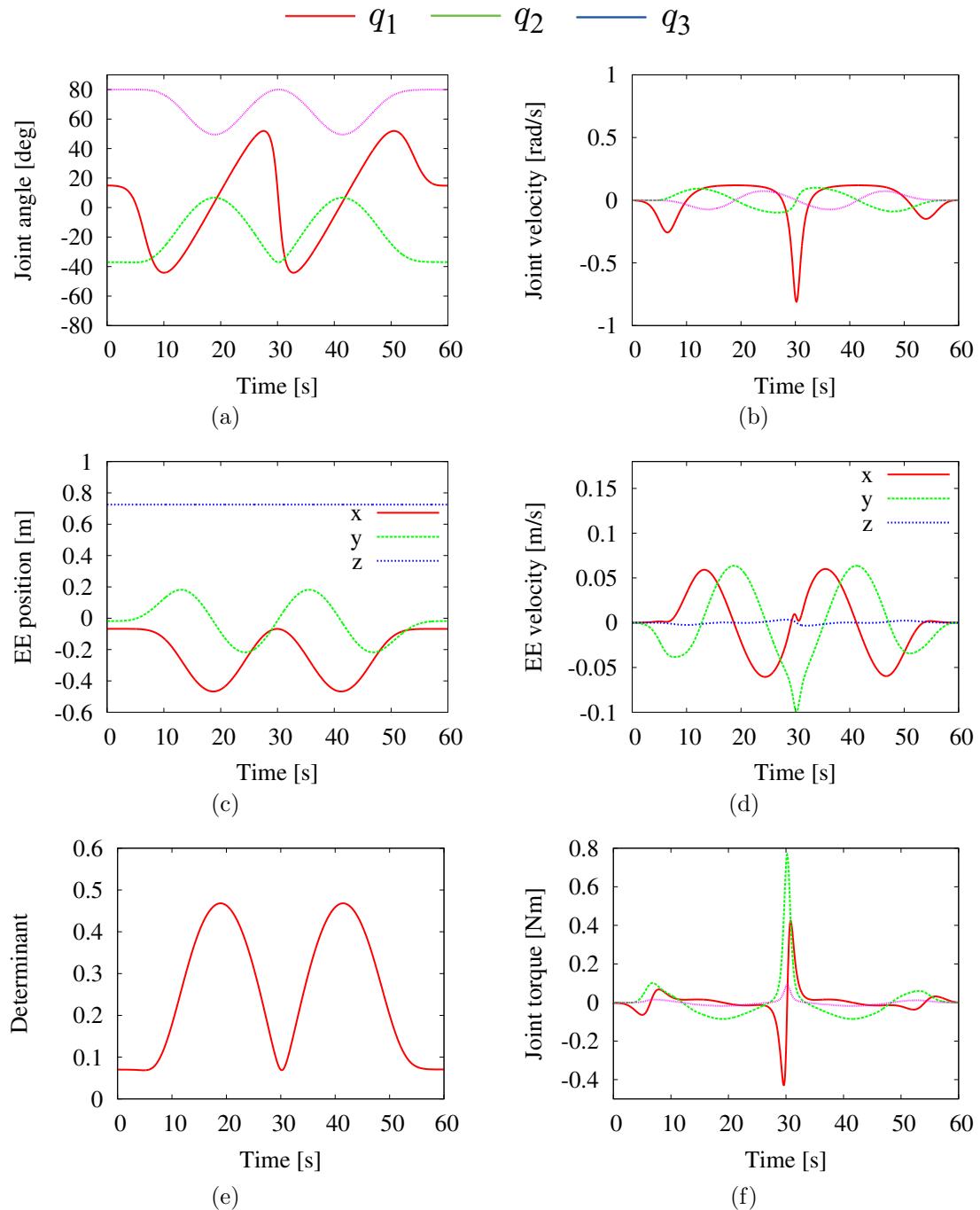


Fig. 4.9: Circular path following with a spatial 3R limb under constant speed control.

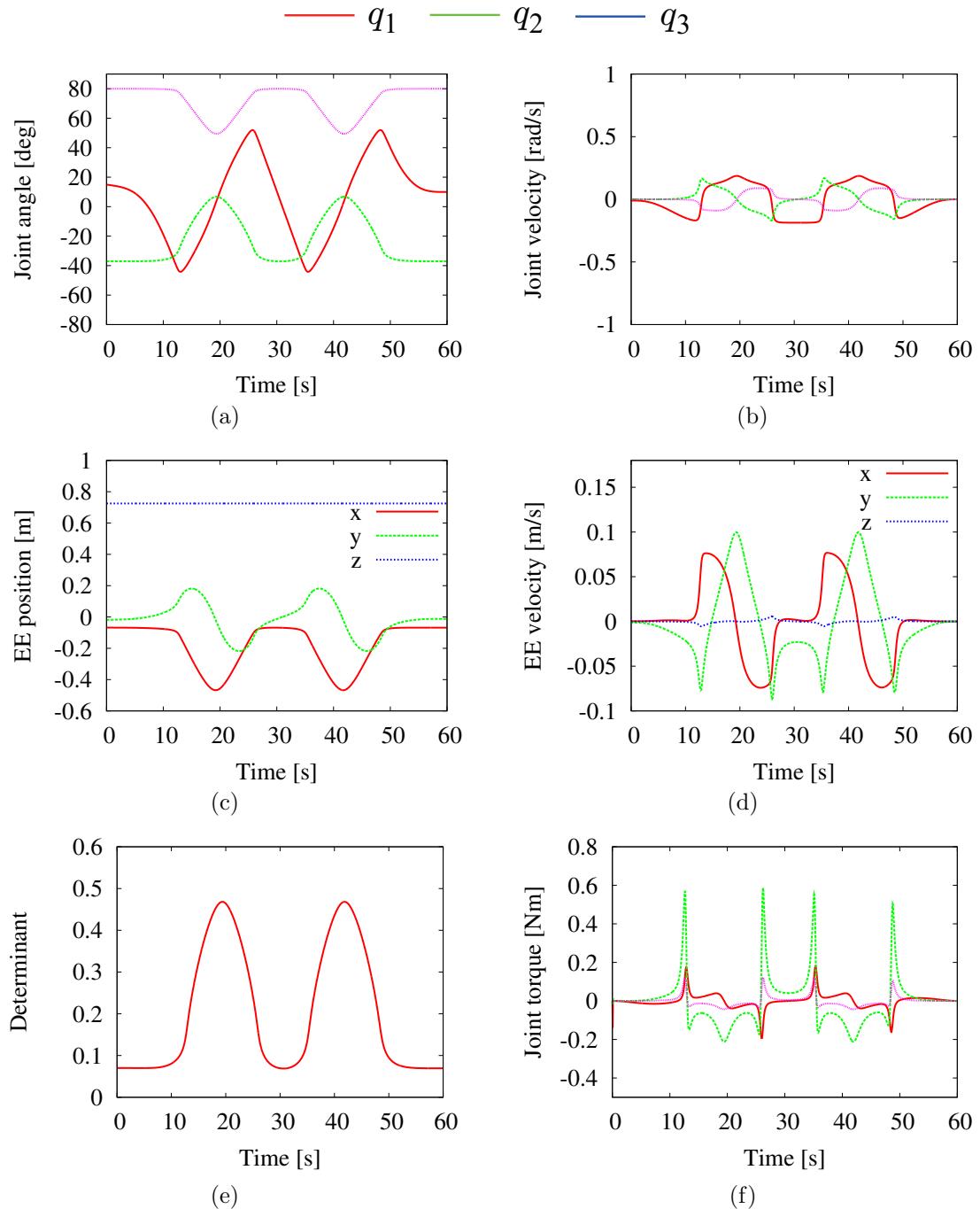


Fig. 4.10: Circular path following with a spatial 3R limb under constant arc length control.

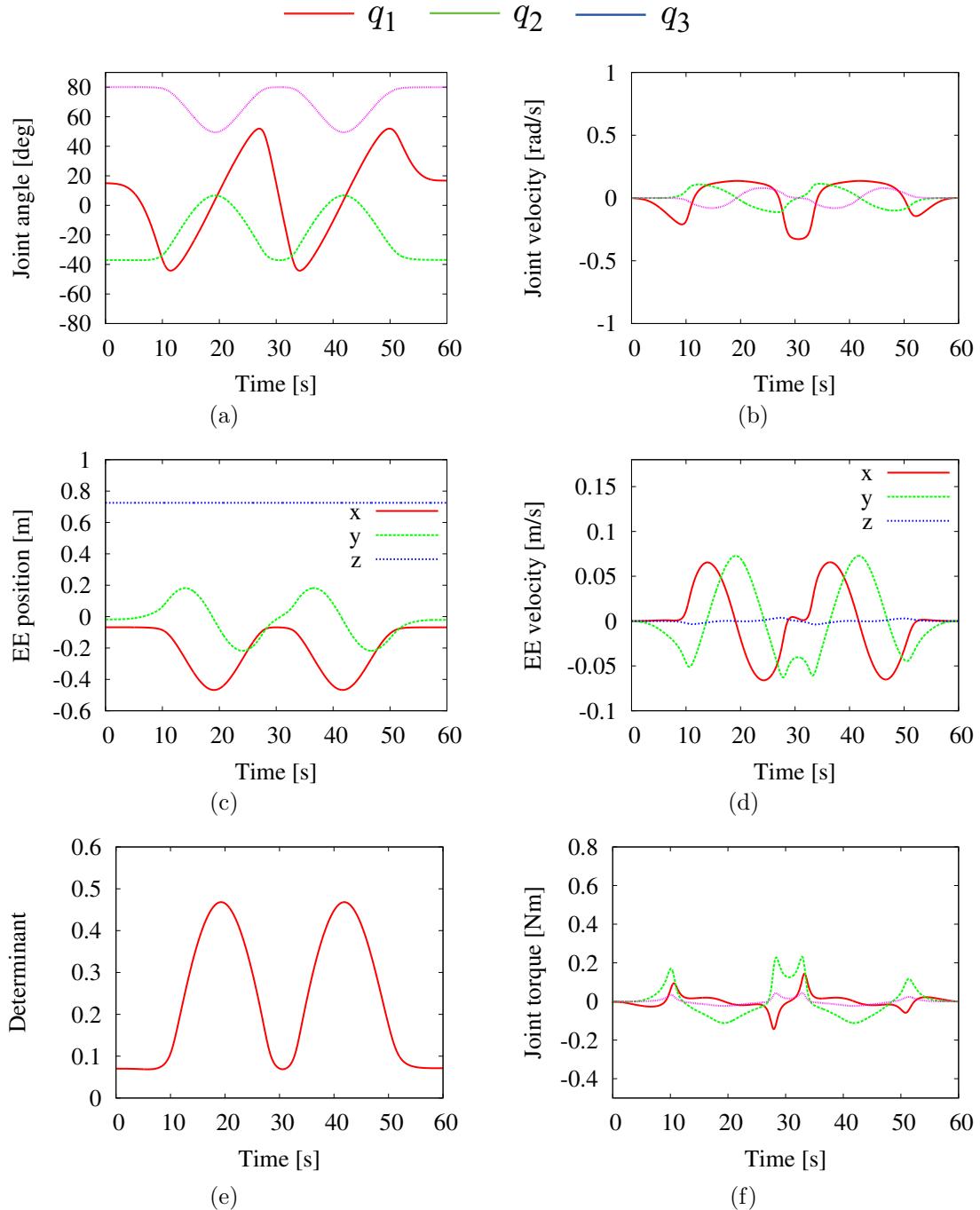


Fig. 4.11: Circular path following with a spatial 3R limb under global optimization control.

4.4 解析

4.4.1 運動学解析

それぞれの手先追従制御を運動学に基づき定式化して比較するため，次の変数を定義する。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \beta \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} \text{adj} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{t}_* \\ \det \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

すると，それぞれの手法はTable. 4.2に示すように表すことができる（ただし，それぞれに対応する関節運動を $\dot{\mathbf{q}}_{nm}$, $\dot{\mathbf{q}}_{cs}$, $\dot{\mathbf{q}}_{cal}$, $\dot{\mathbf{q}}_{go}$ とする。）

Table 4.2: Clarification of respective simple timing generator.

NM	$\dot{\mathbf{q}}_{nm} = b\boldsymbol{\alpha}$
CS	$\dot{\mathbf{q}}_{cs} = b \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\beta}$
CAL	$\dot{\mathbf{q}}_{cal} = b \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\ \boldsymbol{\alpha}\ }$
GO	$\dot{\mathbf{q}}_{go} = b \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{\ \boldsymbol{\alpha}\ ^2 + \beta^2}}$

それぞれの経路追従において係数 b が同値であるとき，次の関係が導ける。

$$\dot{\mathbf{q}}_{cs} = \frac{1}{\beta} \dot{\mathbf{q}}_{nm} \quad (4.6)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{cal} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} \dot{\mathbf{q}}_{nm} \quad (4.7)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{go} = \frac{1}{\sqrt{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \beta^2}} \dot{\mathbf{q}}_{nm} \quad (4.8)$$

したがって，関節速度のユークリッドノルムに対して次の関係を満たす。

$$\|\dot{\mathbf{q}}_{cs}\| \geq \|\dot{\mathbf{q}}_{go}\| \quad (4.9)$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}_{cal}\| \geq \|\dot{\mathbf{q}}_{go}\| \quad (4.10)$$

ここで，シミュレーションで確認されたCALとGOの挙動の類似性について解析する。まず，(4.10)より，CALの方がGOより関節角度が大きくな

りやすい傾向を持つことがいえる。CALに着目すると、Table. 4.2より次の関係が得られる。

$$\|\dot{\mathbf{q}}_{cal}\| = \text{const} \quad (4.11)$$

この関係から、解析力学における最小作用の原理の考え方を適用すると、CALは次の関数を最適化することと等価である。

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (\dot{\mathbf{q}}_{cal}^T \dot{\mathbf{q}}_{cal}) dt \quad (4.12)$$

Table. 4.2より、次の性質を持つ。

$$\|\dot{\mathbf{q}}_{go}\| = \text{const} \quad (4.13)$$

CALと同様にして、一方、GOは適用される擬似逆行列の特性より、次の関数を最適化する。

$$I_* = \int_{t_0}^{t_f} (\dot{\mathbf{q}}_{go}^T \dot{\mathbf{q}}_{go}) dt \quad (4.14)$$

以上より、CALとGOには、最適化する関数が類似しており、その違いは手先の運動変数 q_* が含まれるか否かである。また、次の関係

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \dot{\mathbf{q}}_{go} = \dot{\mathbf{q}}_{cal} \quad (4.15)$$

から、特に特異点近傍において挙動の類似性が見られる。このことは数値シミュレーションにおいても確認された。さらに、CALで最小にする評価関数(4.12)は、冗長マニピュレータにおける擬似逆行列を用いた最適解と等価である。ゆえに、CALは非冗長マニピュレータの最適解を得る動作生成であるといえる。

ここで、Figs. 4.12 に NM, CS, CAL および GO の経路追従制御に対して、非冗長マニピュレータの最適解を与える関節速度の二乗積分値を用いて解析した結果を示す。ただし、条件は前節の 2R マニピュレータによるシミュレーションの d を 0.226 m として与えた場合である。

CAL は $\|\dot{\mathbf{q}}_{cal}\| = \text{const}$ のため、線形的に増加していることが確認できる。ここで、 d を 0.226 m 以外に、0.489, 0.74 m の場合についてもシミュレーションを行い、Fig. 4.13 に手先が動作を終えた後の評価関数 I の値を示す。この結果からも CAL が I を最適化することが確認できる。また、その一方で、NM と CS, GO に関しては特異点との距離によって変化し、大小明確にすることができないが、特異点との距離が近づくにつれ I の値が大きくなる傾向は確認できる。

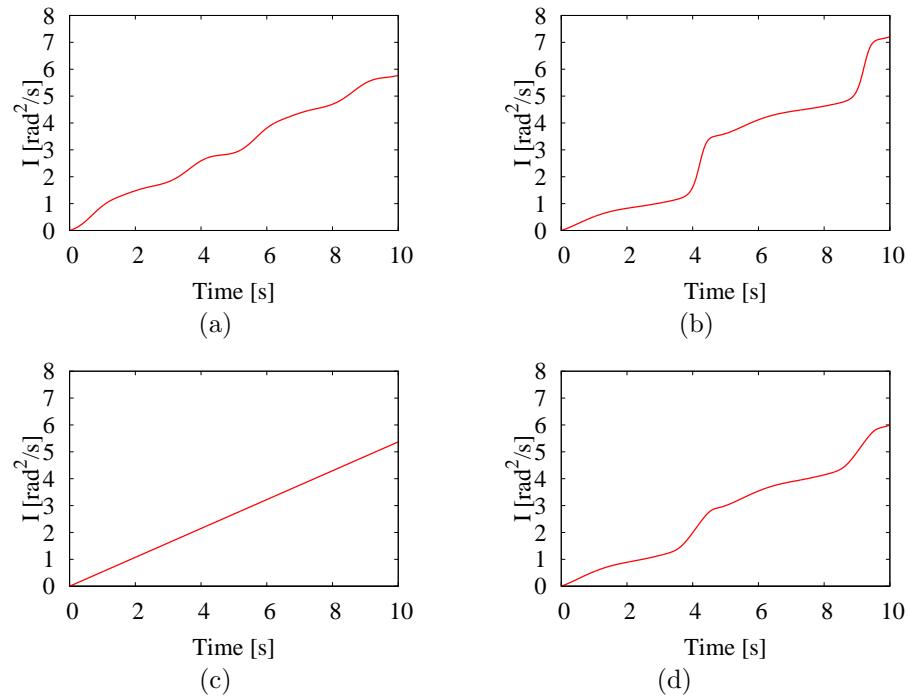


Fig. 4.12: Performance index moving along circular path $d = 0.226$: (a) NM, (b) CS, (c) CAL and (d) GO.

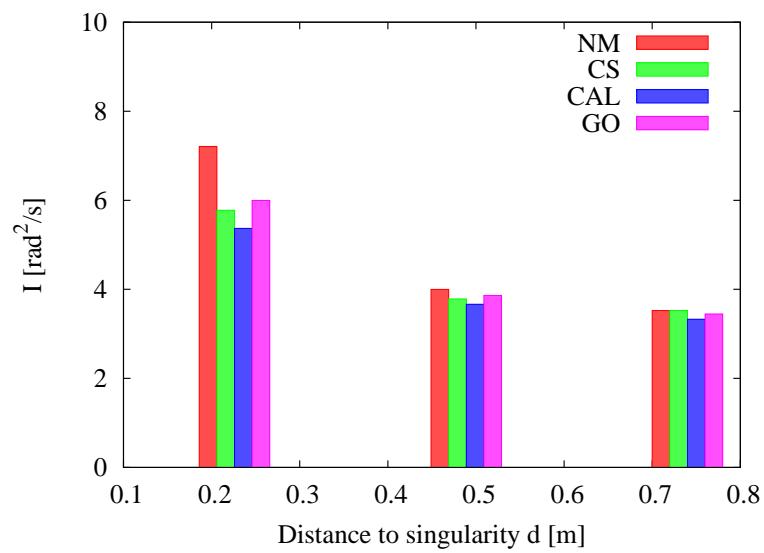


Fig. 4.13: Summation of performance index for respective simulation: $d = 0.226$, $d = 0.489$ and $d = 0.74$.

4.4.2 動力学解析

マニピュレータの運動方程式は一般的に以下のように表される。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.16)$$

式中 $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は慣性行列, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ はコリオリ遠心力行列, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ は重力項, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ は関節トルクである。また, (2.40) から, 関節角加速度は,

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{b}_o \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) + b_o \dot{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.17)$$

$$= \dot{b}_o \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) + b_o^2 \frac{\partial \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (4.18)$$

と示すことができる。Table. 4.2 より, 各手先経路追従制御をそれぞれ b_o で表すと次式となる。

$$b_{nm} = b \quad (4.19)$$

$$b_{cs} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} b \quad (4.20)$$

$$b_{cal} = \frac{1}{\|\text{adj} \mathbf{J} \mathbf{t}_*\|} b \quad (4.21)$$

$$b_{go} = \frac{\text{adj}(\bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{J}}^T)}{\det(\bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{J}}^T)} b \quad (4.22)$$

(4.16) に (4.18), (2.40) を代入すると以下のように表すことができる。

$$\left(\dot{b}_o \mathbf{M}(\mathbf{q}) + b_o \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}) \equiv b_o \mathbf{M}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

NM 時では b を定数として扱うため $\dot{b} = 0$ となるため, (4.23) を以下のように書き換えることができる。

$$b_o \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.24)$$

このように NM は幾何学の制御であるが動力学に影響を与え, より簡単に運動方程式を得ることができる。

前節の数値シミュレーションでは, CAL における最大関節トルクと特異点距離 d の関係は非線形で, 評価が不明瞭であった (Fig. 4.2)。ここでは,

前節の2Rマニピュレータと同じモデルを用いて特異点距離 d を0.05 mから0.1 m刻みに、1.15 mまで計12回のシミュレーションを行った、その際の手先の円軌道半径 $r = 0.4$ mとした。

それぞれの条件における各関節の最大値、およびそのときの手先位置をFig. 4.14とFig. 4.15に示す。これにより、CALは最大関節トルクは特異点から離れる瞬間に発生していることが確認できる。また、CALでは特異点からの距離が遠いほど大きなトルクを必要としないことがわかる。本シミュレーションの場合、内部特異点と飽和特異点からの距離が確保されている $d = 0.45$ mの場合は、最大関節トルクの大きさが最も小さいことがわかる。

4.4.3 まとめ

非冗長マニピュレータの手先経路追従制御に関して、比較したそれぞれの手法の違いを明確にするための解析を行った。運動学に基づいて解析では、CALは非冗長マニピュレータの関節運動を速度の次元で最適化するものと結論づけた。さらに、その性質をGOと並べて示した。動力学に基づく解析では、CALが各関節速度との関係のみを拘束するため、特異点から離れる瞬間に、最適化による関節トルクが大きくなることを示した。ゆえに、CALは運動学のみで議論する場合は、十分有用な手法であるといえるが、動力学を考慮する際には、特異点の影響を反映させることのできるNMの方が優れている。

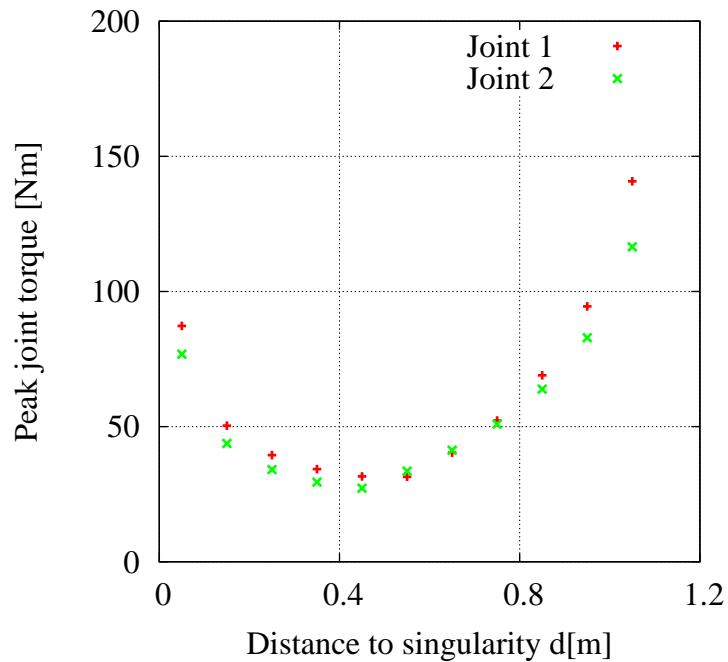


Fig. 4.14: Each peak joint torque with CAL .

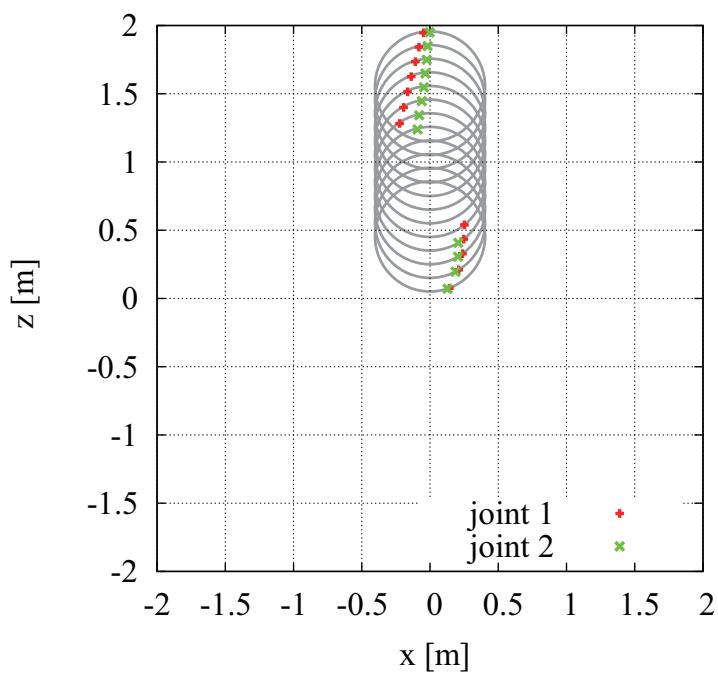


Fig. 4.15: End-effector position when peak joint torque arises.

第5章 分解特異点適合法による逆運動学解法

5.1 概要

前章では、いくつかの手先経路追従制御について特異点近傍を追従させ、それぞれの手法による特異点の影響を考察した。本節以降はマニピュレータが特異姿勢となる場合を考慮した逆運動学解法について議論する。

5.2 分解特異点適合法

平面2RマニピュレータをFig. 5.1に示すような幾何学的なパラメータで表す。示された各パラメータはそれぞれ次の関係を満たす。

$$q_2 = \alpha + \beta \quad (5.1)$$

$$\alpha = \operatorname{sgn}(\sin q_2) \cos^{-1} \left(\frac{l_1 + l_2 \cos q_2}{r_s} \right) \quad (5.2)$$

$$\beta = \operatorname{sgn}(\sin q_2) \cos^{-1} \left(\frac{l_1 \cos q_2 + l_2}{r_s} \right) \quad (5.3)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{l_2 \cos \beta}{r_s} \dot{q}_2 \quad (5.4)$$

$$\dot{\beta} = \frac{l_1 \cos \alpha}{r_s} \dot{q}_2 \quad (5.5)$$

ここで、ヤコビ行列によって結ばれる運動学上の関係を次式のように変換する。

$$\dot{\mathbf{p}}' = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x & p'_y \end{bmatrix}^T \quad (5.8)$$

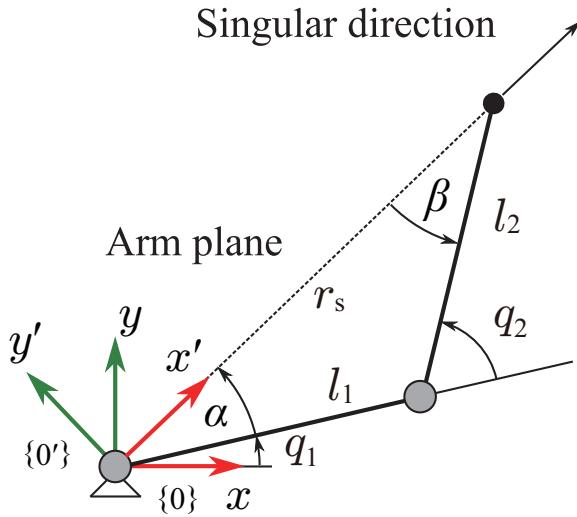


Fig. 5.1: Reference frame is transformed to identify the x -axis with singular direction.

Fig. 5.1 に示すように、上記の変換によって特異方向は変換された座標系 $\{0'\}$ の x 軸 $e_{x'}$ で定義される。これにより、特異方向 $e_{x'}$ と非特異方向 $e_{y'}$ の手先運動を別々に表すことができる。関節速度解は修正ヤコビ行列 $J^{mod} = R^T J$ の逆変換によって次式で得られる。

$$\dot{q} = J^{mod^{-1}} \dot{p}' \quad (5.9)$$

$$= \frac{1}{l_1 l_2 \sin q_2} \begin{bmatrix} l_2 \cos \beta \\ -r_s \end{bmatrix} \dot{p}'_x + \frac{1}{r_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{p}'_y \quad (5.10)$$

$l_1 \neq l_2$ の場合、常に $r_s \neq 0$ を満たし、非特異方向への手先運動は全ての姿勢において表現可能である。つまり、特異方向に特異点適合法を適用することで、作業空間内に指令された手先方向に応じた関節速度解を安定して得ることができる。一方、 $l_1 = l_2 (= l)$ は $\cos(q_2/2) = 0$ で $r_s = 0$ となり、 $e_{y'}$ が特異方向となる特殊な場合である。この場合、幾何学的関係 $\beta = q_2/2$ および $r_s = 2l \cos(q_2/2)$ を用いて $e_{x'}$ 方向の関節速度 $\dot{q}_{x'}$ を

$$\dot{q}_{x'} = \frac{1}{2l \sin(q_2/2)} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \dot{p}'_x \quad (5.11)$$

として表すことができる。すなわち、 $r_s = 0$ の特異点に対して $e_{x'}$ は非特異方向である。したがって、 $l_1 = l_2$ では $e_{x'}, e_{y'}$ がそれぞれ作業空間の外部、内部境界に対して別々に定義される特異方向である。

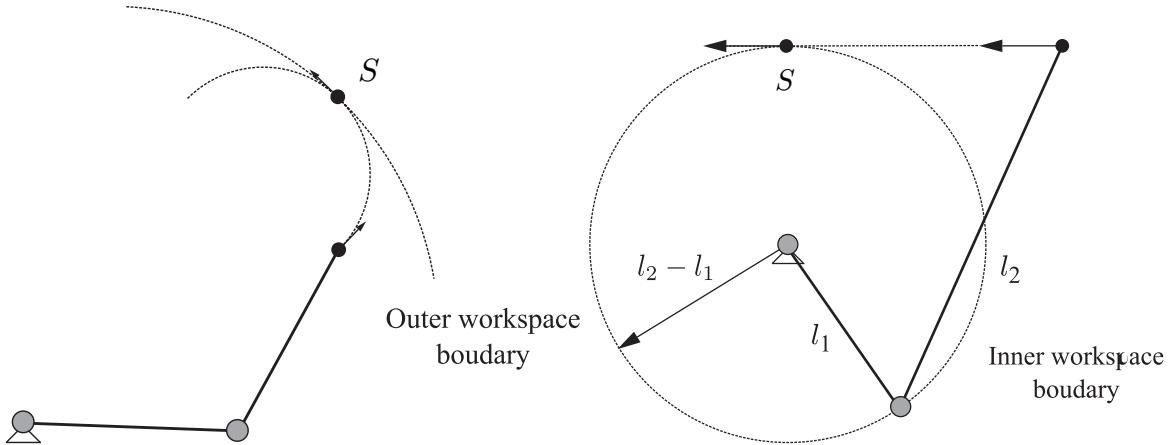


Fig. 5.2: Stationary point singularity: (a) outer workspace boundary and (b) inner workspace boundary.

以上で示したように，手先の運動方向を分解して別々に特異点適合法を適用する操作を分解特異点適合法と定義し，本論文で提案する．

5.3 定常特異点

2.5節で示したように，非冗長マニピュレータにおける特異点適合法は特異点との距離に応じて，手先速度の大きさを拘束することで，特異点においても安定的に関節速度を得ることができる手法である．一方で，この手法の欠点として定常特異点問題が挙げられる．定常特異点は，次式を満たす関係によって定義される．

$$\text{adj} \mathbf{J} \mathbf{t}_* = 0 \quad (5.12)$$

これは特異点上での特異方向に対して，手先運動の方向が直交することを意味する．定常特異点となるマニピュレータの状態を Fig. 5.2 に示す．(a) は 2R マニピュレータとその手先目標経路が与えられた図を示しており，手先が外部境界（点 s ）に達すると特異姿勢となる．このとき，手先の運動方向は外部境界に沿って与えられ，手先を動かすことは物理的には可能であるが，特異点適合法では (5.12) より，関節速度ベクトルの大きさが 0 となるため，手先運動が停止する．一方，(b) は 2R マニピュレータとその手先目標経路が内部のワークスペース境界に接するように与えられた図を示しており，(a) と同様に，点 s において物理的には可能な動きにも関わらず運動が停止する．このように，定常特異点はマニピュレータの状態と手先

運動方向によって生じる問題で、特異姿勢において手先運動が非特異方向にのみ指令される場合に表れる。

5.4 分解特異点適合法による定常特異点問題対策

本節で示したように、分解特異点適合法は手先の運動方向を分解することで特異姿勢においても非特異方向の運動による関節変位を得ることができる。つまり、手先指令の与え方によっては定常特異点問題の対策が可能である。ここでは、5.2節で示した基準座標系 $\{0'\}$ に基づく、手先指令 $\dot{\mathbf{p}}'$ の与え方について議論する。

5.4.1 円経路の定常特異点対策

まず、円経路の手先運動を表す幾何学パラメータをFig. 5.3に示す。図より、円経路は仮想マニピュレータによって与えられ、半径 r 、回転角 γ でパラメータ化される。また、リンクの長さについては

$$l_1 + l_2 = a + r \quad (5.13)$$

を満たす。このとき、手先の運動方向ベクトル $\dot{\mathbf{p}}'$ は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \dot{p}'_x \\ \dot{p}'_y \end{bmatrix} = \|\dot{\mathbf{p}}'\| \begin{bmatrix} \sin \beta_t \\ \cos \beta_t \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

さらに、

$$r_s \sin \beta_t = a \sin \gamma \quad (5.15)$$

より、特異方向の速度の大きさ \dot{p}'_x は、

$$\dot{p}'_x = \frac{a}{r_s} \sin \gamma \quad (5.16)$$

となる。つまり、 $\sin(\gamma/2) = 0$ のとき定常特異点となる。

二つのマニピュレータにおいて r_s が等しいことから、三平方の定理より、次式が導ける。

$$l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos q_2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \gamma \quad (5.17)$$

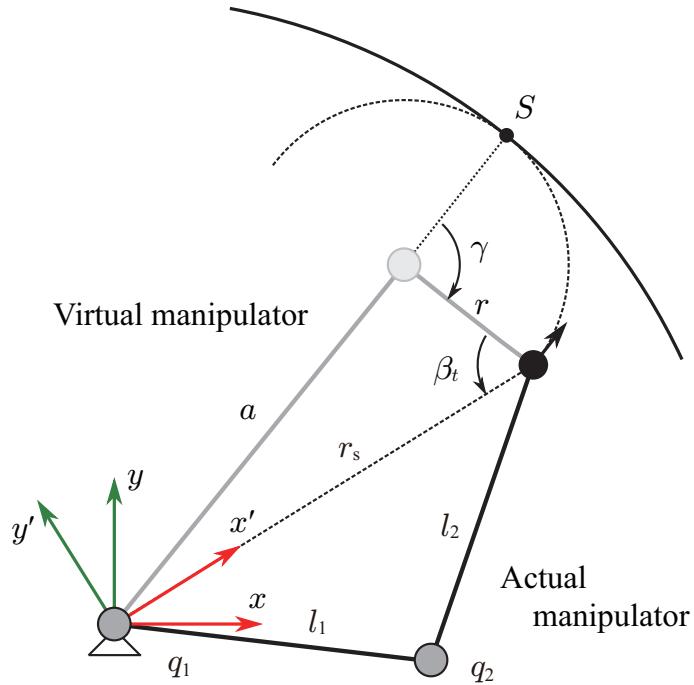


Fig. 5.3: Geometrical parameter to determine how to create the end-effector motion following circular path.

上式を展開し、

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos q_2 \\ = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 + 2r^2 - 2(l_1 + l_2)r + 2ar \cos \gamma \end{aligned} \quad (5.18)$$

を得る。さらに、整理して両辺を2で割ると、

$$\begin{aligned} l_1l_2 \cos q_2 &= l_1l_2 + r^2 - (l_1 + l_2)r + ar \cos \gamma \\ \Leftrightarrow l_1l_2(1 - \cos q_2) &= ar(1 - \cos \gamma) \\ \Leftrightarrow l_1l_2 \sin^2 \frac{q_2}{2} &= ar \sin^2 \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{q_2}{2} = \pm k \sin \frac{\gamma}{2} \quad (5.19)$$

$$k = \sqrt{\frac{ar}{l_1l_2}} = \text{const.} \quad (5.20)$$

となる。この関係から、特異点の指標となる $\sin q_2$ は次のように改められる。

$$\sin q_2 = 2 \cos \frac{q_2}{2} \sin \frac{q_2}{2} = \pm 2 \cos \frac{q_2}{2} k \sin \frac{\gamma}{2} \quad (5.21)$$

(5.10), (5.14), (5.16) および (5.21) より, Fig. 5.3 で与えられる円経路の関節速度解は次式で表現される .

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \pm \frac{1}{l_1 l_2 2 \cos \frac{q_2}{2} k \sin \frac{\gamma}{2}} \begin{bmatrix} l_2 \cos \beta \\ -r_s \end{bmatrix} \frac{a}{r_s} \sin \gamma + \frac{1}{r_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \beta_t \\ &= \pm \frac{a \cos \frac{\gamma}{2}}{l_1 l_2 r_s \cos \frac{q_2}{2} k} \begin{bmatrix} l_2 \cos \beta \\ -r_s \end{bmatrix} + \frac{1}{r_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \beta_t\end{aligned}\quad (5.22)$$

正負はマニピュレータの姿勢で決まる . 以上より , 定常特異点となる $\sin(\gamma/2)$ を打ち消すことが確認できる . さらに , 与えた経路において (5.22) の分母が 0 にならないので , 円経路による定常特異点問題が解消された .

Fig. 5.4 による確認シミュレーションの結果を示す . リンクの長さはそれぞれ $l_1 = 0.45 \text{ m}$, $l_2 = 0.5 \text{ m}$. 手先経路は半径 $r = 0.4 \text{ m}$, シミュレーション時間 10 s に対し , γ を -90 deg から 90 deg に等角速度で変化させて生成した . Fig. 5.4 より , 5 s で $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m}$ に達し , 定常特異点となるが , (5.22) の適用により指令通りに追従していることがわかる .

5.4.2 直線経路の定常特異点対策

次に , 直線経路による定常特異点問題について議論する . ここでは , 2R 平面マニピュレータの内部境界に接するような直線経路を Fig. 5.5 に示すようにパラメータ化する . このとき , 手先の運動方向ベクトル $\dot{\mathbf{p}}'$ は次式で表される .

$$\begin{bmatrix} \dot{p}'_x \\ \dot{p}'_y \end{bmatrix} = \|\dot{\mathbf{p}}\| \begin{bmatrix} -\sin \beta_t \\ \cos \beta_t \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

ここで , 手先速度の大きさを修正して ,

$$\begin{bmatrix} \dot{p}'_x \\ \dot{p}'_y \end{bmatrix} = p' \begin{bmatrix} -\sin q_2 \\ \cos \beta_t \frac{\sin q_2}{\sin \beta_t} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$p' = \frac{\sin \beta_t}{\sin q_2} \|\dot{\mathbf{p}}\| \quad (5.25)$$

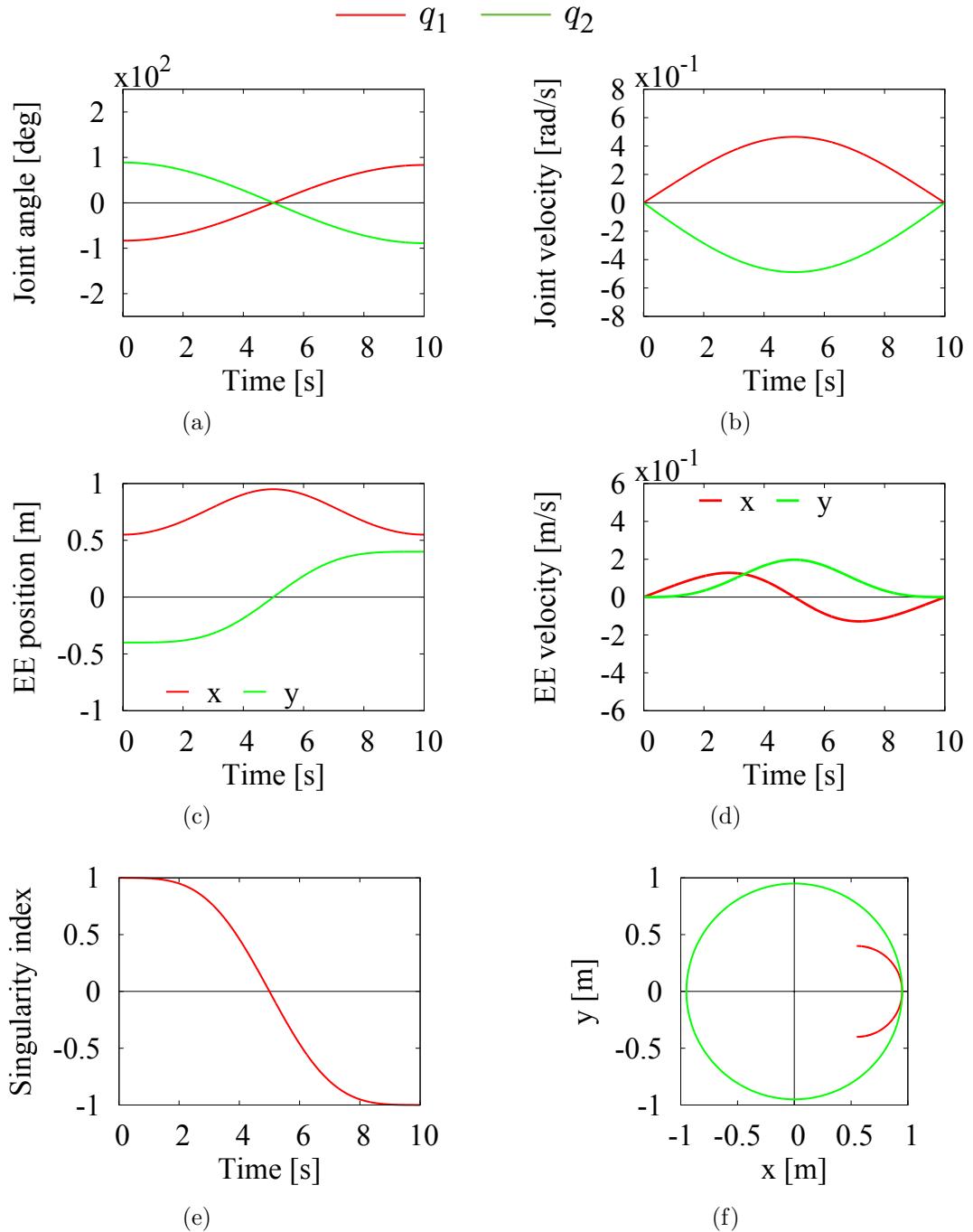


Fig. 5.4: Simulation results of stationary point singularity circular path applying proposed singularity-consistent method.

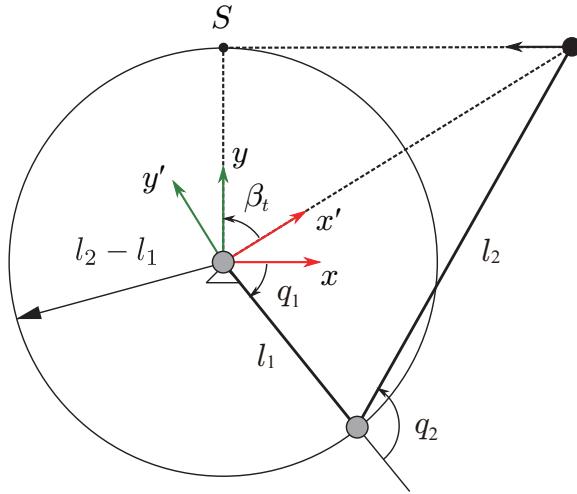


Fig. 5.5: Geometrical parameter to determine how to create the end-effector motion following linear path.

の形に改める。このとき、 e'_x は特異方向とならない。一方、 e'_y は $\sin \beta_t = 0$ で関節速度が発散し、定常特異点による影響を受ける。また、手先位置ベクトルの大きさ r_s は、

$$r_s = \frac{l_2 - l_1}{\cos \beta_t} \quad (5.26)$$

と表すことができる。さらに、 r_s の関係から、次が導かれる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{l_2 - l_1}{\cos \beta_t} \right)^2 &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2 \\ \Leftrightarrow (l_2 - l_1)^2 &= (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2) \cos^2 \beta_t \\ \Leftrightarrow 2l_1 l_2 (1 + \cos q_2) &= (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2) \sin^2 \beta_t \\ \Leftrightarrow 4l_1 l_2 \cos^2 \frac{q_2}{2} &= r_s^2 \sin^2 \beta_t \\ \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{q_2}{2}}{\sin \beta_t} &= \pm \frac{r_s}{2\sqrt{l_1 l_2}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

(5.10), (5.24) および (5.27) より、Fig. 5.5 で与えられる直線経路の関節速度

解は次式で表現される。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= -\frac{1}{l_1 l_2} \begin{bmatrix} l_2 \cos \beta \\ -r_s \end{bmatrix} + \frac{1}{r_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \beta_t \sin \frac{q_2}{2} \left(\frac{2 \cos \frac{q_2}{2}}{\sin \beta_t} \right) \\ &= -\frac{1}{l_1 l_2} \begin{bmatrix} l_2 \cos \beta \\ -r_s \end{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{l_1 l_2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \beta_t \sin \frac{q_2}{2}\end{aligned}\quad (5.28)$$

式中の正負はマニピュレータの姿勢で決まる。以上より、定常特異点となる $\sin \beta_t$ を打ち消すことが確認できる。さらに、(5.27) が非零であること、および与えた経路において (5.28) の分母が 0 となる状態は存在しないので、直線経路による定常特異点問題が解消された。ここで、(5.28) を r_s で割り、

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{1}{l_1 l_2} \begin{bmatrix} l_2 \left(\frac{\cos \beta}{r_s} \right) \\ -1 \end{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{l_1 l_2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{\cos \beta_t}{r_s} \right) \sin \frac{q_2}{2} \quad (5.29)$$

とする。このとき、 $l_1 \neq l_2$ においては $r_s \neq 0$ を常に満たすので、関節速度解を得ることができる。一方、 $l_1 = l_2$ では $r_s = 0$ となり、システムは不安定になる。しかし、 $l_1 = l_2$ の幾何学的関係 $\beta = q_2/2$ を用いて、

$$\frac{\cos \beta}{r_s} = \frac{1}{2} \quad (5.30)$$

が成り立つため、(5.29) の左辺は安定する。また、 $l_1 = l_2$ では $\cos \beta_t = 0$ となることから、

$$\frac{\cos \beta_t}{r_s} = 0 \quad (5.31)$$

とすることにより、(5.29) の右辺による解の発散を防ぐことができる。以上より、(5.29) は内部境界の定常特異点を伴う逆運動学解法の一般化された形となる。

Fig. 5.6 に (5.28) による確認シミュレーションの結果を示す。リンクの長さはそれぞれ $l_1 = 0.45 \text{ m}$, $l_2 = 0.58 \text{ m}$ 。初期角度は $\mathbf{p} = [7.25085 \ 0]^T \text{ deg}$ から (5.28) を適用した。ただし、 $p' = 1$ 、シミュレーション時間を 10 s とした。Fig. 5.6 において $p_x = 0$ 時で定常特異点となるが、(5.28) の適用により指令通りに追従していることがわかる。

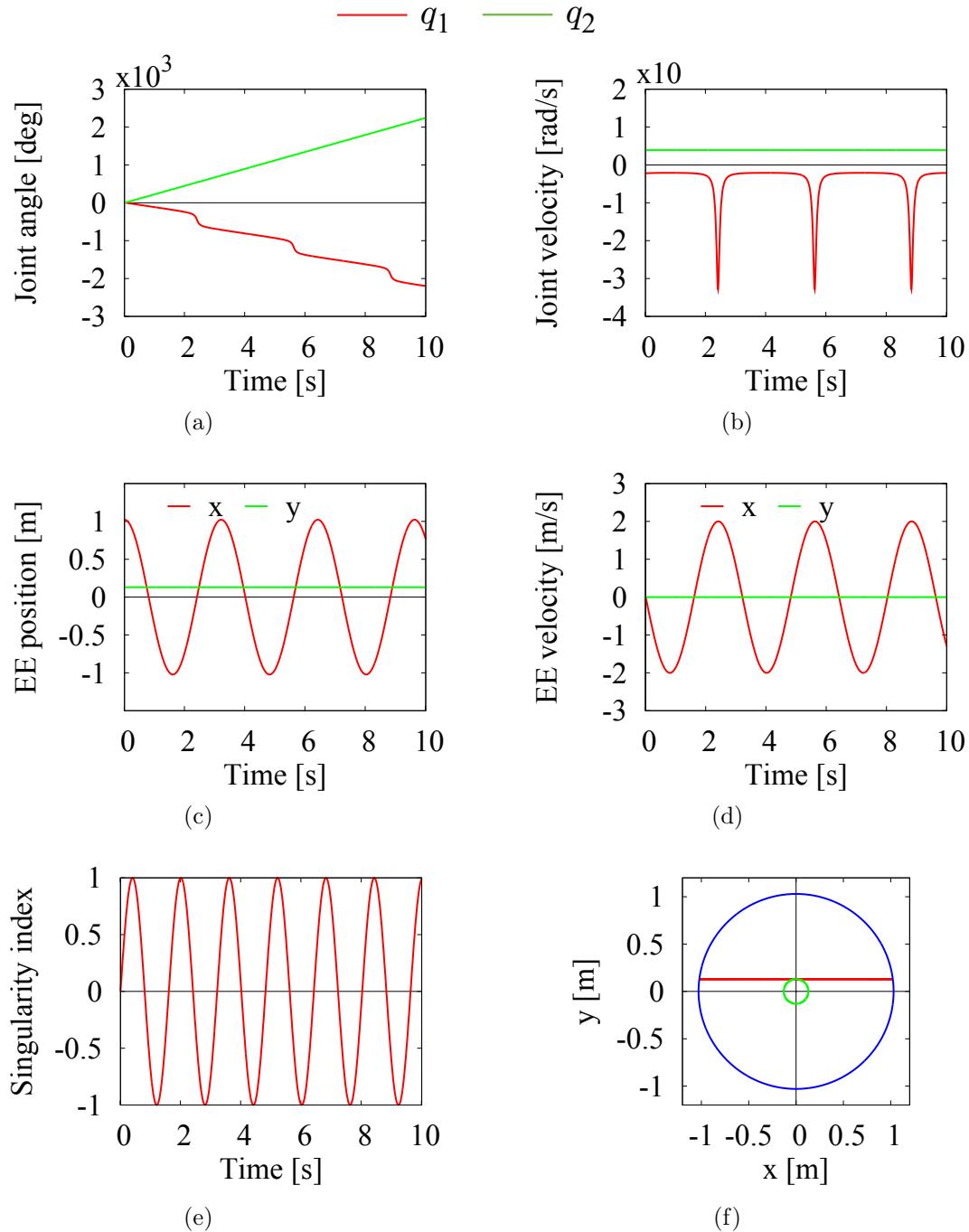


Fig. 5.6: Simulation results of stationary point singularity linear path applying proposed singularity-consistent method.

5.5 6R マニピュレータへの適用

本節で示した分解特異点適合法を三次元に拡張して適用する。その適用先として Fig. 5.7 に示す 6R マニピュレータを例に挙げる。手先の位置、姿勢を三次元で拘束すると、マニピュレータの関節角度は一意に定まり、非冗長マニピュレータである。また、第4関節から第6関節は隣接する関節の回転軸は互いに直交し、一点に交わる仮想的な球面関節としてみなすことができる。

5.5.1 モデリング

Table.5.1 に 6R マニピュレータの D-H パラメータを示す。ここで基準座標系からの手先部の位置姿勢 (${}^0\mathbf{p}_6 \in \mathbb{R}^3$, ${}^0_6\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$) と表し、拘束すると、6R マニピュレータの手先位置に関する幾何学的関係は次式で表すことができる。

$${}^0\mathbf{p}_6 = {}^0\mathbf{p}_3 + {}^0_3\mathbf{R}^3\mathbf{p}_6 \quad (5.32)$$

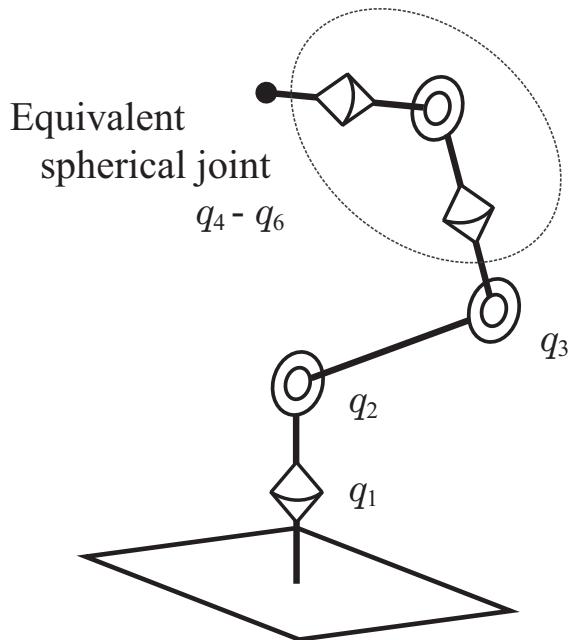


Fig. 5.7: Kinematic model of 6R nonredundant manipulator.

Table 5.1: D-H parameters description of the manipulator.

i	α_i	a_i	d_i	q_i
1	$-\pi/2$	0	0	q_1
2	0	a_2	0	q_2
3	$\pi/2$	0	d_3	q_3
4	$-\pi/2$	0	0	q_4
5	$\pi/2$	0	0	q_5
6	0	0	d_6	q_6

${}^3\mathbf{p}_6$ は常に大きさが一定のベクトルで、

$${}^0\mathbf{R} {}^3\mathbf{p}_6 = d_6 {}^0\mathbf{R} \mathbf{e}_z \quad (5.33)$$

$$\mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.34)$$

で表すことができる。以上から、手先の速度に関する運動学として次式を得る。

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_6 = {}^0\dot{\mathbf{p}}_3 + d_6 {}^0\omega_6 \times {}^0\mathbf{R} \mathbf{e}_z \quad (5.35)$$

これにより、

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_3 = {}^0\dot{\mathbf{p}}_6 - d_6 {}^0\omega_6 \times {}^0\mathbf{R} \mathbf{e}_z \quad (5.36)$$

として表されることから、手先に速度に関する指令値 (${}^0\dot{\mathbf{p}}_6 {}^0\omega_6$) が与えられると、 ${}^0\dot{\mathbf{p}}_3$ は一意に定まる。したがって、Fig. 5.7 の 6R マニピュレータは q_1 から q_3 で表す位置を表現する Positioning subchain と q_4 から q_6 によって姿勢を表す Orientation subchain に非干渉化することができ、それぞれ別々に逆運動学を解くことができる。

5.5.2 Positioning subchain

D-H 法に基づき、 ${}^0\mathbf{p}_3$ は次式でパラメータ化される。

$${}^0\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} {}^0p_{3x} \\ {}^0p_{3y} \\ {}^0p_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a_2S_2 + d_3S_{23}) \\ S_1(a_2S_2 + d_3S_{23}) \\ a_2C_2 + d_3C_{23} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

式中 , $S_i = \sin q_i$, $C_i = \cos q_i$ $S_{ij} = \sin(q_i + q_j)$, $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$ である . (5.37) を時間微分して ,

$${}^0\mathbf{p}_3 = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}}_p \quad (5.38)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_p = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (5.39)$$

を得る .

ここで , 分解特異点適合法を適用する . Fig. 5.8 に示すように , 特異方向を $\{0'\}$ の z 軸に合わせる . $\{0'\}$ は Arm plane に定義される幾何学パラメータを用いて ,

$${}^0\mathbf{R}_\alpha = {}^0\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha & 0 & S_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\alpha & 0 & C_\alpha \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

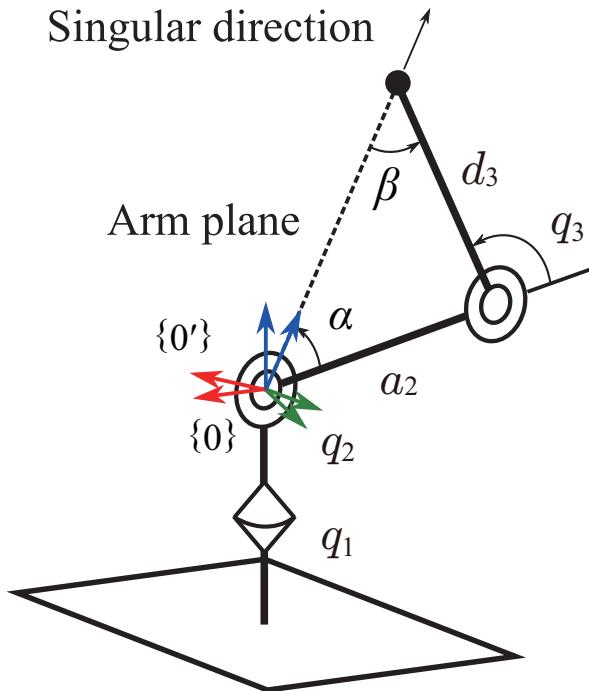


Fig. 5.8: Positioning subchain of 6R manipulator applying proposed singularity-consistent method.

と表される。ただし、 $S_\alpha = \sin \alpha$, $C_\alpha = \cos \alpha$ 。上で定義した ${}^0\mathbf{R}_\alpha$ を用いて、

$${}^0\mathbf{p}'_3 = {}^0\mathbf{R}_\alpha^{T0}\mathbf{p}_3 = {}^0\mathbf{R}_\alpha^T \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}}_p = \mathbf{J}_v^{mod} \dot{\mathbf{q}}_p \quad (5.41)$$

$$\mathbf{J}_v^{mod} = \begin{bmatrix} 0 & r_s & d_3 C_\beta \\ a_2 S_2 + d_3 S_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 S_\beta \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

とし、 $\{0'\}$ によって手先運動を表現する（ただし、 $S_\beta = \sin \beta$, $C_\beta = \cos \beta$ 。）以上から、非特異方向と特異方向に分解した逆運動学計算を定式化すると、

$$\dot{\mathbf{q}}_p = \frac{1}{(a_2 S_2 + d_3 S_{23})r_s} \begin{bmatrix} 0 & r_s \\ a_2 S_2 + d_3 S_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}'_{3x} \\ {}^0\dot{\mathbf{p}}'_{3y} \end{bmatrix} + \frac{1}{r_s d_3 S_\beta} \begin{bmatrix} 0 \\ d_3 C_\beta \\ -r_s \end{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}'_{3z} \quad (5.43)$$

と表せる。こうして、特異方向の手先速度の大きさを拘束することで、 $S_\beta = 0$ となるマニピュレータの境界に定義される飽和特異点の対策が可能となる。この特異点に対して非特異方向と定義した (5.43) の右辺第1項においても $a_2 S_2 + d_3 S_{23} = 0$ となる姿勢があり、ワークスペース内部の特異点として存在する。これはマニピュレータの手先が第1関節の回軸上に定義される姿勢である。これに対しても、 $\begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}'_{3x} & {}^0\dot{\mathbf{p}}'_{3y} \end{bmatrix}^T$ の大きさの拘束することで安定的に関節速度解を得られるが、橢円型特異点となるため、特異姿勢からの回避運動が生成できない。本論文では、橢円型内部特異点は考慮しない。

ここまで議論で定式化した Positioning subchain の逆運動学解法の確認のため、次の条件でシミュレーションを行った。初期状態は $\mathbf{q}_p = [30 \ 20 \ 50]^T$ deg, 手先指令を ${}^0\dot{\mathbf{p}}_3^{ref} = \|{}^0\dot{\mathbf{p}}_3\|t_*$ に対し、大きさ $\|{}^0\dot{\mathbf{p}}_3^{ref}\| = 0.3 \sin \beta$ m/s, 手先の運動方向 $t_* = [0 \ -1 \ 0]^T$, リンクパラメータは $a_2 = 0.45$, $d_3 = 0.5$ m とした。

シミュレーション結果を Fig. 5.9 に示す。それぞれ関節角度、関節速度、手先位置、手先速度である。関節角度 $\sin q_3 = 0$ で特異点となるが、その際に手先は瞬間に停止し、そして再び反対方向に運動していることがわかる。また、手先の運動方向は指令通りの y 軸に沿っており、一般性を失っていない。このことから特異姿勢となった際に生じる零空間ベクトルに関節速度ベクトルが接続し、指令通りの連続的な手先運動を生成していることがわかる。

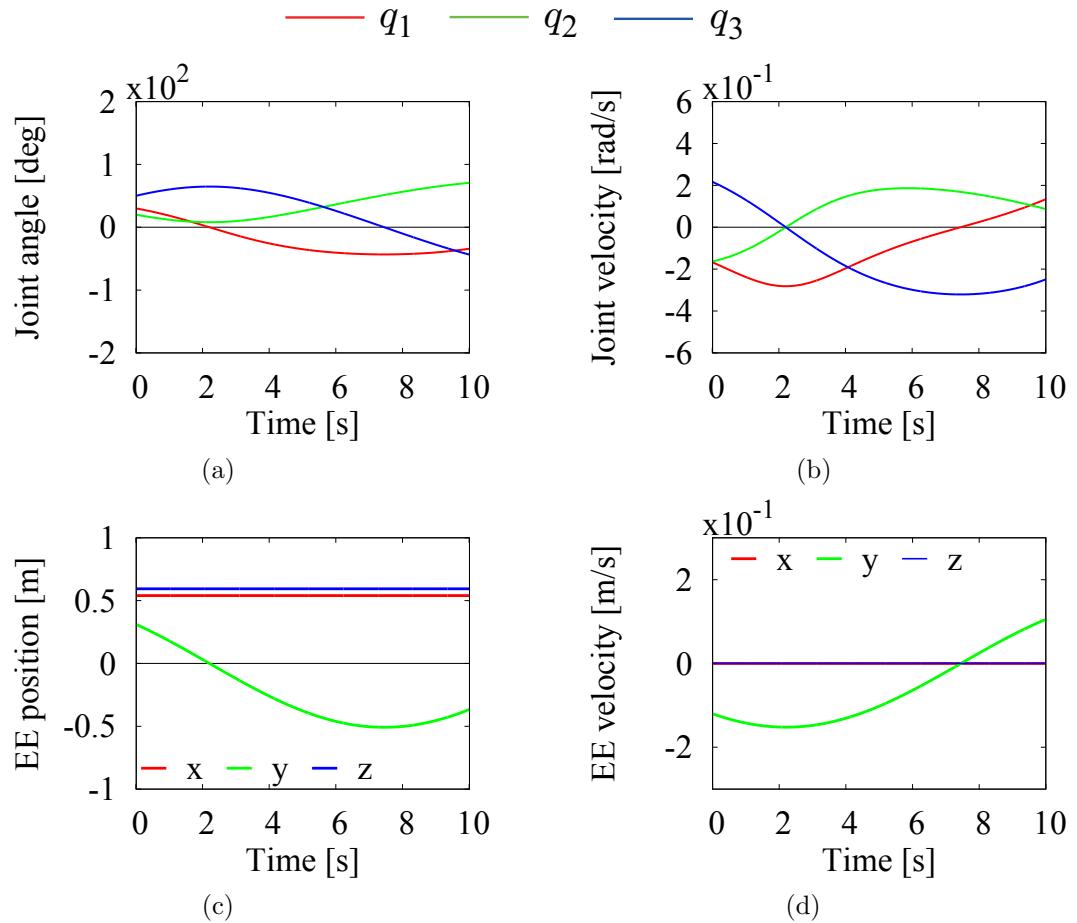


Fig. 5.9: Linear path following with a positioning subchain of 6R manipulator applying proposed singularity-consistent method.

5.5.3 Orientation subchain

q_p によって干渉する姿勢の影響を、

$${}^0\omega_3 = A_p \dot{q}_p \quad (5.44)$$

として表現する。姿勢に関する手先指令値 ${}^0\omega_6$ によって、6R マニピュレータの姿勢に関する運動学の関係は、

$${}^0\omega_6 = {}^0\omega_3 + {}^0R_3 {}^3\omega_6 \quad (5.45)$$

である。ここで Orientation subchain の関節角度の集合を $q_w = [q_4 \ q_5 \ q_6]^T$ とすると、(5.45) は次のように表せる。

$${}^0\omega_6 = {}^0\omega_3 + {}^0R_3 {}^3A_\omega \dot{q}_w \quad (5.46)$$

(5.46) から, \dot{q}_w を求める逆運動学計算は,

$$\dot{q}_w = A_{\omega}^{-10} R_3^T ({}^0\omega_6 - {}^0\omega_3) \quad (5.47)$$

となる。これは姿勢に関する非冗長システムの逆運動学解法である。ゆえに、特異点対策は特異値分解に基づく特異点適合法を適用する。ここで A_{ω} を特異値分解して得られる左特異ベクトル u_k , 特異値 σ_k , 右特異ベクトル v_k ($k \in \{4, 5, 6\}$) を用いて A_{ω}^{-1} を表すと,

$$A_{\omega}^{-1} = \frac{1}{\sigma_4} v_4 u_4^T + \frac{1}{\sigma_5} v_5 u_5^T + \frac{1}{\sigma_6} v_6 u_6^T \quad (5.48)$$

となる。ただし, $\sigma_4 \geq \sigma_5 \geq \sigma_6 \geq 0$ 。特異点適合法の切り替え条件を最小特異値 σ_6 を用いて

$$\sigma_6 \leq \varepsilon \quad (5.49)$$

とする。第3章で示したオイラー角による姿勢制御では、オイラー角が物理パラメータでないゆえ、特異点領域を非常に小さく設定できた。しかし、マニピュレータの場合は関節速度に影響するため、実用性を考慮したときに、微小領域とすることは好ましくない。ここで、特異値分解の関係を利用すると、各関節速度のいずれかの最大値と特異点領域との関係は

$$\|\dot{q}_w\|_{\infty} \leq \frac{\|{}^0R_3^T({}^0\omega_6 - {}^0\omega_3)\|}{\varepsilon} \quad (5.50)$$

が導ける。したがって、特異値分解に基づく特異点適合法は特異点の考慮に加え、タスクに応じて ε を設定し、関節速度を抑えることができる。

5.5.4 シミュレーションによる検証

ここで、特異点の対策について上記の議論で定式化した Positioning subchain および Orientation subchain の組み合わせによる 6R マニピュレータの逆運動学解法の確認のため、次の条件でシミュレーションを行った。初期状態は $q = [30 \ 20 \ 50 \ -82 \ 20 \ 0]^T \text{ deg}$, 手先指令 \mathcal{V}^{ref} は,

$$\mathcal{V}^{ref} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{p}_6^{ref} \\ {}^0\omega_6^{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|{}^0\dot{p}_6^{ref}\| t_* \\ \|{}^0\omega_6^{ref}\| \hat{\omega} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

に対し、手先速度の大きさ $\|{}^0\dot{p}_6^{ref}\| = 0.3 \sin \beta \text{ m/s}$ 、手先の運動方向 $t_* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 、手先姿勢運動の大きさ $\|{}^0\omega_6^{ref}\| = 0.1 \sin \beta \text{ rad/s}$ 、手先の運動方向 $\dot{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ 、リンクパラメータは $a_2 = 0.45$, $d_3 = 0.5$, $d_6 = 0.07 \text{ m}$ とした。また、姿勢の特異点適合法適用領域を $\varepsilon = 0.05$ と設定した。

シミュレーション結果を Fig. 5.10 に示す。それぞれ関節角度、関節速度、手先位置、手先速度、手先角速度、特異点指標である。まず、 $\sin q_5 = 0$ 付近で姿勢に関する特異点適合法が適用される。これにより、手先の角速度について切り替えによる不連続な挙動が確認できる。しかし、特異点適合法により $\sin q_5 = 0$ となる特異点を通過し、特異点領域を出ると、再び指令通りの x 軸周りの姿勢運動が確認できる。一方、速度については Positioning subchain によるシミュレーション結果と同様に、関節角度 $\sin q_3 = 0$ で特異点となるが、その際に手先は瞬間に停止し、そして再び反対方向に運動していることがわかる。また、手先の運動方向は指令通りの y 軸に沿っており、一般性を失っていない。以上より、姿勢運動による特異点領域を除いては手先指令通りに関節速度を計算でき、特異点で発散することなく安定した解が得られる。

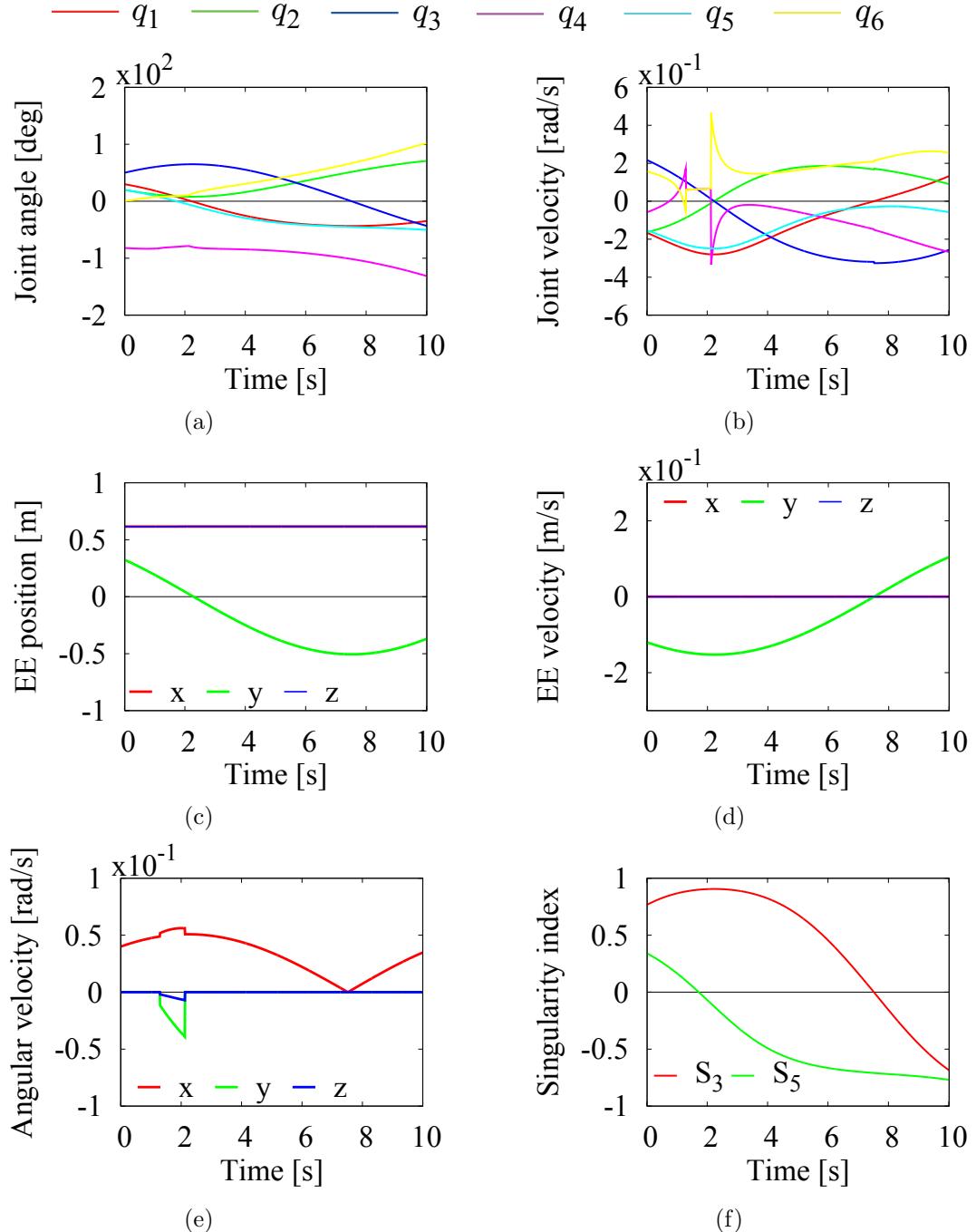


Fig. 5.10: Linear path following with 6R manipulator considering both the end-effector position and orientation.

第6章 冗長マニピュレータにおける逆運動学解法と制御への適用

6.1 概要

これまで位置/姿勢に関する逆運動学計算の特異点対策として非冗長システムについてモデリングを行い、その対策を示してきた。特に前章では、分解特異点適合法を提案し、定常特異点問題の対策やマニピュレータのコンフィギュレーションに応じたモデリングを行った。その結果、これまで不可能であった経路生成の実現やワークスペースを最大限利用するなどの、特異点を積極的に活用する利点を示した。

本章では、非冗長システムで得られた分解特異点適合法による利点を活かし、冗長マニピュレータへの適用を図る。その上で冗長性の利用について議論する。特にここでは、冗長性を有する代表的な七つの回転関節で構成されるS-R-Sマニピュレータを用いる。

6.2 モデリング

本論文では、Fig. 6.2に示すような7自由度マニピュレータについて考える。特に、三菱重工業株式会社製可搬式汎用知能アームPA-10(Fig. 6.1)でモデル化する。このような冗長マニピュレータはS-R-Sマニピュレータと呼ばれている。S-R-Sマニピュレータは人体の腕部と構造的に類似しており、タスクを行う際の汎用性の高さから幅広く研究されている。第1関節から第3関節で構成される肩部と第5関節から第7関節で構成される手首部は、それぞれ隣接する関節軸が互いに直交し、それらが一点で交わるため、仮想的な球面関節とみなすことができる。また、第4関節は肘部と呼ばれる。Table.6.1に7RマニピュレータのD-Hパラメータを示す。ここで基準座標系からの手先部の位置姿勢(${}^0\mathbf{p}_7 \in \mathbb{R}^3$, ${}^0\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$)と表し、拘束すると、7Rマニ

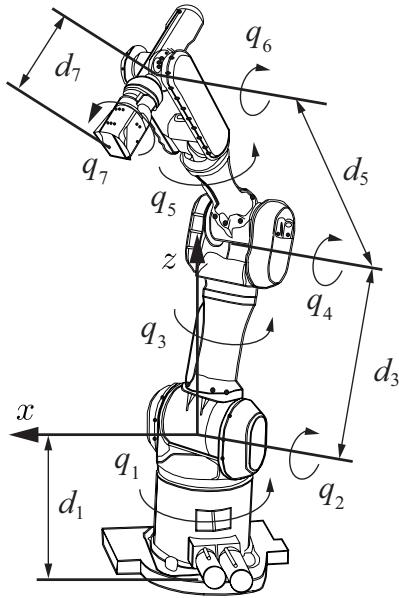


Fig. 6.1: PA-10 kinematic model.

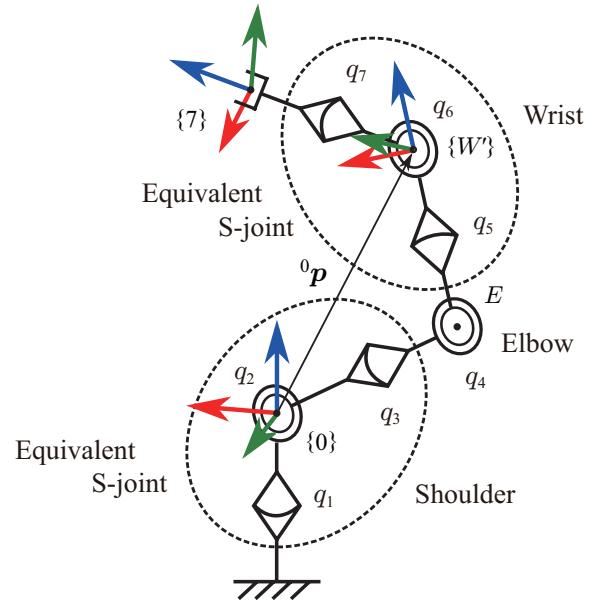


Fig. 6.2: Kinematic structure of S-R-S type manipulator.

ピュレータの手先位置に関する幾何学的関係は次式で表すことができる。

$${}^0\mathbf{p}_7 = {}^0\mathbf{p}_{W'} + {}^0_{W'}\mathbf{R}^{W'} \mathbf{p}_7 \quad (6.1)$$

${}^{W'}\mathbf{p}_7$ は常に大きさが一定のベクトルで、

$${}^0_{W'}\mathbf{R}^{W'} \mathbf{p}_7 = d_7 {}^0_{W'}\mathbf{R} \mathbf{e}_z \quad (6.2)$$

$$\mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (6.3)$$

で表すことができる。以上から、手先の速度に関する運動学として次式を得る。

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_7 = {}^0\dot{\mathbf{p}}_{W'} + d_7 {}^0\omega_7 \times {}^0_{W'}\mathbf{R} \mathbf{e}_z \quad (6.4)$$

これにより、

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_{W'} = {}^0\dot{\mathbf{p}}_7 - d_7 {}^0\omega_7 \times {}^0_{W'}\mathbf{R} \mathbf{e}_z \quad (6.5)$$

として表されることから、手先に速度に関する指令値 (${}^0\dot{\mathbf{p}}_7 {}^0\omega_7$) が与えられると、 ${}^0\dot{\mathbf{p}}_{W'}$ は一意に定まる。したがって、Fig. 6.2 の S-R-S マニピュレータは関節運動が手先位置と姿勢に与える影響を非干渉化することができ、それぞれ別々に逆運動学を解くことができる。この機構的性質を利用して、 q_1 から q_4 で表す位置を表現する Positioning subchain と q_5 から q_7 によって姿勢を表す Orientation subchain に分解して逆運動学を解く。

Table 6.1: D-H parameter of 7 DOF manipulator.

i	α_i	a_i	d_i	q_i
1	$-\pi/2$	0	0	q_1
2	$\pi/2$	0	0	q_2
3	$-\pi/2$	0	d_3	q_3
4	$\pi/2$	0	0	q_4
5	$-\pi/2$	0	d_5	q_5
6	$\pi/2$	0	0	q_6
7	0	0	d_7	q_7

6.2.1 Positioning subchain

$\{0\}$ から見た手首を指す位置ベクトルを ${}^0p_{W'} \in \mathbb{R}^3$ とする。D-H表記法に準じて、 ${}^0p_{W'}$ を関節変数でパラメータ化すると次式となる。

$${}^0p_{W'} = \begin{bmatrix} {}^0p_{W'x} \\ {}^0p_{W'y} \\ {}^0p_{W'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1c - d_5S_1S_3S_4 \\ S_1c + d_5C_1S_3S_4 \\ (d_3 + d_5C_4)C_2 - d_5S_2C_3S_4 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$c = (d_3 + d_5C_4)S_2 + d_5C_2C_3S_4 \quad (6.7)$$

ただし、 $S_i = \sin q_i$, $C_i = \cos q_i$ 。また、 d_3, d_5 はそれぞれ肩から肘、肘から手首のリンクの長さである。(6.6)の両辺を時間で微分して、運動学上の速度関係を得ると、

$${}^0\dot{p}_{W'} = J_v \dot{q}_p \quad (6.8)$$

$$\dot{q}_p = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T \quad (6.9)$$

となる。式中 $J_v \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ は手首速度と関節速度の関係を結ぶヤコビ行列である。ここで、 $\|\dot{q}_p\|$ を最小とするように関節速度空間に拘束を与えると、 \dot{q}_p は次式で得られる。

$$\dot{q}_p = J_v^+ {}^0\dot{p}_{W'} \quad (6.10)$$

$$J_v^+ = J_v^T \frac{\text{adj}(J_v J_v^T)}{\det(J_v J_v^T)}. \quad (6.11)$$

J_v^+ は J_v の擬似逆行列である。この場合、 $\det(J_v J_v^T) = 0$ を満たすような特異姿勢は次の二つに分類される。

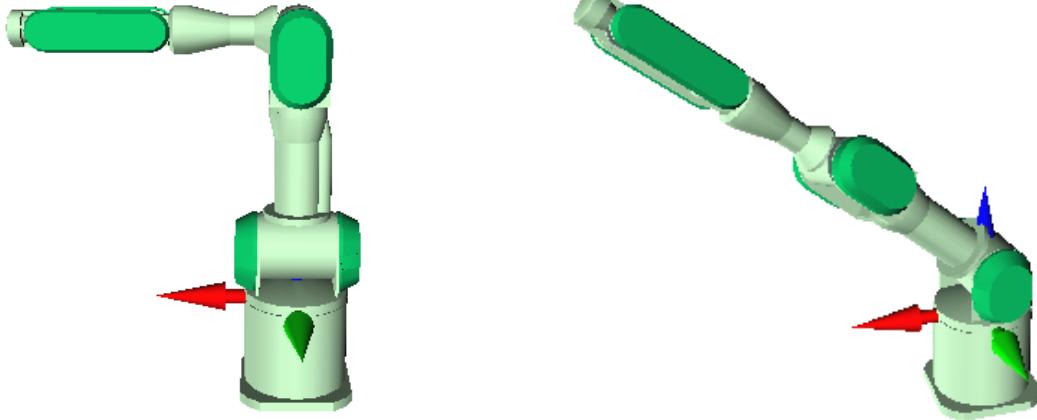


Fig. 6.3: Internal singularity of positioning subchain (Shoulder singularity).

Fig. 6.4: Extended singularity of positioning subchain (elbow singularity).

1. $S_2 = 0$ かつ $C_3 = 0$

2. $S_4 = 0$

前者 (Fig. 6.3) は、冗長自由度を利用することによって回避可能な特異点で、肩特異点の一つである。擬似逆行列では最適化する評価関数の性質から潜在的にこの特異点を回避するため、本論文では考慮しない。一方、後者 (Fig. 6.4) は肘が伸びるときに必ず表れる特異点で、避けることができない。この特異点は一般に肘特異点と呼ばれる。

6.2.2 Orientation subchain

姿勢に関する逆運動学は前章 6R マニピュレータと同様である。つまり、 $\{0\}$ を基準に、 \dot{q}_p の影響による姿勢変化を ${}^0\omega_{W'} \in \mathbb{R}^3$ とすると、与えられた手先の指令角速度 ${}^0\omega_7 \in \mathbb{R}^3$ からの相対的な角速度 ${}^{W'}\omega_7 = {}^0\omega_7 - {}^0\omega_{W'}$ によって、次式のように関節速度解 $\dot{q}_w = [\dot{q}_5 \quad \dot{q}_6 \quad \dot{q}_7]^T$ を得ることができる。

$$\dot{q}_w = A_{\omega}^{-1} {}^{W'}\omega_7 = \frac{\text{adj } A_{\omega}}{\det A_{\omega}} {}^{W'}\omega_7 \quad (6.12)$$

式中， $A_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は ${}^W\omega_7$ と \dot{q}_w の関係を表すヤコビ行列である。このとき， $\det A_\omega = 0$ で特異点となり，特異姿勢は $S_6 = 0$ である。この特異点もまた肘特異点と同様に回避できず，手首特異点と呼ばれる。

6.3 内部障害

6.3.1 特異点適合法の従来手法

S-R-S マニピュレータの Positioning subchain である 4 自由度の S-R マニピュレータに着目する。このとき，列拡張ヤコビ行列に基づく特異点適合法は零空間が特異姿勢を除き二次元であることから，基底となるベクトルが二つ存在する。関節速度 \dot{q}_p に手先速度の大きさを加えて拡張した $\bar{\dot{q}}_p$ は次式で表せる。

$$\bar{\dot{q}}_p = b_{sm}\bar{n}_{sm} + b_{ep}\bar{n}_{ep} \quad (6.13)$$

\bar{n}_{sm} は手先速度に影響を与えないセルフモーションを表すベクトルで，各要素は

$$\bar{n}_{sm} = \begin{bmatrix} -d_5 C_3 S_4 & d_5 S_2 S_3 S_4 & c & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.14)$$

で表される。一方， n_{ep} は手先速度を決定する列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトルである。従来の特異点適合法では， \bar{n}_{ep} を決定するのに，第 3 関節を固定した

$$\bar{n}_{ep} = \begin{bmatrix} C_{ep1} & C_{ep2} & 0 & C_{ep4} & c S_4 \end{bmatrix}^T \quad (6.15)$$

を用いている。また，それぞれのベクトルの係数 b_{sm} ， b_{ep} を定数とすると，作業空間のベクトルの大きさに c ， $c S_4$ を含める Natural parameter となるため，肘/肩特異点で発散することなく関節速度解を得ることができる。だが一方で，手先運動の大きさは実際のワークスペース境界である S_4 だけでなく， c の大きさや符号に依存する。特に， $c = 0$ のときでは \bar{n}_{ep} が列拡張空間の中でも関節空間のみに定義される零空間ベクトルとなる。つまり，マニピュレータの状態によっては手先がワークスペース内部に定義されても特定の方向に出力できない姿勢が存在する。これを内部障害 (Inner obstacle) と呼ぶ。また，内部障害となる $c = 0$ の状態を肩特異点と呼び， q_p で定義される関節空間では二次元多様体となる。ただし，Fig. 6.3 も

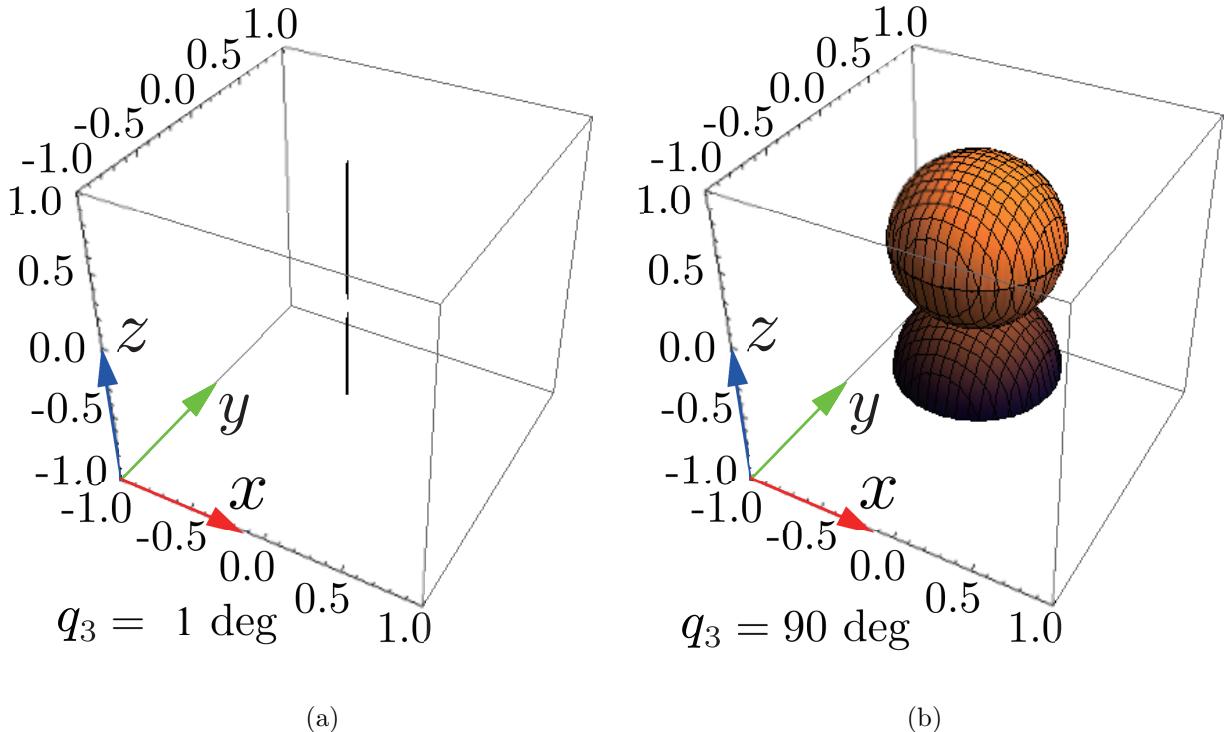


Fig. 6.5: Inner boundary of the work space when $c = 0$: (a) $q_3 = 1$ deg and (b) $q_3 = 90$ deg.

$c = 0$ を満たし肩特異点であるが、構造的に出力手先方向が制限され絶対的に存在する特異点である。これに対し、内部障害を引き起こす肩特異点は特異点適合法の従来手法のモデリングによって生じるアルゴリズミック特異点である。

6.3.2 内部障害の解析

前章、6R マニピュレータの Positioning subchain が非冗長システムで内部障害を持たない機構であることから、S-R マニピュレータで付加される第3関節の角度で内部障害を評価する。ここで、Fig. 6.5 に $q_3 = 1$ deg, $q_3 = 90$ deg で $c = 0$ となる関節空間の二次元多様体を作業空間に射影したモデルを示す。このように、 $c = 0$ が q_1 を含まないことから、第1関節の回転軸上を中心とした回転体として表すことができる。つまり、肩特異点の分布は高さ ${}^0p_{W'z}$ とそれに対して垂直な $c = 0$ となる点までの距離 $r_c (>0)$ で変数化す

ることができる。このとき、 r_c は以下で表される。

$$\begin{aligned} r_c^2 &= \left\{ ({}^0 p_{W'x})^2 + ({}^0 p_{W'y})^2 \mid c = 0 \right\} \\ &= (d_5 S_1 S_3 S_4)^2 + (d_5 C_1 C_3 C_4)^2 = (d_5 S_3 S_4)^2 \\ r_c &= d_5 |S_3 S_4| \end{aligned} \quad (6.16)$$

(6.16) より、

$$q_3, q_4 = \left\{ \frac{(2n+1)}{2}\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (6.17)$$

のとき d_5 となり、 r_c が最大となる。また、高さ ${}^0 p_{W'z}$ との関係は次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} {}^0 p_{W'z} \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{R}(q_2) \boldsymbol{\gamma}(q_3, q_4) \quad (6.18)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(q_3, q_4) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_5 C_3 S_4 \\ d_3 + d_5 C_4 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

上式から、 ${}^0 p_{W'z}$ と c は基底ベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ を q_2 で回転したベクトルと解釈でき、互いに直交する。このことから肩特異点であるとき、次を満たす。

$${}^0 p_{W'z}^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (6.20)$$

Fig. 6.5 に描かれるような肩特異点での作業空間は、 r_c および ${}^0 p_{W'z}$ で決まることから、 q_3, q_4 で定義される。 q_2 は (6.18) より、 q_3, q_4 に依存し、次式となる。

$$q_2(q_3, q_4) = \cos^{-1} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (6.21)$$

一方、第1関節の回転軸上から垂直なベクトルで手先の位置を指し、その大きさを ${}^0 p_{W'xy}$ (> 0) とし、関節変数で変数化すると、

$$\begin{aligned} {}^0 p_{W'xy}^2 &= {}^0 p_{W'x}^2 + {}^0 p_{W'y}^2 \\ &= c^2 + r_c^2 \end{aligned} \quad (6.22)$$

となる。これにより、次の関係を得る。

$${}^0 p_{W'xy} \geq r_c \quad (6.23)$$

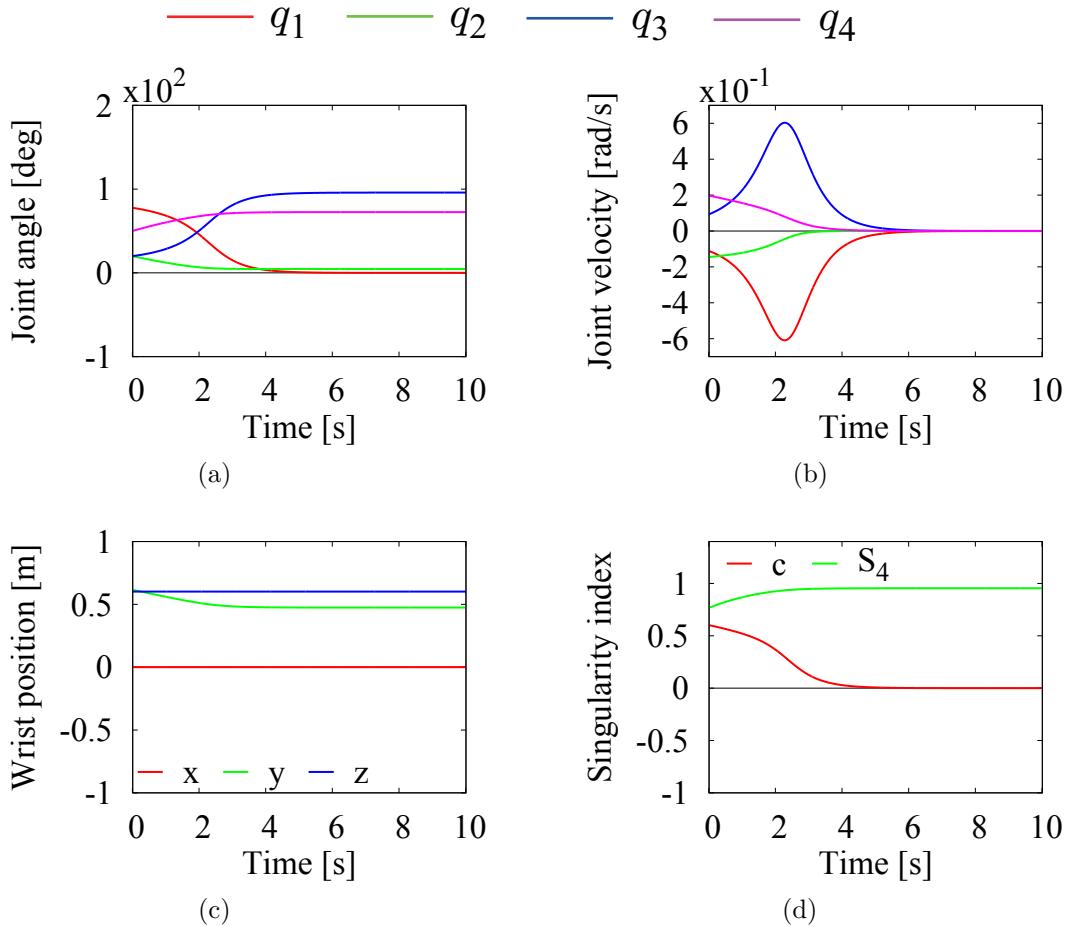


Fig. 6.6: Linear path following with a positioning subchain of S-R-S type manipulator with conventional singularity-consistent method. Inner obstacle is appeared when $c = 0$.

これにより、手先は Fig. 6.5 に示した回転体の内側に入ることができない。つまり、手先がワークスペースの内部にありながら、飽和特異点の性質を持つ。特に、 n_{ep} のみで動かす場合は第3関節の関節速度 0 であることから、内部障害が不变となる。ゆえに、手先軌道によってはセルフモーションの大きさ b_{sm} を拘束する必要がある。つまり、従来の特異点適合法は内部障害の回避のため、冗長自由度が制限され、冗長性は失われる、また、手先が第1関節の回転軸上を通過するような軌道は、冗長自由度を利用しても与えることができない。

Fig. 6.6 に初期角度 $q_p = [77.72 \ 20 \ 20 \ 50]^T$ deg で手首座標系の原点を ${}^0p_{W'} = [0 \ 0.616 \ 0.602]^T$ m として、 y 軸負方向に沿って手首を移動させるよ

うに指令を与え、第1関節の回転軸上を通過させるようなシミュレーションを行った結果を示す。ただし、 $b_{ep} = 0.4$ 、 $b_{sm} = 0$ とし、シミュレーション時間は 10s とした。 $S_4 \neq 0$ でマニピュレータがワークスペースの境界に達していないにも関わらず、 $c = 0$ で指令した方向への運動が停止していることがわかる。

6.4 分解特異点適合法の適用

6.4.1 特異方向と非特異方向の分解

ここでは前章で示した分解特異点適合法の適用について議論する。まず、肘特異点について考慮するため、Fig. 6.7 に示す仮想直動関節と球面関節による運動学的に等価なモデルを導入する。さらに、手首姿勢を表す行列を次のように再定義する。

$$\begin{aligned} {}^0_W \mathbf{R} &= \mathbf{R}^z(q_1) \mathbf{R}^y(q_2) \mathbf{R}^z(q_3) \mathbf{R}^y(\alpha(q_4)) \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha & 0 & S_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\alpha & 0 & C_\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\alpha(q_4) = \text{sgn}(S_4) \cos^{-1} \left(\frac{d_3 + d_5 C_4}{r_s} \right) \quad (6.25)$$

$$r_s = \| {}^0_W \mathbf{p} \| \neq 0 \quad (6.26)$$

このように姿勢を定義することで、手首の運動を肩の球面関節を中心とした球面上の運動と直動関節による運動を容易に分解することができる。つまり、肘特異点を引き起こす特異方向は、 ${}^0_W \mathbf{R} e_z$ で表される

$${}^0_W \mathbf{p}_z = {}^0_W \mathbf{R} e_z \quad (6.27)$$

と定義される。ここで、手首の運動表現を ${}^0_W \mathbf{R}$ に帰着して扱うため、手首の運動表現を ${}^0_W \mathbf{R}$ に基づいて表現する。式 (6.8) の両辺に、 ${}^0_W \mathbf{R}^T$ を左から掛け、次式を得る。

$${}^W \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^T {}^0_W \dot{\mathbf{p}} = {}^0_W \mathbf{R}^T \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}}_{se} = \mathbf{J}_v^{mod} \dot{\mathbf{q}}_p \quad (6.28)$$

$$\mathbf{J}_v^{mod} = \begin{bmatrix} r_s S_2 S_3 & r_s C_3 & 0 & d_5 C_\beta \\ (d_3 + d_5 C_4) S_2 C_3 + d_5 C_2 S_4 & (d_3 + d_5 C_4) S_3 & d_5 S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_5 S_\beta \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

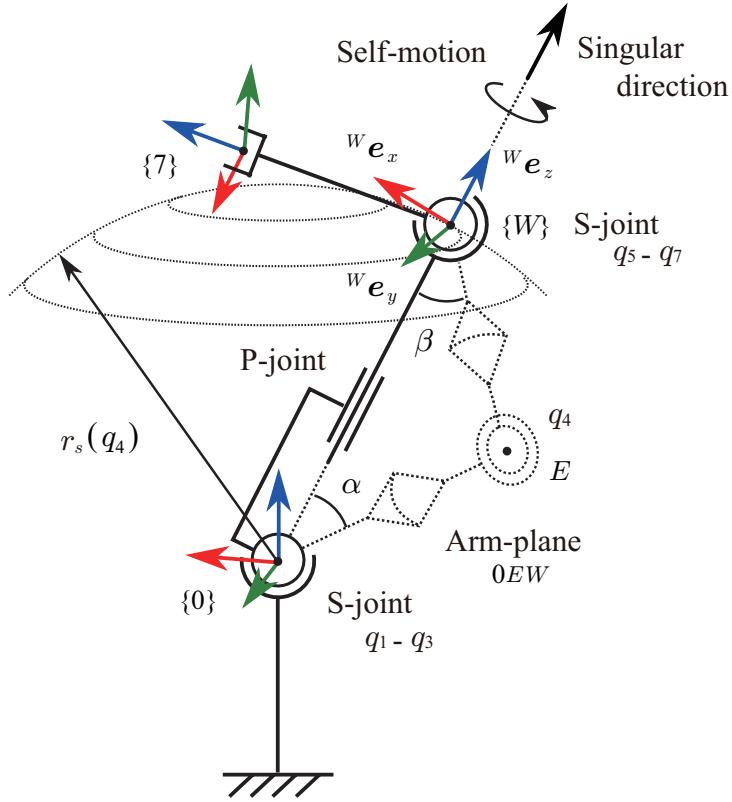


Fig. 6.7: S-R-S manipulator remodeled with a virtual prismatic joint.

式中の β は

$$\beta(q_4) = \text{sgn}(S_4) \cos^{-1} \left(\frac{d_3 C_4 + d_5}{r_s} \right) \quad (6.30)$$

で表される。以上の変換により、特異方向の大きさを ${}^W\dot{p}$ の z 軸成分に一般化することができる。つまり、Fig. 6.7 に示すような手首座標系の原点が仮想球面関節の球面上の動作を表す ${}^W\dot{p}$ の x, y 軸成分 ${}^W\dot{p}_x, {}^W\dot{p}_y$ からの逆運動学計算は肘特異点が存在しないため、関節速度解を得ることができる。本論文では、関節速度のユークリッドノルムを最小とするような評価関数を与えるので、

$$\dot{q}_p = [\bar{J}_v^{mod}]^+ \begin{bmatrix} {}^W\dot{p}_x \\ {}^W\dot{p}_y \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

によって解を得る。ただし、 $\bar{J}_v^{mod} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ は仮想直動関節による運動を取り除いたヤコビ行列である。

一方, ${}^W\dot{p}_z$ の運動は $\bar{\mathbf{J}}_v^{mod}$ の二次元の零空間に定義される。その中の一つは手首位置に影響を与えないセルフモーションを表すベクトルである。ここで、冗長運動を表す関節速度ベクトルを \mathbf{n}_{sm} とすると, \mathbf{n}_{sm} は,

$$\mathbf{n}_{sm} = \begin{bmatrix} -d_5 C_3 S_4 & d_5 S_2 S_3 S_4 & c & 0 \end{bmatrix}^T \in \text{Ker} \bar{\mathbf{J}}_v^{mod} \quad (6.32)$$

と表される。さらに、特異方向の運動を与えるベクトルを ${}^W\mathbf{n}_z$ とおいて、関節速度ベクトルを

$$\dot{\mathbf{q}}_z = b_z {}^W\dot{p}_{Wz} {}^W\mathbf{n}_z \in \text{Ker} \bar{\mathbf{J}}_v^{mod}, \quad (6.33)$$

と表す。式中, b_z は直動関節の運動の大きさを表す係数である。 $\bar{\mathbf{J}}_v^{mod}$ の二次元の零空間から関節速度のユークリッドノルムを最適化するようなベクトルを選択することは、冗長運動を表す零空間ベクトルに対して垂直なベクトルを選ぶことと等価である。これにより, ${}^W\dot{p}_z$ 方向の運動を表す \mathbf{n}_{sm} に対して垂直な関節速度ベクトルは次式で表される。

$${}^W\mathbf{n}_z = \frac{1}{d_3 S_4 \det(\mathbf{J}_v^{mod} \mathbf{J}_v^{mod T})} \begin{bmatrix} {}^Wn_{z1} \\ {}^Wn_{z2} \\ {}^Wn_{z3} \\ {}^Wn_{z4} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

各要素は,

$$\begin{aligned} {}^Wn_{z1} &= r_s^2 C_\beta S_3 (S_2 + S_\alpha C_\alpha C_2 C_3) \\ {}^Wn_{z2} &= r_s^2 C_\beta (2S_\alpha^2 C_2^2 C_3 + S_2^2 C_3 + S_\alpha C_\alpha S_2 C_2 (1 + C_3^2)) \\ {}^Wn_{z3} &= r_s^2 C_\beta C_2 S_3 S_\alpha (C_2 C_3 C_\alpha - S_2 S_\alpha) \\ {}^Wn_{z4} &= -d_3 S_4 \det(\mathbf{J}_v^{mod} \mathbf{J}_v^{mod T}) / d_5 \end{aligned}$$

である。また, $\det(\mathbf{J}_v^{mod} \mathbf{J}_v^{mod T})$ は

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}_v^{mod} \mathbf{J}_v^{mod T}) &= \mathbf{n}_{sm}^T \mathbf{n}_{sm} \\ &= c^2 + d_5^2 S_4^2 (C_3^2 + S_2^2 S_3^2) \end{aligned} \quad (6.35)$$

で与えられる。逆運動学計算において, (6.34) のベクトル成分が有界であることから関節速度は発散しない。一方, スカラーフィールド成分は $\det(\mathbf{J}_v^{mod} \mathbf{J}_v^{mod T}) = 0$, $S_4 = 0$ で発散し特異点となる。前者は $S_2 = 0$ かつ $C_3 = 0$ で生じる Fig. 6.3 の特異点である。後者は肘特異点 Fig. 6.4 である。

6.4.2 手首速度の拘束

S_4 を指標として特異点適合法を適用する。特異点適合法は特異点との距離に応じて、特異方向の速度の大きさを決定することで、関節速度を安定的に得る手法である。つまり、 b_z に S_4 を含ませることで分母の S_4 を打ち消して、逆運動学を計算する。これにより、肘特異点においても関節速度空間に解が存在する。本論文では、特異点近傍に特異点領域 q^s を次のように定義し、その領域内で特異点適合法を適用する。

$$q^s \equiv \{\varepsilon \geq |S_4|\} \quad (6.36)$$

ε は領域を定義する閾値である。また、特異点領域の境界で手先速度の大きさを滑らかに補間するため、 b_z は次のように与える。

$$b_z = \begin{cases} \sin 2^n q_4, & \text{if } q_4 \in q^s, \\ \operatorname{sgn}(S_4), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6.37)$$

式(6.37)とすることで、特異点領域内を正弦関数で滑らかに補間することができる。また、整数 n によって閾値 ε が以下のように定まり、

$$\varepsilon \equiv \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) \quad (6.38)$$

特異点領域を決定する変数となる(Fig. 6.8)。

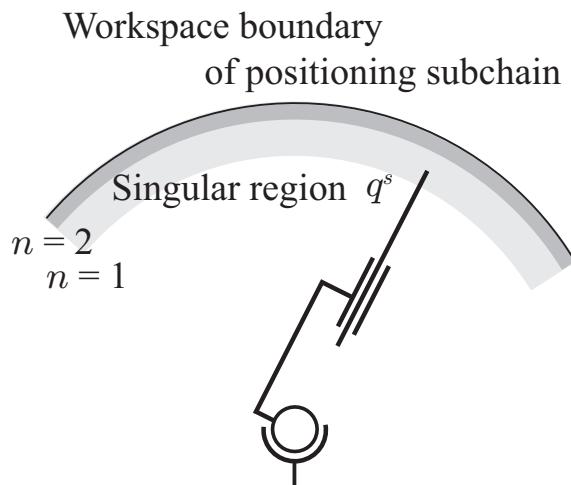


Fig. 6.8: Singular region.

6.4.3 シミュレーションによる検証

これまでの議論をまとめると手首位置に関する逆運動学計算は次式によって、関節速度解を得る。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_p &= \dot{\mathbf{q}}_{xy} + \dot{\mathbf{q}}_z + b_{sm} \mathbf{n}_{sm} \\ &= [\bar{\mathbf{J}}_v^{mod}]^+ \begin{bmatrix} {}^W \dot{p}_x \\ {}^W \dot{p}_y \end{bmatrix} + b_z {}^W \mathbf{n}_z {}^W \dot{p}_z + b_{sm} \mathbf{n}_{sm}\end{aligned}\quad (6.39)$$

b_{sm} は冗長運動の大きさを表す係数である。これにより、肘特異点を考慮した擬似逆行列に基づく逆運動学計算が可能となり、冗長運動を独立して利用することができる。さらに、

$$\dot{\mathbf{q}}_p = b_z \left([\bar{\mathbf{J}}_v^{mod}]^+ \begin{bmatrix} {}^W \dot{p}_{Wx} \\ {}^W \dot{p}_{Wy} \end{bmatrix} + {}^W \mathbf{n}_z {}^W \dot{p}_{Wz} \right) + b_{sm} \mathbf{n}_{sm}. \quad (6.40)$$

とすると、特異点やその近傍においても運動の方向を正確に追従することができる。

ここで、分解特異点適合法を適用した上式による手法の有用性の検証のため、数値シミュレーションを行った。初期条件は内部障害が確認された前節と同様で、初期角度 $\mathbf{q}_p = [77.72 \ 20 \ 20 \ 50]^T$ deg を与え、手首座標系の原点を ${}^0 p_{W'} = [0 \ 0.616 \ 0.602]^T$ m とした。そして、y 軸負方向に沿って手首を移動させるように指令させ、第1関節の回転軸上を通過させるようなシミュレーション条件とした。特異点領域を定義する変数を $n = 2$ とし、手首位置が特異点領域外の場合は手首速度の大きさが 0.4 m/s の等速軌道追従指令、領域内は手先速度の大きさが 0.4 m/s に滑らかに補間するよう、スケールダウンした b_z を与えた。また、 $b_{sm} = 0$ とし、シミュレーション時間は 10 s とした。

シミュレーション結果を Fig. 6.9 に示す。それぞれ関節角度、角速度、手先位置および特異点指標である。従来の特異点適合法を用いた場合、 $c = 0$ で内部障害が生じていたが、 $c = 0$ となる状態を通過し、目標方向に手首が追従していることが確認できる。また、ワークスペースの境界を表す肘特異点の姿勢状態においても手首原点の運動方向が一般性を失うことなく関節速度解を得ることができている。手首原点の速度に注目すると、肘特異点から離れた場合は指令通りの大きさ 0.4 m/s で運動していることがわかり、肘特異点に近づくと減速し肘特異点で 0 となっている。つまり、肘特異点で関節速度ベクトルが瞬間に零空間ベクトルとなることがわかる。

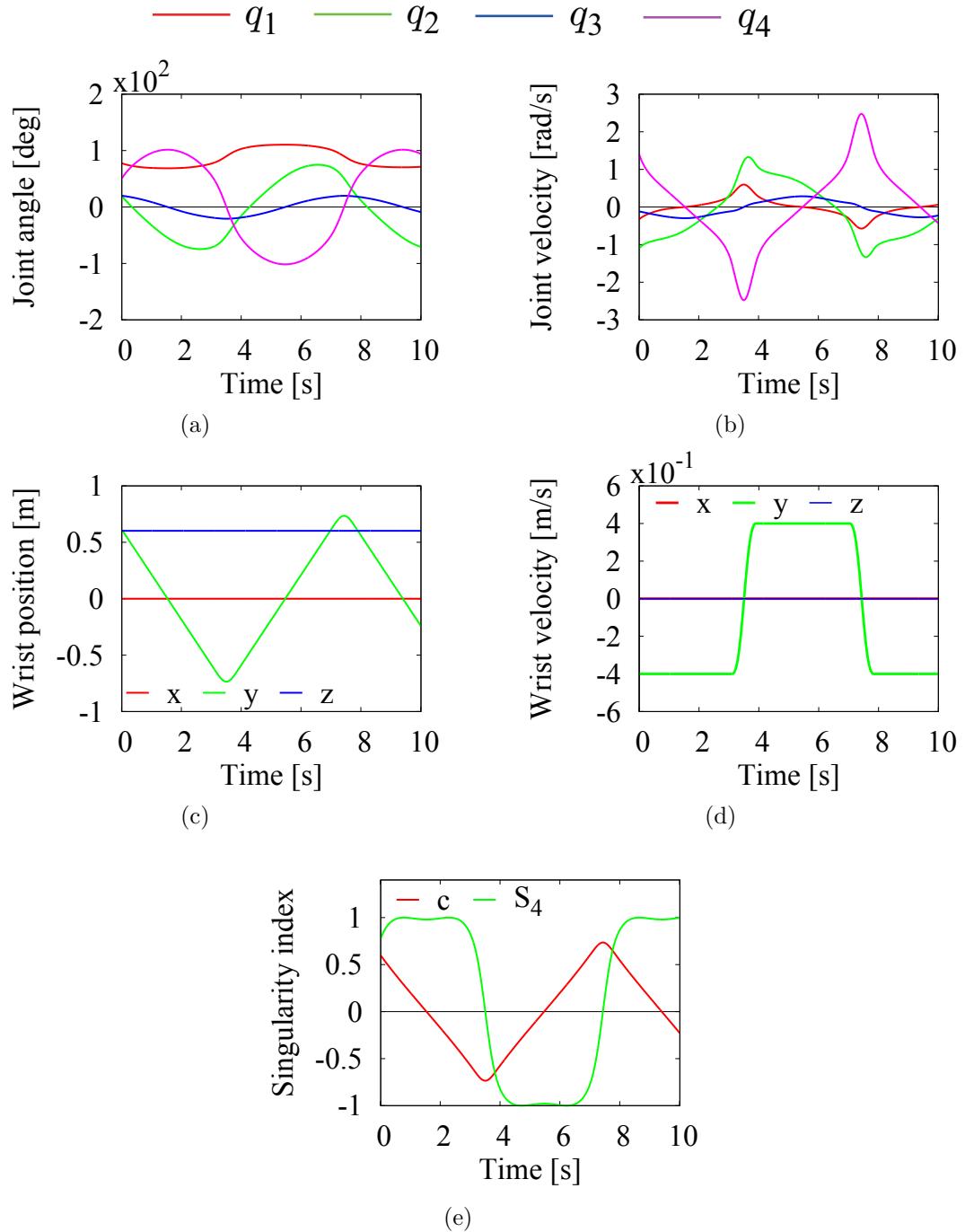


Fig. 6.9: Linear path following with a positioning subchain of S-R-S type manipulator with proposed singularity-consistent method. Inner obstacle is not appeared when $c = 0$.

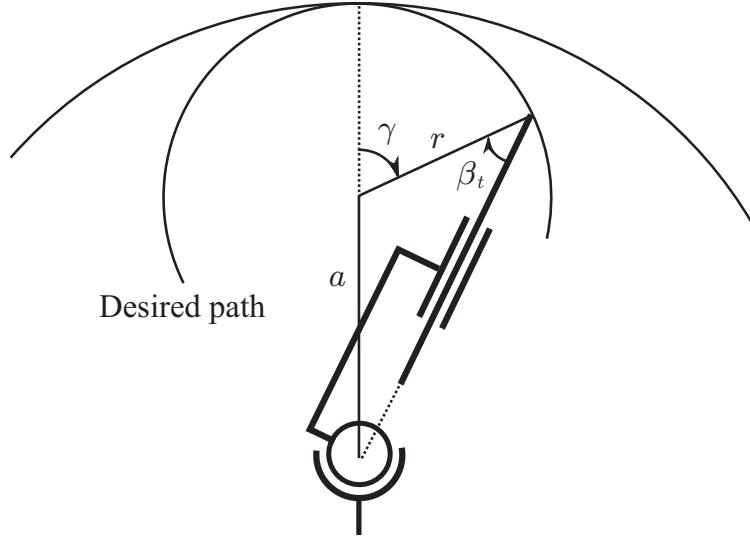


Fig. 6.10: Circular path parameter for S-R manipulator.

この結果から、分解特異点適合法による本手法は、特異点適合法の従来手法で確認された内部障害の問題を解消でき、特異点適合法の利点である特異姿勢においても関節速度解を計算することができる。また、関節速度解のユークリッドノルムを最小化する擬似逆行列による逆運動学の性質を有している。さらに、冗長自由度が独立しているため、冗長性を利用することが可能である。

次に、定常特異点問題となるような、手首原点が外部境界に接する指令を与える場合について議論する。まず、円経路の運動を表す幾何学パラメータを Fig. 6.10 に示す。図より、円経路は仮想マニピュレータによって与えられ、半径 r 、回転角 γ でパラメータ化される。前章で示したアプローチを基に、経路パラメータを用いて肘特異点となる S_4 を表すと、

$$S_4 = \pm 2 \cos \frac{q_4}{2} k \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (6.41)$$

$$k = \frac{ar}{d_3 d_5} \quad (6.42)$$

となる。また、特異方向の手首原点の運動の大きさは

$${}^W \dot{p}_z = \| {}^W \dot{p} \| \sin \beta_t = \| {}^W \dot{p} \| \left(\frac{a}{r_s} \right) 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad (6.43)$$

として表されるので、Fig. 6.10 のようなワークスペースの外部境界では、 $\sin(\gamma/2)$ を打ち消すことにより、円経路を達成する。

分解特異点適合法の利点である定常特異点問題対策の検証のため、次の条件でシミュレーションを行った。初期姿勢を $q_p(0) = [143.973 \ -137.310 \ 0 \ 88.727]^T$ deg とした。手先経路は半径 $r = 0.4\text{ m}$ で、シミュレーション時間 10 s に対し、 γ を -90 deg から 90 deg に等角速度で x - y 平面に変化させて生成した。また、このときの (6.41) の符号は負である。

シミュレーションによるマニピュレータの運動を Fig. 6.11, グラフを Fig. 6.12 に示す。それぞれ関節角度、角速度、手首原点の位置、速度、肘特異点指標、手首原点の軌跡である。シミュレーション開始してから 5 s で定常特異点となっているが、指令方向への運動を生成することができ、かつ関節速度が安定して計算されていることが確認できる。

この結果から、分解特異点適合法の適用により経路がパラメータ化される限り、定常特異点となる指令でも生成することができる。また、S-R 型の冗長マニピュレータにおいては手首部のワークスペースをより広く活用することが可能となる。

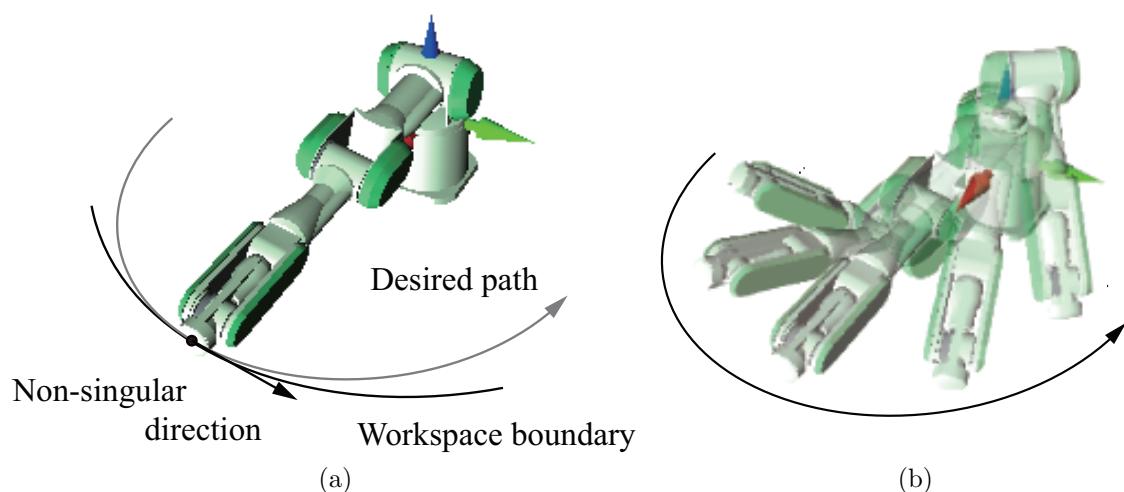


Fig. 6.11: The end-effector following the desired circular path and moving in the non-singular direction at the elbow singularity.

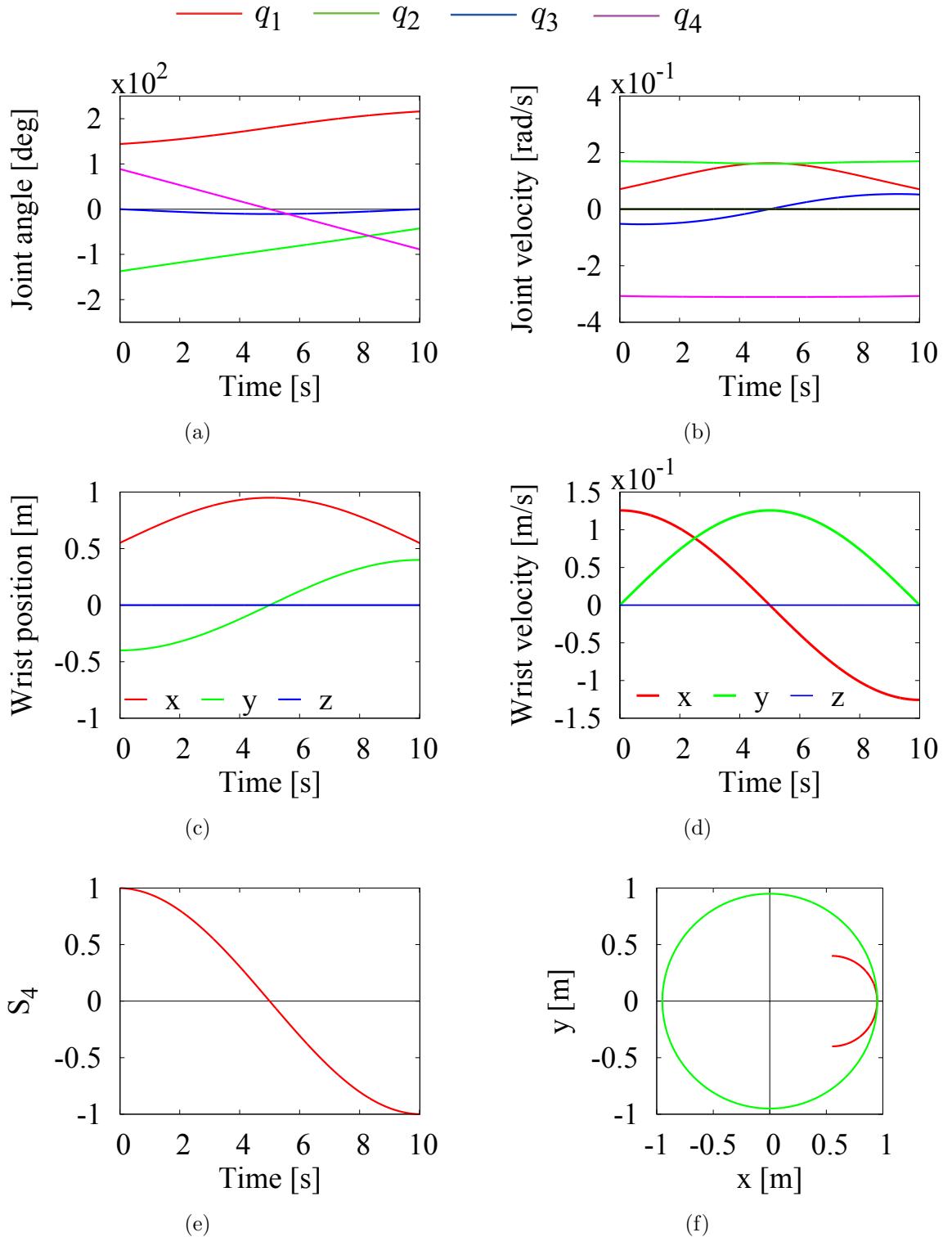


Fig. 6.12: Simulation results illustrate that the motion can be generated in a stable way even when the end-effector follows a path tangent to the outer workspace boundary.

6.5 手先姿勢の考慮

6.5.1 冗長性を利用した特異点回避

上記の議論で示した冗長マニピュレータにおける分解特異点適合法の特徴の一つは、冗長自由度を独立して利用できる点である。ここでは、手先姿勢を考慮したS-R-Sマニピュレータの逆運動学解法を分解特異点適合法に基づいてアプローチし、冗長性の利用について議論する。

(6.12) を Fig. 6.7 の $\{W\}$ を基準に表すと次式となる。

$$\dot{\mathbf{q}}_w = \begin{pmatrix} W' \\ W \end{pmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{A}_\omega^{-1} \mathbf{W} \boldsymbol{\omega}_7 = \mathbf{A}_\omega^{modW} \boldsymbol{\omega}_7 \quad (6.44)$$

$$\begin{pmatrix} W' \\ W \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} C_\beta & 0 & S_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\beta & 0 & C_\beta \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

ここでは、冗長自由度のを利用して姿勢の逆運動学計算に対して手首特異点を回避するために活用する。Positioning subchain の関節速度 $\dot{\mathbf{q}}_p$ と W からの角速度 ${}^0\boldsymbol{\omega}_W$ を、

$${}^0\boldsymbol{\omega}_W = \mathbf{A}_p \dot{\mathbf{q}}_p \quad (6.46)$$

と表す変換行列 \mathbf{A}_p を用いて、冗長自由度が $\{W\}$ に与える姿勢変化を $\boldsymbol{\omega}_{sm}$ と表すと、

$$\boldsymbol{\omega}_{sm} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_s S_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_p \mathbf{n}_{sm} \quad (6.47)$$

となる。これを用いて冗長自由度が手先姿勢に与える影響を考慮すると、姿勢運動における速度空間の関係は以下の式で表される。

$${}^W \boldsymbol{\omega}_7 = \mathbf{A}_\omega^{mod} \dot{\mathbf{q}}_w + \dot{q}_{sm} \boldsymbol{\omega}_{sm} = \bar{\mathbf{A}}_\omega^{mod} \dot{\mathbf{q}}_w \quad (6.48)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_\omega^{mod} = \begin{bmatrix} S_\beta & -C_\beta S_5 & S_\beta C_6 + C_\beta C_5 S_6 & 0 \\ 0 & C_5 & S_5 S_6 & 0 \\ C_\beta & S_\beta S_5 & C_\beta C_6 - S_\beta C_5 S_6 & r_s S_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_w = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_w & \dot{q}_{sm} \end{bmatrix}^T$$

これより、

$$\dot{\mathbf{q}}_w = (\bar{\mathbf{A}}_\omega^{mod})^{+W} \boldsymbol{\omega}_7 = (\bar{\mathbf{A}}_\omega^{mod})^T \frac{\text{adj}(\bar{\mathbf{A}}_\omega^{mod} (\bar{\mathbf{A}}_\omega^{mod})^T)}{\det(\bar{\mathbf{A}}_\omega^{mod} (\bar{\mathbf{A}}_\omega^{mod})^T)} {}^W \boldsymbol{\omega}_7 \quad (6.49)$$

として $\dot{\bar{q}}_w$ のユークリッドノルムを最適にするように、関節速度解を得る。これは関節速度解を得る際に、作業空間の大きさが考慮されるので、非冗長システムにおけるGOの性質と類似している。このときの特異点は、

$$\text{rank}(\bar{A}_\omega^{mod}) = 2 \Rightarrow S_2 = 0 \text{ and } S_6 = 0 \quad (6.50)$$

であるが、擬似逆行列を用いるため、この特異点を回避するように関節速度を求めることができる。すなわち、この場合の特異点と肘特異点が多重特異点となるような特別な場合を除いて、姿勢運動を生成することが可能である。

本論文で提案するS-R-Sマニピュレータの逆運動学解法をまとると次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{q}_p &= b_z \left([\bar{J}_v^{mod}]^+ \begin{bmatrix} {}^W \dot{p}_{Wx} \\ {}^W \dot{p}_{Wy} \end{bmatrix} + {}^W \mathbf{n}_z {}^W \dot{p}_{Wz} \right) + \dot{q}_{sm} \mathbf{n}_{sm} \\ \dot{\bar{q}}_w &= (\bar{A}_\omega^{mod})^{+W} \omega_7 \end{aligned} \quad (6.51)$$

6.5.2 シミュレーションによる検証

ここで、上記の議論で定式化したS-R-Sマニピュレータの逆運動学解法の確認のため、次の条件でシミュレーションを行った。初期状態は $q = [70 \ 20 \ 20 \ 50 \ 50 \ 20 \ 0]^T$ deg, 手先指令 ν^{ref} は、

$$\nu^{ref} = w = \begin{bmatrix} \|{}^0 \dot{p}_7^{ref}\| \mathbf{t}_* \\ \|{}^0 \omega_7^{ref}\| \hat{\omega} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

に対し、手先速度の大きさ $\|{}^0 \dot{p}_7^{ref}\| = 0.4$ m/s, 手先の運動方向 $\mathbf{t}_* = [0 \ 1 \ 0]^T$, 手先姿勢運動の大きさ $\|{}^0 \omega_7^{ref}\| = 0.2$ rad/s, 手先の運動方向 $\hat{\omega} = [1 \ 0 \ 0]^T$, また, Positioning subchain の特異点適合法適用領域を $n = 2$ とし, 領域内では手首部の運動だけでなく手先姿勢運動の大きさも拘束した。

シミュレーションによるマニピュレータの運動をFig. 6.13に示す。肘部が伸びきったマニピュレータの状態が特異姿勢である。また、グラフをFig. 6.14に示す。それぞれ関節角度, 角速度, 手先位置, 速度, 特異点指標, 手先角速度である。まず, 手先速度に注目すると, 肘特異点近傍の特異点領域において手先速度を拘束し, 特異点適合法により関節速度解を安定して得ていることがわかる。また, 指令した手先方向に沿って運動しているこ

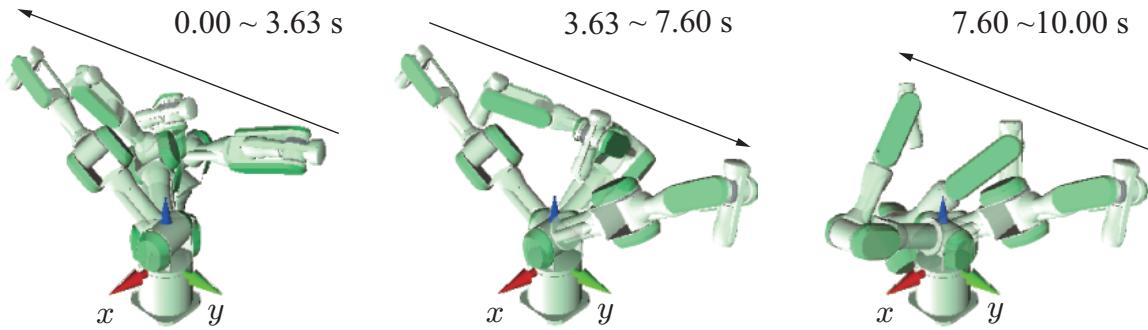


Fig. 6.13: The end-effector moving along y -axis and rotating around x -axis.

とが確認できる。手先の角速度も同様に、特異点領域で大きさが拘束されるが、指令した方向への角速度を持った運動が生成されている。

この結果から、分解特異点適合法を適用した Positioning subchain と冗長自由度を利用した Orientation subchain を別々に逆運動学計算を行うことで、特異点の影響を受けることなく S-R-S マニピュレータの運動が表現できる。

6.6 冗長自由度の利用

6.6.1 冗長自由度の独立性

[77][78]で提案されている特異点適合法は、一つの関節を固定することによる非冗長マニピュレータでモデリングを行っていた。それに伴い内部障害の問題やそれを回避することによる冗長自由度の制限が課題であった。分解特異点適合法と擬似逆行列の組み合わせによる提案手法の利点は、冗長自由度を独立して利用できることである。前節では、その冗長性を特異点回避を作業目的とした場合のモデリングを提案した。ここでは、前章 6R マニピュレータの Orientation subchain に基づいた定式化により、冗長自由度の独立性を示す。

まず、 q_p によって干渉する姿勢の影響を、

$${}^0\omega_W = A_p \dot{q}_p \quad (6.53)$$

として表現する。姿勢に関する手先指令値 ${}^0\omega_7$ によって、6R マニピュレータの姿勢に関する運動学の関係は、

$${}^0\omega_7 = {}^0\omega_W + {}^0R_W {}^W\omega_7 \quad (6.54)$$

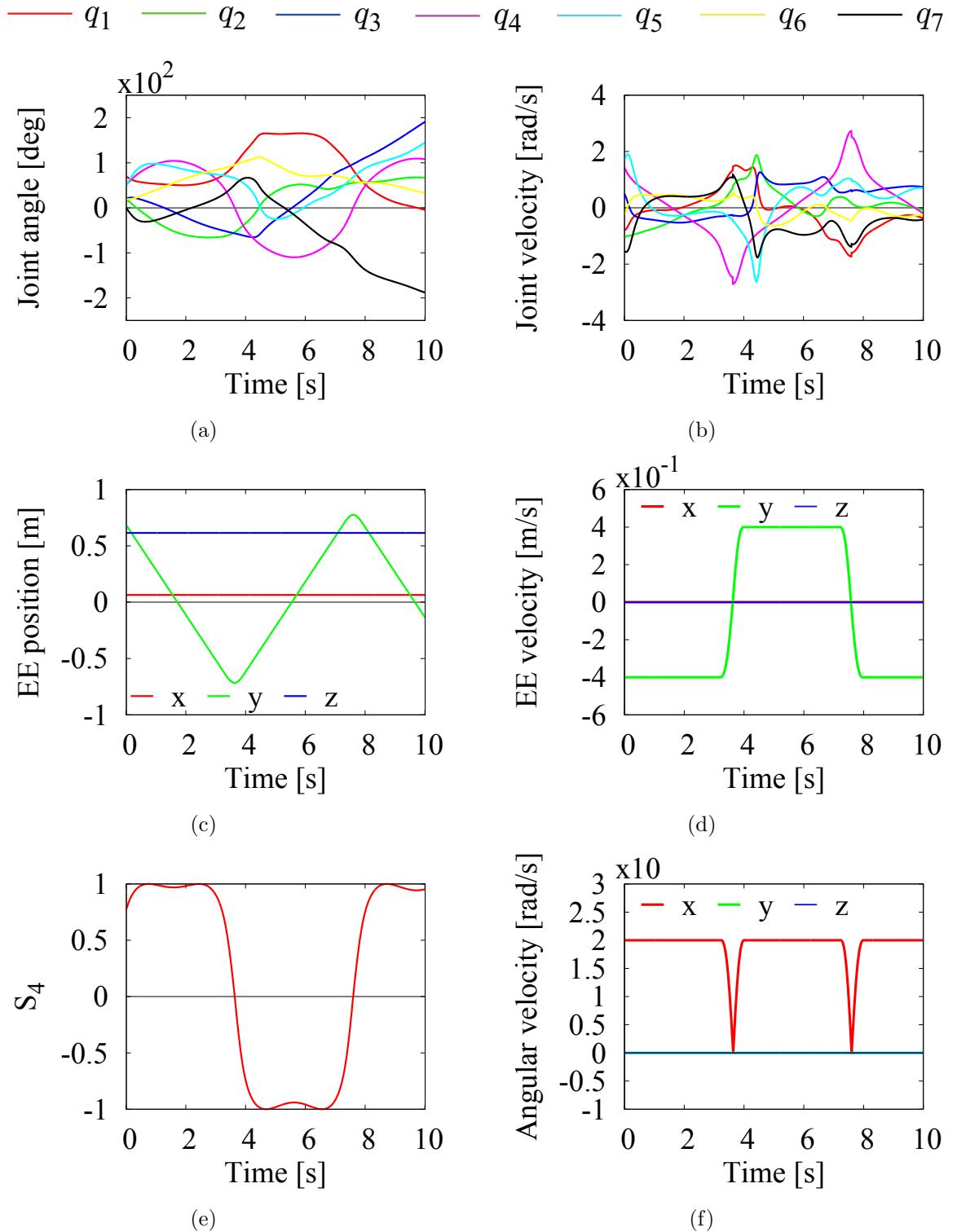


Fig. 6.14: The desired path of the end-effector is parallel to the y -axis of the base frame. Simulation results illustrate that the motion can be generated without unstable conditions in the singularity neighborhood, i.e. joint velocity can be obtained when approaching and moving away from the elbow singularity.

である。このとき、 \dot{q}_w を用いて (6.54) は次のように表せる。

$${}^0\omega_7 = {}^0\omega_W + {}^0R_W{}^W A_\omega \dot{q}_w \quad (6.55)$$

(6.55) から、 \dot{q}_w を求める逆運動学計算は、

$$\dot{q}_w = A_\omega^{-1} {}^0R_W^T ({}^0\omega_7 - {}^0\omega_W) \quad (6.56)$$

となる。以上から、冗長自由度 \dot{q}_{sm} を用いずに姿勢の影響を考慮した逆運動学解法が可能であることから、冗長自由度を独立して利用することが可能である。

6.6.2 関節速度の挙動解析

SRS型マニピュレータは手先の速度、角速度それぞれに対し、関節速度解を非干渉化できる。ゆえに、関節速度 \dot{q}_p 、 \dot{q}_w の挙動を別々に解析する。

\dot{q}_p について

本論文で提案する手法は、 \dot{q}_p を J_v^{mod} の擬似逆行列によって解を得る。この変換は次の目的関数 f を最小化する。

$$f = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 \quad (6.57)$$

ここで、 J_v^{mod} の零空間ベクトル n_{sm} は (6.32) で表される。つまり、 $\dot{q}_4 = 0$ であることから、 \dot{q}_4 は任意の速度 ${}^W\dot{p}$ に対して一意に定まる。また、そのときの値は、

$$\dot{q}_4 = -\frac{r_s}{d_3 \sin \beta} {}^W\dot{p}_z \quad (6.58)$$

$$\beta = \operatorname{sgn}(\sin q_4) \cos^{-1} \left(\frac{d_3 \cos q_4 + d_5}{r_s} \right) \quad (6.59)$$

である。つまり、提案手法は \dot{q}_p を得る過程で次の目的関数 f' を最小化する変換とみなせる。

$$f' = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 \quad (6.60)$$

ここで, $\mathbf{q}_s = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ とすると, \mathbf{q}_s は仮想的な球面関節としてみなすことができる。 \mathbf{q}_s によって表される第3関節の姿勢変化を支配する角速度を ${}^W\omega_3 \in \mathbb{R}^3$ すると, $\dot{\mathbf{q}}_s$ は

$$\dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{A}_s^{-1} {}^W\omega_3 \quad (6.61)$$

$${}^W\omega_3 = \frac{1}{r_s} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\cot\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^W\dot{\mathbf{p}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{sz} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

によって得られる。 b_{sz} は $\dot{\mathbf{q}}_s$ を最適に与えるような角速度ベクトルを定義する係数である。つまり, ${}^W\omega_3$ は二次元の平面として定義される。このとき, 次の命題が成り立つ。

命題

$$\|\dot{\mathbf{q}}_s\|_\infty \leq \|{}^W\omega_3\| \quad (6.63)$$

証明

角速度ベクトル ${}^W\omega_3$ の方向成分を ${}^W\hat{\omega}_3 \in \mathbb{S}^2$ と定義する。ここで, 変換行列 \mathbf{A}_s の左特異ベクトルを $\mathbf{u}_j \in \mathbb{S}^2$, $j \in \{1, 2, 3\}$ とし, ベクトル x を

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{TW} \hat{\omega}_3 \\ \mathbf{u}_2^{TW} \hat{\omega}_3 \\ \mathbf{u}_3^{TW} \hat{\omega}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^2 \quad (6.64)$$

とすると, x と $\dot{\mathbf{q}}$ は次の関係を満たす。

$$\dot{q}_1 = \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_3 \quad (6.65)$$

$$\dot{q}_2 = x_2 \quad (6.66)$$

$$\dot{q}_3 = \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_3 \quad (6.67)$$

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{2 \cos(q_2/2)} x_1, \quad \dot{\phi}_3 = \frac{1}{2 \sin(q_2/2)} x_3$$

このとき, 最適化される関数 f' は次式として改められる。

$$\begin{aligned} f' &= (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_3)^2 + (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_3)^2 + x_2^2 \\ &= 2\dot{\phi}_1^2 + 2\dot{\phi}_3^2 + x_2^2 \\ &= \frac{1}{2 \cos^2(q_2/2)} x_1^2 + \frac{1}{2 \sin^2(q_2/2)} x_3^2 + x_2^2 \end{aligned} \quad (6.68)$$

ここで、

$$x_1^2 + x_3^2 = c \quad (6.69)$$

を仮定し、 f' を q_2 で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{df}{dq_2} &= \frac{\sin(q_2/2)}{2\cos^3(q_2/2)}x_1^2 - \frac{\cos(q_2/2)}{2\sin^3(q_2/2)}x_3^2 \\ &= \frac{\sin^4(q_2/2)x_1^2 - \cos^4(q_2/2)x_3^2}{2\sin^3(q_2/2)\cos^3(q_2/2)} \end{aligned} \quad (6.70)$$

を得る。 x_1 および x_3 は q_2 に対して非依存であることより、 f' を最適に与える x_1, x_3 は

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{4c}{3 + \cos 2q_2}} \cos^2 \frac{q_2}{2} \quad (6.71)$$

$$x_3 = \pm \sqrt{\frac{4c}{3 + \cos 2q_2}} \sin^2 \frac{q_2}{2} \quad (6.72)$$

である。このとき f' は、以上の議論から、

$$\begin{aligned} f' &\geq \frac{2c}{3 + \cos 2q_2} + x_2^2 = \frac{2c}{3 + \cos 2q_2} + (1 - c) \\ &= 1 - \left(\frac{1 + \cos 2q_2}{3 + \cos 2q_2} \right) c \end{aligned} \quad (6.73)$$

となる。これは任意の q_2 に対して、

$$0 \leq \left(\frac{1 + \cos 2q_2}{3 + \cos 2q_2} \right) c \leq \frac{1}{2} \quad (6.74)$$

であることから、関数 f' は $c \in [0, 1]$ に対して $\min f' \leq 1$ を満たす。したがって、二次元の角速度ベクトル ${}^W\omega_3$ からの逆運動学解法において、 $\min f' \leq 1$ となる解が必ず存在する。ゆえに、 $\|\dot{q}_s\|_\infty \leq \|{}^W\omega_3\|$ が成り立つ。□

上の証明から、任意の状態において f' が最も最適化されるのは $c = 1, x_2 = 0$ である。その条件下でのシミュレーションの一例を Fig. 6.15 に示す。ただし、初期角度 $q_s = [90 \ 30 \ 0]^T$ deg, $|{}^W\omega_3| = 1$ である。

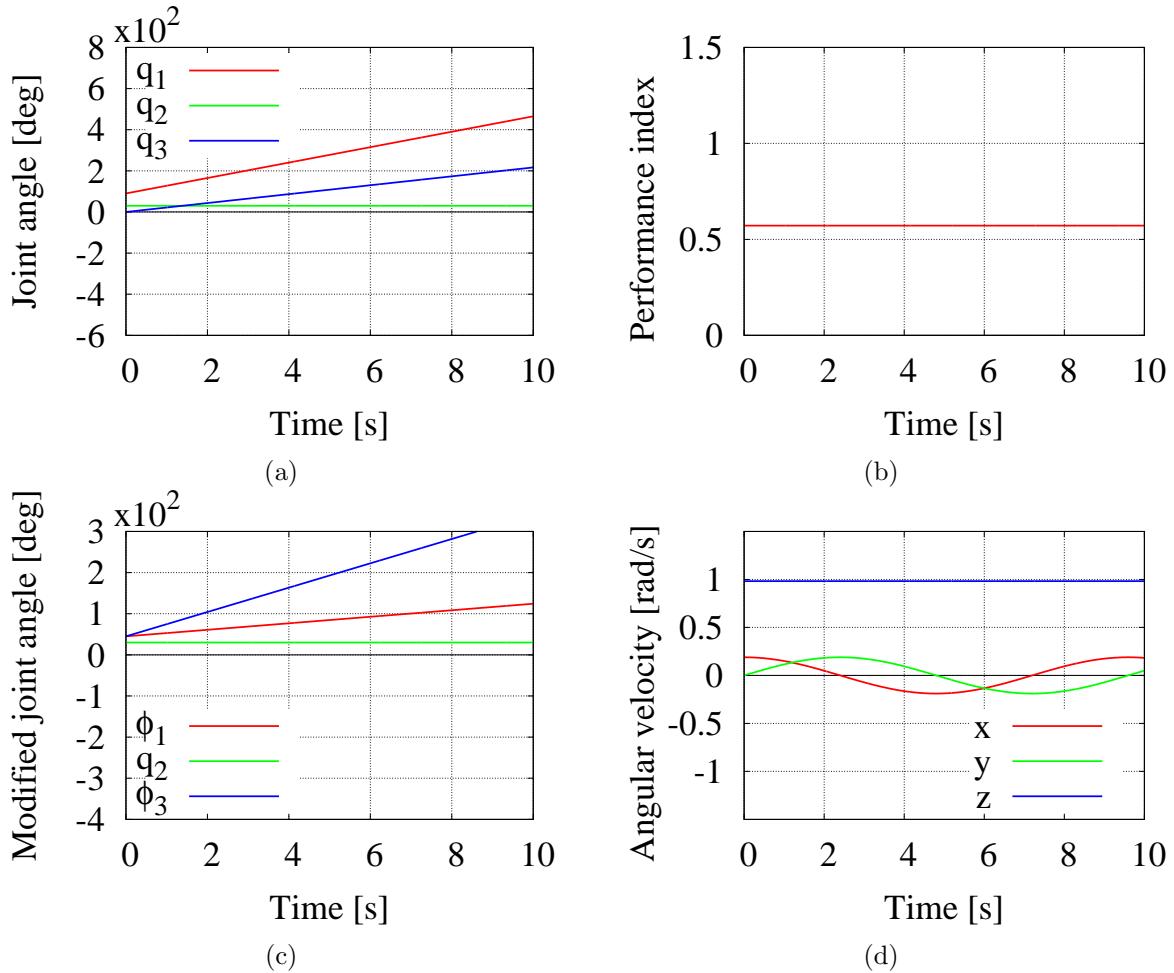


Fig. 6.15: Spherical motion when rotating around the most optimized axis.

\dot{q}_w について

前節で示したように、SRS型マニピュレータを位置と姿勢の非干渉化によって逆運動学計算されるとき、 \dot{q}_w は変換行列 $A_w \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ を通して (6.56) から得られる。ここで、

$${}^W\omega_7 = {}^0\mathbf{R}_W^T({}^0\omega_7 - {}^0\omega_W) \quad (6.75)$$

として、(6.56)を

$$\dot{q}_w = A_w^{-1} {}^W\omega_7 \quad (6.76)$$

とする。(6.76)は姿勢に関する非冗長システムの逆運動学解法であるため、その特異点対策は特異値分解に基づく特異点適合法を適用する。ここで

A_w を特異値分解して得られる左特異ベクトル u_k , 特異値 σ_k , 右特異ベクトル v_k ($k \in \{5, 6, 7\}$) を用いて A_w^{-1} を表すと ,

$$A_w^{-1} = \frac{1}{\sigma_5} v_5 u_5^T + \frac{1}{\sigma_6} v_6 u_6^T + \frac{1}{\sigma_7} v_7 u_7^T \quad (6.77)$$

となる . ただし , $\sigma_5 \geq \sigma_6 \geq \sigma_7 \geq 0$. 特異点適合法の切り替え条件を最小特異値 σ_7 を用いて

$$\sigma_7 \leq \epsilon \quad (6.78)$$

とすると , 関節速度 \dot{q}_w は ,

$$\|\dot{q}_w\|_\infty \leq \|{}^W\omega_7\| \epsilon^{-1} \quad (6.79)$$

を満たす . 関節速度を考慮する場合 , ϵ と指令角速度によって抑制することができる .

6.6.3 シミュレーションによる検証

数値シミュレーションにより , 冗長自由度の独立性を検証した . (6.52) で与えられる手先指令 \mathcal{V}^{ref} に対し , 手先速度の大きさ $\|{}^0\dot{p}_7^{ref}\| = 0.4 \text{ m/s}$, 手先の運動方向 $t_* = [0 \ 1 \ 0]^T$, 手先姿勢運動の大きさ $\|{}^0\omega_7^{ref}\| = 1.0 \text{ rad/s}$, 手先の運動方向 $\hat{\omega} = [0 \ 1 \ 0]^T$, また , Positioning subchain の特異点適合法適用領域を $n = 2$ とし , 領域内では手首部の運動だけでなく手先姿勢運動の大きさも拘束した . 冗長性は b_{sm} が 0 となるように制御した .

シミュレーション結果を Fig. 6.16 に示す . それぞれ関節角度 , 角速度 , 手先位置 , 速度 , 特異点指標 , 手先角速度である . まず , 手先速度に注目すると , 肘特異点近傍の特異点領域において手先速度を拘束し , 関節速度解を安定して得ていることがわかる . また , 指令した手先方向に対して一般性を失うことなく運動していることが確認できる . 手先の角速度も同様に , 特異点領域で大きさが拘束されるが , 指令した方向への角速度による運動が生成されている . さらに , 第6関節が 0 に近づき手首特異点となるような状態であっても特異点適合法の適用により , 角速度の方向を犠牲にしながら解の発散を防いでいることが確認できる .

この結果から , 分解特異点適合法を適用した Positioning subchain と Orientation subchain を非冗長系の逆運動学計算として扱うことで , 特異点の影

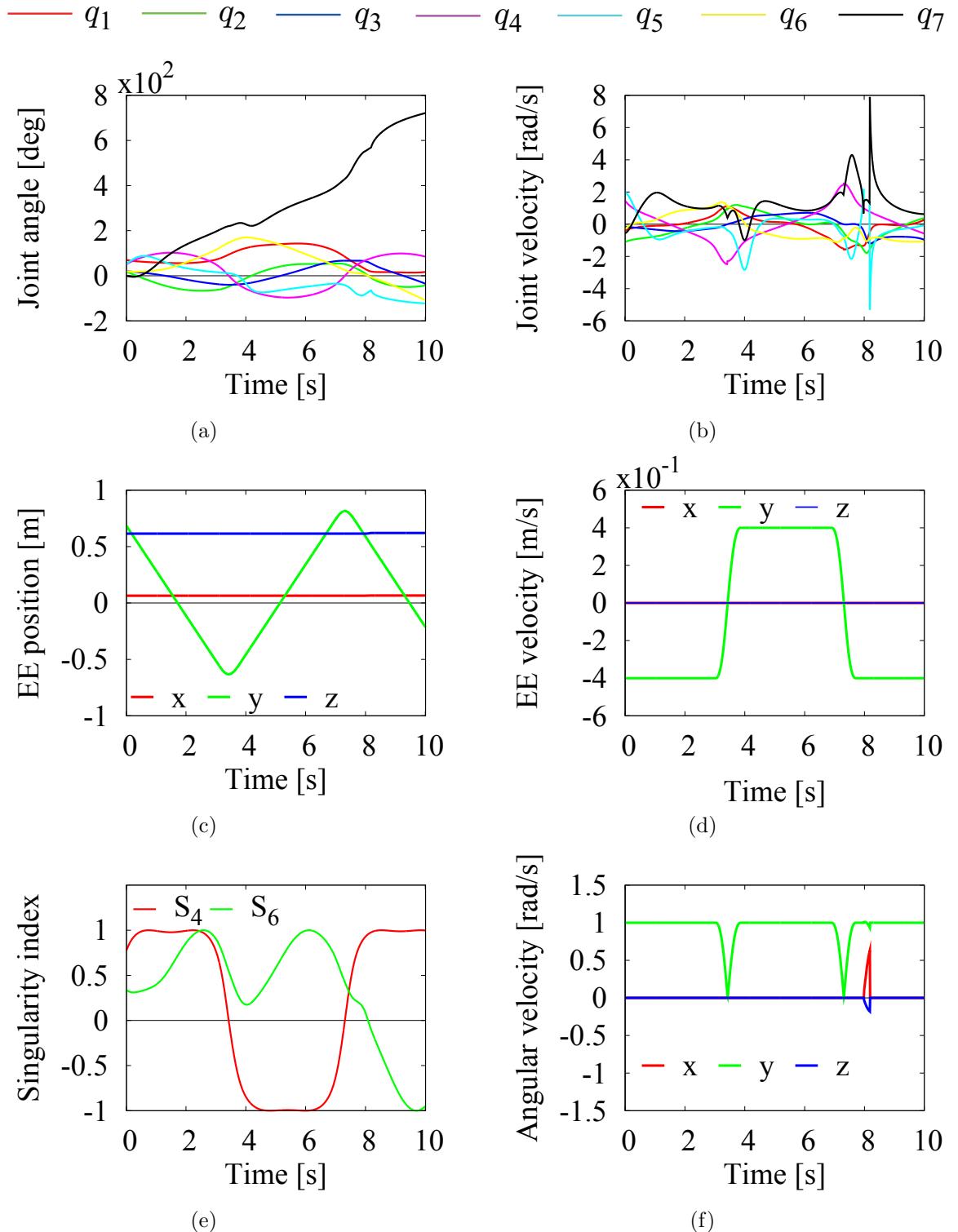


Fig. 6.16: The desired path of the end-effector is parallel to the y -axis with respect to the base frame. Simulation results illustrate that the wrist singularity can be avoided with singularity-consistent-method instead of using the redundancy.

響を考慮したS-R-Sマニピュレータの運動が表現でき、なおかつ、提案手法により冗長自由度を自由に設定できることが可能になった。

6.7 制御系の設計

6.7.1 制御式

提案した逆運動学解法を運動学に基づくS-R-Sマニピュレータの制御に適用する。提案手法は手先の位置/姿勢に関するPD制御で次式で指令値を与える。

$$\mathcal{V}^{ref} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_7^{ref} \\ {}^0\omega_7^{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{dp} {}^0\dot{\mathbf{p}}_7 - \mathbf{K}_{pp}\mathbf{e}_p \\ -\mathbf{K}_{dw} {}^0\omega_7 - \mathbf{K}_{pw}\mathbf{e}_w \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

式中、 \mathbf{e}_p は位置の誤差ベクトルで、

$$\mathbf{e}_p = {}^0\mathbf{p}_7 - {}^0\mathbf{p}_7^{des} \quad (6.81)$$

与えられる。ただし、 ${}^0\mathbf{p}_7^{des}$ は目標の手先位置である。また、 \mathbf{e}_w は姿勢の誤差ベクトルを表し、目標姿勢を ${}_7\mathbf{R}^{des} \in SO(3)$ 、状態の姿勢を ${}_7\mathbf{R}(\mathbf{q}) \in SO(3)$ とするとき、それぞれの基底ベクトルから

$$\mathbf{e}_w = \frac{1}{2} (\mathbf{x} \times \mathbf{x}^d + \mathbf{y} \times \mathbf{y}^d + \mathbf{z} \times \mathbf{z}^d) \quad (6.82)$$

によって算出する。 $\mathbf{K}_{(\circ)}$ はフィードバックゲインである。

6.7.2 シミュレーションによる検証

提案制御式のブロック線図を Fig. 6.17 に示す。本制御の有用性の検証のため、数値シミュレーションを行った。初期角度 $\mathbf{q} = [0 \ 20 \ 0 \ 5 \ 90 \ 30 \ 0]^T$ deg とし、目標手先位置を ${}^0\mathbf{p}_7^{des} = [0.5818 \ 0.5818 \ 0.555]^T$ m、目標姿勢は ${}_7\mathbf{R}^{des}$ は単位行列とした。指令は終端状態のみで与えられ、PTP 制御となる。各ゲインは $\mathbf{K}_{pp} = 0.8 \text{ s}^{-1}$ 、 $\mathbf{K}_{dp} = 0.5$ 、 $\mathbf{K}_{pw} = 0.8 \text{ s}^{-1}$ 、 $\mathbf{K}_{dw} = 0.5$ と設定した。また、Positioning subchain の特異点適合法適用領域を $n = 2$ とし、領域内では手首部の特異方向のみ b_z によって運動を制限した。

シミュレーション結果を Fig. 6.18 に示す。それぞれ関節角度、角速度、手先位置、速度、肘特異点指標、手先角速度、目標位置との誤差、目標姿勢

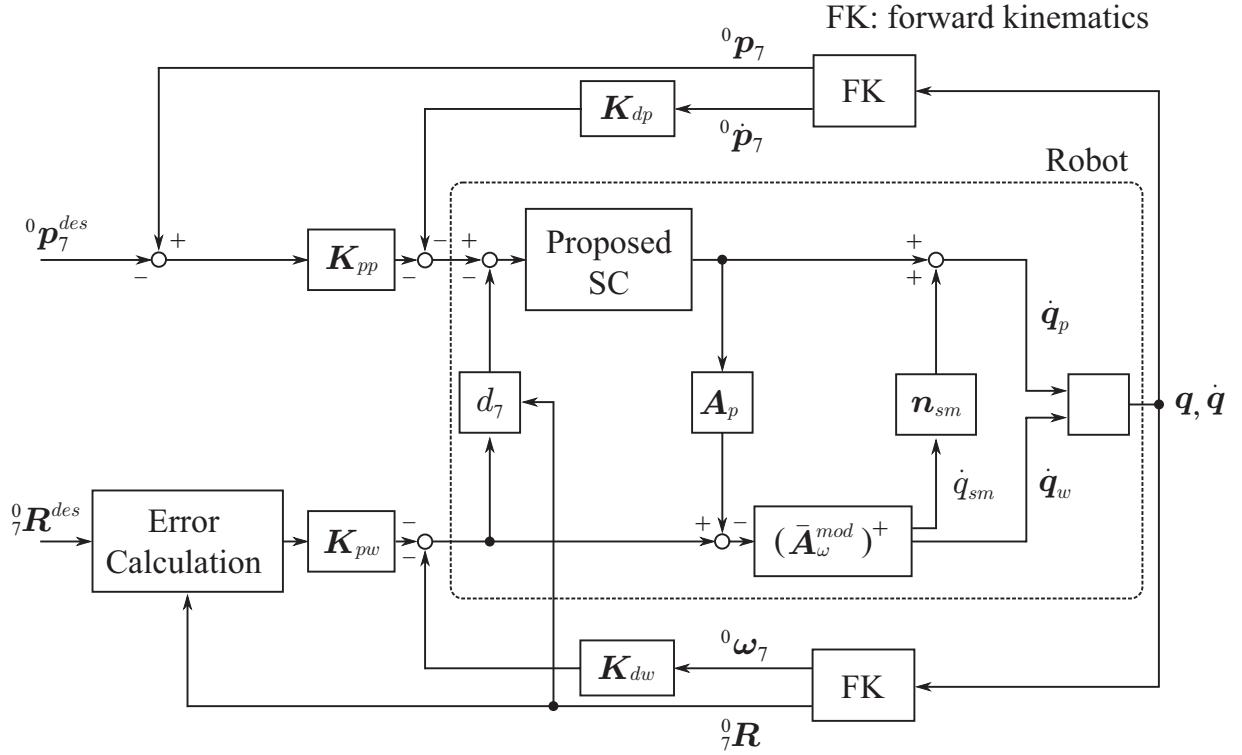


Fig. 6.17: Block diagram of kinematic controller with proposed method.

との誤差である。まず、目標位置/姿勢との誤差に注目すると、それぞれ0に向かっていることから、目標位置/姿勢に収束していることがわかる。また、与えた条件では初期状態、終端状態ともに特異点領域で定義されるが、肘特異点近傍においても制御できることがわかる。

以上より、本手法はワークスペース内に目標位置/姿勢が定義される限り、制御できる。つまり、提案したS-R-Sマニピュレータの逆運動学解法を用いることで全てのワークスペースを制御範囲として扱うことができる。

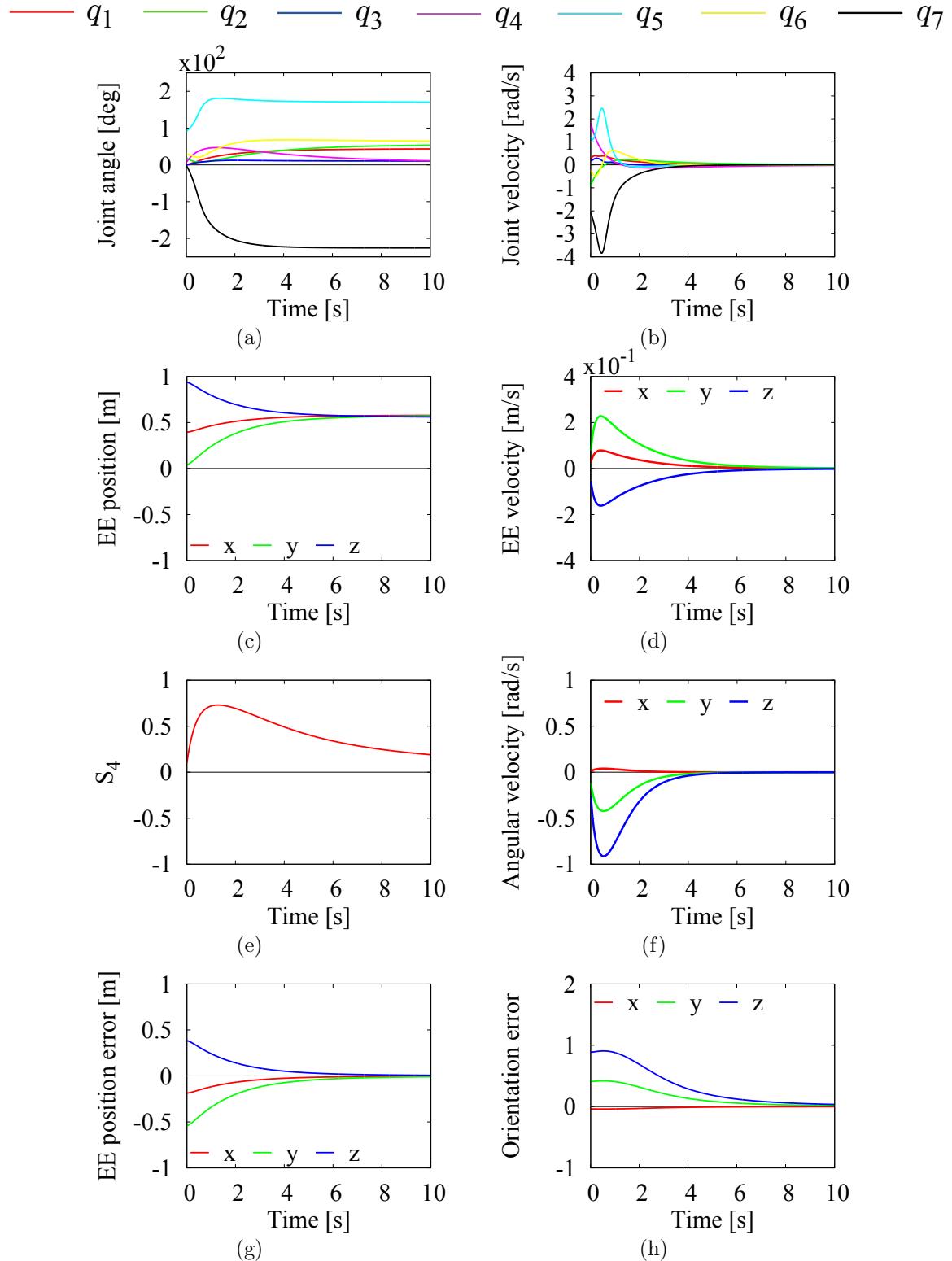


Fig. 6.18: Simulation results of kinematic controller with proposed method. These results illustrate that the motion can be generated without unstable conditions in the singularity neighborhood. Also, the end-effector reaches both the desired position and orientation.

第7章 結言

7.1 結論

本論文では、特異点問題を考慮した逆運動学解法の開発から制御への適用を目的とし、位置/姿勢を表現するパラメータに対して非冗長系と冗長系の違いに応じてアプローチした。特に、三次元空間に定義される剛体の姿勢変化とオイラー角の関係、ならびにロボットマニピュレータの手先の位置/姿勢と関節パラメータの関係に着目し、それぞれ制御する際に必要となる逆運動学計算について議論した。三次元空間上の剛体の角速度からオイラー角の時間変化率を求める逆運動学計算では、特異点適合法を用いて特異点問題を回避し、人工衛星の姿勢制御に適用した。ロボットマニピュレータについては、さまざまな非冗長マニピュレータの経路追従制御の比較検証を行い、制御する上で特異点が与える影響について運動学および動力学に基づいて解析を行った。また、分解特異点適合法を新たに提案し、従来の特異点適合法では不可能な定常特異点を伴う経路追従制御を可能にした。冗長マニピュレータでは、位置/姿勢それぞれによる逆運動学計算を非干渉化できるS-R-S型マニピュレータを用いて議論した。非冗長マニピュレータで提案した分解特異点適合法を適用し、定常特異点を伴う経路追従制御のみならず、従来の特異点適合法で確認された内部障害の問題も解消された。また、運動学による制御系を設計し、特異点の影響を抑えながら、広範囲にわたって制御できることを示した。

以下に各章ごとの要点をまとめる。

第2章 逆運動学解法と特異点問題

位置と姿勢による運動学の違いについてロボットマニピュレータを例に述べた。また、逆運動学計算における特異点問題について述べ、飽和特異点、橢円型内部特異点、双曲型内部特異点に分類し、それぞれの性質を3R平面マニピュレータを例に示した。次に、列拡張ヤコビ行列による逆運動学解法について非冗長、冗長マニピュレータで定式化した。また、それに基づく特異点適合法の性質および条件をシミュレーションを交えて示した。

第3章 特異点適合法に基づくオイラー角による姿勢制御

ここでは、姿勢に関する非冗長システムとして、三次元空間上の剛体を表現するオイラー角と姿勢変化の運動学関係に注目し、特異点適合法による特異点問題の解消ならびに、姿勢制御への適用を議論した。まず、これまでの姿勢制御手法に頻繁に用いられていた単位クオータニオンやMRP、回転行列による姿勢制御の問題点を示し、オイラー角を用いて姿勢を表す本章のモチベーションを明確にした。議論を進める上で、特異点適合法を適用する変換行列の左零空間ベクトルの違いから、NP/SP特異点を定義し、それぞれ別々にアプローチした。修正オイラー角を新たに定義した上で、それぞれの特異点周りにおけるオイラー角の挙動を解析した。また、四つのオイラー角を用いた非特異な姿勢表現と運動学へのアプローチについて定式化した。

以上の議論を踏まえた上で、オイラー角に基づく姿勢制御系を構築して提案した。特に、衛星同士の通信や天体観測など高い追従性が要求され、かつ大きな姿勢変化を伴うようなミッションを想定した。提案した姿勢制御はフィードバックする空間の違いから二つに分類される。一つはオイラー角の状態をそのままフィードバックした固定軸回転制御で、もう一つはオイラー角を姿勢運動を表す空間に変換してフィードバックした固定軸回転制御である。オイラー角の誤差を直接フィードバックした姿勢制御は、数値シミュレーションによる検証の結果、目標姿勢へ落ち着いていることが確認できた。だが一方で、時間に対して高次元に変化するオイラー角の非線形性により、特に特異点周りの姿勢追従性に問題があることが確認された。これに対し、剛体が実際に運動する作業空間に変換してフィードバックした姿勢制御では、追従性が改善されることを数値シミュレーションで示した。また、提案した姿勢制御方式は特異点適合法と併せて用いることにより、大域的に姿勢を表すことができ、特異点領域を除く準大域的な姿勢安定を保証した。さらに、姿勢の回転方向を拘束しないFull attitude maneuverによる指令を与え、シミュレーションを通して、その有用性を示した。この結果から、提案した姿勢制御はあらゆるミッションを想定して拡張可能であることを導いた。

第4章 非冗長マニピュレータにおける逆運動学解法の比較解析

さまざまな経路追従制御の比較を行い、特異点が与える影響について検証した。比較した制御手法は、特異点によって手先速度の大きさを拘束するNM、与えた経路に対して一定の速度で制御するCS、手先空間の拘束によって生じる関節空間の一次元多様体に対し、その弧長を一定にして制御するCAL、列拡張空間を含めた関節空間の二次元多様体から最適解を選んで与えた経路を追従させるGOである。2Rマニピュレータ、3R非冗長マニピュレータを用いて、その手先に与えた円経路を四つの手法でシミュレーションを行った。その結果、2Rマニピュレータで得られた性質が3Rマニピュレータでも確認された。それぞれの手法について運動学および動力学の観点から解析すると、NMは最大関節トルクを抑えることができ、かつ関節速度が安定していることがわかり、運動学、動力学どちらの面においても有用性が高いことが示された。一方、CSは関節速度の挙動が激しく、四つの手法の中では特異点の影響を最も受けやすい制御であることが確認された。さらに、運動学に基づく解析の結果CALとGOの類似性が見えてきた。GOは手先速度も含めた最適解を表すのに対し、CALは関節速度のみの最適解であることがわかった。つまり、CALは非冗長マニピュレータの中で関節速度を最適とするように手先速度を与える手法であるといえる。また、GOは特異点に近づくほどCALに近くなることがわかった。一方で、CALとGOを動力学の面から見ると、特異点の影響を受けやすいことが確認された。以上の結果から、運動学および動力学双方の観点から見ると、NMが最も適していると結論づけた。

第5章 分解特異点適合法による逆運動学解法

前章では、特異点がマニピュレータの運動学および動力学に与える影響を考察するため、特異点近傍の経路を与えて比較検証を行ったのに対し、ここではマニピュレータが特異姿勢となる場合を考慮した逆運動学解法について述べた。まず、作業空間が二次元の2Rマニピュレータに対し、手先の運動方向を特異点を引き起こす特異方向とそうでない非特異方向に分解したモデリングを立て、特異方向のみに従来の特異点適合法を適用する分解特異点適合法を提案した。これまでの特異点適合法では不可能であった定常特異点問題について定義した後、定常特異点を伴う二つの経路に対し、それぞれ作業空間における幾何学的な拘束を定式化した。その上で、分解特異点適合法と幾何学的な拘束を用いることにより、定常特異点問題が解消されることを数値シミュレーションを通して示した。さらに、分解特異点適合法を作業空間が三次元のものに拡張した、それを利用した6Rマニピュレータの逆運動学解法について議論した。

手先姿勢についての逆運動学解法は第3章の人工衛星の姿勢制御に適用した特異点適合法を用いた。シミュレーションの結果、手先位置については分解特異点適合法、手先姿勢については第3章の手法を用いることで、特異点に達しても安定的に関節速度解を得られることが確認され、6Rマニピュレータの新たな逆運動学解法として提案した。

第6章 冗長マニピュレータにおける逆運動学解法と制御への適用

前章までは、非冗長システムを扱ってきたのに対し、本章では冗長マニピュレータの逆運動学解法について議論した。冗長マニピュレータは手先の位置/姿勢を六次元で表現可能なS-R-S型マニピュレータを用いた。特に実機への適用を見据えて、三菱重工業株式会社製可搬式汎用知能アームPA-10を基にモデリングを行った。モデリング後、冗長マニピュレータで特異点適合法を適用する際に生じる内部障害について述べ、S-R-S型マニピュレータにおける内部障害の解析を行った。次に、前章の6Rマニピュレータ同様に、分解特異点適合法の適用を図った。冗長マニピュレータでは、その冗長性ゆえ関節速度解が無数に存在するが、その中でも関節速度のユークリッドノルムを最小となるような逆運動学解法を採用了。その結果、内部障害の問題は解消された。冗長自由度は手先の姿勢表現に利用した。4自由度で姿勢を表すことで、多重特異点を除いて特異点を回避することができ、かつ指令に対して正確に表現できることを示した。また、それを数値シミュレーションによって確認した。

7.2 今後の課題

本研究の今後の課題を述べる。

1. 本論文で提案したオイラー角による姿勢制御の利点は、固定軸回転や大角度回転など単位クオータニオンでは実現困難なミッションに絞って得たものであった。Full-attitude maneuverでは目標姿勢に対して安定的であることを示したもの、特異点に入った際の姿勢表現の厳密性の問題は避けられない。これらは三つの変数を用いたオイラー角による姿勢制御の限界であると考える。そこで、3.6節で示した四つのパラメータによる特異点を回避した姿勢表現と冗長性の制御は単位クオータニオンを用いない手法として有効であると思われる。特に、同型のシステムであるControl Momentum Gyros(付録: E.2)の特異点対策への応用も期待できる。

2. 本論文で提案した分解特異点適合法は Arm-plane が三角型で表されるものでモデリングされている。つまり、特異方向への運動に対して局所的な非冗長システムとみなせる場合についてのみの適用議論であった。そのため、平面 3R マニピュレータのように特異方向への運動を表す関節の組み合わせが一意に定まらない場合には適用できない。これは特異方向運動を定義する関節空間が曲面として描かれるためである。それゆえ、その中から一意に関節変位解を得るために手先の拘束以外に別の目的関数を設定する必要がある。同様の理由で、NM も冗長マニピュレータの手先追従制御に用いられない。したがって、複数ある解の中から適切なものを選ぶ決め方を明確にすることで分解特異点適合法の適用範囲の拡張や冗長マニピュレータによる NM の実現が期待できる。
3. 本論文では、内部障害（アルゴリズミック特異点）を解消した逆運動学解法を提案した。これにより、作業空間を拡張することに成功した。一方で、内部障害は関節速度ベクトルに連続性を持たせながら手先を逆の方向に折り返すことができる。この関節速度ベクトルの連続性はトルクやエネルギーなどの動力学的な面を考慮した際に大きな利点となる可能性を秘めている。これらを動力学解析により解明することは今後の課題の一つとして挙げられる。それとともに、内部障害の意図的に作り出す手法やその制御を議論し、ワークスペース内部での効率的な手先折り返し動作の生成などアプリケーションを考える必要がある。
4. 6R マニピュレータなどに適用した姿勢に関する特異点適合法は、速度次元のものであった。そのため、実機への影響を考慮すると、関節角速度の不連続性は好ましい指令とはいえない。これを回避するべく、今後は位置/姿勢の特異点適合法を加速度次元で定式化する必要がある。

謝辞

本研究は平成25年4月から平成26年1月までの間、東京都市大学大学院（旧武蔵工業大学大学院）工学研究科機械システム工学専攻ロボティックライフサポート研究室で行われました。

本研究を行うにあたり、指導教官の金宮好和教授、佐藤大祐准教授には深く感謝しております。本研究で修めた成果は先生方の指導なしでは成し得ないものでした。金宮教授には広い視野からの的確なアドバイスと親切、丁寧なご指導をいただき、非常に勉強になりました。国内外での発表や他では得難い大変貴重なキャリアを積ませて頂きました。また、お誘い下さった博士後期過程への進学をお断りさせていただいたご無礼をどうかお許しください。佐藤准教授には論文作成や添削、発表の仕方をはじめ、非常に多くのことを学ばせていただきました。悪天候にも関わらず足をお運びいただきロボット学会での発表を見守って下さったことは忘れません。

振り返ると、研究室の先輩、後輩に大変恵まれた研究室生活であったように思います。特に同じスペースロボット班で昨年度卒業された原先輩には、研究、発表、論文作成など親切なご指導をいただきました。研究分野に関する知識だけでなく、プログラミング技術、研究計画の立て方に関するここまで、一から教えていただき研究の礎を築いていただきました。心より感謝しております。卒業した川久保君、佐藤篤君には、行き過ぎた指導もあったとは思いますが、最後まで付いてきてくれたこと感謝します。本大学院に進学する宮田君、曾根君、研究を進めるのに有意義な議論ができました。ここで感謝を表するとともに、より充実した大学院生活が送れることを祈っています。

同期の相川君、梶原君、田口君、竹内君、土屋君、皆さんのおかげで一年間の有意義な研究生活を送ることができました。あらゆる角度から意

見やアドバイスをいただき、非常に助かりました。とても個性が強く、M1夏休みの旅行先に2時間以上の議論を費やしても決まらなかつたことは良い思い出です。また、就職活動をする上では同じ悩みを共有し合い、より絆が深まつたと思っておりましたが、誰よりも先に内定を頂いた私に僻みの眼差しを向けてきたことは今も胸に深く刻まれています。皆さんの就職先での今後の活躍を祈っております。残念ながら、修了研究に着手できなくなってしまった土屋君、残りの研究室生活をどうか前向きにお過ごし下さい。また、学部生のときからいつも応援してくれたアルバイト先の東急百貨店東横店の皆さん、この場をお借りして感謝申し上げます。

最後になりましたが、研究生活を暖かく見守って支えてくれた両親、祖父母に心から感謝申し上げます。

2014年1月30日
滝 将太

参考文献

- [1] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, NJ, 2002.
- [2] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, New York: Springer-Verlag, 1983.
- [3] C. G. Mayhew, R. G. Sanfelice and A. R. Teel, “On quaternion-based attitude control and the unwinding phenomenon,” in *Proc. of the American Control Conf.*, 2011, pp. 299–304.
- [4] J. Shen, A. K. Sanyal, N. A. Chaturvedi, D. H. Bernstein and N. H. McClamroch, “Dynamics and control of a 3D pendulum,” in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 2004, pp. 323–328.
- [5] N. A. Chaturvedi, N. H. McClamroch and D. S. Bernstein, “Stabilization of a 3D axially symmetric pendulum,” *Automatica*, vol. 44, no. 9, pp. 2258–2265, 2008.
- [6] N. A. Chaturvedi and N. H. McClamroch, “Asymptotic stabilization of the inverted equilibrium manifold of the 3D pendulum using non-smooth feedback,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 54, no. 11, pp. 2658–2662, 2009.
- [7] J. Diebel, “Representing attitude: Euler angle, unit quaternions, and rotation vectors,” *Tech. Rep., Dept. of Math., Standford University*, 2006.
- [8] J. Stuelpnagel, “On the parameterization of the three-dimensional rotation group,” *SIAM Review*, vol. 6, no. 4, pp. 422–430, 1964.
- [9] M. D. Shuster, “A survey of attitude representations,” *J. of the Astronautical Sciences*, vol. 41, no. 4, pp. 439–517, 1993.

- [10] B. Wie, H. Weiss and A. Arapostathis, “Quaternion feedback regulator for space-craft eigenaxis rotations,” *J. of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 12, no. 3, pp. 375–380, 1989.
- [11] C. G. Mayhew, R. G. Sanfelice and A. R. Teel, “Quaternion-based hybrid control for robust global attitude tracking,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 56, no. 11, pp. 2555–2566, 2011.
- [12] Y. D. Song and W. C. Cai, “New intermediate quaternion based control of space-craft: part I – almost global attitude tracking,” *Int. J. of Innovative Computing Inform. and Control*, vol. 8, no. 10, pp. 7307–7319, 2012.
- [13] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon,” *Syst. and Control Lett.* , vol. 39, no. 1, pp. 63–70, 2000.
- [14] J. Ting, Y. Wen and K. K. Delgado, “The attitude control problem,” *Proc. of IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 36, no. 10, pp. 1148–1162, 1991.
- [15] M. R. Akella, “Rigid body attitude tracking without angular velocity feedback,” *Syst. and Control Lett.* , vol. 42, no. 4, pp. 321–326, 2001.
- [16] S. Wu, “Quaternion-based finite time control for spacecraft attitude tracking,” *Acta Astronautica*, vol. 69, no. 1, pp. 48–58, 2011.
- [17] W. C. Cai and Y. D. Song, “New intermediate quaternion based control of spacecraft: part II – global attitude tracking,” *Int. J. of Innovative Computing Inform. and Control*, vol. 8, no. 11, pp. 7853–7864, 2012.
- [18] A. Abdessameud and A. Tayebi, “Attitude synchronization of a group of space-craft without velocity measurements,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 54, no. 11, pp. 2642–2648, 2009.
- [19] A. K. Sanyal and N. A. Chaturvedi, “Almost global robust attitude tracking control of spacecraft in gravity,” in *AIAA Conf. on Guidance, Navigation, and Control*, 2008, 2008-6979.

- [20] A. K. Sanyal, A. Fosbury, N. A. Chaturvedi and D. S. Bernstein, "Inertia-free spacecraft attitude tracking with disturbance rejection and almost global stabilization," *J. of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 32, no. 4, pp. 1167–1178, 2009.
- [21] A. Tayebi, "A velocity-free attitude tracking controller for rigid body," in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 2007, pp. 6430–6434.
- [22] A. Tayebi, "Unit quaternion-based feedback for the attitude tracking problem," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1516–1520, 2008.
- [23] F. Wang, X. Chen and X. Cao, "Attitude tracking control of on-orbit-servicing spacecraft based on eigenaxis maneuver," *J. Astronautics.*, vol. 29, no. 2, pp. 570–575, 2008.
- [24] L.-L. Show, J.-C. Juang, Y.-W. Jan and C.-T. Lin, "Quaternion feedback attitude control design: a nonlinear H-infinity approach," *Asian J. of Control*, vol. 5, no. 3, pp. 406–411, 2003.
- [25] R. Bach and E. Paiclli, "Linearization of attitude-control error dynamics," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 38, no. 10, pp. 1521–1525, 1993.
- [26] B. Wie and P. M. Barba, "Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers," *J. of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 8, no. 3, pp. 360–365, 1985.
- [27] D. E. Koditschek, "Application of a new Lyapunov function to global adaptive attitude tracking," in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 1988, pp. 63–68.
- [28] D. Fragopoulos and M. Innocenti, "Stability considerations in quaternion attitude control using discontinuous Lyapunov functions," *IEE Proc. Control Theory and Appl.*, vol. 151, no. 3, pp. 253–258, 2004.
- [29] X. Wang and C. Yu, "Feedback linearization regulator with coupled attitude and translation dynamics based on unit dual quaternion," in *Proc. IEEE Multi-Conf. on Systems and Control*, 2010, pp. 2380–2384.

- [30] J. R. Lawton and R. W. Beard, “Model independent eigenaxis maneuvers using quaternion feedback,” in *Proc. of the American Control Conf.* , 2001, 2339–2344.
- [31] J. R. Lawton and R. W. Beard, “Synchronized multiple spacecraft rotations,” *Automatica*, vol. 38, no. 8, pp. 1359–1364, 2002.
- [32] J. S. Hall, M. Romano and R. Cristi, “Quaternion feedback regulator for large angle maneuvers of underactuated spacecraft,” in *Proc. of the American Control Conf.*, 2010, pp. 2867–2872.
- [33] S. M. Joshi, A. G. Kelkar and Y. Wen, “Robust attitude stabilization of spacecraft using nonlinear quaternion feedback,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 40, no. 10, pp. 1800–1803, 1995.
- [34] B. J. Kim, H. Lee and S. D. Choi, “Three-axis reaction wheel attitude control system for KITSAT-3 microsatellite,” *Space Technology*, 2000, pp. 291–296.
- [35] Z. Sun, D. Ye, F. Wang and J. LV, “Quaternion-based attitude maneuver hardware-in-the-loop simulation for micro satellite,” in *Proc. Int. Conf. on Mechatron. and Automation*, 2009, pp. 3811–3815.
- [36] Y. Zhong, A. Gao and W. Li, “A quaternion-based method for SINS/SAR integrated navigation system,” *IEEE Trans. on Aerospace and Electron. Syst.* , vol. 48, no. 1, pp. 514–524, 2012.
- [37] M. Ahamdi, A. Khayatian and P. Karimaghaei, “Attitude estimation by divided difference filter in quaternion space,” *Acta Astronautica*, vol. 75, pp. 95–107, 2012.
- [38] M.-S. Kim and K.-W. Nam, “Interpolating solid orientations with circular blending quaternion curves,” *Comp.-Aided Design*, vol. 27, no. 5, pp. 385–398, 1995.
- [39] M. Baig, “Monte Carlo analysis of the SO(3) Lattice Gauge theory and the critical dimensionality of space-time,” *The American Physical Society*, vol. 54, no. 3, pp. 167–169, 1985.
- [40] T. Lee and N. H. McClamroch, “Attitude maneuvers of a rigid spacecraft in a circular orbit,” in *Proc. of the American Control Conf.* , 2006, pp. 1742–1747.

- [41] T. Lee, “Exponential stability of an attitude tracking control system on $\text{SO}(3)$ for large-angle rotational maneuvers,” *Syst. and Control Lett.*, vol. 61, no. 1, pp. 231–237, 2012.
- [42] H. Bang, M. Tahk and H. Choi, “Large angle attitude control of spacecraft with actuator saturation,” *Control Eng. Practice*, vol. 11, no. 9, pp. 989–997, 2003.
- [43] B. Cong, X. Liu and Z. Chen, “A novel robust control strategy for spacecraft eigenaxis rotations,” in *Proc. of the 18th IFAC World Congr.*, 2011, pp. 2066–2071.
- [44] B. Cong, X. Liu and Z. Chen, “A precise and robust control strategy for rigid spacecraft eigenaxis rotation,” *Chinese J. of Aeronautics*, vol. 24, pp. 484–492, 2011.
- [45] B. Cong, X. Liu and Z. Chen, “Exponential time-varying sliding mode control for large angle attitude eigenaxis maneuver of rigid spacecraft,” *Chinese J. of Aeronautics*, vol. 23, pp. 447–453, 2010.
- [46] N. A. Chaturvedi, A. K. Sanyal and N. H. McClamroch, “Rigid-body attitude control using rotation matrices for continuous, singularity-free control laws,” *IEEE Control Syst. Magazine*, vol. 31, no. 3, pp. 30–51, 2011.
- [47] F. Bullo, R. M. Murray and A. Sarti, “Control on the sphere and reduced attitude stabilization,” *IFAC Symp. on Nonlinear Control Syst.* 2, 1995, pp. 495–501.
- [48] K. G. Shin and N. D. Mckay, “Minimum-time control of robotic manipulator with geometric path constraints,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. AC-30, no. 6, pp. 531–541, 1985.
- [49] J. E. Bobrow, S. Dubowski and J. S. Gibson, “Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths,” *Int. J. Robotics Research*, vol. 4, no. 3, pp. 3–17, 1985.
- [50] F. Pfeiffer and R. Johanni,nd J. S. Gibson, “A concept for manipulator trajectory planning,” *IEEE J. Robotics Automation*, vol. RA-3, no. 2, pp. 115–123, 1987.
- [51] J. M. Hollerbach, “Dynamic scaling of manipulator trajectories,” *ASME J. of Dynamic Syst., Measurement and Control*, vol. 106, pp. 102–106, 1984.

- [52] H. Arai, K. Tanie and S. Tachi, “Path tracking control of a manipulator considering torque saturation,” *IEEE Trans. on Ind. Electron.*, vol. 41, no. 1, pp. 25–31, 1994.
- [53] O. Dahl and L. Nielsen, “Torque-limited path following by on-line trajectory time scaling,” *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 6, no. 5, pp. 554–561, 1990.
- [54] Z. Shiller and S. Dubowski, “Robot path planning with obstacles, actuator, gripper and payload constraints” *Int. J. Robotics Research*, vol. 8, no. 6, pp. 3–18, 1989.
- [55] M. Sampei and K. Furuta, “On time scaling for nonlinear systems: application to linearization,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. AC-31, no. 5, pp. 459–462, 1985.
- [56] M. Sampei and K. Furuta, “Robot control in the neighborhood of singular points,” *IEEE J. Robotics and Automation* “Three-axis reaction wheel attitude control system for KITSAT-3 microsatellite,” , vol. 4, no. 3, pp. 303–309, 1988.
- [57] 三平満司，古田勝久“時間軸の変換を用いた非線形システムの線形化 – 新時間軸での線形化 – ”，計測自動制御学会論文集，vol. 22, no. 10, pp. 1030–1036, 1986.
- [58] D. B. Dacic, M. B. Subbotin and P. V. Kokotovic, “Control effort reduction in tracking feedback laws,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 51, no. 11, pp. 1831–1837, 2006.
- [59] S. A. Hiddabi and N. H. McClamroch, “Tracking and maneuver regulation for nonlinear nonminimum phase systems: application to flight control,” *IEEE Trans. on Control Syst. Technology*, vol. 10, no. 6, pp. 780–792, 2002.
- [60] L. Lapierre, D. Soetanto and A. Pascoal, “Nonlinear path following with applications to the control of autonomous underwater vehicles,” in *Proc. of the 42nd IEEE Conf. on Decision and Control*, 2003, pp. 1256–1261.
- [61] A. Liegeois, “Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms,” *IEEE Trans. Syst. Man and Cybern.*, vol. SMC-7, pp. 868–871, 1977.

- [62] Y. Nakamura, H. Hanafusa and T. Yoshikawa, “Task-priority based redundancy control of robot manipulators,” *Int. J. of Robotics Research*, vol. 16, no. 2, pp. 3–15, 1987.
- [63] K. Kazerounian and Z. Wang, “Global versus local optimization in redundancy resolution of robotic manipulators,” *Int. J. of Robotics Research*, vol. 7, no. 5, pp. 3–12, 1988.
- [64] S. Ma and D. N. Nenchev, “Local torque minimization for redundant manipulators: a correct formulation,” *Robotica*, vol. 14, No. 2, pp. 235–239, 1996.
- [65] K. Oonishi, “The open manipulator system of the MHI PA-10 robot,” in *Proc. of the 30th Int. Symp. of Robotics*, 1999.
- [66] R. Bischoff, J. Kruth, G. Schreiber, R. Koeppe, A. Albu-Schaffer, A. Beyer, O. Eiberger, S. Haddadin, A. Stemmer, G. Grunwald and G. Hirzinger, “The KUKA-DLR lightweight robot arm – a new reference platform for robotics research and manufacturing,” in *Robotics (ISR), 2010 41st Int. Symp. on and 2010 6th German Conf. on Robotics (ROBOTIK)*, 2010, pp. 741–748.
- [67] K. Kaneko, K. Harada, F. Kanehiro, G. Miyamori and K. Akachi, “Humanoid robot HRP-3,” in *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Syst.*, 2008, pp. 2471–2478.
- [68] C. Borst, T. Wimbock, F. Schmidt, M. Fuchs, B. Brunner, F. Zacharias, P. R. Giordano, R. Konietzschke, W. Sepp, S. Fuchs, C. Rink, A. Albu-Schaffer and G. Hirzinger, “Rollin’ Justin - Mobile platform with variable base,” in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2009, pp. 1597–1598.
- [69] K. Kreutz-Delgado, M. Long and H. Seraji, “Kinematics analysis of 7-DOF manipulators,” *Int. J. of Robotics and Research*, vol. 11, no. 5, pp. 469–481, 1992.
- [70] 滝康嘉 , 杉本浩一 , “冗長マニピュレータの特異姿勢” , 日本機械学会ロボティクスメカトロニクス講演会'03 講演論文集 , 2003.
- [71] 吉田浩平 , 國松禎明 , 石飛光章 , “仮想リンク機構を用いた逆運動学による肘特異点問題の回避 – PUMA型ロボットへの適用 – ” , ロボティクスメカトロニクス講演会 , 2013.

- [72] C. Yu, M. Jin and H. Liu, “An analytical solution for inverse kinematic of 7-DOF redundant manipulators with offset-wrist,” in *Proc. Int. Conf. on Mechatron. and Automation*, 2012, pp. 92–97.
- [73] M. Shimizu, H. Kakuya, W. K. Yoon, K. Kitagaki and K. Kosuge, “Analytical inverse kinematics computation for 7-DOF redundant manipulators with joint limits and its application to redundancy resolution,” *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 24, no. 5, pp. 1131–1142, 2008.
- [74] D. Oetomo and M. H. Ang Jr, “Singularity-robust algorithm in serial manipulators,” *Robots and Comp.-Integrated Manufacturing*, vol. 25, no. 1, pp. 122–134, 2009.
- [75] 中村仁彦, 花房秀郎, “関節形ロボットアームの特異点低感度運動分解”, 計測自動制御学会論文集, vol. 20, no. 5, pp. 453–459, 1983.
- [76] Y. Nakamura and H. Hanafusa, “Inverse kinematics solutions with singularity robustness for robot manipulator control,” *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 108, pp. 163–171, 1984.
- [77] D. N. Nenchev and Y. Tsumaki, “Motion analysis of a kinematically redundant seven-DOF manipulator under the singularity-consistent method,” in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2003, pp. 2760–2765.
- [78] D. N. Nenchev, Y. Tsumaki and M. Takahashi, “Singularity-consistent kinematic redundancy resolution for the S-R-S manipulator,” in *Proc. of Int. Conf. on Intelligent Robots and Syst.*, 2004, pp. 3607–3612.
- [79] C. Wampler, “Manipulator inverse kinematics solutions based on vector formulations and damped least-squares methods,” *IEEE Trans. on Syst. Man and Cybern.*, vol. 16, no. 1, pp. 93–101, 1986.
- [80] S. Buss, “Introduction to inverse kinematics with Jacobian transpose, pseudoinverse and damped least-squares methods,” *Tech. Rep., Dept. of Math., University of California*, 2004.
- [81] J. Xiang, C. Zhong and W. Wel, “General-weighted least-norm control for redundant manipulators,” *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 26, no. 4, pp. 660–669, 2010.

- [82] T. Sugihara, “Solvability-unconcerned inverse kinematics by the Levenberg Marquardt method,” *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 27, no. 5, pp. 984–991, 2011.
- [83] J. Kieffer, “Differential analysis of bifurcations and isolated singularities for robots and mechanics,” *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 10, no. 1, pp. 1–10, 1994.
- [84] D. N. Nenchev, “Tracking manipulator trajectories with ordinary singularities: a null space-based approach,” *Int. J. of Robotics and Research*, vol. 14, no. 4, pp. 399–404, 1995.
- [85] D. N. Nenchev and M. Uchiyama, “Natural motion analysis based on the singularity-consistent parameterization,” in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1997, pp. 2683–2688.
- [86] D. N. Nenchev, Y. Tsumaki and M. Uchiyama, “Singularity-consistent parameterization of robot motion and control,” *Int. J. of Robotics and Research*, vol. 19, no. 2, pp. 159–182, 2000.
- [87] D. N. Nenchev, Y. Tsumaki and M. Uchiyama, “Singularity-consistent behavior of telerobots: theory and experiments,” *Int. J. of Robotics and Research*, vol. 17, no. 2, pp. 138–152, 1998.
- [88] Y. Tsumaki, D. N. Nenchev and M. Uchiyama, “Experimental teleoperation of a nonredundant slave arm at and around singularities,” in *Proc. of IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, 1996, pp. 385–392.
- [89] Y. Tsumaki, D. N. Nenchev, S. Kotera and M. Uchiyama, “Teleoperation based on the adjoint Jacobian approach,” *IEEE Control Syst. Magazine*, vol. 17, no. 1, pp. 53–62, 1997.
- [90] 妻木勇一 , 小寺真司 , D. N. ネンシェフ , 内山勝 “6自由度マニピュレータの特異点適合遠隔操作” , 日本ロボット学会誌 , vol. 16, no. 2, pp. 195–204, 1998.
- [91] D. N. Nenchev, “Natural motion and singularity-consistent inversion of robot manipulator,” in *Advances in Robot Control*, Springer Berlin Heidelberg, 2007, pp. 9–33.

- [92] D. N. Nenchev, Y. Handa and D. Sato, “Natural motion: efficient path tracking with robotics limbs,” in *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Syst.* , 2010, pp. 3483–3488.
- [93] C. A. Klein and C.-H. Huang, “Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators,” in *IEEE Trans. on Syst. Man and Cybern.* , vol. SMC-13, no. 3, pp. 245–250, 1983.
- [94] N. Bedrossian, “Classification of singular configurations for redundant manipulators,” *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1990, pp. 818–823.
- [95] J. Shamir, “The singularities of redundant robot arms,” *Int. J. of Robotics and Research*, vol. 9, no. 1, pp. 113–121, 1990.
- [96] J. Burdick, “A classification of 3R regional manipulator singularities and geometries,” in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1991, pp. 2670–2675.
- [97] N. Bedrossian and K. Flueckiger, “Characterizing spatial redundant manipulator singularities,” *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1991, pp. 714–719.
- [98] J. Baillieul, “Kinematic programming alternatives for redundant manipulators,” in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1985, pp. 722–728.
- [99] D. N. Nenchev and Y. Tsumaki, “Singularity-consistent attitude motion analysis and control based on Euler angle parameterization,” *The SICE Annu. Conf.* , 2003, pp. 881–889.
- [100] N. Gollu and L. Rodrigues, “Control of large angle attitude maneuvers for rigid bodies using sum of squares,” in *Proc. of the American Control Conf.* , 2007, pp. 3156–3161.
- [101] 平社信人，石坂卓弥，“ジャイロ計と傾斜計を複合させたリアルタイム姿勢角検出器”，*計測自動制御学会産業論文集* , vol. 17, no. 21, pp. 175–181, 2011.
- [102] 児玉慎三，須田信英，“システム制御のためのマトリクス理論”，*計測自動制御学会編* , 1978 .

- [103] 石島辰太郎, 石動善久, 三平満司, 島公脩, 山下裕, 渡辺敦, “非線形システム論”, コロナ社, 1993.
- [104] 小郷寛, 美多勉, “システム制御理論入門”, 実教出版, 1979.
- [105] S. B. Nokleby and R. P. Podhorodeski, “Reciprocity-based resolution of velocity degeneracies (singularities) for redundant manipulators,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 36, no. 3, pp. 397–409, 2001.
- [106] S. B. Nokleby and R. P. Podhorodeski, “Identifying multi-DOF-loss velocity degeneracies in kinematically-redundant manipulators,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 39, no. 2, pp. 201–213, 2004.
- [107] J. Kim, G. Marani, W. K. Chung and J. Yuh, “Task reconstruction method for real-time singularity avoidance for robot manipulators,” *Advanced Robotics*, vol. 20, no. 4, pp. 453–481, 2006.
- [108] D. Kim, F. A. Leve, M. Fitz-Coy and W. E. Dixon, “Adaptive attitude control for a small satellite with integrated singularity avoidance and momentum management,” in *Proc. of the American Control Conf.*, 2011, pp. 1015–1020.
- [109] D. R. H. Johnson and D. R. Soderblom, “Calculating galactic space velocities and their uncertainties, with an application to the URSA major group,” *The Astronomical J.*, vol. 93, no. 4, pp. 864–867, 1987.
- [110] F. L. Markley, “Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition,” *The J. of the Astronomical Sciences*, vol. 36, no. 3, pp. 245–258, 1988.
- [111] K. Kanatani, “Analysis of 3-D rotation fitting,” *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intell.*, vol. 16, no. 5, pp. 543–549, 1994.
- [112] G. Li and L. Liu, “Robust adaptive coordinated attitude control problem with unknown communication delays and uncertainties,” *Procedia Eng.*, vol. 29, pp. 1447–1455, 2012.
- [113] G. Meyer, “Design and global analysis of spacecraft attitude control systems,” *NASA Tech. Rep.*, 1971.

- [114] U. Feucht and M. Schneller “Champ attitude dynamics,” *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, 2001, AAS 01-178.
- [115] F. Nagi, A. T. Zulkarnain and J. Nagi, “Tuning fuzzy bang-bang relay controller for satellite attitude control system,” *Aerospace Sci. and Tech.*, vol. 26, no. 1, pp. 76–86, 2012.
- [116] M. Navabi, N. Nasiri and M. Dehghan, “Modeling and numerical simulation of linear and nonlinear spacecraft attitude dynamics and gravity gradient moments: a comparative study,” *Commun. in Nonlinear Sci. and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 2, pp. 1065–1084, 2012.
- [117] L.-G. Huang and Y. Li, “Repeatable kinematic control of redundant manipulators: implementation issues,” in *Int. Conf. on Advanced Robotics*, 1997, pp. 147–152.
- [118] H. Reimann, I. Iossifidis and G. Schoner, “Repeatable kinematic control of redundant manipulators: implementation issues,” in *The Int. Conf. on Intelligent Robots and Syst.*, 2010, pp. 5372–5379.
- [119] F.-T. Cheng T.-L. Hour Y.-Y. Sun and T.-H. Chen, “Study and resolution of singularities for a 6-DOF PUMA manipulator,” in *IEEE Trans. on Syst. Man and Cybern.* , vol. 27, no. 2, pp. 332–343, 1997.
- [120] J. Y. S. Luh, M. W. Walker and R. P. C. Paul, “Resolved-acceleration control of mechanical manipulators,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 25, no. 3, pp. 468–474, 1980.
- [121] A. Khosravian and M. Namvar, “Rigid body attitude control using a single vector measurement and gyro,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 57, no. 5, pp. 1273–1279, 2012.
- [122] P. E. Crouch, “Spacecraft attitude control and stabilization: applications of geometric control theory to rigid body models,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 29, no. 4, pp. 321–331, 1984.
- [123] P. Tsiotras and J. M. Longuski, “Spin-axis stabilization of symmetrical space-craft with two control torques,” *Syst. and Control Lett.* , vol. 23, no. 6, pp. 395–402, 1993.

- [124] P. Tsotras, M. Corless and J. M. Longuski, “A novel approach to the attitude control of axi-symmetric spacecraft,” *Automatica*, vol. 31, no. 8, pp. 1099–1112, 1995.
- [125] P. Tsotras, “Further passivity results for the attitude control problem,” *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 43, no. 11, pp. 1597–1600, 1998.
- [126] S. Bharadwaj, M. Osipchuk, K. D. Mease and F. C. Park, “Geometry and inverse optimality of global attitude stabilization,” *J. of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 21, no. 6, pp. 930–939, 1998.
- [127] S. J. Welsh and K. Subbarao, “Adaptive synchronization and control of free flying robots for capture of dynamics free-floating spacecrafsts,” in *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conf. and Exhibit, Providence*, 2004, AISS2004-5298.
- [128] T. Lee, “Geometric tracking control of the attitude dynamics of a rigid body on $\text{SO}(3)$,” in *Proc. of the American Control Conf.*, 2011, pp. 1200–1205.
- [129] T. Lee, M. Leok and N. H. McClamroch, “Nonlinear robust tracking control of a quadrotor UAV on $\text{SE}(3)$,” in *Proc. of the American Control Conf.*, 2012, pp. 4649–4654.
- [130] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, New York: Springer-Verlag, 1989.

研究成果

- [1] 滝将太 , 金宮好和 , “特異点を考慮したオイラー角に基づく姿勢フィードバック制御” , 日本機械学会2012年度年次大会 , 2012 , J192022 .
- [2] 滝将太 , 金宮好和 , “特異点適合法に基づくS-R-Sマニピュレータの逆運動学解法” , 第31回日本ロボット学会学術講演会 , 2013 , AC2I1-02 .
- [3] S. Taki, Y. Handa, N. Hara and D. N. Nenchev, “Simple timing generation along workspace paths for nonredundant robotic limbs,”, *Advanced Robotics*, vol. 27, no. 18, 1409–1420, 2013.
- [4] S. Taki and D. N. Nenchev, “Euler angle based feedback control of large angle eigenaxis rotations in the presence of singularities and model uncertainty,”, in *Int. Conf. on Control, Automations and Syst.*, 2013, pp. 34–39.
- [5] S. Taki and D. N. Nenchev, “A novel singularity-consistent inverse kinematics decomposition for S-R-S type manipulators,”, in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* , 2014. (to be published.)
- [6] 滝将太 , 梶原直人 , 宮田将吾 , 佐藤大祐 , 金宮好和 , “定常特異点を伴うリンク機構の動作生成,” , ロボティクス・メカトロニクス講演会2014 , 2014 . (to be published.)

付録A オイラー角による変換行列のパラメータ化

A.1 右特異ベクトル

(2.62) で, A を特異値分解したときに得られる各要素を θ で表す. (2.62) を左から A^T をかけると以下となる.

$$A^T A = V \Sigma U^T U \Sigma V^T \quad (\text{A.1})$$

$U \in SO(3)$ であるゆえ,

$$A^T A = V \Sigma \Sigma V^T \quad (\text{A.2})$$

と变形できる. ここで $A^T A$ を θ で表して, 次式とする.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

(A.3) から $A^T A$ の固有値を求めると以下となる.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \cos \theta_2 \\ 1 \\ 1 - \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

右特異ベクトルは, AA^T の固有ベクトルに等しい. また, AA^T と $A^T A$ の固有値は等しく, (A.4) となるので, この固有値から右特異ベクトルを求めるとき以下となる.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.2 特異値

A の特異値は $A^T A$ の固有値の平方根である . (A.4) より , 特異値は以下となる .

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \sqrt{\lambda} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + \cos \theta_2} \\ 1 \\ \sqrt{1 - \cos \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \left| \cos \frac{\theta_2}{2} \right| \\ 1 \\ \sqrt{2} \left| \sin \frac{\theta_2}{2} \right| \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

ただし , $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ より , $\cos \theta_2 < 0$ のとき特異値は ,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \left| \sin \frac{\theta_2}{2} \right| \\ 1 \\ \sqrt{2} \left| \cos \frac{\theta_2}{2} \right| \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

となる .

A.3 左特異ベクトル

(2.62) を右から A^T をかけると以下となる .

$$AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T \quad (\text{A.10})$$

$V \in SO(3)$ であるゆえ ,

$$AA^T = U\Sigma\Sigma U^T \quad (\text{A.11})$$

と変形できる . ここで AA^T をパラメータ化すると ,

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 & -\sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 & \sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 & 1 + \cos^2 \theta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

左特異ベクトルは $A^T A$ の固有ベクトルであるので、求めた固有値から固有ベクトルを求めるとき以下となる。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \theta_1 \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & -\cos \theta_1 \cos \frac{\theta_2}{2} & \sin \frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.15})$$

$\cos \theta_2 < 0$ では特異値の入れ替わりに伴い、それに対応する v_1 と v_3 , u_1 と u_3 が入れ替わる。

A.4 余因子行列

(2.63) より、 A の余因子行列求めるとき以下となる。

$$\begin{aligned} \text{adj} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} & \cos \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} & \cos \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cos^2 \frac{\theta_2}{2} & -\cos \theta_1 \cos^2 \frac{\theta_2}{2} & \frac{1}{2} \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \cos^2 \frac{\theta_2}{2} & \cos \theta_1 \cos^2 \frac{\theta_2}{2} & -\frac{1}{2} \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

A.5 Self-motion

オイラー角の Self-motion は特異姿勢において、次式で定義されるオイラー角の遷移である。

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \beta \text{adj} \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{A.17})$$

(A.17) を θ で変数化すると以下となる .

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \beta \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{A.18})$$

初期姿勢を特異姿勢とするため , NP 特異点では ,

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \beta \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{A.19})$$

SP 特異点では ,

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \beta \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{A.20})$$

の形で表される . 回転の Self-motion はマニピュレータの冗長運動とは異なり , 動力学に影響しないことに注意されたい . 明らかのように , Self-motion において , セルフモーションを定義する変換行列の階数は 1 である . これは , セルフモーションが動作空間の唯一の零空間ベクトル \mathbf{u}_s によって定義されるためである . すなわち , (A.19) および (A.20) はまとめて

$$\dot{\theta}_s = \beta \mathbf{u}_s^T \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{A.21})$$

ただし , NP 特異点で $\dot{\theta}_s = \dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_3$, SP 特異点で $\dot{\theta}_s = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3$ である .

ここで , NP 特異点における θ_1 のセルフモーションを解析する . (A.19) から , θ_1 の 1 階微分方程式は

$$\dot{\theta}_1 = -\beta \cos \xi \sin(\theta_1 + \gamma) \quad (\text{A.22})$$

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{\hat{\omega}_2}{\hat{\omega}_1} \quad (\text{A.23})$$

$$\xi = \sin^{-1} \hat{\omega}_3 \quad (\text{A.24})$$

となる . (A.22) より , Self-motion は $\theta_1 = -\gamma$ で平衡状態となる . また , 時不变動作であるため , θ_1 を時間の関数で表すと ,

$$\theta_1 = 2 \tan^{-1} \left(e^{\beta \cos \xi t} \tan \frac{\theta_1^{init} + \gamma}{2} \right) - \gamma \quad (\text{A.25})$$

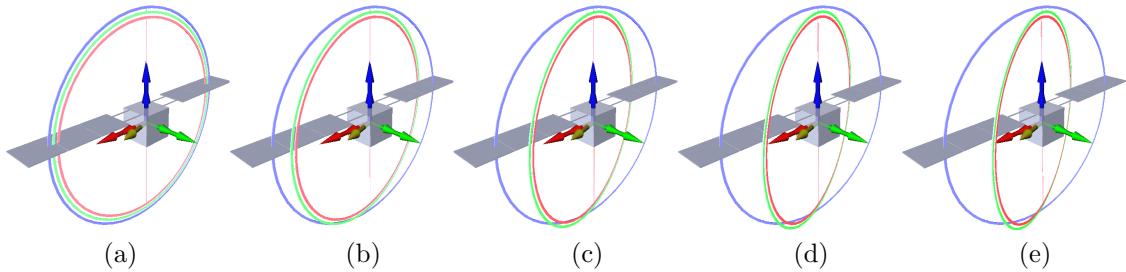


Fig. A.1: Attitude transition under self-motion.

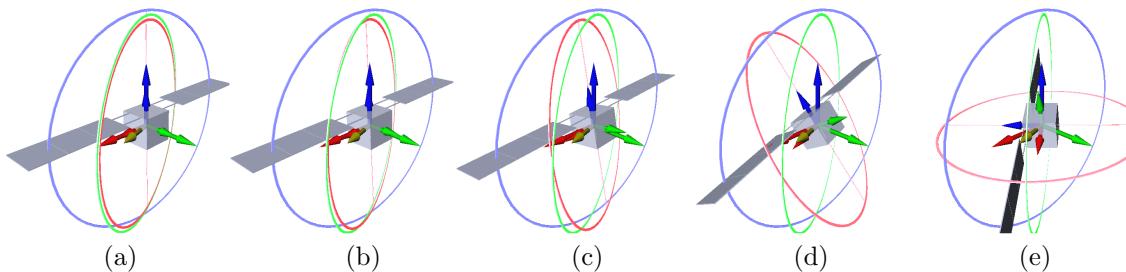


Fig. A.2: Attitude transition under self-adaptation.

となる。

一方で, $\theta_1 \rightarrow \gamma$: $u_3^T \hat{\omega} \rightarrow 0$ となるため, (2.63) より

$$\text{adj } A \hat{\omega} = 0 \quad (\text{A.26})$$

を満たし, 特異点近傍において $\hat{\omega}$ での姿勢運動をオイラー角で表現することできる。すなわち, Self-motion を利用することにより, $\hat{\omega}$ で姿勢運動するためのオイラー角の関係が得られる。Fig. A.1 に Self-motion の姿勢遷移モデルを示す。

A.6 Self-adaptation

初期姿勢を特異姿勢から僅かなオフセットを与えた場合, Self-motion の平衡状態に近づくと, 僅かなオフセットの影響で θ_2 に依存した動作が生成される。このときの動作を Self-adaptation と呼ぶ。Self-motion と同じく (A.17) によって表現されるが, その違いは姿勢運動に影響を与えるか否かである。前述のとおり, Self-motion は姿勢運動に影響しない。これに対し, Self-adaptation は θ_2 が変化するため, $\det A$ に影響を及ぼし, 対象物の姿勢

運動を表現している。この動作を解析するため、(A.18)を θ_2 の1階微分方程式で表すと

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2 &= D \sin \theta_2 \\ D &= \beta \cos \xi \cos(\theta_1 + \gamma)\end{aligned}\tag{A.27}$$

となる。Self-motionにより、 $\theta_1 \rightarrow -\gamma$ となるため、 D は定数とみなせる。
(A.27)を解くと以下となる。

$$\theta_2 = 2 \tan^{-1} \left(e^{Dt} \tan \frac{\theta_2^{init}}{2} \right) \tag{A.28}$$

(A.28)より、Self-adaptation時間は以下となる。

$$t = \frac{1}{|D|} \ln \left| \cot \frac{\theta_2^{init}}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} \right| \tag{A.29}$$

Fig. A.2にSelf-motion後、Self-adaptationの姿勢遷移モデルを示す。

付 錄B 績何

B.1 三角関数の基礎式

ここでは、三角関数の基礎式についてまとめる。

B.1.1 加法定理

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (\text{B.1})$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (\text{B.2})$$

B.1.2 倍角の定理

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.1.3 半角の定理

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (\text{B.5})$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \quad (\text{B.6})$$

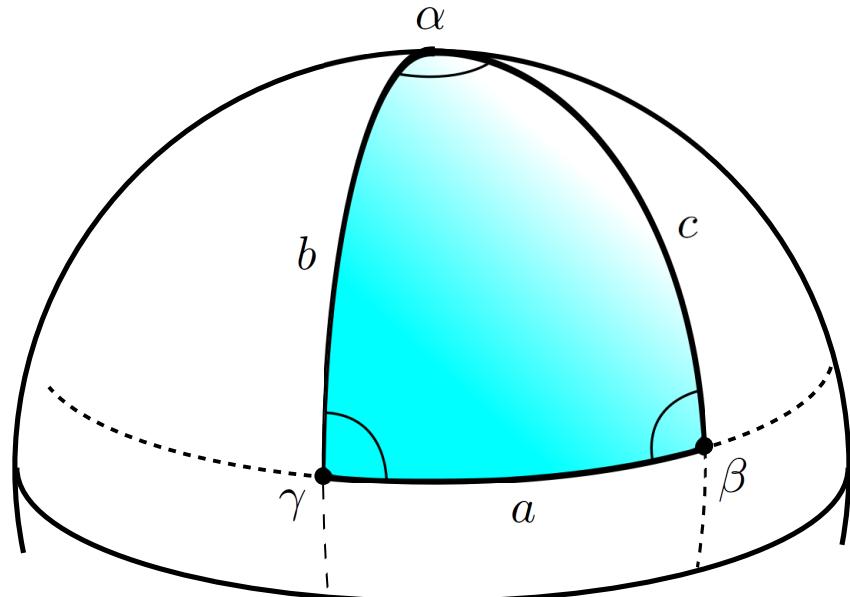


Fig. B.1: Spherical geometry.

B.1.4 和積変換

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (B.7)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (B.8)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (B.9)$$

$$\sin x + \sin y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (B.10)$$

B.2 球面幾何

ここでは、特に球面三角形の幾何学的関係について述べる。Fig. B.1に球面三角形モデルを示す。図に示すように、球面三角形の内角を α, β, γ とすると、これらの内角の和は 180 deg とはならない。一般に正の球面三角形であれば、

$$180 \text{ deg} \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 900 \text{ deg} \quad (B.11)$$

が成り立つ。

B.2.1 球面三角形の余弦定理

三角形の長さを a, b, c とすると、球面三角形のそれぞれの内角に対し、次式の関係が成り立つ。

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (\text{B.12})$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \quad (\text{B.13})$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad (\text{B.14})$$

これらの関係を球面三角形における余弦定理と呼ばれる。これらは球体の中心に座標系を置いたときのベクトルの内積によって導かれる。

B.2.2 球面三角形の正弦定理

球面三角形の内角と長さの関係として、上記の他に、次の関係が挙げられる。

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad (\text{B.15})$$

$$(\text{B.16})$$

この関係は、一般に球面三角形の正弦定理と呼ばれ、球体の中心に座標系を置いたときのベクトルの外積の関係から導かれる。

B.3 位相幾何

位相幾何学とは、あるものの幾何学的性質を大きさや方向に依らずに議論する学問である。そのため、境界やコンパクト、種数やトーラスといった特殊な表現を用いて、その性質を述べる。ここでは、その特殊な表現方法を断片的にまとめる。

B.3.1 境界

位相幾何学における境界とは、あるものの内部から外部からも近づくことができる点の集合である。ここで、Fig. B.2 に一次元多様体である、線分

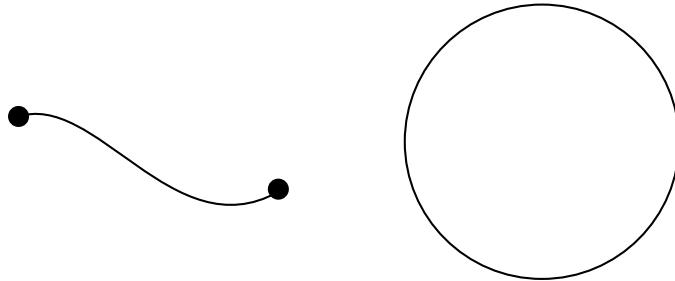


Fig. B.2: Model of first-dimensional manifold.

と円を示す。明らかなように、示された線分は閉区間で定義されるため、境界を持つといえる。一方、円は集合が周回しており、集合を明確に区切ることができず、境界がない(boundaryless)と呼ばれる。ただし、どちらも大きさや向きに依らないことに注意されたい。すなわち、線分であれば長さに関係なく境界を有し、円の場合は円によって描かれる面積には依らず、境界を持たない。片方だけ境界を有するような半直線の場合は、局所境界と定義される。

B.3.2 コンパクト

位相幾何学におけるコンパクトあるいはコンパクト集合であるとは、任意の開被覆が有限部分被覆を持つことと定義される。具体例を挙げると、Fig. B.2のような閉区間で定義される直線、円はどちらもコンパクトである。すなわち、ユークリッド空間内の有界閉集合は、ハイネ・ボレルの被覆定理よりこの性質を満たす。一方、開空間で定義される直線はコンパクトでない。

B.3.3 ハイネ・ボレルの被覆定理

ハイネ・ボレルの被覆定理は数学の定理で、次の定理のことである。
ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分集合 S について、

- S は有界閉集合である。
- S はコンパクトである。

B.3.4 トーラスと種数

位相幾何学におけるトーラスあるいはトーラス体とは、種数1の閉曲面のことである。また種数とは、あるものの切断によって生じる多様体が連結のままとなるような単純な閉曲面に沿った切断の最大数を表す整数のことである。円の外側に回転軸を置き得られる回転体はトーラスの一例で、よく取り上げられる具体例として、ドーナツ型がある。また、人工衛星などの姿勢制御に用いられるCMGのジンバルの角速度解は、特殊解と同次解の巡回性により、解軌道はトーラス体となる。

B.4 一般的な曲線の曲率の求め方

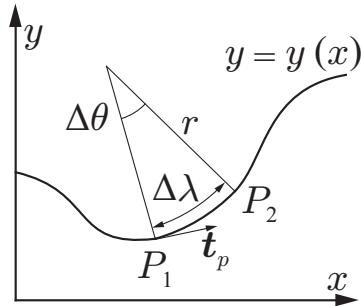


Fig. B.3: Image of curve.

曲線上の点 P を q とし、その角度までの曲線の長さは弧長 λ とすると、点 P を λ の関数 $q(\lambda)$ として表すことが出来る。そのとき点 P での接線方向の単位ベクトル t_P は以下のように求まる。

$$t_p = \mathbf{t}(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{q}(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \mathbf{q}(\lambda) \quad (\text{B.17})$$

また、 t も λ の関数で表せるので、曲率 $\kappa(\lambda)$ は以下の式で求まる。

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda) &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{t}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{t}(\lambda)}{\Delta\lambda} \right\| \\ &= \left\| \frac{d}{d\lambda} \mathbf{t}(\lambda) \right\| = \left\| \frac{d^2}{d\lambda^2} \mathbf{q}(\lambda) \right\| = \frac{1}{r(\lambda)} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$r(\lambda)$ は曲率半径である。

B.5 パラメータ曲線の曲率の求め方

動作物体の曲線を考えた場合、曲線は一般的に時間の関数 t で変化する。このようにパラメータ（この場合は t ）により変化する曲線をパラメータ曲線と呼ぶ。パラメータ曲線の場合、単位時間あたりの弧長 λ 、単位接線ベクトル t は以下のように求まる。

$$\Delta\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)\| = \|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_P = \mathbf{t}(t) &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{q}(\lambda)}{\Delta\lambda} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\|\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)\|} = \frac{\dot{\mathbf{q}}(t)}{\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

また、2Rマニピュレータのときの曲率 κ と曲率半径 R は以下のように表す。

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{t}(t + \Delta t) - \mathbf{t}(t)}{\|\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)\|} \right\| = \frac{\dot{q}_1 \ddot{q}_2 - \dot{q}_2 \ddot{q}_1}{(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r} \quad (\text{B.21})$$

付 錄C 行列論とシステムの安定性

C.1 回転群

C.1.1 群の定義と表現

群 $G = A, B, \dots$ とは以下の条件を満たす元 A, B, \dots の集合のことである .

1. 群の二つの元 A, B に対し , それらの積 AB が存在し , AB も群に属する .
2. 結合則 : $(AB)C = A(BC)$ が成り立つ .
3. 単位元 1 が存在し , 全ての元 A に対し , $1A = A1 = A$ が成り立つ .
4. 全ての元 A に対し , 逆元 A^{-1} が存在し , $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$ が成り立つ .

特に , $AB = BA$ が成立するものを可換群という . 二次元平面の回転がその例である . 逆に , $AB \neq BA$ のとき , 非可換群という . 三次元平面の回転が該当する . 群が連続パラメータの解析関数である場合 , リー群という . リー群に対してはどの元に対しても以下の次式が成り立つ .

$$A(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \exp \left(i \sum_{i=1}^n \theta_i F_i \right) \quad (\text{C.1})$$

F_i をリー群の生成子と呼ぶ . 回転群で重要なのはコンパクト・リー群である . コンパクトとはパラメータ変数領域が空間の有限体積内に閉じるものもいい . 二次元回転は $0 < \theta < 2\pi$ で回転を表現できるため , コンパクトである .

群の任意の元に対し行列 $U(A)$ 演算子が対応し , 次式が成り立つとき , この行列の集合を群 G の表現と呼ぶ .

$$U(A)U(B) = U(AB) \quad (\text{C.2})$$

$$U(A^{-1}) = U^{-1}(A) \quad (\text{C.3})$$

$$U(1) = 1 \quad (\text{C.4})$$

この行列の演算するベクトル空間を表現空間，次元 (n) を表現の次元という。

C.1.2 正規直交行列

実変数 $x_i(i=1 \sim n)$ を座標に持つ n 次元空間において，長さ $l = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ を不变に保つ全ての線形変換は直交群(Orthogonal group) $O(n)$ 群を作る。その中で連続パラメータがゼロの極限で無変換になるもの，すなわち行列式が1であるものを $SO(n)$ 群(Special orthogonal group)という。

C.1.3 特殊ユニタリ行列

複素変数 $u_i(i=1 \sim n)$ を座標に持つ n 次元複素空間において，長さ $l = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$ を不变に保つ全ての線形変換でかつ行列式が1であるもののことである。任意の $SU(n)$ 変換行列はユニタリー行列で

$$U = \exp \left(i \sum_{i=1}^n \theta^i F_i \right) \quad (\text{C.5})$$

$$\text{Tr}|F_i| = 0 \quad (\text{C.6})$$

と表せる。 F_i は $SU(n)$ 群の生成子である。

C.2 特異値分解と特異値

ある行列 $A \in \Re^{n \times m}$ に対して， $\text{rank } A = A^T A = r$ であったとする。この場合， $A^T A$ に非零の固有値が r 個存在するので，それらを $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 > 0$ とする。すると，二つの直交行列 $U \in \Re^{n \times n}$ と $V \in \Re^{m \times m}$ によって，

$$A = U \Sigma V \quad (\text{C.7})$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_r) \quad (\text{C.9})$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (\text{C.10})$$

と書ける。これを A の特異値分解といい， σ_i を A の特異値という。

特異値分解のための U, V は対象行列 $A^T A$ を対角化する直交行列から求めることができる。 A が半正定行列の場合には σ_i は A の非零の固有値に一致し、 T を直交行列とすると、 $U = T, V = T^T$ とできる。

特に、 $\sigma_1 \sim \sigma_n$ の最大値を最大特異値といい、 $\sigma^{\max}(A)$ と書き、最小特異値を $\sigma^{\min}(A)$ と書く。また、 $\text{Cond}(A) = \sigma^{\max}(A)/\sigma^{\min}(A)$ を $A \in \Re^{n \times n}$ の条件数という。

特異値に関して以下の性質が成り立つ。

1. $A \in \Re^{n \times n}$ について

$$\sigma^{\max}(A) = \frac{1}{\sigma^{\min}(A^{-1})}$$

$$|\det|A|| = \sigma_1 \cdots \sigma_n$$

2. $\sigma^{\max}(A + B) \leq \sigma^{\max}(A) + \sigma^{\max}(B)$
 $\sigma^{\max}(AB) \leq \sigma^{\max}(A)\sigma^{\max}(B)$

C.3 ノルム

あるベクトル空間に対し、常に実数値をとり、次の性質を持つ関数 $\|\cdot\|$ をベクトルのノルムという。

1. $x \neq 0$ ならば、 $\|x\| > 0$ 、 $x = 0$ のとき、 $\|x\| = 0$
2. 任意の定数 a に対し、 $\|ax\| = |a|x$
3. 任意のベクトル x, y に対し、 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\|x\| > 0, x = 0$ のとき、 $\|x\| = 0$

ノルムは次式で定義される [102]。

$$\|x_p\| \equiv (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \quad (\text{C.11})$$

ただし、 $p \in [1, \infty)$ は実数である。一般に使われるノルムは $p = 2$ のときで、このときユークリッドノルムと呼ばれる。

C.4 システムの安定性

次のシステムについて考える [103] .

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0. \quad (\text{C.12})$$

ただし, $f(x, t)$ は任意の x, t に対し, 唯一の解を持つものとする .

C.4.1 リアブノフの意味で安定

(C.12) における平衡点を $\bar{x} = 0$ とすると, 平衡点周りにおけるリアブノフの意味で安定であるとは, 初期状態 ϵ ($x(t_0) < \delta(t_0, \epsilon)$) に対し, 以下の関係を満たすことである .

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{C.13})$$

δ が t の関数でないとき, この安定性を一様安定と評価し, そのときの平衡点は一様安定平衡点と定義される .

C.4.2 漸近安定

(C.12) における $\bar{x} = 0$ が漸近安定あるとは, 次の条件を満たすときである .

1. $\bar{x} = 0$ が安定点である .
2. $\bar{x} = 0$ が局所アトラクタである .

ここで, 局所アトラクタとは, 初期位置 $\delta(t_0)$ に対し ,

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (\text{C.14})$$

を満たす平衡点のことである .

$\bar{x} = 0$ が一様漸近安定平衡点であるとは

1. $\bar{x} = 0$ が一様安定点である .
2. $\bar{x} = 0$ が一様局所アトラクタである .

の条件が成立するときである .

C.4.3 指数安定

$\bar{x} = 0$ が指数安定平衡点であるとは、状態 x の遷移が次の条件で定義できる場合を指す。

$$\|x(t)\| \leq m e^{-\alpha(t-t_0)} \|x(t_0)\| \quad (C.15)$$

$$m > 0 \quad \alpha > 0$$

このとき、 α は収束率と呼ばれ、時間変化に対する状態の収束度合いを表す変数である。

指数安定平衡点では関数 $V(x, t)$ が

$$\alpha_1 \|x\|^2 \leq V(x, t) \leq \alpha_2 \|x\|^2 \quad (C.16)$$

$$\dot{V}|_{\dot{x}=f(x,t)} \leq -\alpha_3 \|x\|^2 \quad (C.17)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \right\| \leq \alpha_4 \|x\|^2 \quad (C.18)$$

を満たす。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ および α_4 は正の定数であり、 $\|x\|$ は $\|x\| \leq \epsilon$ を満たす。このとき、(C.15) の各変数が、

$$m \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \quad \alpha \leq \frac{\alpha_3}{2\alpha_2}$$

にあるとき、 \bar{x} はすべての x に対して、大域的指数安定と定義される。

C.4.4 ラサールの不变原理

ラサールの不变原理とは、(C.16) における $\dot{V}(x, t)$ が局所的に正定でなくとも、システムが漸近安定であることを評価できる理論である。しかし、これはオートノーマスなシステムあるいは周期的なシステムにのみ適用可能であることに注意されたい。ここで、オートノーマスなシステム

$$\dot{x} = f(x) \quad (C.19)$$

について考える。ここで、 V がコンパクト集合 $\Omega_c = \{x : V(x) = 0\}$ に対し、局所的に正定であるとする

$$\dot{V} \leq c \quad (C.20)$$

が得られる。集合 S を

$$S = \{x \in \Omega_c : \dot{V}(x) = 0\} \quad (\text{C.21})$$

と定義すると、(C.19) の解軌道は S 内部の最大不变集合である。ここで、 S が $x = 0$ を除いた全ての x に対して、非不变であるならば、0 は漸近安定である。

C.4.5 具体例

ここで、ロボットマニピュレータの制御に度々適用される計算トルク法の安定性について、リアプノフの理論に基づき議論する。マニピュレータの関節変数を q とすると、リアプノフ関数として次の場合を考える。

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{q} + \frac{1}{2}q^T K_p q \quad (\text{C.22})$$

(C.22) は $V(0, 0) = 0$ および $V(q, \dot{q}) > 0$, $q, \dot{q} \neq 0$ となるので、リアプノフ関数の条件を満たす。 V を時間微分し、

$$\begin{aligned} \dot{V}(q, \dot{q}) &= \dot{q}^T \ddot{q} + \dot{q}^T K_p q \\ &= \dot{q}^T (\ddot{q} + K_p q) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

を得る。マニピュレータのモデル誤差がなく、バイアス項が補償される場合、

$$\ddot{q} = -K_v \dot{q} - K_p q \quad (\text{C.24})$$

を満たす。ただし、 K_v, K_p はフィードバックゲイン行列で正定である。この関係を (C.23) に代入して、

$$\begin{aligned} \dot{V}(q, \dot{q}) &= \dot{q}^T ((-K_v \dot{q} - K_p q) + K_p q) \\ &= -\dot{q}^T K_v \dot{q} \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

を得る。これにより、計算トルク法は少なくとも安定であることが保証された。

次に、以下のリアプノフ関数について考える。

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \epsilon \\ \epsilon & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_p \mathbf{q} + \epsilon \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{q},
\end{aligned} \tag{C.26}$$

ただし, \mathbf{I} は単位行列である。また, V が正定であることは明らかである。
 V を時間微分して,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \mathbf{q} + \epsilon \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \epsilon \mathbf{q}^T \ddot{\mathbf{q}} \\
&= -\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K}_v - \epsilon) \dot{\mathbf{q}} - \epsilon \mathbf{q} (\mathbf{K}_p \mathbf{q} + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}}) \\
&= - \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \epsilon \mathbf{K}_p & \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{K}_v \\ \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{K}_v & \mathbf{K}_v - \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{C.27}$$

を得ると, ϵ が十分に小さいものであるなら, $\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ は負定である。ゆえに, 計算トルク法は指数安定であると結論づけられる。

C.5 非線形システムの安定性

C.5.1 非線形システムとその線形化

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{C.28}$$

の f が x や u の二次以上のべき関数を含む場合を非線形システムという。このとき線形化とは適当な状態変数や入力変数を与え, この基準値の周りで f をテーラー展開し x や u の一次項で f を近似することである。近似が成り立つ範囲は基準値や基準値からのずれに依存し, 一様ではない。

C.5.2 重複固有値

重複度に等しい数の線形独立な固有ベクトルが存在し, それらは直交するように選べる。

C.5.3 ジョルダン形式への変換

$A \neq A^T$ かつ, A が重複固有値を持つとき, 対角変換できないことが多い. この場合, $T^{-1}AT$ をジョルダン形式 J へ変換することができる [104].

$$J_p(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix} \Re^{p \times p} \quad (\text{C.29})$$

の形式の正方行列を, 固有値 λ についての p 次のジョルダンブロックという. いくつかのジョルダンブロックを対角線上の副行列として並べたものをジョルダン形式という.

C.5.4 状態遷移行列

以下の線形時不变システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{C.30})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{C.31})$$

の解 $x(t)$, $y(t)$ を求めることを考える. $x(t)$ は初期状態変数と連続な入力 $u(t)$ が与えられると唯一に定まる. 特に, $u(t) \equiv 0$ ($\dot{x}(t) = Ax(t)$) のとき, 自由システムと呼ばれ, この解は次式で与えられる.

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad (\text{C.32})$$

定数変化法を適用して, (C.30) の一般形は次式となる.

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (\text{C.33})$$

C.5.5 状態遷移行列の決定

\mathcal{L}^{-1} をラプラス逆変換の記号とし,

$$e^A = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (\text{C.34})$$

Table C.1: Stable/unstable node of self-motion.

β	Stable node	Unstable node
+	$\theta_1 = \{ -\gamma + l\pi \mid l = (2n+1)\pi \}$	$\theta_1 = \{ -\gamma + m\pi \mid m = 2n\pi \}$
-	$\theta_1 = \{ -\gamma + m\pi \mid m = 2n\pi \}$	$\theta_1 = \{ -\gamma + l\pi \mid l = (2n+1)\pi \}$

から算出する。

対角変換行列 \mathbf{T} , 固有値を $\lambda_1 \sim \lambda_n$ として,

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{T} e^{\Lambda t} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{C.35})$$

から計算できる。この方法は理論解析によく用いられる。 A に重複固有値がある場合, $\Lambda = J$ として適当なジョルダン形式に変換することができる。

C.5.6 非線形システムの安定解析

非線形システムの代表的な安定解析手法として以下が挙げられる。

1. ヤコビ行列の固有値を調べる。
2. リアプノフ安定解析定理を利用する。

後者の方が強力で有効な手法である。

線形時不变システムの例として3-1-3オイラー角で三次元空間の姿勢を定義する際の, 特異点におけるセルフモーション(A.22)の平衡点周りの安定性について解析する。

(A.22)の平衡点周りで線形化すると, 次式となる。

$$\dot{\theta}_1 = -\beta \cos \xi \cos(\pm \epsilon + n\pi) \theta_1 \quad (\text{C.36})$$

(C.36)から, セルフモーションの平衡点周りの安定性を議論でき, Table. C.1 にその結果をまとめた。ただし, n は自然数である。

付 錄D 7自由度可搬式汎用知能 アームPA-10

三菱重工業株式会社製可搬式汎用知能アームPA-10は、人間の腕と同じ7自由度を有するマニピュレータである。我々が生活している3次元空間で、マニピュレータを任意の位置姿勢にとらせるためには、位置に3自由度、姿勢に3自由度、合計6自由度必要である。これに対してPA-10は7自由度持つており、1自由度冗長性を持っている。冗長性とは必要な自由度以上の自由度を有するときに生まれ、冗長マニピュレータは冗長性を持たないマニピュレータに比べ、作業の融通性やマニピュレータ自体の障害物回避能力が高く、汎用性の高いマニピュレータである。また、速度と電流値による制御が可能で、速度制御時の指令トルク値を得ることができる。

PA-10の主な仕様をTable D.1に示し、全体図をFig. D.1に示す。

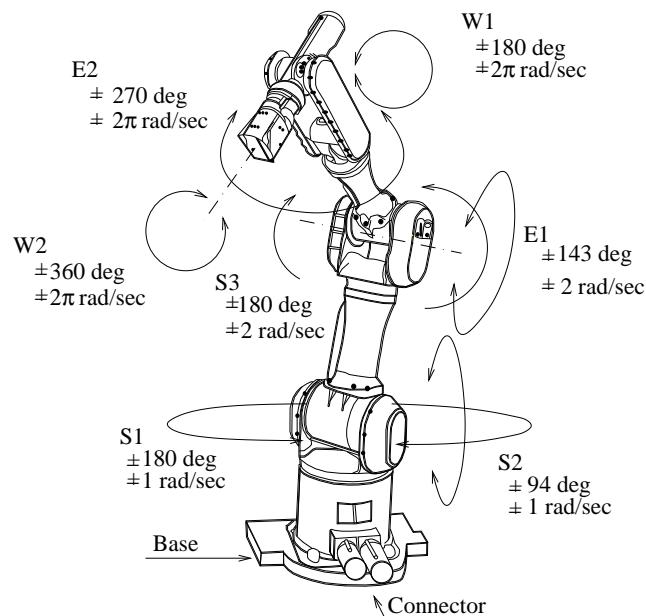


Fig. D.1: PA-10 joint limits.

Table D.1: Specifications of PA-10.

Item	Specification
Name	PA-10
Format	7 DOF, vertical articulated robot
Protective structure	Control of dust, splash-proof construction
Jointed structure	S1-S2-S3-E1-E2-W1-W2 (S:Shoulder E:Elbow W:Wrist)
Working area	Ref. Fig. D.1
Max synthesized velocity	1.55 m/s
Weight capacity	10 kgf
Drive system	AC servo motor with brushless resolver
Sensor	Output axis brushless resolver, micro switch
Weight	35 kgf

Table D.2 に各関節ごとの、モータ、減速機、ブレーキの詳細スペックを示す。

Table D.2: Specification of actuator.

		W _{2/1} E ₂	E ₁ S ₃	S ₂ S ₁	
*Each axis performance		*****			
Load inertia	[kgm ²]	0.108	4.33	15.53	
Output torque	[Nm]	9.8	77.3	171.2	
Operation speed	[rad/sec]	2π	2.0	1.0	
*Deceleration machine		*****			
Deceleration ratio		50			
Rated torque	[Nm]	5.39	39.0	76.0	
Ratings input rotational speed	[rpm]	3500	2000	2000	
Max input rotational speed	[rpm]	5000	4000	4000	
Average input rotational speed	[rpm]	3500	3500	3500	
Load inertia	[kgm ²]	0.108	4.33	15.53	
Output torque	[Nm]	9.8	77.3	171.2	
Operation speed	[rad/sec]	2π	2.0	1.0	
Lubrication method		Grease lubrication			
Minimum gear rigidity	[Nm/rad]	4040	22572	50535	
Gear inertia	[kgm ²]	3.3e-7	0.36e-4	1.293e-4	
*Brake		*****			
Static friction torque	[Nm]	0.15	1.96	3.92	
Moment of inertia	[kgm ²]	2.7e-7	1.625e-5	2.5e-5	
Voltage	[V]	24			
Current	[A]	0.20	0.55	0.63	
*Motor		*****			
Rated torque	[Nm]	0.36	2.0	5.3	
Max Instantaneous torque	[Nm]	0.68	3.7	8.6	
Rated speed	[rpm]	3000	1000	500	
Rated voltage	[V]	100			
Motor classification		AC brushless servo			
Motor constant	[Nm/W ^{1/2}]	0.0619	0.239	0.438	
Torque constant	[Nm/A ^{1/2}]	0.0831	0.501	0.692	
Inverse Power constant	[V/Krpm]	8.7	52.5	72.8	
Coil Resistance	[ohm]	1.8	4.4	2.5	
Coil Inductance	[H]	0.0023	0.0080	0.0088	
Number of Poles	[poles]	6	10	10	
Rotor Inertia	[kgm ²]	2.3e-6	8.5e-5	3.0e-4	

付録E 姿勢制御に関するハードウェアシステム

E.1 姿勢角の計測原理

航空機やロボット、地上を走行する車両など、機体を安定に動作させるためには姿勢制御は必要不可欠である。姿勢制御を高精度に実現するためには、姿勢角を正確に検知するセンシングシステムを設計する必要がある。検出した姿勢角をフィードバックし、制御系を構築する。

一般的に姿勢角検出は、角速度センサを使用し得られた角速度情報を時間積分することで姿勢角情報を得る。しかし、角速度検出に混在する誤差要素も同時に積算するため、時間の経過に伴い誤差が大きくなる問題を有する。角速度を高精度で検出できるリングレーザジャイロなどの計算機器も挙げられるが、非常に高価であり、汎用性も低い。また、数学的に角速度は不可積分であるため、単純な時間積分では誤差が蓄積する。

通常、角速度センサを使用し姿勢角を計算する際、時間経過に伴うバイアス誤差を除去するため、他の姿勢角検出器を用意し、ジャイロ計のバイアス誤差をリセットすることで誤差を取り除くが、リセットを行う際、姿勢角情報が一時遮断される。リセットを伴わない姿勢角検出器として、光ファイバジャイロと傾斜系を使用し、光ファイバの低周波ノイズと傾斜系の高周波ノイズをフィルタリングし、除去するものや、IMUセンサのようなジャイロ計、傾斜計、磁気センサ、角速度計、GPSを複合させた検出器はあるものの、いずれも高価なセンサシステムである。

E.1.1 Gyro Sensor: ジャイロ計

ジャイロ計は角速度を検出するセンサである。その特徴として、応答性が速く、ノイズも少ないことが挙げられる。一方、姿勢角情報を得るために時間積分時に角速度情報に含まれるわずかな誤差成分も含めて、積算

するため、時間の経過に伴うバイアス誤差が生じる。さらに、ジャイロ計によって検出される姿勢角ロール・ピッチ・ヨーは回転の順番によって姿勢が異なるため、厳密な姿勢は表現できない。

E.1.2 Inclino Meter: 傾斜計

傾斜計は重力場環境における重力加速度方向との傾き角を検出するセンサである。その特徴として、ジャイロ計のように積分操作を必要としないため、時間経過に伴うバイアス誤差の発生はないが、衝撃印加時に重力方向を大きく見失い正確な姿勢角を検出することができない。また、反応速度が遅くノイズレベルも大きい。

E.1.3 誤差補正

ジャイロ計で検出される姿勢角による姿勢表現の曖昧さを補間する方法として、角加速度センサを用いた傾き補償が挙げられるが、並進運動による加速度も影響するため、動作時の値は信用性に欠ける。

また[101]では、ジャイロ計と傾斜計の長所と短所を補間に合った安価な姿勢角検出システムを構築している。ジャイロ計から得られた角速度情報を積分して姿勢角を求め、傾斜系を用いて姿勢角情報を遮断することなく、バイアス誤差の除去を図っている。[101]で用いられたジャイロ計におけるバイアス誤差は、300 sあたり約3 deg程度である。ただし、サンプリング10 ms。このとき、傾斜計による姿勢角の補正是1 sに1回を選定している。

E.2 Control Moment Gyro : CMG

E.2.1 特徴

ここでは、人工衛星の3軸制御に用いられるトルク発生装置Control Momentum Gyro (CMG) の概要をまとめると。

CMGとは、Fig. E.1に示すように、角運動量を持たせたフライホイールをジンバルモータで回転させることでジャイロ効果を引き起こし、トルクを得るシステムである。CMGはひとつのユニットで1軸あるいは2軸方

向にトルクを与えることができるため、3軸姿勢制御には複数のユニットを組み合わせて使われる。1つのユニットに対し、1軸にのみトルクを与えるCMGを単一ジンバルCMG (single-gimbal control momentum gyros : SGCMG)、2つのジンバルを取り付けた2重ジンバルCMGを (double-gimbal control momentum gyros : DGCMG)という。過去には、スカイラブ衛星で3ユニットDGCMG、ミールで6ユニットSGCMG、ISS (International Space Station)でSGCMG、DGCMGのそれぞれ2ユニットずつ使用されており、大型人工衛星の姿勢制御への適用が実証されている。また、CMGの故障時の対処法や軽量化のため、CMGの配置についてさまざまな議論がされており、有名なもので4ユニットピラミッド型CMGや3ユニット直交型などが挙げられる。CMGの主な特徴を以下にまとめる。

- 応答性が高く発生トルクが大きい

ほとんどのリアクションホイールの最大トルクが1 Nm以下であるのに対し、CMGの最大トルクは100~5000 Nmである。そのため、姿勢変更を繰り返す宇宙支援船や宇宙望遠鏡などへの適用が期待されている。

- 低入力高出力

ジンバル角の変化がわずかであっても大きいトルクを与えることができる。

- 重量、サイズが比較的大きい

SGCMGの場合でもモータの数やジンバル機構により、1つのユニットで比べてもリアクションホイールより大きく重い。

- 特異点問題が存在する

搭載されたCMGのそれぞれのジンバル角によって、特定の方向に対してトルクが出力できない状態がある。

E.2.2 特異点問題

Fig. E.2に示す4ユニットピラミッド型CMGを取り付けた人工衛星の特異点問題について述べる。

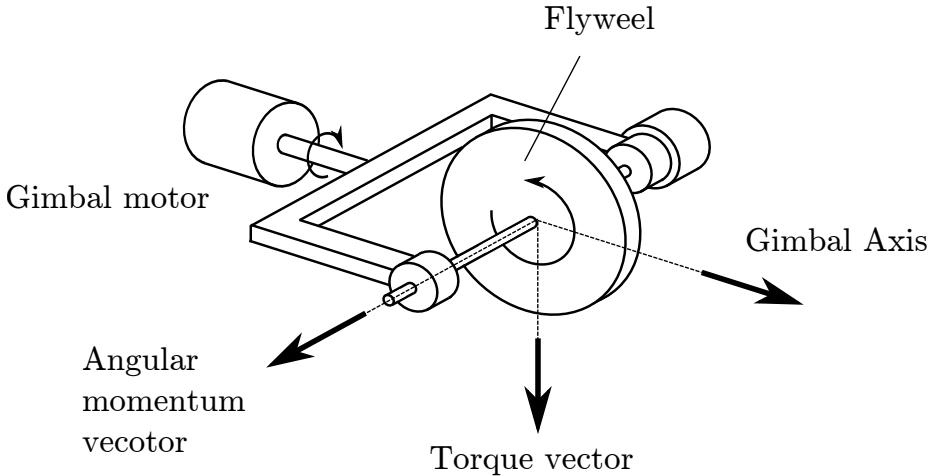


Fig. E.1: SG-CMG Unit.

三次元空間の回転運動はオイラーの運動方程式から以下のように記述される。

$$\dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\tau}_{ext} \quad (\text{E.1})$$

$\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は人工衛星に固定した座標系からシステム全体の角運動量を表す。 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ は人工衛星の角速度, $\boldsymbol{\tau}_{ext} \in \mathbb{R}^3$ は重力傾斜, 太陽輻射圧, 空気力などの自然力が人工衛星に与えるトルクを表す。システム全体の運動量 \mathbf{H} には, 人工衛星本体が持つ角運動量に加え, CMG の角運動量が含まれる。すなわち,

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h} \quad (\text{E.2})$$

が成り立つ($\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は人工衛星の慣性行列, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ はCMG が持つ角運動量)。(E.1),(E.2)から次式を得る。

$$(\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{h}}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) = \boldsymbol{\tau}_{ext} \quad (\text{E.3})$$

CMG によって生成される制御トルクを $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ とし,(E.3)を以下のように改める。

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{ext} \quad (\text{E.4})$$

$$\dot{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = -\boldsymbol{\tau} \quad (\text{E.5})$$

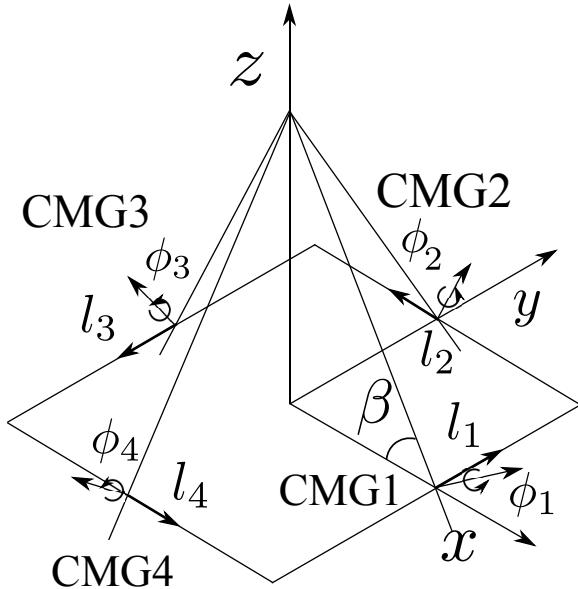


Fig. E.2: Pyramid mounting arrangement of four SGCMGs.

CMGの操舵論理(CMG steering logic)は、姿勢制御系を通して与えられた目標制御トルク τ^d から角運動量変化の目標値を次式で与えることができる。

$$\dot{\mathbf{h}}^d = -\tau^d - \omega \times \mathbf{h} \quad (\text{E.6})$$

CMGの角運動量 \mathbf{h} は各ユニットの角運動量ベクトルの和でそのジンバル角 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ の関数である。

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\delta) \quad (\text{E.7})$$

n はCMGのユニット数を表し、Fig. E.2のシステムでは $n = 4$ となる。 δ の定義域には制限がないため、Fig. E.2のシステムでは4次元トーラスとなる。したがって、(E.7)はトーラスから三次元非線形ユークリッド空間への非線形写像で、写像の値域は角運動量の動作空間となり有界である。(E.7)の微分同相写像行列 $A \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ とし、その微分関係を表すと次式となる。

$$\dot{\mathbf{h}} = A(\delta)\dot{\delta} \quad (\text{E.8})$$

$$A \equiv \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \delta} = \left[\frac{\partial h_i}{\partial \delta_i} \right]$$

人工衛星の姿勢変更時には、(E.6)から算出した角運動量変化の目標値 $\dot{\mathbf{h}}^d$ からCMGを操作する際に、(E.8)の逆問題を解く必要がある。この操作がCMG操舵論理の本質である。

ピラミッド型4ユニットシステム (Fig. E.2) 全体の角運動量は各ユニットが有する角運動量の総和より, 次式となる .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h} &= \sum_{i=1}^4 h_i(\delta_i) \\
 &= \begin{bmatrix} -c\beta \sin \delta_1 \\ \cos \delta_1 \\ s\beta \sin \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos \delta_2 \\ -c\beta \sin \delta_2 \\ s\beta \sin \delta_2 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} c\beta \sin \delta_3 \\ -\cos \delta_3 \\ s\beta \sin \delta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \delta_4 \\ c\beta \sin \delta_4 \\ s\beta \sin \delta_4 \end{bmatrix} \tag{E.9}
 \end{aligned}$$

となる . ただし , 人工衛星の機体座標系を基準としている . h_i は i 番目の CMG の持つ角運動量 , β はピラミッドの斜角を表す . このとき , A は次式となる .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -c\beta \cos \delta_1 & \sin \delta_2 & c\beta \cos \delta_3 & -\sin \delta_4 \\ -\sin \delta_1 & -c\beta \cos \delta_2 & \sin \delta_3 & c\beta \cos \delta_4 \\ s\beta \cos \delta_1 & s\beta \cos \delta_2 & s\beta \cos \delta_3 & s\beta \cos \delta_4 \end{bmatrix} \tag{E.10}$$

特異点とは , A が特異 , つまりランクが 2 以下となり逆が解けなくなる状態である . これを避けるため , 4ユニットピラミッド型システムのような冗長自由度を与えることで特異点を避ける方法が研究されている . CMG の特異点と制御則の関係は以下のことが知られている .

1. 特異点は角運動量空間の中で連続な曲面を成し , その一部が動作空間の最外面を作る .
2. 特異点には通過可能と通過不能の 2 種類があり , 最外面は通過不能となる .
3. 冗長自由度を利用した局所的な特異点回避制御では通過不能特異点は避けられない .
4. 通過不能特異点が最外面以外にはない最小のシステムは , 6 ユニットである .
5. 通過不能特異点がすべての問題ではなく , 制御の履歴が問題もあるが , 4ユニットピラミッド型システムでは , いかなる制御法にも避けられない特異点が存在する .

これらの問題を解決法は次のいずれかしかない .

1. 6 ユニット以上のシステムを使う .
2. 動作空間を制限する .
3. 厳密で連続な制御をあきらめる .