

## 修士論文

# Natural Motionと反動零空間法を用いた 冗長マニピュレータの制御に関する研究

東京都市大学大学院工学研究科  
機械システム工学専攻  
半田 陽一  
指導教官 金宮 好和 教授  
佐藤 大祐 講師

平成24年2月29日



# 目 次

<b>第1章 序論</b>	<b>11</b>
1.1 研究背景 . . . . .	11
1.1.1 順運動学と逆運動学 . . . . .	12
1.1.2 冗長マニピュレータ . . . . .	13
1.1.3 力の概念を必要とする制御 . . . . .	14
1.1.4 反動零空間法 (Reaction Null-Space : RNS) . . . . .	15
1.1.5 特異点問題と特異点適合法 . . . . .	15
1.2 研究目的 . . . . .	16
1.3 構成 . . . . .	17
<b>第2章 Natural motion を用いた経路追従制御とセルフモーション</b>	<b>19</b>
2.1 概要 . . . . .	19
2.2 逆運動学 . . . . .	20
2.3 特異点 . . . . .	21
2.4 列拡張ヤコビ行列による制御 . . . . .	21
2.4.1 非冗長マニピュレータ . . . . .	21
2.4.2 冗長マニピュレータ . . . . .	23
2.5 Natural motion の動力学的影響 . . . . .	24
2.5.1 Natural motion の動力学 . . . . .	24
2.5.2 Natural self motion の動力学 . . . . .	25
2.6 列拡張ヤコビ行列を用いた他の経路追従制御法 . . . . .	26
2.6.1 等速軌道追従制御 (CS: constant speed control) . . . . .	26
2.6.2 最短時間制御 (TO: time optimal control) . . . . .	26
2.6.3 孤長を一定にした制御 (CAL: constant arc length control)	27
2.6.4 大域的最適化 (GO: Global optimization control) . . . . .	27
2.7 他のセルフモーション . . . . .	27
2.7.1 Pseudoinverse self motion (PISM) . . . . .	28
2.7.2 Constant speed self motion (CSSM) . . . . .	28

<b>第3章 Natural motionの比較解析</b>	<b>29</b>
3.1 概要 . . . . .	29
3.2 非冗長マニピュレータによる先端経路追従制御の比較 . . . . .	29
3.2.1 2自由度マニピュレータを用いた直線経路追従制御 . . . . .	29
3.2.2 6自由度マニピュレータを用いた円経路追従制御 . . . . .	38
3.2.3 螺旋経路による比較結果 . . . . .	45
3.3 冗長マニピュレータによるセルフモーションの比較 . . . . .	48
3.3.1 7自由度マニピュレータを用いたセルフモーション . . . . .	51
3.4 考察 . . . . .	55
<b>第4章 反動零空間法に基づくモーション・フォース制御の提案</b>	<b>59</b>
4.1 概要 . . . . .	59
4.2 Khatibのモーション・フォース制御(OSF-HC) . . . . .	60
4.3 反動零空間法に基づくモーション・フォース制御[32] . . . . .	62
4.3.1 冗長性を利用した反動制限制御 . . . . .	64
<b>第5章 反動零空間法に基づくモーション・フォース制御の比較解析</b>	<b>67</b>
5.1 概要 . . . . .	67
5.1.1 非冗長マニピュレータを用いた検証 . . . . .	67
5.1.2 冗長1自由度マニピュレータを用いた検証 . . . . .	72
5.1.3 冗長性の利用 . . . . .	79
5.2 考察 . . . . .	79
<b>第6章 結論および今後の研究について</b>	<b>83</b>
6.1 結論 . . . . .	83
6.2 今後の研究について . . . . .	84
<b>謝辞</b>	<b>87</b>
<b>参考文献</b>	<b>89</b>
<b>研究成果</b>	<b>95</b>
<b>付録A 関節空間の曲率の求め方</b>	<b>97</b>
A.1 概要 . . . . .	97
A.2 一般的な曲線の曲率の求め方 . . . . .	97

A.3 パラメータ曲線の曲率の求め方 . . . . .	98
<b>付録B 動的パラメータの同定</b>	<b>99</b>
B.1 概要 . . . . .	99
B.2 パラメータの同定法 . . . . .	99
B.3 2リンクモデル . . . . .	100
B.3.1 逐次同定法 . . . . .	102
B.3.2 同時同定法 . . . . .	105
B.3.3 混合同定法 . . . . .	105
B.4 7自由度可搬式汎用知能アームPA-10 . . . . .	106
B.5 PA-10を用いた同定実験 . . . . .	110
B.5.1 摩擦項の同定 . . . . .	110
B.6 速度依存摩擦 . . . . .	112
B.6.1 実験方法 . . . . .	112
B.6.2 実験結果・考察 . . . . .	113
B.6.3 補足事項 . . . . .	114
B.7 位置依存摩擦 . . . . .	115
B.7.1 実験方法 . . . . .	115
B.7.2 実験結果・考察 . . . . .	115
B.8 非線形剛性トルク . . . . .	116
B.8.1 モデル . . . . .	116
B.8.2 実験方法 . . . . .	119
B.8.3 実験結果・考察 . . . . .	119
B.9 慣性パラメータの同定 . . . . .	123
B.10 同定実験 . . . . .	124
B.11 実験結果・考察 . . . . .	124
B.12 まとめ . . . . .	125
<b>付録C フリーフロー・ティンギングマニピュレータの運動方程式</b>	<b>127</b>
C.1 概要 . . . . .	127
C.2 Modeling . . . . .	127
C.3 運動方程式 . . . . .	128
C.3.1 慣性行列 . . . . .	129
C.3.2 コリオリ遠心力項 . . . . .	130

C.4 平面3自由度フリーフロー・ティングマニピュレータ . . . . .	130
C.4.1 慣性行列の計算 . . . . .	133
C.4.2 コリオリ遠心力項の計算 . . . . .	135
付録D フリーフロー・ティングマニピュレータの拘束力 . . . . .	141
D.1 概要 . . . . .	141
D.2 ベース部の拘束力 . . . . .	141
D.3 先端部の拘束力 . . . . .	142
D.4 両端が固定されたときの順動力学 . . . . .	142

# 図 目 次

1.1	MOTOMAN (©YASKAWA). . . . .	11
1.2	SmartPal (©YASKAWA). . . . .	11
1.3	Manipulator positioning: (a) nonredundant manipulator and (b) redundant manipulator. . . . .	13
1.4	Basic concept of motion force control. . . . .	14
1.5	JEMRMS (©JAXA). . . . .	15
1.6	HOAP-2. . . . .	15
2.1	Geometric interpretation of augmented C-space. . . . .	22
2.2	Augmented manipulator model. . . . .	22
3.1	Simple 2R limb following straight-line paths. . . . .	30
3.2	Variation in peak joint speed, peak joint torque and total mechanical power for the linear path following cases. . . . .	32
3.3	Simulation result of 2R straight-line path tracking with natural motion ( $d = 0.134$ m). . . . .	33
3.4	Simulation result of 2R straight-line path tracking with constant speed ( $d = 0.134$ m). . . . .	34
3.5	Simulation result of 2R straight-line path tracking with constant arc length ( $d = 0.134$ m). . . . .	35
3.6	Simulation result of 2R straight-line path tracking with global optimization ( $d = 0.134$ m). . . . .	36
3.7	2R straight-line path tracking of joint speeds vector field. . . . .	37
3.8	Change of joint speeds vector field by $\alpha$ . . . . .	37
3.9	PA-10 manipulator tracking a circular path. This is actually a model of a seven-DOF manipulator with one joint locked (Joint 3, not shown). . . . .	39
3.10	Circular path tracking simulation of the 6R manipulator with natural motion. . . . .	40

3.11	Circular path tracking simulation of the 6R manipulator with constant speed.	41
3.12	Circular path tracking experiment with the 6R manipulator.	43
3.13	Joint 1 torque comparison from the experiment.	44
3.14	Circular path tracking simulation results with friction model of the 6R manipulator.	44
3.15	Natural motion: (a) joint speeds, (b) joint torque, (c) joint accelerations, (d) end-effector speeds, (e) total mechanical power and (f) determinant.	46
3.16	Time optimal: (a) joint speeds, (b) joint torque, (c) joint accelerations, (d) end-effector speeds, (e) total mechanical power and (f) determinant.	47
3.17	Kinematic singularities: (a) shoulder singularity and (b) elbow singularity.	48
3.18	NM spiral path tracking simulation with the 6R manipulator.	49
3.19	CS spural path tracking simulation with the 6R manipulator.	50
3.20	Natural self motion simulation with the 7R manipulator.	52
3.21	Constant speed self motion simulation with the 7R manipulator.	53
3.22	Pseudoinverse self motion simulation with the 7R manipulator.	54
4.1	Model of a manipulator in a fixed base.	60
4.2	Model of a manipulator in a quasi-fixed base.	62
5.1	Models of two similar non-redundant manipulators for (a) Operational Space formulation and (b) RNS formulation, and their initial configuration of several simulations.	68
5.2	The results of the numerical simulation via OSF-HC.	70
5.3	The results of the numerical simulation via RNS-HC.	71
5.4	Models of two similar redundant manipulators for (a) OSF-HC and (b) RNS-HC, and their initial configuration in the simulations.	72
5.5	OSF-HC simulation results without self motion.	74
5.6	RNS-HC simulation results without self motion.	75

5.7 Animation of the simulation via: (upper) OSF-HC with self motion and (bottom) RNS-HC with self motion. The blue and red arrows define the desired motion and force vectors, respectively. Hence, the blue arrow is orthogonal to the red one. The animation is separated into 4 phases. Phase 1 is from 0 s to 2.5 s, Phase 2 is from 2.5 s to 5 s, Phase 3 is from 5 s to 7.5 s, Phase 4 is from 7.5 s to 10 s. . . . .	76
5.8 OSF-HC simulation results with self motion. . . . .	77
5.9 RNS-HC simulation results with self motion. . . . .	78
5.10 RNS-HC simulation results with reaction limit control. . . . .	80
A.1 Image of curve. . . . .	97
B.1 2 DOF manipulator model. . . . .	101
B.2 Steps 1. . . . .	102
B.3 Steps 2. . . . .	103
B.4 Steps 3. . . . .	104
B.5 Image of PA-10 joint limits. . . . .	107
B.6 PA-10 coordinate frame. . . . .	108
B.7 Harmonic drive (©Harmonic Drive Systems.) . . . . .	111
B.8 Setting of PA-10:(a) Flat posture and (b) Vertical posture. . . . .	112
B.9 Velocity dependent friction. . . . .	114
B.10 Result of re-experiment on joint1,2. . . . .	115
B.11 Position dependent friction. . . . .	117
B.12 Position dependent friction. . . . .	118
B.13 Nonlinear stiffness. . . . .	120
B.14 Joint 2 stiffness fit model. . . . .	121
B.15 Load stiffness. . . . .	122
B.16 Inertia parameter. . . . .	124
C.1 Model of a free-floating manipulator. . . . .	127
C.2 3R free-floating manipulator. . . . .	131



# 表 目 次

3.1	Initial conditions for the linear path following cases. . . . .	30
3.2	Straight-line path tracking cases with the 2R manipulator. . . . .	31
3.3	Circular path tracking cases with the 6R manipulator. . . . .	42
3.4	PA-10 maximum torque. . . . .	45
3.5	Self motion with the 7R manipulator. . . . .	55
5.1	Gain values of spring and damper of end-links <i>A</i> and <i>B</i> . . . . .	69
B.1	Specifications of PA-10. . . . .	107
B.2	DH parameters of PA-10. . . . .	108
B.3	Link parameters. . . . .	108
B.4	Specification of actuator. . . . .	109
B.5	Parameter for velocity dependent friction. . . . .	113
B.6	Parameter for position dependent friction. . . . .	116
B.7	Parameter for nonlinear stiffness as a function of gravity torque for joint2 for both the positive and negative direction. . . . .	122
B.8	Base parameter. . . . .	125
B.9	Dynamics parameters. . . . .	125



# 第1章 序論

## 1.1 研究背景

現在，マニピュレータは人が入れない危険な場所や，人間よりも高速に正確な動きができるなどの理由により，宇宙空間や生産現場，災害現場などの，多くの分野で活躍している。また，マニピュレータの自由度も可能作業の増加などの理由から，増えてきており，Fig. 1.1 のような人間の腕を模擬した7自由度マニピュレータなども多く用いられるようになった。また，近年，Fig. 1.2 のようなホームロボットにも，多関節マニピュレータが用いられるようになり，よりマニピュレータが人間に身近になってきている。



Fig. 1.1: MOTOMAN (©YASKAWA).



Fig. 1.2: SmartPal (©YASKAWA).

そのような汎用性の高いマニピュレータを扱う際のマニピュレーション技術は，安全性，利便性などの観点から，非常に大切である。そのとき，順運動学と逆運動学が必要不可欠となる。順運動学はマニピュレータの各関節からマニピュレータ先端を求めるることであり。逆運動学とはその逆で，マニピュレータ先端から各関節を求めることがある。一般的に各関節で表

される空間を関節空間と言い、作業をする際に用いられる空間（多くの場合マニピュレータ先端を示す）を作業空間と言う。関節空間の次元はマニピュレータの自由度と等しく、作業空間の次元は一般的に三次元空間で考えると6次元である（二次元平面で考えると3次元となる）。また、三次元空間で任意の位置姿勢に制御する場合には、マニピュレータの自由度は最低6自由度必要であり、作業空間と関節空間の次元数が同じ次元のマニピュレータのことを非冗長マニピュレータと言い、作業空間よりも関節空間の次元数が多いマニピュレータのことを冗長マニピュレータと言う。マニピュレータの動作には対象物にマニピュレータ先端が接触していないときと、接触しているときの2種類がある。マニピュレータが対象物と接触していない条件下や対象物を把持し運んでいるようなときには、一般的に順運動学と逆運動学を用いて制御を行う。一方、机の拭き掃除やドアの開閉などのマニピュレータ先端が対象物と接触している場合、マニピュレータ先端の位置だけではなく、対象物に加える力も制御する必要がある。

### 1.1.1 順運動学と逆運動学

Figs. 1.1, 1.2などのようなシリアルリンク機構のマニピュレータであれば、順運動学は容易に求めることができるが、逆運動学は容易に求めることはできない。そこで一般的にはヤコビ行列を用いて、速度の次元で解を得る。しかし、逆運動学にはキネマティック特異点（1.1.5で述べる）と呼ばれるマニピュレータが制御を行えない姿勢が存在する。

作業空間による制御を行う際、多くの場合に2つの手順が必要である。

1. 作業空間の経路の設定
2. 経路の追従速度の設定

一般的に経路は変更が不可能なことが多く、指定された経路から外れることなく追従することが重要とされ、一方で経路の追従速度は自由に設定できる場合が多い。この追従速度の最適化に対する研究は多く行われており、最小の時間で決められた経路を追従する制御[1]–[3] や関節トルクのリミットで制御を行う制御[4]–[6] などがある。しかし、これらの方法は最適解を得るために拘束条件が複雑になることや、特異軌道が存在することが指摘されており、キネマティック特異点問題も解決していない[1]。一方、金宮らは特異点適合法を応用した、追従速度をヤコビ行列の行列式に

比例させる natural motion (NM) を用いることで , キネマティック特異点付近においても関節角速度が過大にならず , さらにキネマティック特異点上を通過できる方法を提案している [7] .

### 1.1.2 冗長マニピュレータ

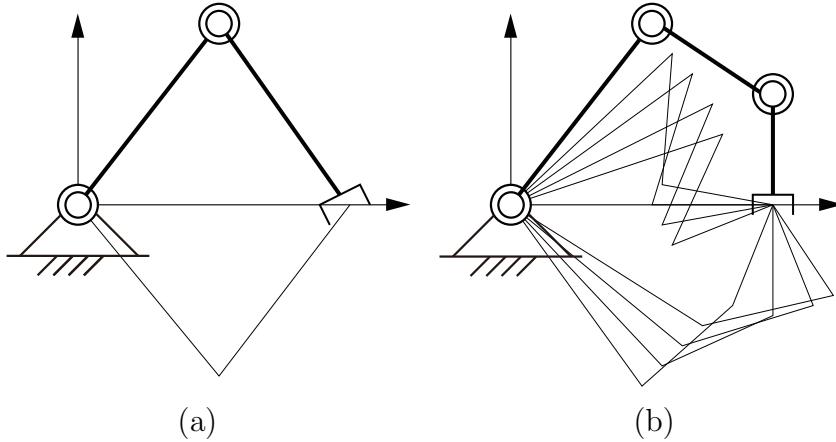


Fig. 1.3: Manipulator positioning: (a) nonredundant manipulator and (b) redundant manipulator.

前節で逆運動学について述べたが , Fig. 1.3 のように , 非冗長マニピュレータでは作業空間の目標値だけで , 一意に解を得ることができるが , 冗長マニピュレータでは作業空間の目標値だけでは解が複数存在するため , 一意に解を得ることはできない . 一方で , この余分な自由度 (冗長自由度) を用いることによって , 作業空間での作業を実現しながらも , 別の作業ができるることから , より汎用性や融通性を高めることができる . 冗長自由度による運動はセルフモーションと呼ばれ , この運動の制御方法は多くの研究が行われてあり , 特異姿勢回避 , 障害物回避 , 機構的な制限の回避などの , 制御範囲の拡張を図る制御や , 角度レベル , 速度レベル , 加速度レベル , トルクレベルでの局所最適解を得る方法などがある [8]–[11] . しかし , 欠点として , 制御の複雑化や特異点の増加などの問題がある . 我々の研究室においても , 柔軟ベース上マニピュレータに対して , 冗長自由度を用いて , ベースの振動を抑える制御などを行っている [12][13] .

### 1.1.3 力の概念を必要とする制御

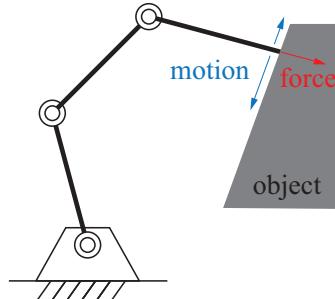


Fig. 1.4: Basic concept of motion force control.

ここまでではマニピュレータが対象物と接触していない、位置制御について述べてきた。しかし、マニピュレータに机の拭き掃除やドアの開閉、クランク回しなどの作業を行わせる場合、Fig. 1.4のようにマニピュレータ先端の位置だけではなく、対象物に加える力も制御する必要がある。このようなマニピュレータ先端の力を制御する方法として、インピーダンス制御やハイブリッド制御（モーション・フォース制御）がある[14]–[16]。インピーダンス制御はマニピュレータ先端の外力に対する機械インピーダンスを、任意に設定し位置および力を制御する方法である。一方、モーション・フォース制御は動作を制御する方向と力を制御する方向を決め、それぞれの位置、力を測定しフィードバックすることで、動作の制御ループと力の制御ループを別々に設ける方法である。以降、モーション・フォース制御について詳しく述べる。

モーション・フォース制御は過去に多く研究されており、Khatibは、マニピュレータの運動方程式を作業空間について定式化（Operational Space formulation: OSF）し選択行列を用いることで、動力学的に先端の運動とマニピュレータの運動が干渉しない非干渉化に成功しており、マニピュレータ先端の位置フィードバック制御と転置行列によるマニピュレータ先端の力制御を同時に満たしている[17][18]。また、マニピュレータ先端モーション・フォース制御と非干渉な、マニピュレータの冗長自由度を利用した関節トルクの制御に成功している。動力学的に先端とマニピュレータを非干渉化する方法はOSFを用いた方法しかないと考えられているが、欠点としては固定ベースマニピュレータを想定して考えられており、ベースが固定されていない人形ロボットなどで用いる場合、ベースに制御時の反力が

加わり、ベースが移動するなどの問題が発生するため、制御を拡張する必要がある。

一方、我々の研究室では反動零空間法を用いることで、動力学的にマニピュレータの運動がベースの運動に干渉しない非干渉化に成功している。

### 1.1.4 反動零空間法 (Reaction Null-Space : RNS)

反動零空間法 [19] は Fig. 1.5 に示す、宇宙用マニピュレータなどの、ベースが固定されていないフリー・フロー・ティングマニピュレータのための制御法である。フリー・フロー・ティングマニピュレータはマニピュレータが動作した際の反力がベース部に伝わり、ベース部の運動に影響を及ぼす。そこで、ベース部に反力や振動などを与えないように制御する方法が反動零空間法である [22]。また、この考え方を応用し柔軟ベース上マニピュレータの柔軟ベースに対し反動のないマニピュレータの軌道生成 [23] や、Fig. 1.6 に示す、足部が固定されていない人形ロボットのバランス制御 [24] などに用いられている。

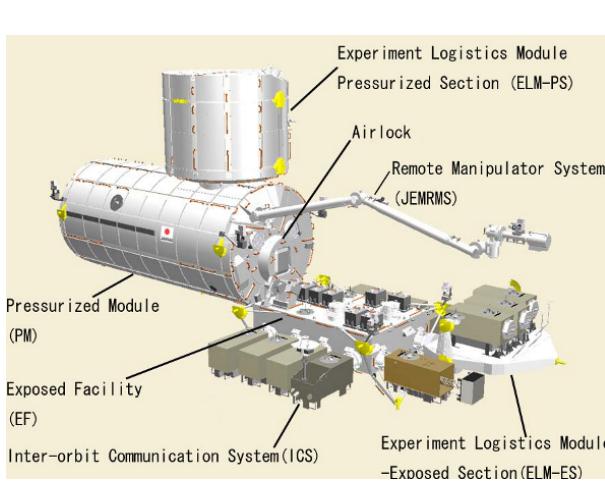


Fig. 1.5: JEMRMS (©JAXA).

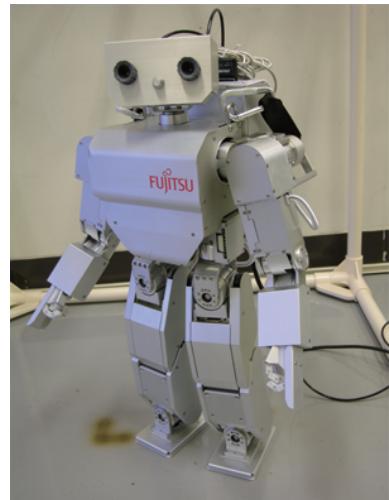


Fig. 1.6: HOAP-2.

### 1.1.5 特異点問題と特異点適合法

特異点にはいくつか種類があるが、逆運動学を解く際に発生する特異点をキネマティック特異点と言う。このキネマティック特異点では逆運動学を解く際に数学的に解が得られず発散するため、マニピュレータは暴走す

る。また、特異点付近を通過するだけでも、関節速度やトルクが過大に発生するなど、制御が不安定となる。そのため、一般的には特異点付近を避けるようにマニピュレータを制御するが、マニピュレータの稼働範囲を充分に生かすことができないなどの問題が発生する。また、この特異点はマニピュレータの自由度が多くなるほど多くなり、リアルタイムで操作を行う場合、操作者が知らないうちに特異点付近を通過してしまうなどの問題も発生する。

このキネマティック特異点問題に対して金富らは列拡張ヤコビ行列を用い、先端の速度を方向と大きさに分け、マニピュレータの姿勢によって大きさを変化させることで、マニピュレータ先端の軌道が指定された軌道を描きつつも、制御が不安定にならず特異点を通過する方法を提案している[20]。

また、OSF や RNS を用いて制御している際もそれぞれ特異点が存在する。OSF を用いる際はモビリティエンソル[15]が零の付近でキネマティック特異点となり、RNS を用いる際ではキネマティック特異点とは別のダイナミック特異点が存在する[21]。

## 1.2 研究目的

我々の研究目的は、マニピュレータ先端が対象物に接触していない状況下での、運動学を用いたマニピュレータ先端の経路追従制御と冗長マニピュレータのセルフモーション動作が、常に不安定にならない方法の確立である。また、マニピュレータ先端が対象物に接触している際の、RNS のベースとマニピュレータの動力学的な非干渉を利用した、新たな力制御方法の提案と、提案した方法の動力学シミュレータによる検証である。具体的には以下に示す。

1. NM と他の追従制御を比較することで NM の性能について比較検証し、NM の性質について明確にする。さらに、冗長マニピュレータのセルフモーション動作に関しても比較を行う。
2. RNS に基づき、マニピュレータと対象物の動力学的干渉を利用する、OSF を用いた制御と異なる新たなモーション・フォース制御法を提案する。さらに、提案した方法を用いた冗長性の制御方法についても述べる。

3. Khatib の提案する OSF を用いたモーション・フォース制御法と我々の提案する RNS に基づくモーション・フォース制御法を比較し、提案するモーション・フォース制御法が、同等以上の性能を有することを示す。

この研究の応用例を 2 点示す。

上記の 1 の結果から、実際の作業を NM を用いて行うことで、特異点を気にすることなく、作業空間の経路を設定でき、経路設計の効率化に繋がり、さらに関節空間の急激な変化が無いことから、制御の安定化にも繋がると考えられる。

上記の 2, 3 の結果から、人形ロボットのようなベースが固定されていないモデルにおいても、モーション・フォース制御を可能にすることである。提案したモーション・フォース制御を用いることで冗長自由度を利用し、ベースへの力も制御することが可能となり、より多くの場面でモーション・フォース制御が行えると考えられる。

### 1.3 構成

本論文は大きく 2 部で構成されており、詳細は以下に示す。

第 1 章「序論」では、本研究の背景、目的などについて述べた。

第 2 章「Natural motion を用いた経路追従制御とセルフモーション」では、非冗長と冗長マニピュレータの逆動力と特異点問題、列拡張ヤコビ行列による制御方法について述べる。また、NM と natural self motion の制御方法について説明し、動力学的影響について述べる。さらに、列拡張ヤコビ行列を用いた他の経路追従法とセルフモーションについて述べる。

第 3 章「Natural motion の比較解析」では、非冗長マニピュレータを用いて、シミュレーションと実機実験から natural motion と他の経路追従制御法を比較を行い、natural motion の性能について評価する。また、冗長マニピュレータを用いて、シミュレーションにより、natural self motion と他のセルフモーションを比較し、natural self motion の性能について評価する。

第 4 章「反動零空間法に基づくモーション・フォース制御の提案」では、OSF によるモーション・フォース制御の説明と、RNS に基づく新たなモーション・フォース制御の提案を行う。また、冗長性の制御方法の例として反動制限制御について述べる。

第5章「反動零空間法に基づくモーション・フォース制御の比較」では、OSFによる制御とRNSに基づく制御の比較を行うことにより、提案した制御法の有用性の証明を行う。さらに提案した制御法の冗長性活用の例として、反動制限制御を行い、正しく制御できることを確認する。

第6章「結論および今後の研究について」では、以上の議論を要約する。

# 第2章 Natural motionを用いた経路追従制御とセルフモーション

## 2.1 概要

マニピュレータを制御する場合，各関節の速度から先端の速度を求める方法を順運動学と言い，先端の速度から各関節の速度を求めるのを逆運動学と言う．一般的にマニピュレータの制御を行う場合は，マニピュレータ先端の経路を設定し，逆運動学を用い制御を行う．制御を行う際の経路を追従する速度は自由に設定できるが，多くの場合，経路を最短時間で動作するような制御を与えられたり，追従速度を一定にする制御を行う．しかし，逆運動学を用いる際，特異点というアームを制御できなくなるマニピュレータの姿勢が存在する．逆運動学を解く際に発生する特異点をキネマティック特異点と言い，先端の制御を行った状態でキネマティック特異点付近を通過すると，関節の角速度が過大となり，キネマティック特異点になると，マニピュレータは暴走する．そこで，金宮らは，追従速度をマニピュレータの姿勢により変化させる，natural motion (NM) を用いることでキネマティック特異点付近においても関節角速度が過大にならず，さらにキネマティック特異点上を通過できる方法を提案している[7]．本章では基本的な逆運動学の説明と，その時に発生するキネマティック特異点問題，キネマティック特異点の通過を可能にする特異点適合法とNMの解説，さらにNMの動力学的特性を説明する．一方，冗長マニピュレータの冗長性を用いた運動セルフモーションに関しては，NMはnatural self motion (NSM)として紹介されている[25]．本章ではNSMに関しても紹介する．最後に，列拡張ヤコビ行列を用いた，他の経路追従制御法と他のセルフモーションについても紹介する．

## 2.2 逆運動学

マニピュレータを制御する場合，関節空間を  $n$ ，作業空間を  $m$  とするときヤコビ行列  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，先端速度  $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^m$  と関節角速度  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  には以下の関係が成り立つ．

$$\mathcal{V} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.1)$$

$\mathbf{J}(\mathbf{q})$  が正則であるとき ( $n = m$ ) 逆運動学の式はヤコビ行列の逆行列  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$  を用いて以下のように表す．

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathcal{V} \quad (2.2)$$

$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$  は，行列式  $\det \mathbf{J}(\mathbf{q})$  と余因子行列  $\text{adj} \mathbf{J}(\mathbf{q})$  を用いると，以下のように表せる．

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\det \mathbf{J}(\mathbf{q})} \text{adj} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad (2.3)$$

また，冗長マニピュレータ ( $n > m$ ) の場合，目標の先端速度に対し，関節角速度の解が複数存在する．そこで冗長性の制御を行わないと一意に逆運動学解を得ることはできない．最も一般的な解法として，擬似逆行列を用いた方法がある．この方法は微小時間毎の速度ベクトルのノルム  $\|\dot{\mathbf{q}}\|$  を最小とするよう冗長性を制御し解を得る方法である．ヤコビ行列の擬似逆行列は以下の式で求まる．

$$\mathbf{J}^+(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1} \quad (2.4)$$

この擬似逆行列  $\mathbf{J}^+(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  を用いて，関節角速度は以下の式で与えられる．

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+(\mathbf{q})\mathcal{V} + (\mathbf{U} - \mathbf{J}^+\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))\dot{\mathbf{q}}_a \quad (2.5)$$

$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は単位行列で， $\dot{\mathbf{q}}_a \in \mathbb{R}^n$  は任意のベクトルである．また，Eq. (2.5) の右辺第2項は零空間ベクトルと呼ばれる，先端の動作に影響を与えないベクトルである．また， $\dot{\mathbf{q}}_h = (\mathbf{U} - \mathbf{J}^+\mathbf{J})\dot{\mathbf{q}}_a$  と表し，このベクトルでのマニピュレータの運動をセルフモーションと呼ぶ． $\mathbf{J}^+(\mathbf{q})$  は，行列式  $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$  と余因子行列  $\text{adj}(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$  を用いると，以下のように表せる．

$$\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \mathbf{J}^T \text{adj}(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \quad (2.6)$$

Eq. (2.2)，(2.5) を用いることで，先端の速度から各関節の速度を求めることができる．

## 2.3 特異点

マニピュレータの先端を逆運動学を用いて制御を行う場合、キネマティック特異点というアームを制御できない点が存在する。Eq. (2.3)を見ると、ヤコビ行列の逆行列の大きさは $1/\det \mathbf{J}$ に依存しており、方向は $\text{adj} \mathbf{J}$ に依存している。そこで、ヤコビ行列 $\mathbf{J}$ のrankが下がった場合、 $\det \mathbf{J} = 0$ となることで $1/\det \mathbf{J}$ が無限大となり、関節の角速度が過大となる。さらに、特異点付近においても $\det \mathbf{J} \approx 0$ となり急激な速度変化が発生する。また、冗長マニピュレータにおいても同様のことが言え、ヤコビ行列の擬似逆行列の大きさは $1/\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$ に依存しており、 $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = 0$ のときキネマティック特異点となり、特異点付近においても急激な速度変化が発生する。

## 2.4 列拡張ヤコビ行列による制御

前節で特異点の問題について説明した、この節では特異点を通過可能な方法の一つである列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトルによる特異点適合法について説明する。

### 2.4.1 非冗長マニピュレータ

まず非冗長マニピュレータ( $n = m$ )を対象に説明する。Eq. (2.1)を以下のように書き換える。

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{V} = \mathbf{0} \in \Re^m \quad (2.7)$$

さらに、 $\mathcal{V}$ を方向を表す $\mathbf{t}_*(\mathbf{q}_*)$ と、大きさを表す $\dot{\mathbf{q}}_*$ を用いて $\mathcal{V} = \mathbf{t}_*(\mathbf{q}_*)\dot{\mathbf{q}}_*$ と表すと、以下の同次方程式として表せる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{t}_*(\mathbf{q}_*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}_* \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

$$\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

$\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{q}}) = [\mathbf{J}(\mathbf{q}) - \mathbf{t}_*(\mathbf{q}_*)]$  は列拡張ヤコビ行列、 $\dot{\bar{\mathbf{q}}} = [\dot{\mathbf{q}}^T \ \dot{\mathbf{q}}_*]^T$  である。次に $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$ の解を $\bar{\mathbf{J}}$ の零空間ベクトルに基づき同時方程式を解くと以下のようになる。

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = b\bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (2.10)$$

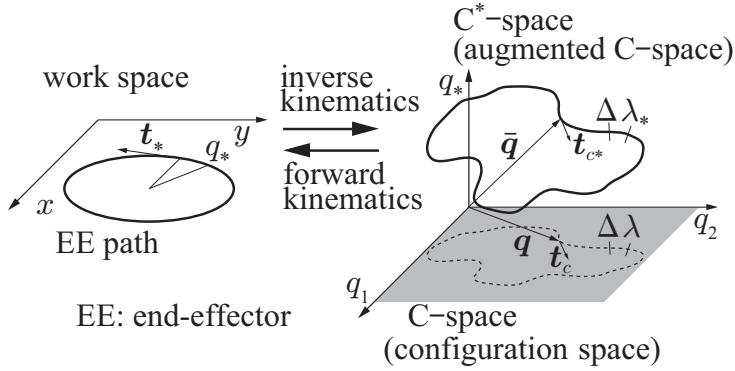


Fig. 2.1: Geometric interpretation of augmented C-space.

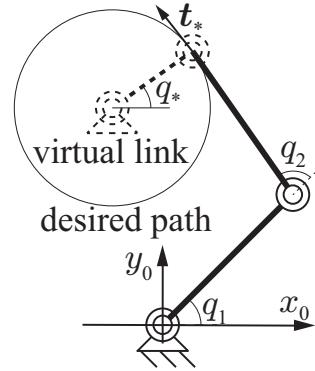


Fig. 2.2: Augmented manipulator model.

$b$ は任意のスカラー量で ,  $\bar{n}(\bar{q}) \in \ker \bar{J}(\bar{q}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  は列拡張ヤコビ行列の零空間ベクトルである .  $\bar{n}(\bar{q})$  は以下のように表される [27] .

$$\bar{n}(\bar{q}) = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_{n+1}]^T \quad (2.11)$$

$$C_i = (-1)^{i+1} \det \bar{J}_i(\bar{q}) \quad (2.12)$$

$\bar{J}_i$  は  $\bar{J}$  の第  $i$  列目を取り除いた行列である . 最終的に ,  $\bar{n}(\bar{q})$  は以下のように表される .

$$\bar{n}(\bar{q}) = [\bar{n}^T(\bar{q}) \ \det J]^T \quad (2.13)$$

$n(\bar{q}) \equiv [\text{adj } J(q)]t_*(q_*)$  であり , Eqs. (2.10) , (2.13) から以下のように表すことができる .

$$\dot{q} = b n(\bar{q}) \quad (2.14)$$

$$\dot{q}_* = b \det J(q) \quad (2.15)$$

Eq. (2.15) から先端速度の大きさ  $\dot{q}_*$  を  $\det J(q)$  に比例させることによって ,  $\det J(q)$  が 0 に近づいた場合でも過剰な速度にならない . また , キネマティック特異点となった際に先端速度の大きさ  $\dot{q}_*$  が 0 となるため動作が停止するが , 一時的に  $\det J(q)$  に値を代入することで , キネマティック特異点を通過することが可能となる . このとき ,  $b$  を定数として扱い動作させた動作を NM と言う .

列拡張ヤコビ行列を用いた制御の概念図を Fig. 2.1 に示す . ただし , 表現が分かりやすいよう  $n = 2$  ,  $m = 2$  としており , 先端の追従軌道は円軌道にしている . 作業空間で経路追従制御を行った際の , 拡張関節空間 (C\*-space)

での軌道は一つの曲線で描かれ、マニピュレータの機構により変化し、冗長1自由度マニピュレータのセルフモーションと同じことを表している。つまり、Fig. 2.2 のように  $t_*$  方向に動作する仮想リンクを設け、仮想リンクを含んだマニピュレータ先端が動作しないよう、セルフモーションするのと同等である。この  $C^*$ -space の曲線のことを self motion manifold と呼ばれ、self motion manifold の弧長  $\lambda_*$  は不变の値であり、natural parameter と呼ばれる。Natural parameter は独自の付加定数  $\dot{\lambda}_* = \|\bar{n}\|$  で構成され、 $\dot{\lambda}_*$  は natural speed と呼ばれる。NM では  $b$  を定数として扱い natural speed に比例させる。その際先端の経路追従速度は  $|\det(J)|$  に比例する。また、 $C^*$ -space の軌道を関節空間 (C-space) に射影することで、関節空間の軌道を表すことができる。その際、単位時間あたりの  $C^*$ -space の軌道の弧長は  $\Delta\lambda_* = \|\dot{\bar{q}}\|$  で表し、C-space の軌道の弧長は  $\Delta\lambda = \|\dot{q}\|$  で表す。

#### 2.4.2 冗長マニピュレータ

冗長マニピュレータ ( $n > m$ ) の場合、零空間ベクトルは  $n - m + 1$  個求まり、それぞれ、 $\mathbb{R}^{n \times n+1}$  の行列として求めることができる。例えば、冗長1自由度  $n - m = 1$  のとき以下の式のように表現される。

$$\dot{\bar{q}} = b_{sm} \bar{n}_{sm}(\bar{q}) + b_{ep} \bar{n}_{ep}(\bar{q}) \quad (2.16)$$

ただし、 $b_{sm}$ ,  $b_{ep}$  は任意のスカラー量、 $\bar{n}_{sm}$  は、セルフモーション呼ばれる先端の位置姿勢に影響がない冗長運動を決めるベクトル場であり、 $\bar{n}_{ep}$  は先端の運動を決めるベクトル場である。

$\bar{n}_{sm}$  は以下のように定義される。

$$\bar{n}_{sm} = [ C_{sm_1} \ C_{sm_2} \ \cdots \ C_{sm_{n+1}} \ 0 ]^T = [\mathbf{n}_{sm} \ 0]^T \quad (2.17)$$

$$C_{sm_i} = (-1)^{i+1} \det J_i(\mathbf{q}) \quad (2.18)$$

ただし、 $J_i$  は  $J$  から第  $i$  列目を取り除いた行列である。また  $\bar{n}_{sm}$  の先端の動きに関係する第  $n+2$  列目を 0 とする。

また、 $\bar{n}_{ep}$  は以下のように定義される。

$$\bar{n}_{ep} = [ C_{ep_1} \ C_{ep_2} \ \cdots \ C_{ep_j} \ \cdots \ C_{ep_{n+2}} ]^T \quad (2.19)$$

$$C_{ep_i} = (-1)^{i+1} \det \bar{J}_{ep_i}(\bar{q}) \quad (2.20)$$

$$C_{ep_j} = 0 \quad (2.21)$$

ただし， $\bar{J}_{ep_i}$  は  $\bar{J}$  からセルフモーションに関係する第  $j$  列目を取り除いた行列から，さらに第  $i$  列目を取り除いた行列であり，さらに  $\bar{n}_{ep}$  の第  $j$  列目を 0 とする。 $j$  は自由に設定することができるが， $j$  により運動が制限される場合があるため，マニピュレータの機構から選ぶ必要がある。また， $b_{sm}$  を定数とし， $b_{ep} = 0$ としたときの運動を NSM と言い， $b_{sm} = 0$  とし， $b_{ep}$  を定数としたときの運動を NM と言う。

以下に冗長1自由度マニピュレータの零空間ベクトルの求め方の例を示す。 $\bar{J}$  を

$$\bar{J} = [\mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad -\mathbf{t}_*(q_*)] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & t_1 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & t_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

とすると， $\bar{n}_{sm}$ ， $\bar{n}_{ep}$  は以下のように求められる。ただし， $j = 3$  とした。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\bar{J}_{ep} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & t_1 \\ j_{21} & j_{22} & t_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\bar{n}_{sm} = [ j_{12}j_{23} - j_{13}j_{22} \quad - (j_{11}j_{23} - j_{13}j_{21}) \quad j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21} \quad 0 ]^T \quad (2.25)$$

$$\bar{n}_{ep} = [ j_{12}t_2 - t_1j_{22} \quad - (j_{11}t_2 - t_1j_{21}) \quad 0 \quad j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21} ]^T \quad (2.26)$$

列拡張ヤコビ行列による制御はマニピュレータ先端に仮想リンクを設け仮想リンクを含めたマニピュレータをセルフモーションをするように制御することで，マニピュレータ先端の制御を行う方法である。零空間ベクトルの扱う個数は違うが，冗長，非冗長に関わらず特性は変化しない。

## 2.5 Natural motion の動力学的影響

NM が動力学に与える影響について考える。

### 2.5.1 Natural motion の動力学

マニピュレータの運動方程式は一般的に以下のように表される。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.27)$$

式中  $M(\mathbf{q}) \in \Re^{n \times n}$  は慣性行列 ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \Re^n$  はコリオリ遠心力行列 ,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \Re^n$  は重力項 ,  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}) \in \Re^n$  は関節トルクである . また , Eq. (2.14) から , 関節角加速度は ,

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{b}\mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) + b\dot{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) \quad (2.28)$$

$$= \dot{b}\mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) + b^2 \frac{\partial \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (2.29)$$

と示すことができる . Eq. (2.27) に Eqs. (2.29) , (2.14) を代入すると以下のように表すことができる .

$$\left( \dot{b}M(\mathbf{q}) + bA(\bar{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.30)$$

$$A(\bar{\mathbf{q}}) \equiv bM(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Eq. (2.30) は特異点適合法の動作式として [7] , [26] で言及されている . NM 時では  $b$  を定数として扱うため  $\dot{b} = 0$  となるため , Eq. (2.30) を以下のように書き換えることができる .

$$bA(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{n}(\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.31)$$

このように NM は幾何学の制御であるが動力学に影響を与え , より簡単に運動方程式を得ることができる .

### 2.5.2 Natural self motion の動力学

冗長マニピュレータのセルフモーションの関節角加速度は Eq. (2.16) から  $b_{ep} = 0$  とするため以下のように表される .

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \dot{b}_{sm}\mathbf{n}_{sm}(\mathbf{q}) + b_{sm}\dot{\mathbf{n}}_{sm}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \dot{b}_{sm}\mathbf{n}_{sm}(\mathbf{q}) + b_{sm}^2 \frac{\partial \mathbf{n}_{sm}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{n}_{sm}(\mathbf{q}) \\ &= b_{sm}^2 \frac{\partial \mathbf{n}_{sm}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{n}_{sm}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

NSM 時も NM 時と同様に  $\dot{b}_{sm} = 0$  となるため ,  $\dot{b}_{sm}$  を含む項が 0 となる .

## 2.6 列拡張ヤコビ行列を用いた他の経路追従制御法

本節では列拡張ヤコビ行列を用いた、経路追従制御法を四つ紹介する。前者2つは一般的な経路追従方法である。一方、後者2つはNMの性質を明確にするために提案した方法である。

### 2.6.1 等速軌道追従制御 (CS: constant speed control)

経路追従制御の最も一般的な方法として、等速軌道追従制御(CS)がある。この制御は決められた先端経路を一定の速度で追従する方法で、Eqs. (2.2), (2.5)を用いγに一定速度を入力することにより制御することができる。また、列拡張ヤコビ行列を用いた制御法を用いても制御することができ、Eqs. (2.14), (2.15)の $b$ に $1/\det(J)$ 含ませ、 $b$ を $1/\det(J)$ に比例するようにすると $q_*$ が定数となることが分かる。一方 $q$ は $1/\det(J) \approx 0$ のとき、無限大となり発散する。

### 2.6.2 最短時間制御 (TO: time optimal control)

経路を最小時間で追従する方法として、最適制御の一つである最短時間制御(TO)があげられる。この方法は実機を用いることを前提に提案された方法である。マニピュレータにはそれぞれの関節にモータがついており、それぞれの関節には以下の拘束条件がある。

$$\tau_{i\min} \leq \tau_i \leq \tau_{i\max} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.33)$$

式中 $\tau_{i\min}$ は第*i*関節の最小関節トルク、 $\tau_{i\max}$ は第*i*関節の最大関節トルクを表している。この拘束条件下で最短に経路を追従する方法は常にどこかの関節が、境界に達している必要がある[3]。本章では列拡張ヤコビ行列を用いた制御法でこの制御法を再現する。Eq. (2.30)の**b**の値を周期毎に0からどこかの関節が境界に達するまで増加させ、境界に達したら次の周期に進むという計算を繰り返すことで、この制御法を再現できる。

### 2.6.3 孤長を一定にした制御 (CAL: constant arc length control)

NMが拡張関節空間のnatural speedに比例するように制御しているのに対し，関節空間の孤長を常に一定になるように制御したときと，違いを比較するためこの制御法を用いた。Fig. 2.1に示した単位時間あたりのC-spaceの孤長 $\Delta\lambda = \|\dot{q}\|$ を常に一定となるよう制御するには，Eq. (2.14)の $b$ に $1/\|n\|$ を含ませる。 $b$ を $1/\|n\|$ に比例させることで， $\Delta\lambda$ を一定に制御することが可能となる。

### 2.6.4 大域的最適化 (GO: Global optimization control)

GOは冗長マニピュレータに用いられる制御法で，2.2で述べた擬似逆行列では時間ごとの $\|\dot{q}\|$ を最小になる解を得るのに対し， $I$ を最小とする解を得る方法である。

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (\dot{q}^T \dot{q}) dt \quad (2.34)$$

上記の条件からGOを用いた冗長マニピュレータを制御するときの関節角速度は，以下のように与えられる[10]。

$$\ddot{q} = J^T (JJ^T)^{-1} (\dot{\nu} - \dot{J}\dot{q}) \quad (2.35)$$

しかし，Eq. (2.35)は冗長マニピュレータに用いる式である。本論文では，非冗長マニピュレータにこの方法を適法する。仮想リンクを追加した列拡張ヤコビ行列にこの制御法を用い，仮想リンク先端は動作させないため， $\dot{\nu} = 0$ となる。結果，関節角加速度は以下のように与えられる。

$$\ddot{q} = -\bar{J}^T (\bar{J}\bar{J}^T)^{-1} \dot{J}\dot{q} = -\bar{J}^+ \dot{J}\dot{q} \quad (2.36)$$

Eq. (2.35)に目標の経路を追従するよう初期速度を与えることで，経路の追従制御が行える。

## 2.7 他のセルフモーション

本節ではセルフモーションの方法を二つ紹介する。

### 2.7.1 Pseudoinverse self motion ( PISM )

最も一般的なセルフモーションの仕方の一つである。Eq. (2.5)を用いて制御する。ただし、 $\nu$ は0とし右辺第2項のみで制御する方法である。任意の  $\dot{q}_a$  を任意に指定することで、任意の値に制御することが可能である。

### 2.7.2 Constant speed self motion ( CSSM )

NSMの性能評価するために作成した制御方法である。Eq. (2.16)で設定した、セルフモーションに関する関節  $j$  を一定の速度で制御する方法である。 $b_{sm}$  にマニピュレータのヤコビ行列から  $j$  列目を取り除いたヤコビ行列 ( $\bar{J}_{sm}$ ) の行列式の逆数を含ませ、 $1/\det(\bar{J}_{sm})$  に比例するよう  $b_{sm}$  を変化させる。そうすることで、セルフモーションに関係する第  $j$  関節を一定の速度で制御することができる。

# 第3章 Natural motionの比較解析

## 3.1 概要

2章ではマニピュレータの運動学と特異点適合法，NMを式を用いて説明した。本章ではNMと他の追従制御を比較することにより，NMの解析を行う。始めに非冗長マニピュレータを対象とし，他の経路追従制御と比較し，先端の経路追従速度を変化させた際の影響を検証する。次に冗長マニピュレータを対象とし，セルフモーション動作を用い，他のセルフモーション動作とNSMを比較し，解析を行う。その際，先端の経路追従速度を変化させた際の影響を検証するものであり，経路追従時の冗長性の制御について検証するものではないことに注意されたい。また，式中の記号は第2章と同じものを用いる。

## 3.2 非冗長マニピュレータによる先端経路追従制御の比較

NMの解析を行うため，他の経路追従制御法と比較を行う。

### 3.2.1 2自由度マニピュレータを用いた直線経路追従制御

まず，動力学シミュレータを用いた平面2リンクマニピュレータによる直線経路追従時のNMと他の追従制御との比較を行う。追従方法は前章で述べた，NM，CS，CAL，GOの4種類で制御する。Fig. 3.1に2Rマニピュレータの直線経路のモデル図を示す。ただし，重力加速度は $0 \text{ m/s}^2$ とする。Fig. 3.1の距離 $d$ が複数の経路に対してシミュレーションによる比較を行った。また，各リンクの長さ $l_1 = 1.0 \text{ m}$ ， $l_2 = 1.0 \text{ m}$ ，重心位置は各リンクの中心とし，重心周りの慣性テンソルは単位行列，各リンクの質量は $1 \text{ kg}$ とした。ただし，関節の質量はないものとする。また， $d = 1.0, 0.5, 0.134 \text{ m}$ の3種類

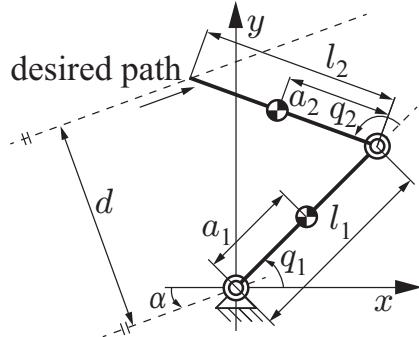


Fig. 3.1: Simple 2R limb following straight-line paths.

Table 3.1: Initial conditions for the linear path following cases.

$d$ [m]	1	0.5	0.134
Initial configuration [deg]	[90, 90]	[97.3, 112]	[112.6, 119.4]
Initial end-tip position [m]	[-1, 1]	[-1, 0.5]	[-1, 0.134]
$b_{init}^{CS}$ [rad/s m <sup>-2</sup> ]	0.500	0.539	0.574
$b_{init}^{NM}$ [rad/s m <sup>-2</sup> ]	0.538	0.771	1.38
$b_{init}^{CAL}$ [rad/s m <sup>-2</sup> ]	0.361	0.540	0.875
$b_{init}^{GO}$ [rad/s m <sup>-2</sup> ]	0.414	0.543	0.803

で行い， $\alpha = 0$  deg とし，4 s で  $x$  軸方向に 2 m 移動するように制御した。その際  $d$  に対する初期角度をそれぞれ  $[90, 90]^T$ ,  $[97.3, 112]^T$ ,  $[112.6, 119.4]^T$  deg とし，初期の先端位置が  $[-1, 1]^T$ ,  $[-1, 0.5]^T$ ,  $[-1, 0.134]^T$  m となるようにした。また，NM 時の  $b$  は  $d = 1.0, 0.5, 0.134$  m においてそれぞれ，0.538, 0.771, 1.382 rad/s m<sup>-2</sup> とし，CS 時  $b = \dot{q}_*/\det \mathbf{J}$  となり，すべての  $d$  において  $\dot{q}_* = 0.5$  m/s, CAL 時  $b = \Delta\lambda/\|\mathbf{n}\|$  となり， $\Delta\lambda$  は 0.511, 0.716, 1.027 m, GO 時の先端初期速度の大きさ  $\dot{q}_*$  は 0.414, 0.467, 0.610 m/s とし，それに伴う初期関節角速度は  $\dot{q}$  は  $[-0.414, 0.414]^T$ ,  $[-0.474, 0.543]^T$ ,  $[0.495, 0.803]^T$  rad/s とした。また，初期条件について Table 3.1 にまとめた。それぞれのシミュレーション結果を Table 3.2 に示し，表の内容を Fig. 3.2 にまとめた。また， $d = 0.134$  m 時のそれぞれの結果を Figs. 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 に示す。グラフはそれぞれの制御時の関節角度，角速度，角加速度，トルク，先端の位置，先端の速度，エネルギー，モーメンタム，仕事，単位時間あたりの C-space の弧長，C-space

Table 3.2: Straight-line path tracking cases with the 2R manipulator.

$d$ [m]	peak joint speed [rad/s]	peed joint torque [Nm]	total mechanical power [w]
1.0	0.538 / 0.543 / 0.511 / 0.519	2.45 / 2.32 / 5.06 / 3.20	275 / 210 / 76.7 / 68.1
0.5	0.771 / 1.01 / 0.716 / 0.788	5.33 / 6.33 / 9.42 / 6.26	627 / 535 / 164 / 122
0.134	1.38 / 3.70 / 1.03 / 1.16	16.4 / 68.3 / 34.3 / 23.2	2969 / 9457 / 510 / 311
natural motion / constant speed / constant arc length / global optimization			

の軌道の曲率 , 行列式を示す<sup>1</sup> . ただし , NM , CS , CAL 時の行列式は  $\det(\mathbf{J})$  を示し , GO では  $\det(\bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{J}}^T)$  を示す . 時刻  $t = t_1, \dots, t_N$  における仕事は以下の式で求めた .

$$W = \sum_{t=t_1}^{t_N} \dot{\mathbf{q}}_t^T \boldsymbol{\tau}_t \quad (3.1)$$

また , エネルギは重力加速度が  $0 \text{ m/s}^2$  であることから運動エネルギーと同じになり , 以下の式で求められる .

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

さらに NM , CS , CAL 時における関節空間での速度のベクトル場を Fig. 3.7 に示す . ただし , 実線は  $d$  を変化させたときの関節空間の軌道を表している . また , 等速軌道追従制御では第 2 関節の符号によって先端の目標速度の符号を変化させている .

Table 3.2 から最高関節速度は特異点から離れた経路ではすべての制御がほぼ同等なのに対し , 特異点が近くなるにつれてすべての制御で高くなっている , とくに CS においては急激に上昇している . また , 最高関節トルクも特異点との距離が近づくにつれて増加しており , とくに CS の増加が激しい . 一方 NM は一番増加が抑えられることが分かった . 一方 , 仕事に関してもすべての制御で特異点に近づくにつれて増加しており , 特に CS の増加が激しく , その次に NM が大きい , 一方 CAL と GO は前 2 つの制御に比べ  $1/5$  以下に抑えられている事が分かる .

また , Fig. 3.3 から NM では曲率が高い点や  $\det(\mathbf{J})$  が 0 付近においても , 制御が不安定になる点や急激な変化は確認できない . 一方で , 先端速度は特

<sup>1</sup> 孤長と曲率の求め方については付録 A を参照 .

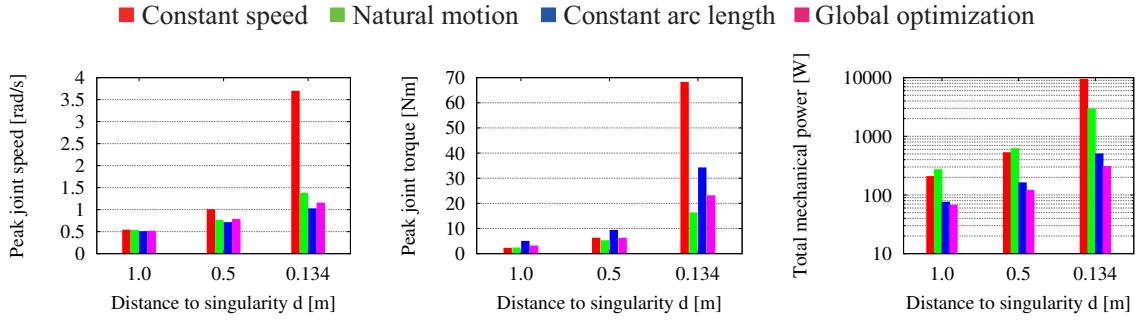


Fig. 3.2: Variation in peak joint speed, peak joint torque and total mechanical power for the linear path following cases.

異点に近づくと減速し、特異点から離れると加速していることが分かる。また、エネルギー、弧長ともに一定ではないことから、NMはエネルギーや弧長を一定にする制御とも違うことが分かる。Fig. 3.4 から CS では曲率が高い点においても安定した制御が行えているが、 $\det(J)$  が 0 付近において、関節角速度、トルク、エネルギー、弧長に急激な変化が確認できる。一方、Fig. 3.5 から CAL では  $\det(J)$  が 0 付近では制御が安定しているが、曲率が高い点において先端速度、関節トルク、仕事に大きな変化が確認できる。また、弧長が一定に制御できていることも確認できる。Fig. 3.6 から GO では  $\det(\bar{J}\bar{J}^T)$  が 0 付近において関節トルク、先端速度に変化が確認できる。また、 $\det(\bar{J}\bar{J}^T)$  が 0 付近において曲率も高くなっていることが確認できる。

さらに、Fig. 3.7 からすべての制御において  $d$  が大きいとき円軌道だった関節の軌跡が、 $d$  が小さくなるにつれて大きくなり、形も四角に近づくことが分かる。このことから  $d$  が小さくなり特異点との距離が近くなると、C-space の軌道が長くなることにより、最高関節角速度、トルク、仕事が増加したことが分かる。また、CS では特異点 ( $q_2 = a\pi$ ,  $a$  は整数) に近づくにつれてベクトルが大きくなり、特異点で発散していることが分かる。これは CS が  $\|\dot{q}\| \leq \infty$  の有限でない関数だと言え、発散する点があることからスムーズな制御ではない。これは Fig. 3.4 にも関係し、速度が急激に発生することで、Eqs. (3.1), (3.2) からエネルギーが大きくなり、仕事にも急激に高くなっていることが分かる。

CAL ではすべての位置においてベクトルの長さが一定になっていることが分かる。これは  $\Delta\lambda$  を一定に制御しているためである。CAL はベクトル場からは発散する点は分からないが、Fig. 3.5 から曲率が高い点で不安定

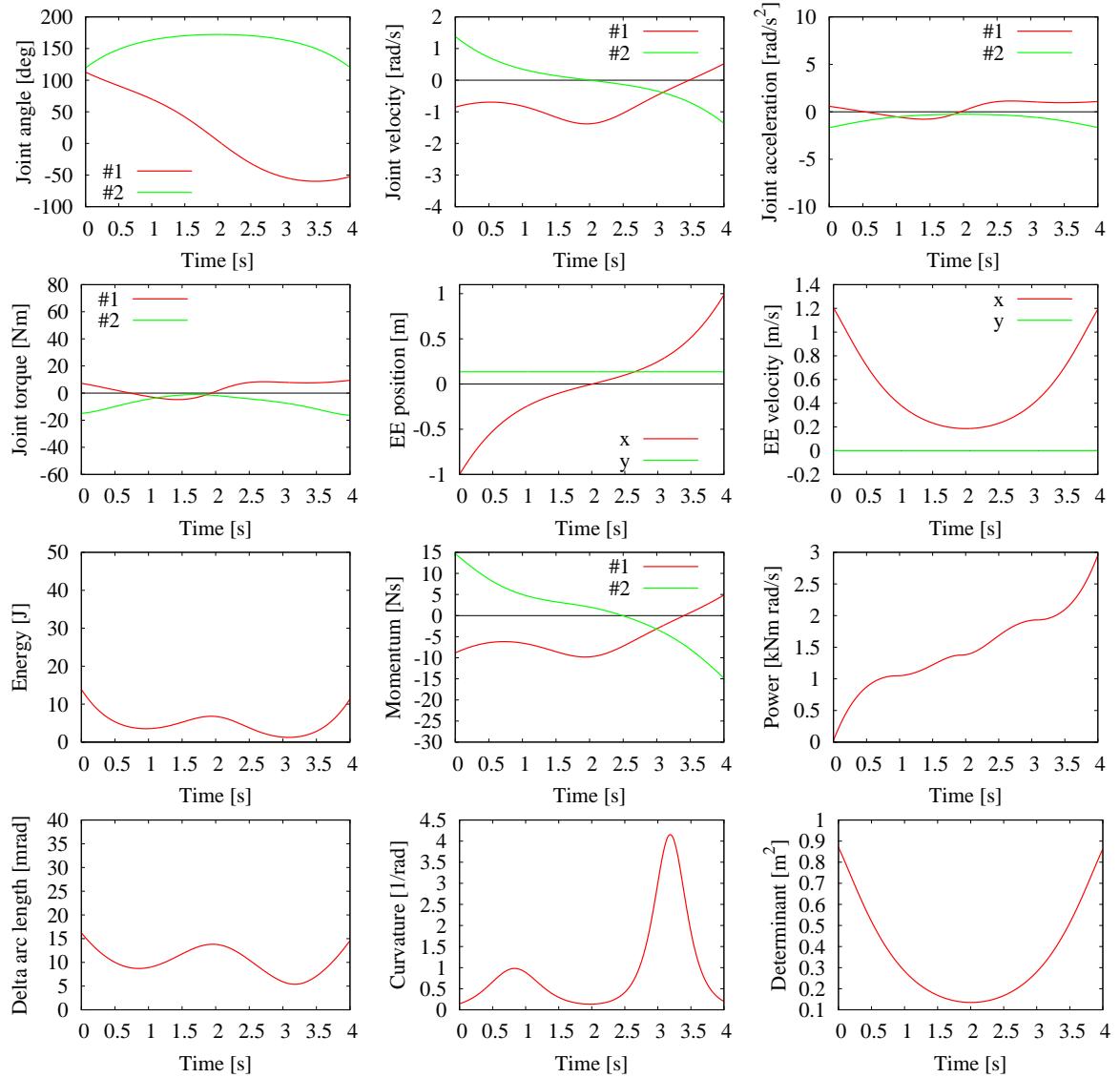


Fig. 3.3: Simulation result of 2R straight-line path tracking with natural motion ( $d = 0.134$  m).

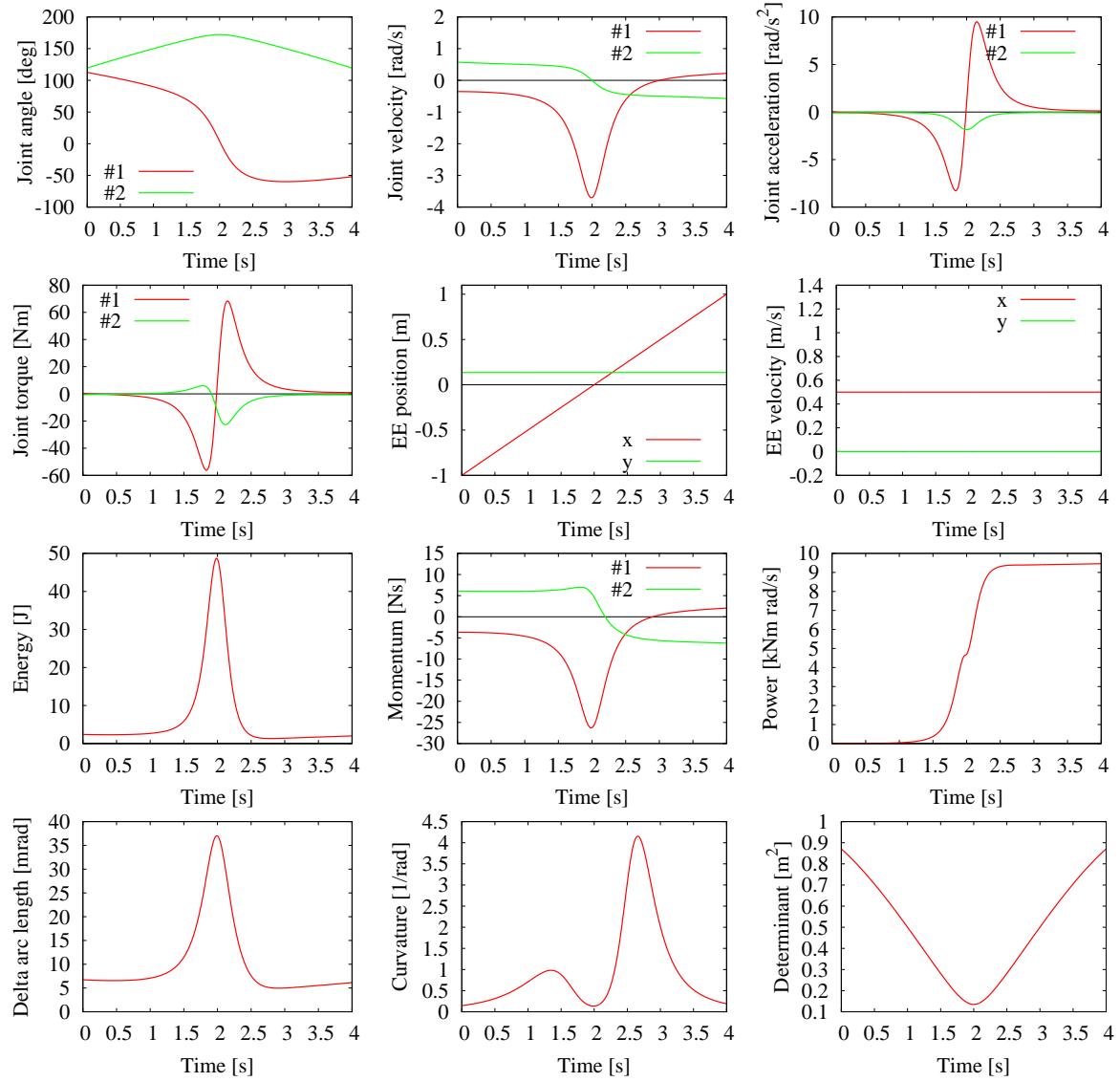


Fig. 3.4: Simulation result of 2R straight-line path tracking with constant speed ( $d = 0.134$  m).

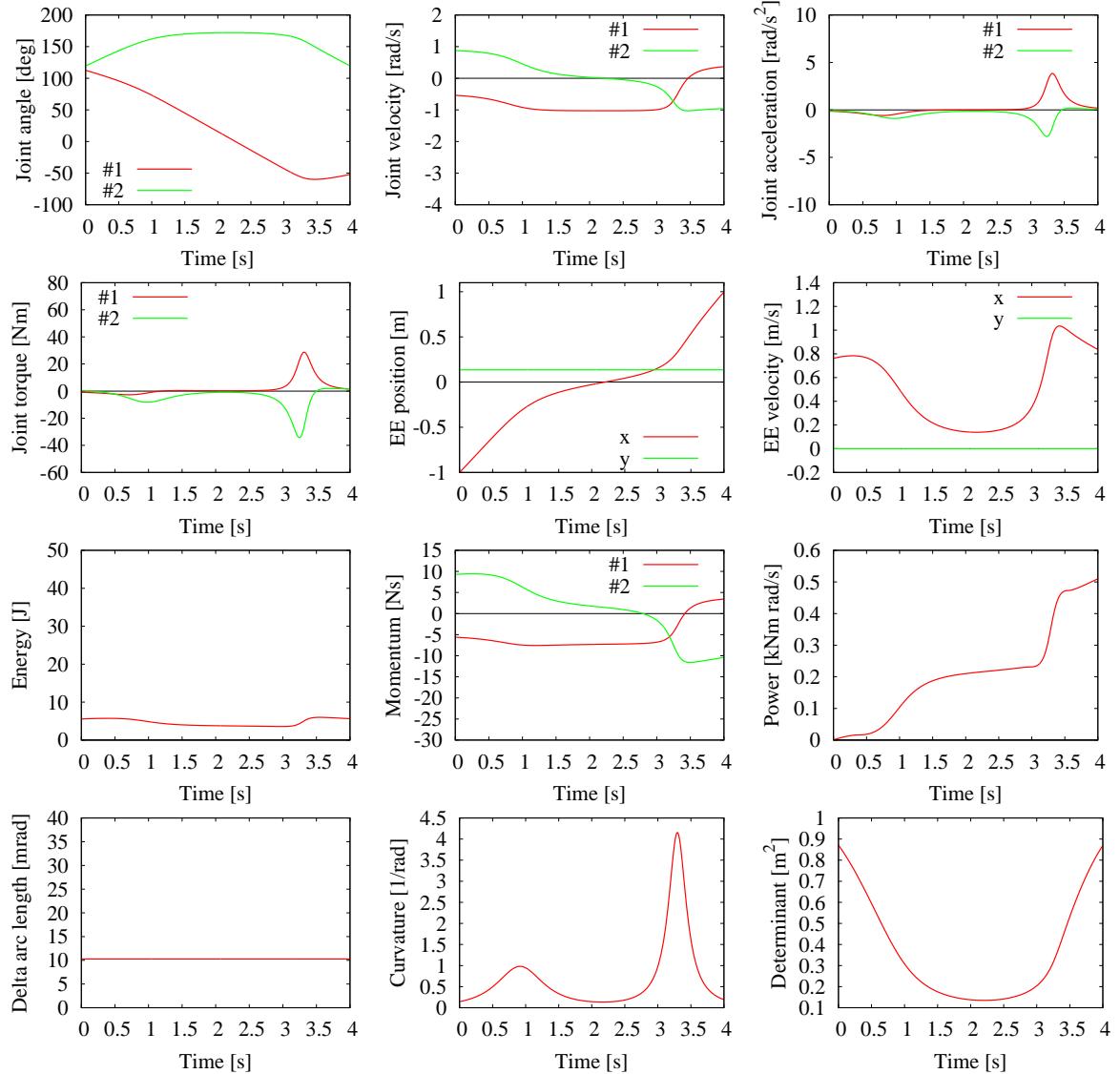


Fig. 3.5: Simulation result of 2R straight-line path tracking with constant arc length ( $d = 0.134$  m).

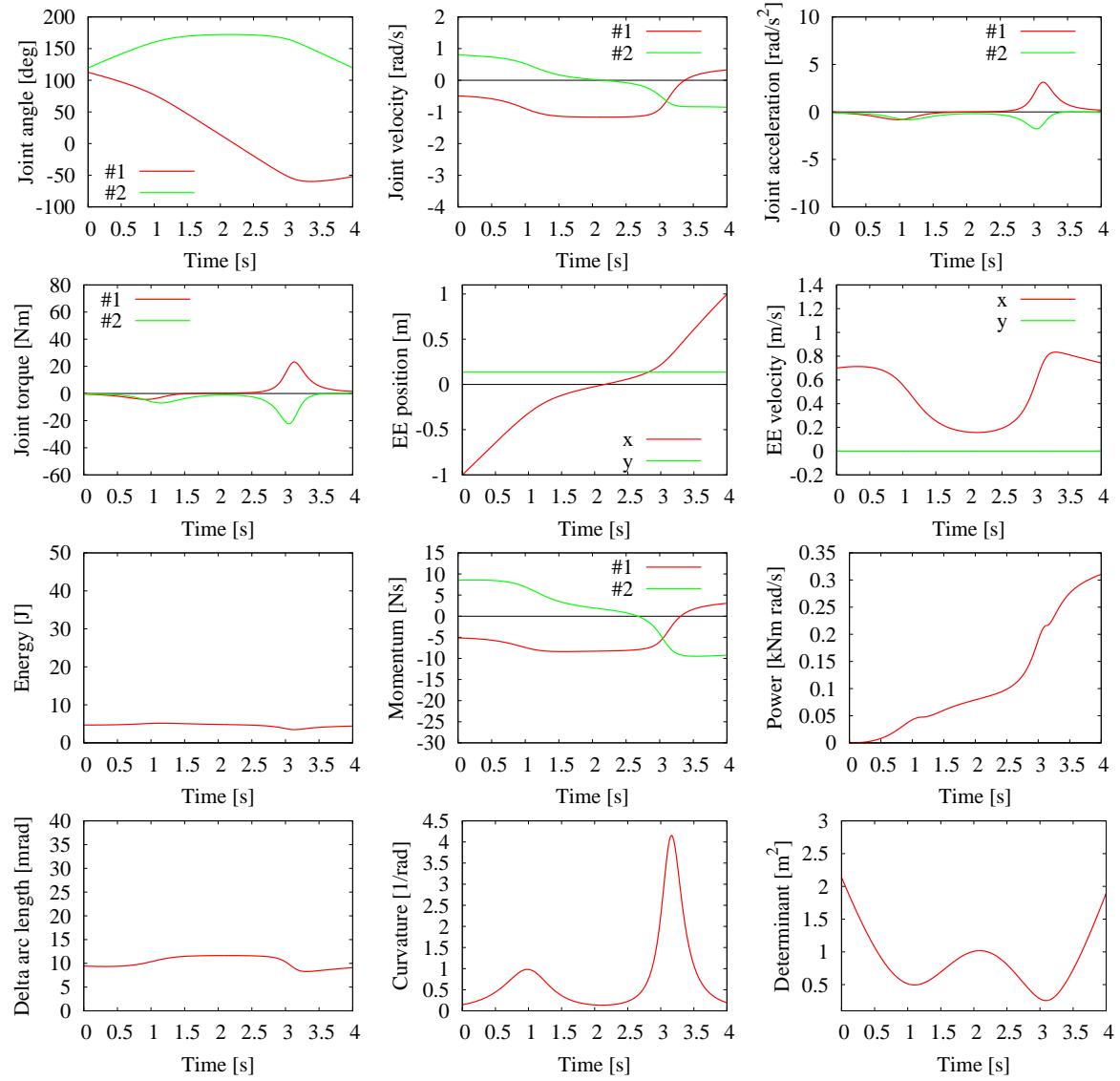


Fig. 3.6: Simulation result of 2R straight-line path tracking with global optimization ( $d = 0.134$  m).

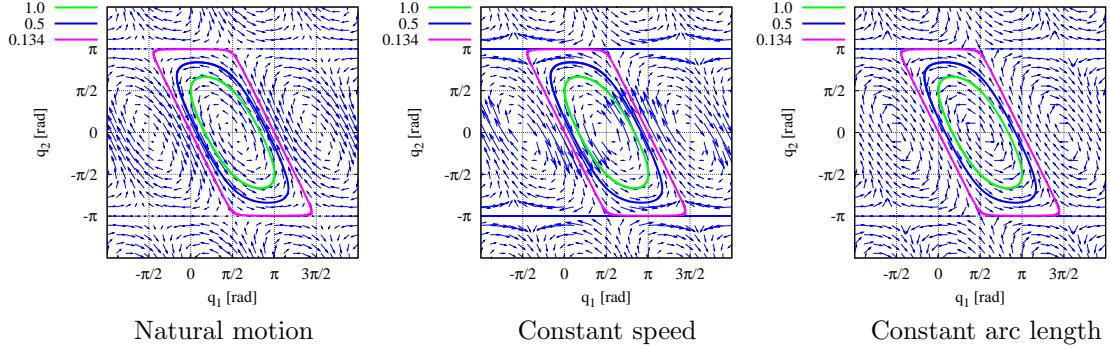
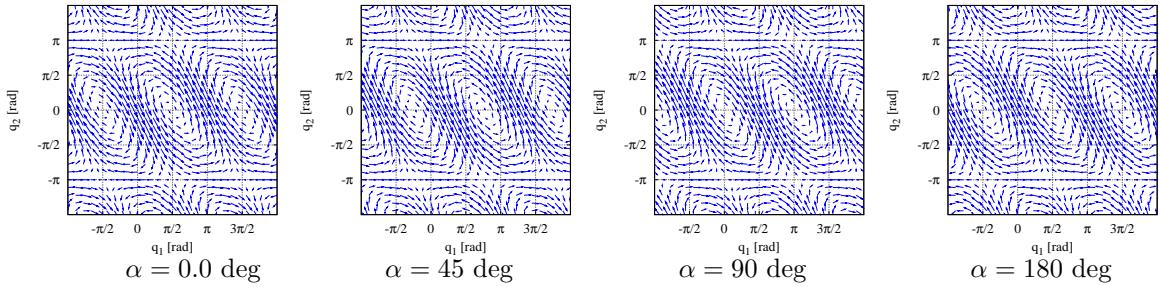


Fig. 3.7: 2R straight-line path tracking of joint speeds vector field.

Fig. 3.8: Change of joint speeds vector field by  $\alpha$ .

になっており、 $\|n\| = 0$ 付近で発散することからスムーズな制御とは言えない。また、Fig. 3.5でエネルギーが大きな変化をしていなかったのは、Eq. (3.2)から運動エネルギーは速度に大きく依存しており、弧長を一定に保ったことで、関節空間の弧長の速度の大きさが一定に保たれたのが影響したと考えられる。さらに、仕事が抑えられたのも、エネルギーがほぼ一定に保たれたからだと考えられる。

また、GOもEq. (2.35)から  $\det(\bar{J}\bar{J}^T)$  が0付近で安定した制御ができず、Fig. 3.6からも同様なことが分かることから、GOも有限な関数だとは言えない。また、Fig. 3.6でエネルギーが大きな変化をしていなかったのは、GOはEq. (2.34)を最小になるよう制御しており、同じ速度の2乗に依存するエネルギーが小さい値で抑えられたと考えることができる。また、仕事が抑えられたのも、エネルギーが抑えられたためだと考えられる。

一方NMは特異点に近づくにつれてベクトルが小さくなり、発散する点

がないことから， $0 \leq \|\dot{q}\| \leq T$  の有限関数だといえる。 $T$  は  $b$  と先端の軌道により決まり， $b = \infty$  にしない限り  $\infty$  になることはない。さらに発散する点もないことから，スムーズな経路追従方法だと分かる。また，最高関節トルクが1番大きく抑えられた原因としては，Fig. 3.3 から関節角加速度が1番抑えられたのが理由だと考えられ，そのことからも，最も関節の動作がスムーズな制御だと言える。

また Fig. 3.8 に  $\alpha$  を  $0, 45, 90, 180$  deg にしたときの NM のベクトル場を示す。Fig. 3.8 から  $\alpha$  を変化させることにより  $q_1$  軸方向の変化は確認できるが， $q_2$  軸方向の変化は確認できず， $\alpha$  を変化させることでベクトル場が左右にずれることが分かる。

### 3.2.2 6自由度マニピュレータを用いた円経路追従制御

次に連続的な動作での検証を行うため，三菱重工業株式会社製可搬式汎用知能アーム PA-10（付録 B.4 を参照）を用い，円経路追従制御を行う。最初にシミュレーションによる比較を行い，最後に実験機を用いた比較を行う。ただし，第3関節を動作させず，6自由度マニピュレータとして扱う。先端の経路に大きな誤差が生じるため，先端のフィードバックを行い，先端の目標軌道を以下の式のように制御する。

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{t}_* \dot{\mathbf{q}}_* + \mathbf{K}_p (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e) \quad (3.3)$$

$\mathbf{v}_r$  は先端速度の並進成分， $\mathbf{x}_e$  は現在の先端位置， $\mathbf{x}_d$  は目標の先端位置， $\mathbf{K}_p$  は位置のフィードバックゲイン行列を示す。また，実験では先端の姿勢は初期姿勢を保つように  $\omega = [0 \ 0 \ 0]^T$  deg とする。Fig. 3.9 にマニピュレータの関節と目標円経路，肩特異点の位置について示す。また，実験時の PA-10 の初期角度を  $P$  からの距離が  $x_a$  方向に  $-0.07$  m となるよう  $[15 \ -37 \ 0 \ 80 \ 15 \ -45 \ -15]^T$  deg とした。ただし，PA-10 は第3関節を使わず 6自由度マニピュレータとして用いた。PA-10 を円経路追従制御で制御し，NM で制御を行った時と CS で制御を行った時の比較を行った[29]。先端の目標経路は半径  $0.2$  m の円運動とし，移動距離は 2 周，シミュレーション時間は  $60$  s とした。先端位置のフィードバックゲインを  $\mathbf{K}_p = \text{diag}[15, 15, 15]$  s $^{-1}$  とした。円運動時，NM で制御を行った時の  $b = 1.36$  rad/s m $^{-1}$  とし，CS での先端追従速度を  $\dot{q}_* = 0.279$  rad/s とした。ただし，シミュレーション開始  $15$  s

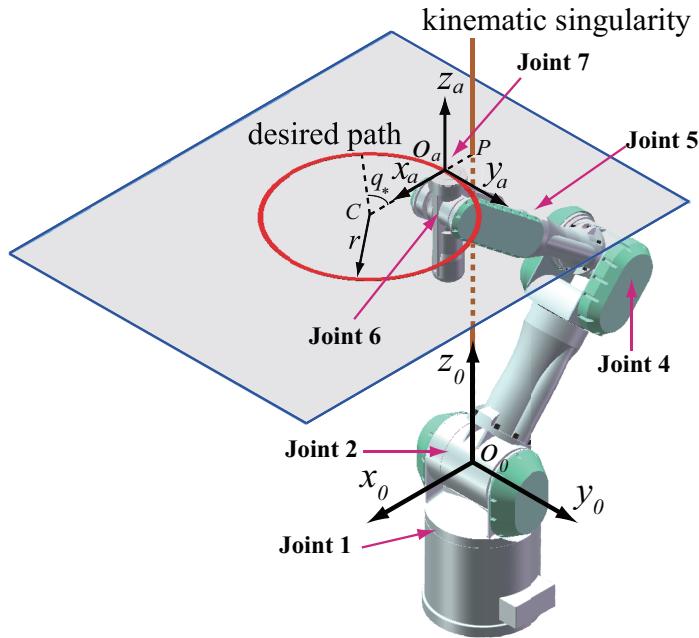


Fig. 3.9: PA-10 manipulator tracking a circular path. This is actually a model of a seven-DOF manipulator with one joint locked (Joint 3, not shown).

は五次補間法によるスプライン関数を用い加速を行い、また、終了15 sは五次補間法によるスプライン関数を用い減速し、停止させている。

### シミュレーション

NMとCSのシミュレーション結果をそれぞれ Figs. 3.10, 3.11 に示す。それぞれ、関節角度、角速度、先端の位置、先端の速度、関節トルク、行列式を示す。ただし、関節トルク値は動力学パラメータは [30] を参考に算出した。さらに、Table 3.3 に NM が CS と同じ最高関節角速度になるよう制御した結果と、NM が CS と同じ最高関節トルク値になるよう制御した結果を示す。ただし、CS-1 には Fig. 3.11 に示した、円経路を CS で 2 周した結果を、NM-1 には Fig. 3.10 に示した、円経路を NM で 2 周した結果、NM-2 には CS-1 と同じ最高関節角速度になるように  $b = 4.11 \text{ rad/s m}^{-1}$  とし、NM で制御した結果、NM-3 には CS-1 と同じ最高関節トルクになるよう  $b = 2.33 \text{ rad/s m}^{-1}$  とし、NM で制御した結果を示す。

Figs. 3.10, 3.11 からキネマティック特異点付近において NM では先端の動きが遅くなり、キネマティック特異点から離れると加速することが確認さ

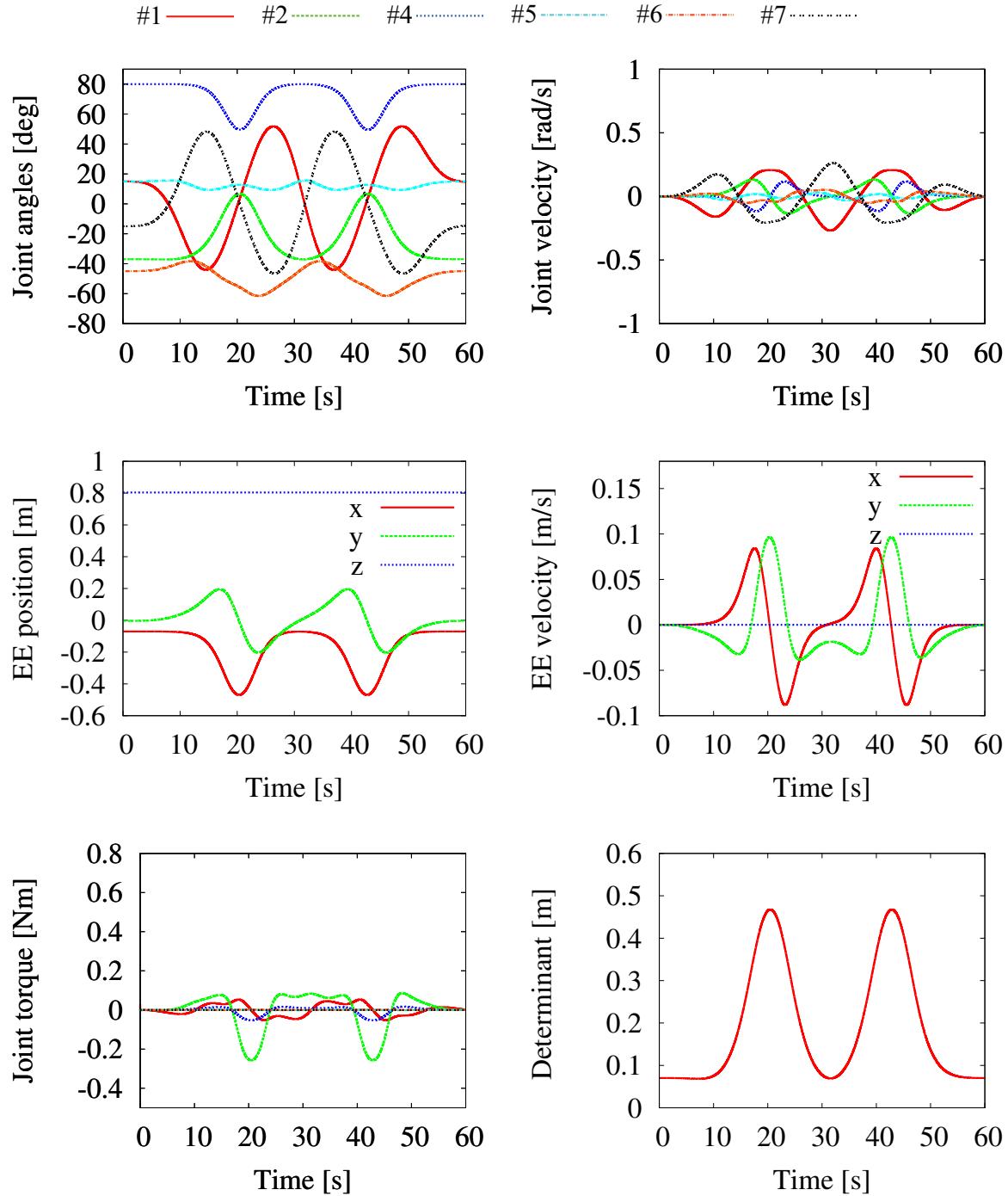


Fig. 3.10: Circular path tracking simulation of the 6R manipulator with natural motion.

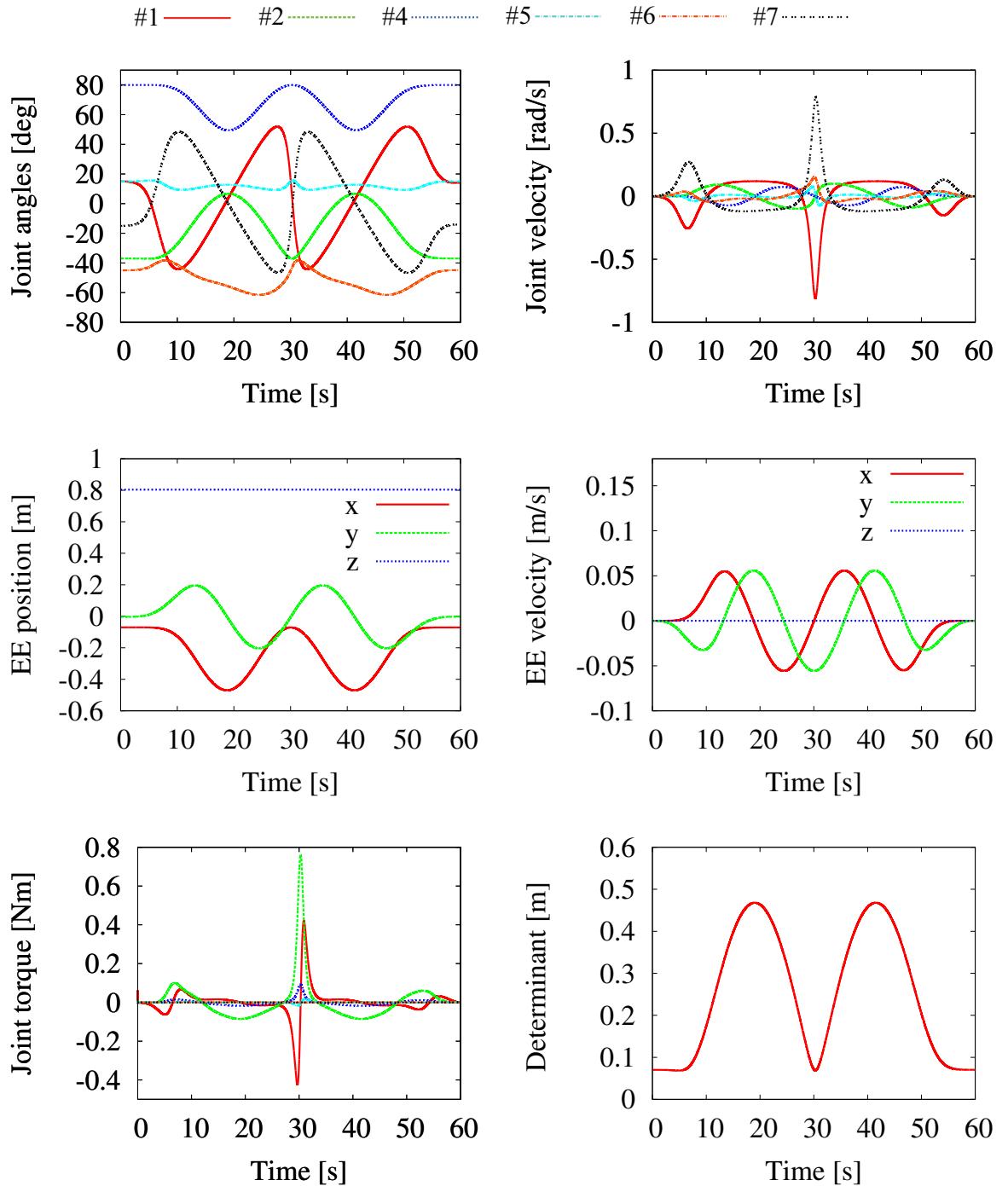


Fig. 3.11: Circular path tracking simulation of the 6R manipulator with constant speed.

Table 3.3: Circular path tracking cases with the 6R manipulator.

	CS-1	NM-1	NM-2	NM-3
distance traveled [m]	2.51	2.51	7.56	4.18
peak joint speed [rad/s]	0.803	0.268	0.803	0.460
peak joint torque [Nm]	0.750	0.257	2.27	0.750
total mechanical power [W]	168.08	66.046	1,680.0	324.6

NM: natural motion CS: constant speed

れた。等速軌道追従制御ではキネマティック特異点付近においても先端速度に変化は見られない。一方で、キネマティック特異点付近において、等速軌道追従制御では関節角速度、トルク値が大きく変化しているのに対し、NMでは変化が少ないことが確認できた。Table 3.3から、CS-1とNM-1を比較するとNM-1は最高関節速度と最高関節トルク値は約1/3倍に抑えられ、仕事は約2/5倍に抑えることが分かる。また、CS-1とNM-2を比較すると、NM-2は同じ最高関節角速度で約3倍の先端の円経路を追従できることが分かる、さらにCS-1とNM-3を比較すると、NM-3は同じ最高関節トルク値で約1.5倍の先端の円経路を追従でき、最高関節速度は約1/2倍に抑えられていることが分かった。

## 実機実験

シミュレーションと同じ結果が実験機においても確認できるか確かめるため、シミュレーションと同条件でPA-10を用い実機実験を行った。NMとCSの実験結果をFig. 3.12に示す。ただし、関節トルク値以外の結果はシミュレーション時と大きな違いは見られなかったため、関節角速度とトルク値のみ示す。また、関節トルク値は三菱重工から提供されたPA-10の仕様書[28]から各リンクの重心位置と質量から重力トルクを計算し、重力補償を行っている。Fig. 3.12から速度に関してはシミュレーション時とほぼ同じ変化が見られる、しかし、トルク値に関してはシミュレーションと大きな違いが見られ、両制御法に大きな違いが見られないが、Fig. 3.13に第1

関節だけ比べると特異点付近においてNMとCSの違いが確認できた。これはPA-10の関節の減速機が50と非常に大きく、摩擦の影響が非常に大きいため、関節角速度や加速度の変化による関節トルクへの影響が、シミュレータを用いた場合よりも非常に小さいのが影響だと考えられる。

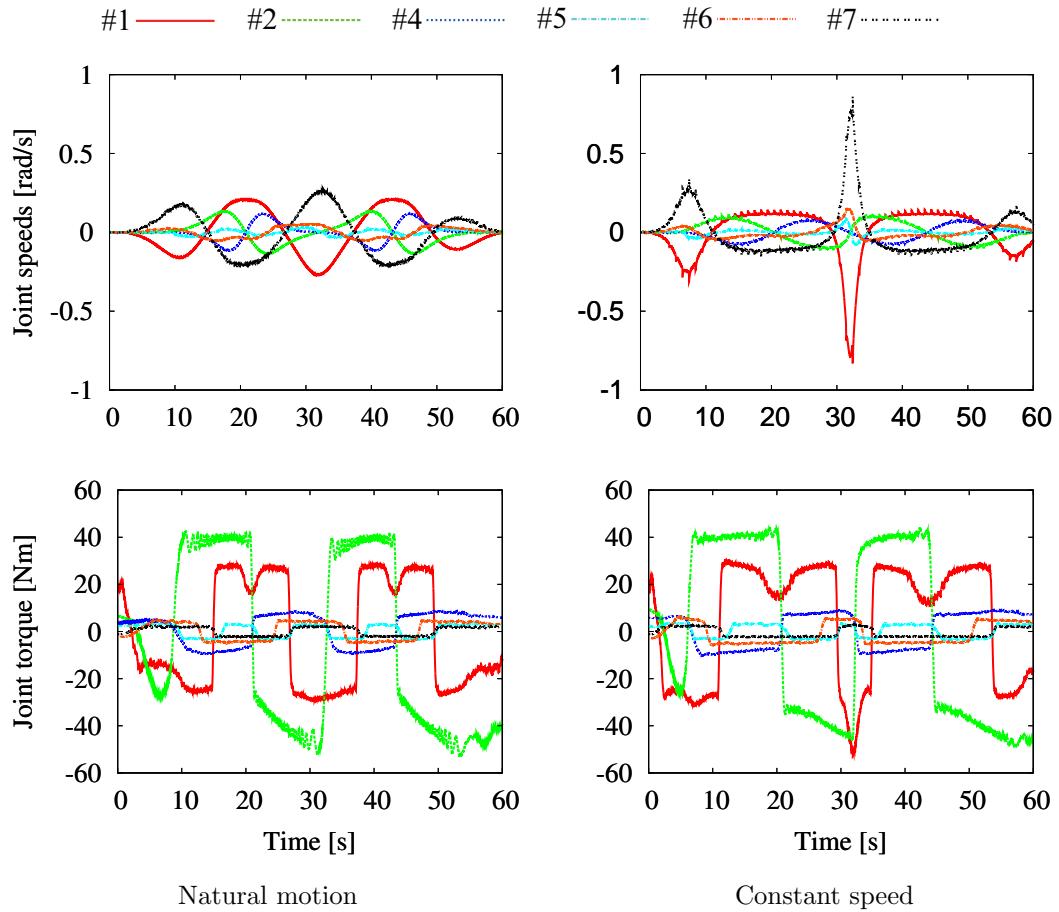


Fig. 3.12: Circular path tracking experiment with the 6R manipulator.

### 摩擦モデルを考慮したシミュレーション

実機実験により、シミュレーションと実験時のトルク値に大きな違いが見られたので、PA-10のパラメータ同定<sup>2</sup>を行い、求めた摩擦モデルをシミュレーションに適応し、結果を考察する[31]。摩擦と重力モデルを適応したシミュレーション結果をFig. 3.14に示す。Fig. 3.14とFig. 3.12から摩擦モ

<sup>2</sup>パラメータ同定の詳細は付録Bで述べる。

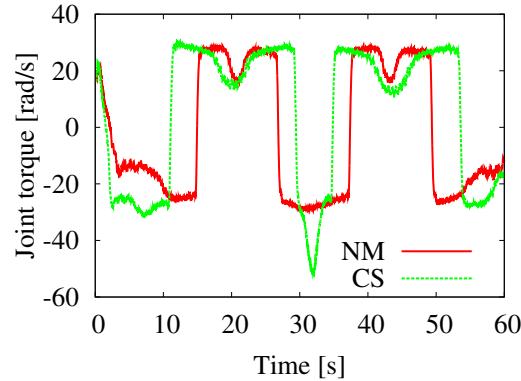


Fig. 3.13: Joint 1 torque comparison from the experiment.

モデルを適応したことで、シミュレーション結果が実験結果に近くなっていることが分かる。また、値が振動している理由は、付録Bで述べる位置依存摩擦の影響である。しかし、まだ最大約10 Nの違いが見られる。この差は主に第2関節で確認できることから、第2関節が一番影響を受ける重力モデルのずれが影響していると考えられる。

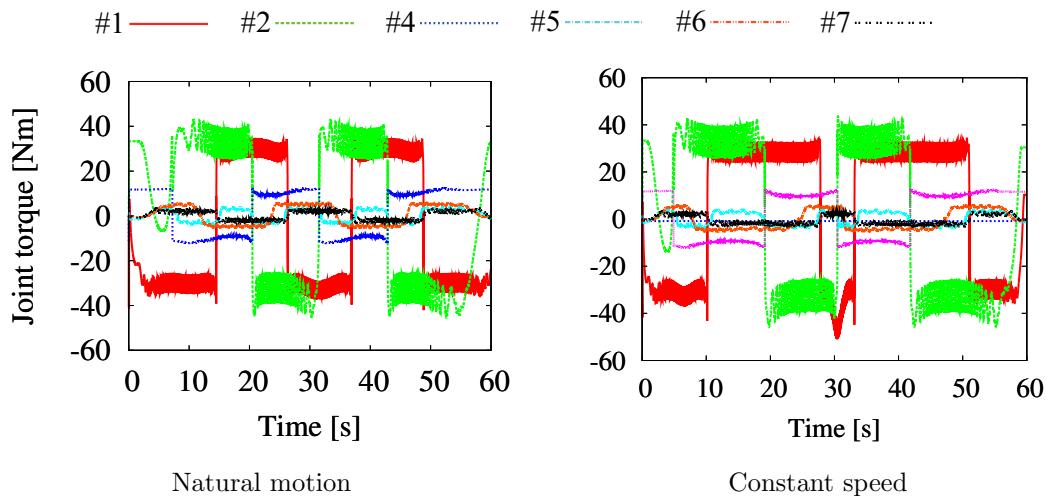


Fig. 3.14: Circular path tracking simulation results with friction model of the 6R manipulator.

### Natural motion と 時間最適制御の比較

シミュレーションにおいてPA-10を円経路追従制御で制御し、NMで制御を行った時とTOで制御を行った時の比較を行った。先端の目標経路は半径

Table 3.4: PA-10 maximum torque.

Joint	1, 2	3, 4	5, 6, 7
Maximum torque	5.3 Nm	2.0 Nm	0.36 Nm

0.2 m の円運動とし、移動距離は2周、 $K_p = 15 \text{ s}^{-1}$ とした。また、PA-10 の最大トルク値を Table 3.4 に示す。NM で制御を行ったときの  $b = 6.22 \text{ rad/s m}^{-1}$ 、 $K_p = 25 \text{ s}^{-1}$  とし、最高関節トルク値が TO で制御したときと同じになるようにした。

NM と TO の結果を Fig. 3.15, 3.16 に示す。

Fig. 3.16 (b) より、TO では、常に1つの関節が PA-10 の最大トルク値で動作を行っていることが分かる。また、Fig. 3.15 (b) から NM での最高関節トルク値が TO と同じ値になっていることが分かる。 $x$  軸の値から NM では2周するのに約 10 sかかるのに対して、TO では約 1 s で2周している。Fig. 3.15 (a), 3.16 (a) から、NM では、キネマティック特異点付近においても安定した制御が行われているのに対し、TO では、キネマティック特異点付近において急激な変動が見られる。しかし、最高関節速度は両制御法とも大きな違いは見られなかった。そこで、角加速度において比較すると Fig. 3.15 (c), 3.16 (c) から TO ではキネマティック特異点付近において  $8.7 \text{ rad/s}^2$  なのにに対し、NM では最高で  $1.5 \text{ rad/s}^2$  に抑えられ、変化が安定していることが分かる。また、先端の速度について比較すると Fig. 3.15 (d), 3.16 (d) から TO では傾きが急激に変化しているのに対し、NM では傾きが滑らかに変化していることが分かる。さらに、仕事において比較すると Fig. 3.15 (e), 3.16 (e) から TO ではキネマティック特異点付近で急激に上昇しているのに対し、NM ではキネマティック特異点付近においても急激な上昇は見られないことが分かる。

### 3.2.3 螺旋経路による比較結果

次に、今までの経路はすべて平面における経路だったため、三次元の経路に対しても行えるか確認する。そのため、経路を円経路から螺旋経路に変更した。Fig. 3.9 中、 $x_a, y_a$  平面の円経路に、 $z_a$  軸方向に初期状態から  $q_*/100 [\text{m}]$  移動するように目標経路を設定した。

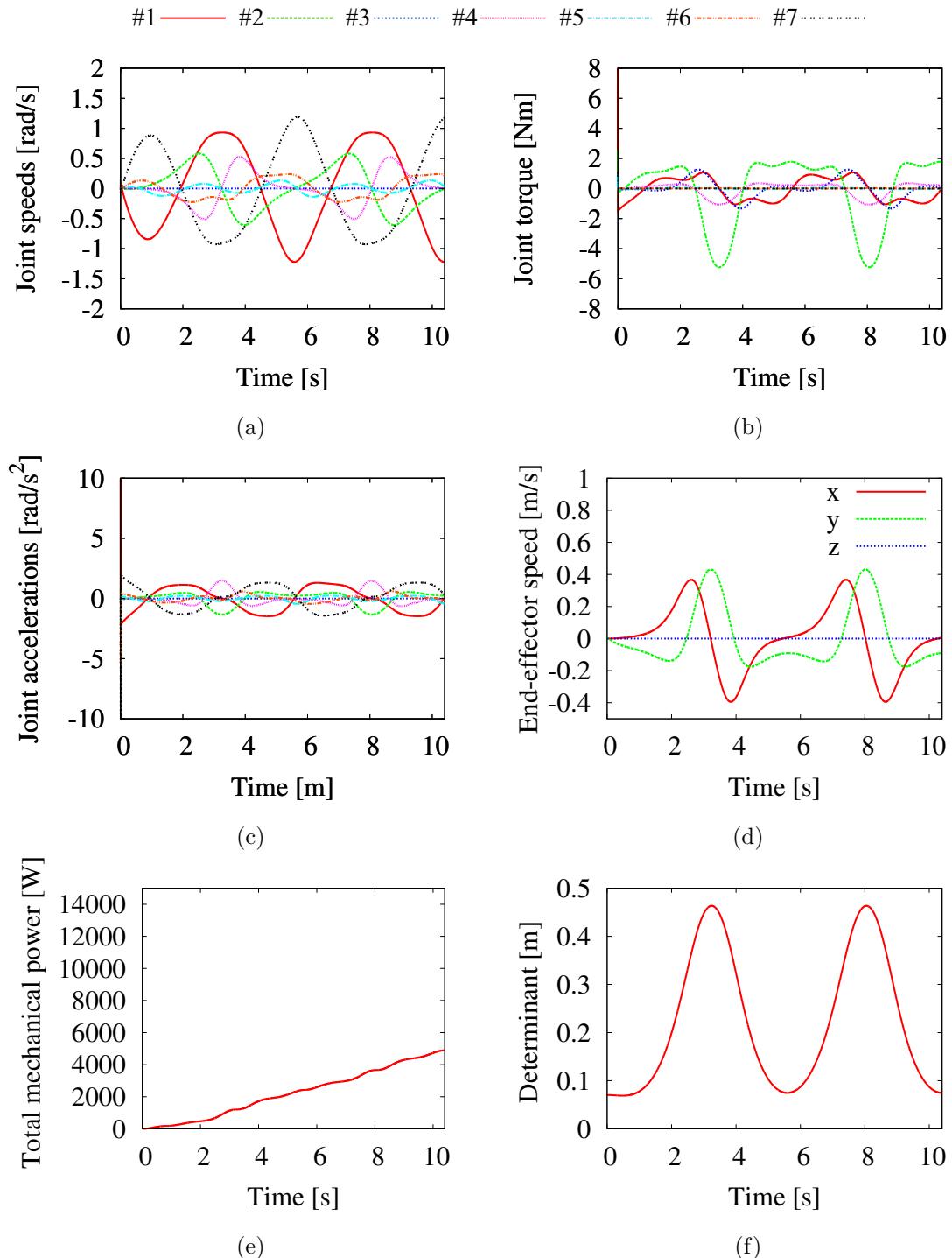


Fig. 3.15: Natural motion: (a) joint speeds, (b) joint torque, (c) joint accelerations, (d) end-effector speeds, (e) total mechanical power and (f) determinant.

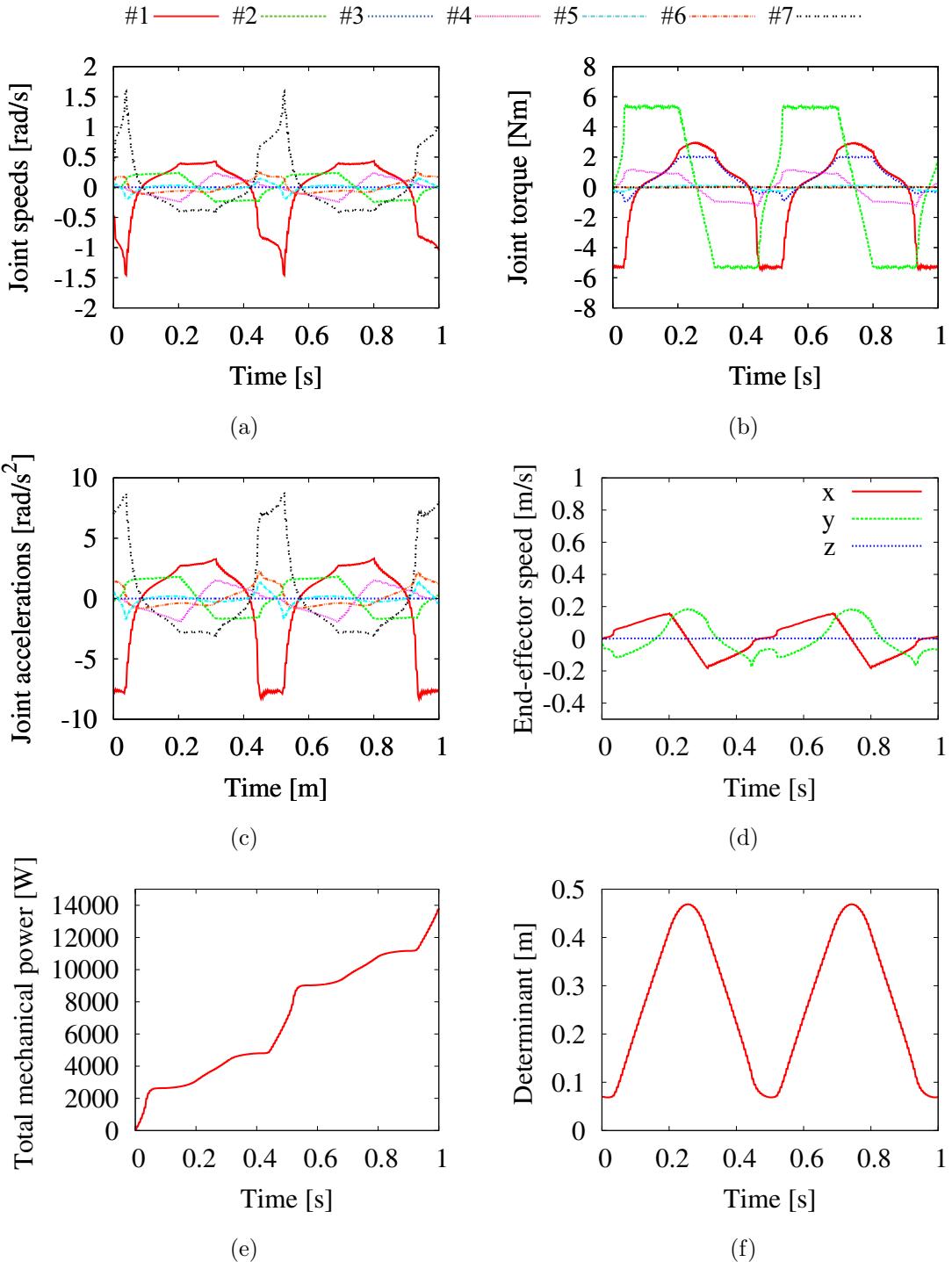


Fig. 3.16: Time optimal: (a) joint speeds, (b) joint torque, (c) joint accelerations, (d) end-effector speeds, (e) total mechanical power and (f) determinant.

NMのシミュレーション結果をFig. 3.18に示し, CSのシミュレーション結果をFig. 3.19に示す。ただし, 図中SSは肩特異点(shoulder singularity), ESは肘特異点(elbow singularity)の距離を表している。肩特異点と肘特異点の姿勢をFig. 3.17に示す。

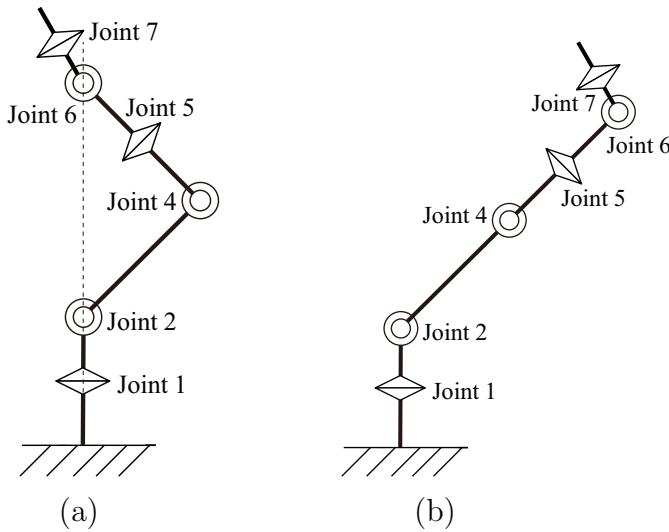


Fig. 3.17: Kinematic singularities: (a) shoulder singularity and (b) elbow singularity.

Fig. 3.18, Fig. 3.19から螺旋経路時には円経路時と違い, 肩特異点と肘特異点の2種類の特異点付近を通過するが, 円経路時同様キネマティック特異点付近においてNMでは先端の動きが遅くなり, キネマティック特異点から離れると加速することが確認され, 等速軌道追従制御ではキネマティック特異点付近においても変化は見られない。キネマティック特異点付近において, 等速軌道追従制御では関節速度, 加速度, トルク値が大きく変化しているのに対し, NMでは変化が少ないことが確認できた。

### 3.3 冗長マニピュレータによるセルフモーションの比較

上記では非冗長マニピュレータのNMを用いた経路追従制御と他の追従制御法を比較することにより, NMの性質について考察した。本節では冗長1自由度マニピュレータを用い, NSMについて他のself motionと比較を行う。第2章で述べたようにEq. (2.16)の $b_{ep} = 0$ とし,  $b_{sm}$ を定数とすることでNSMが可能となる。

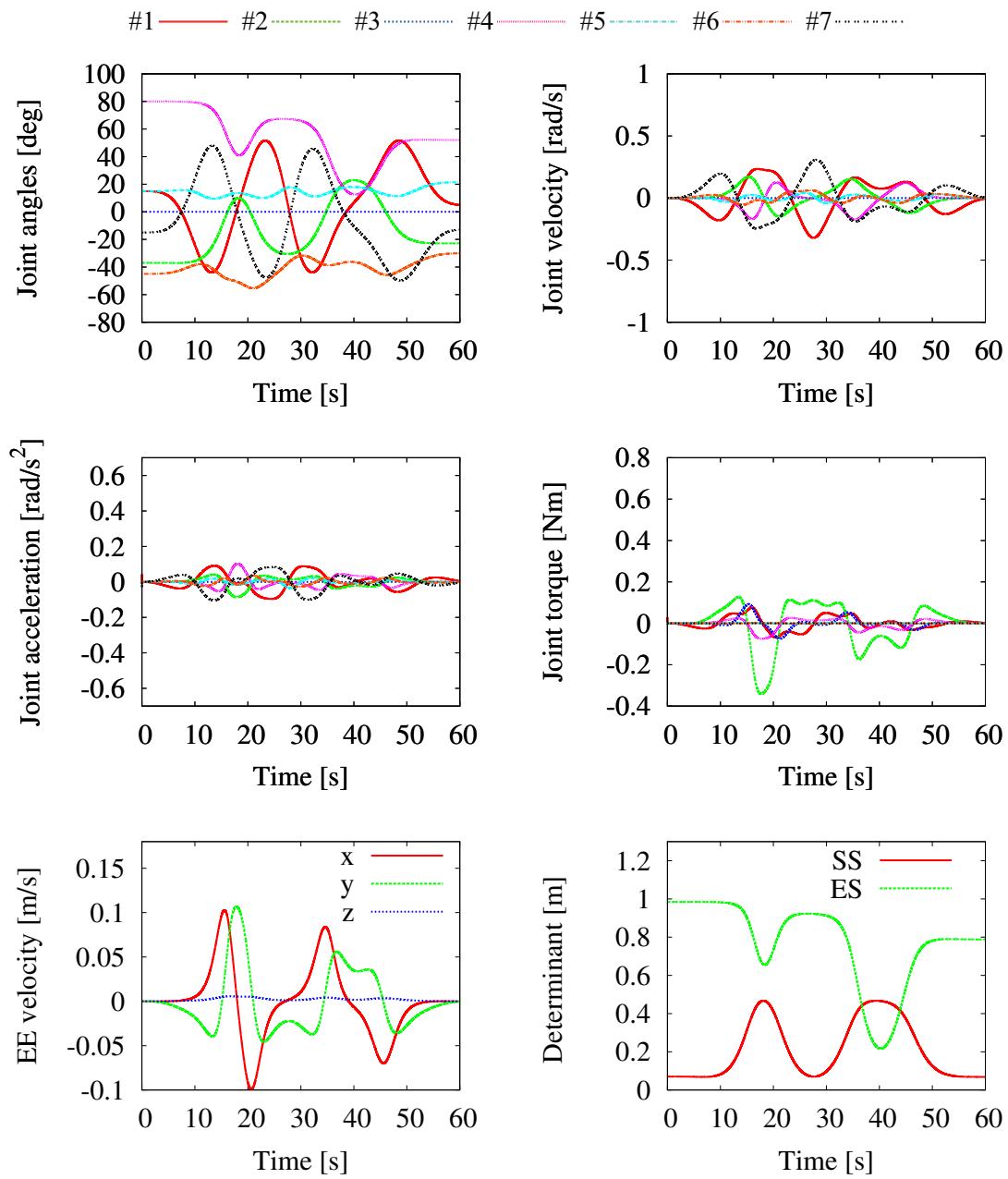


Fig. 3.18: NM spiral path tracking simulation with the 6R manipulator.

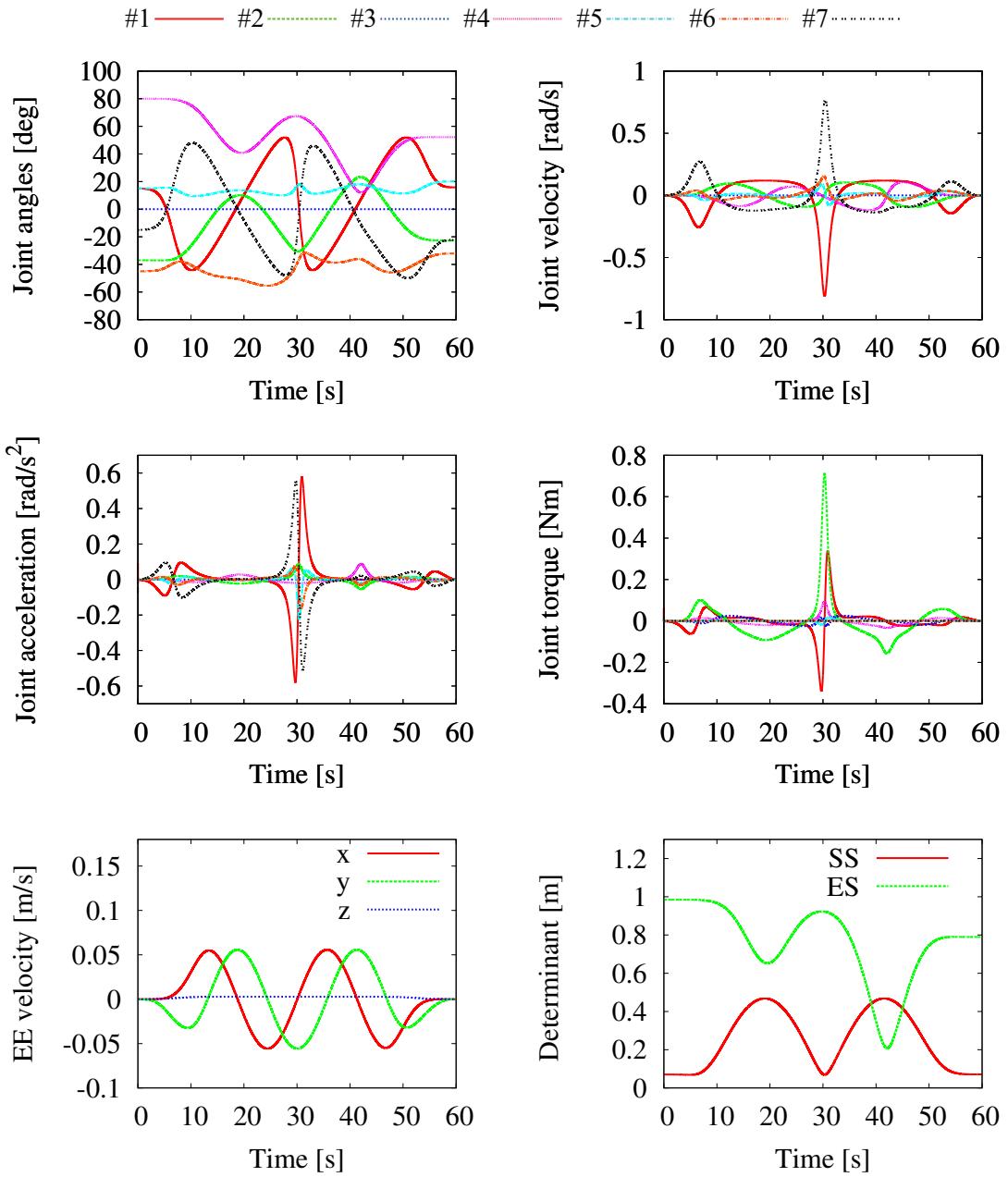


Fig. 3.19: CS spural path tracking simulation with the 6R manipulator.

### 3.3.1 7自由度マニピュレータを用いたセルフモーション

PA-10を模擬した7自由度マニピュレータのシミュレーションを用い, NSMと他のセルフモーションの比較を行う. シミュレーションで行った理由は, 実機で行うと関節の稼働範囲がかぎられており, 長時間セルフモーションを行えず, 制御による違いが確認しにくいからである. また, 制御で用いる $\bar{n}_{sm}$ はEq. (2.25)を参考に求め, $j$ は第3関節とした. シミュレーションは以下の3種類行った.

- natural self motion ( NSM )

$b_{sm}$ を定数として扱う.

- Constant speed self motion ( CSSM )

$b_{sm}$ に7自由度マニピュレータのヤコビ行列から3列目を取り除いたヤコビ行列( $\bar{J}_{sm}$ )の行列式の逆数を含ませ,  $1/\det(\bar{J}_{sm})$ に比例するよう $b_{sm}$ を変化させる. そうすることで, セルフモーションに関する第3関節を一定の速度で制御することができる.

- Pseudoinverse self motion ( PISM )

Eq. (2.5)を用いて制御する. ただし,  $\nu$ は0とし右辺第2項のみで制御する.

以上の3種類の方法で比較をした. ただし, 動作時間は30 sとし, サンプリングタイムは3 ms, 初期関節角度は $\begin{bmatrix} -90 & -120 & 40 & 120 & 0 & -45 & 0 \end{bmatrix}^T$  degとした.

また, 動作開始7.5 sは五次補間法によるスプライン関数を用い加速を行い, 終了7.5 sは五次補間法によるスプライン関数を用い減速し, 停止させている. NSM時の $b_{sm} = 2.5 \text{ rad/s m}^{-1}$ , CSSMでは第3関節の角速度が28.7 rad/s, PISMでは $q_a = [0, 0, 1.72, 0, 0, 0, 0]^T \text{ rad/s}$ とし, すべての制御で第3関節が700 degまで動作するようにした. NSMの結果をFig. 3.20に, CSSMの結果をFig. 3.21, PISMの結果をFig. 3.22に示す. それぞれ, 関節角度, 関節角速度, 関節角加速度, 関節トルク, 仕事, 行列式( $\det(JJ^T)$ )を示す. また, Table 3.5に結果をまとめた.

Fig. 3.20からNSMでは $\det(JJ^T)$ が零付近においても, 急激な関節角速度や加速度, トルクの変化がないことから安定した制御が行えている分か

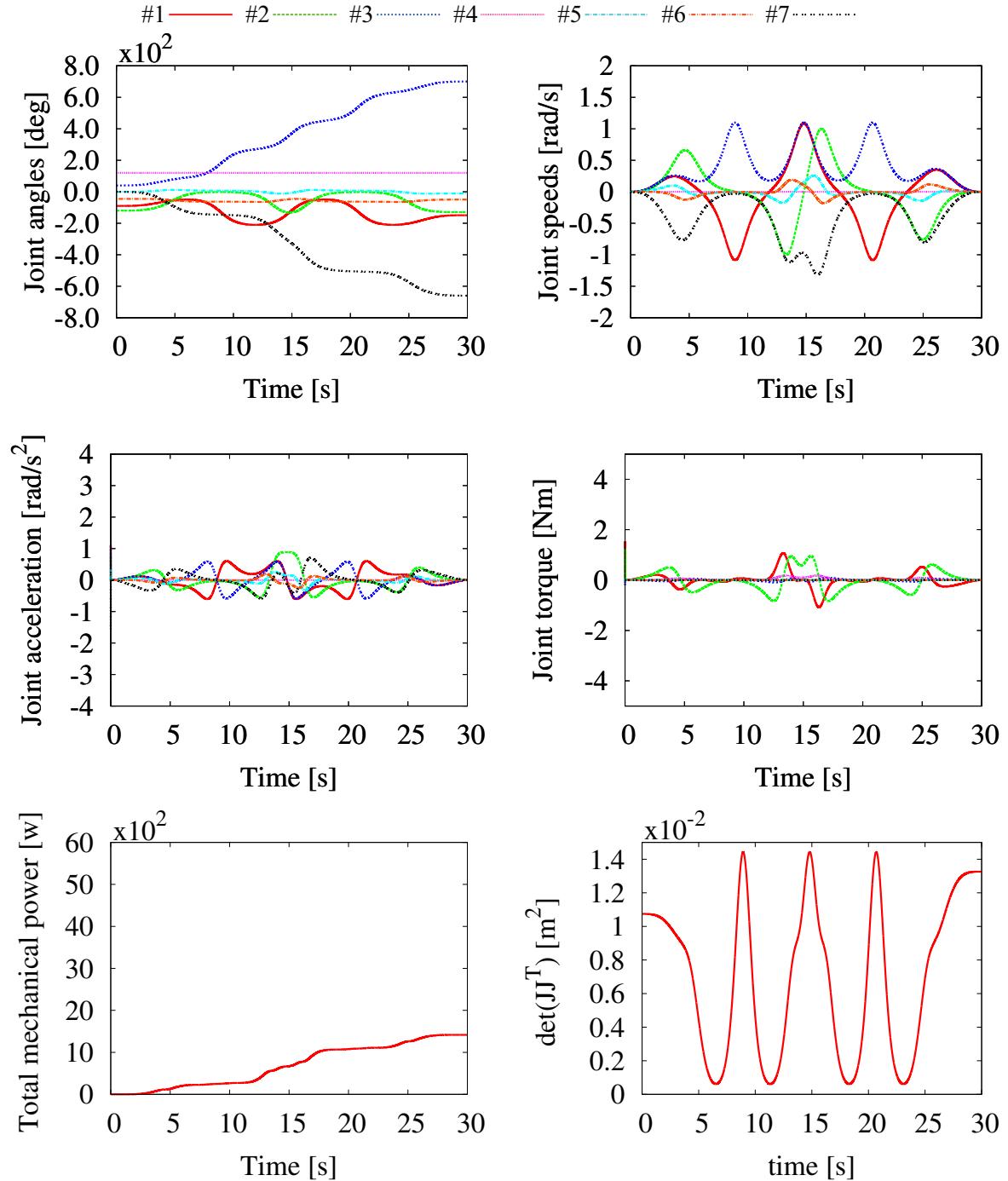


Fig. 3.20: Natural self motion simulation with the 7R manipulator.

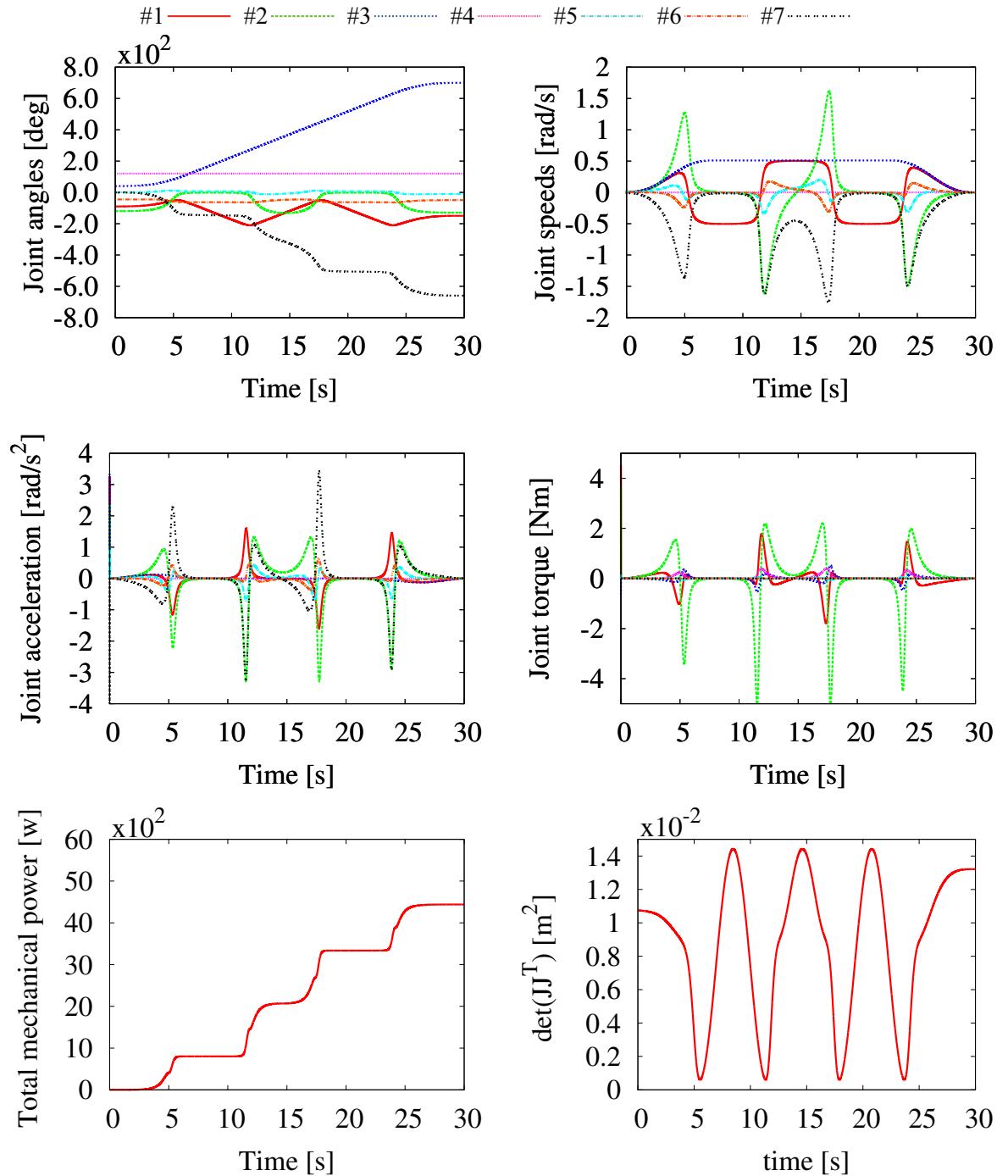


Fig. 3.21: Constant speed self motion simulation with the 7R manipulator.

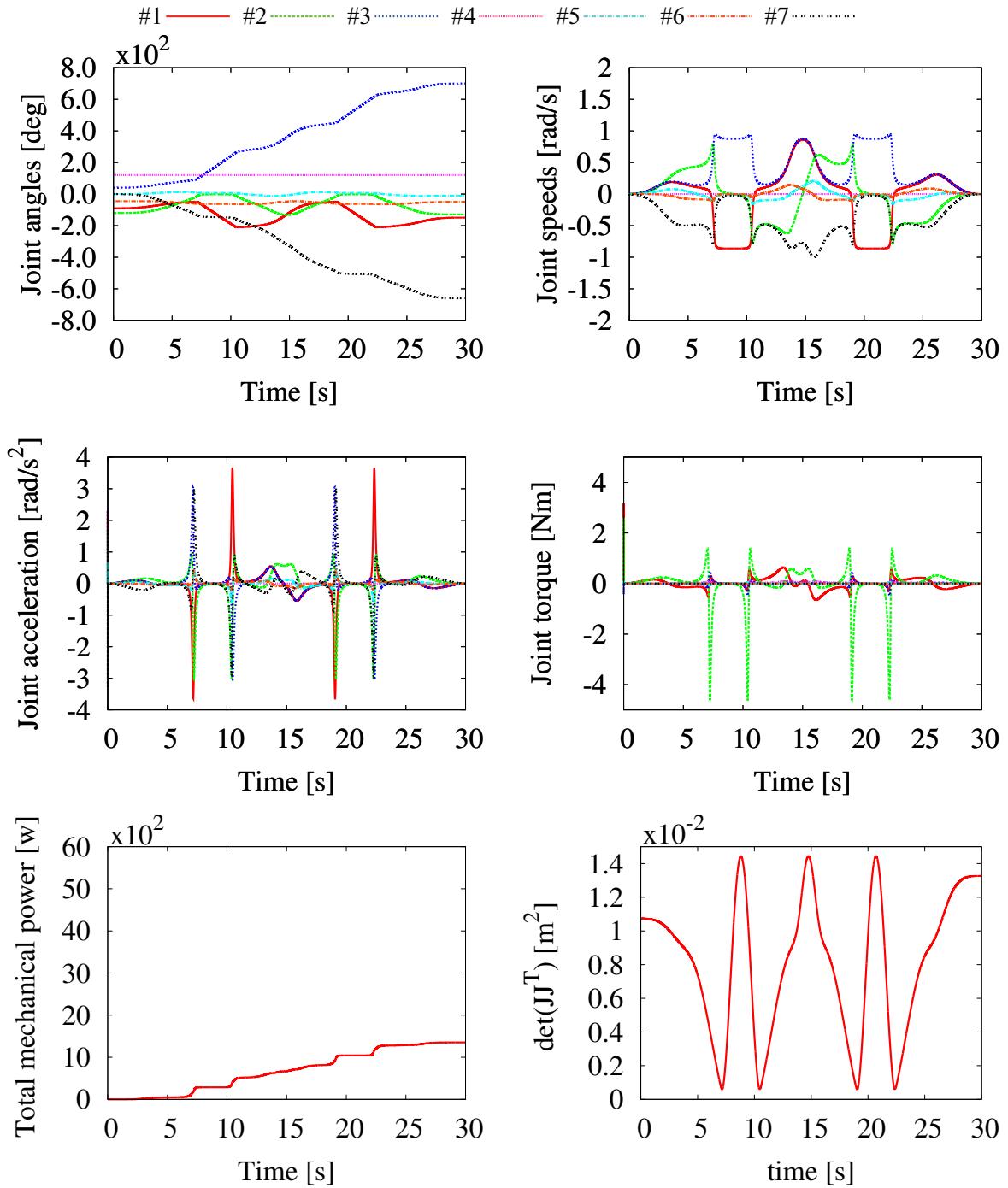


Fig. 3.22: Pseudoinverse self motion simulation with the 7R manipulator.

Table 3.5: Self motion with the 7R manipulator.

	NSM	CSSM	PISM
peak joint speed [rad/s]	1.32	1.75	0.998
peak joint torque [Nm]	1.53	5.08	4.61
total mechanical power [W]	1417	4440	1352

る。また、Fig. 3.21 から CSSM では第3関節は一定の速度で変化しているが、 $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$  が 0 付近において、急激な関節角速度、加速度、トルクの変化が確認できる。これは  $b_{sm}$  が  $1/\det(\bar{\mathbf{J}}_{sm})$  比例しており、 $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$  が 0 付近において  $\det(\bar{\mathbf{J}}_{sm})$  も 0 付近になることから、 $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$  が 0 付近において不安定になったと考えられる。また、Fig. 3.22 から PISM では  $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$  が 0 付近において、急激な関節角速度、加速度、トルクの変化が確認できる。これは  $J^+$  は  $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$  が 0 の点で特異姿勢となるため、その影響で不安定になったと考えられる。

さらに Table 3.5 から、最高関節角速度は PISM が一番小さくなり、CSSM と比べて約 1/2 倍になった。最高関節トルクは NSM が一番小さくなり、CSSM や PISM と比べて約 1/3 倍になった。仕事は NSM と PISM がほぼ同じ値となった。

## 3.4 考察

それぞれの比較動作の結果を以下にまとめると。

- 動力学シミュレーションによる 2 自由度マニピュレータを用いた直線経路追従制御

非冗長平面マニピュレータを用いた直線経路追従制御において、様々な特異点との距離による NM, CS, CAL, GO の比較を行った。特異点との距離が遠い経路では、どの制御法においても大きな違いは確認されなかった。特異点近傍では NM が最も最高関節トルクの値が小さくなり、制御が不安定になる点も確認できることから、最も安定しスムーズな経路追従制御だと結論づけた。また、比較のために開発した、CAL と GO も、制御が不安定になる点が存在するが、エネル

ギ , 仕事が少なく抑えられていることから , 今後詳しく分析する必要がある .

- シミュレーションと実験機による6自由度マニピュレータを用いた円経路追従制御

シミュレーションによる非冗長マニピュレータを用いた円経路追従制御において , NM , CS , TO の比較を行った . CSとの比較では直線経路追従制御時と同等の結果が得られ , より多自由度なマニピュレータを用い円経路のような連続的な軌道においても , 有用性があることを証明した . TOと比較した結果から , TOのほうがより速い速度で経路を追従できることが分かったが , NMのほうが急激な関節加減速がなく , 安定したスムーズな制御であると確認した .

実験機による比較では , 幾何学的な関節角速度などの評価はシミュレーション時と同等の結果が確認できた . しかし , 動力学的な関節トルクの評価では , アクチュエータの減速比による摩擦項の影響が大きく , シミュレーション時ほど大きな利点は確認できなかった .

- シミュレーションによる6自由度マニピュレータを用いた螺旋経路追従制御

今までの比較ではすべて経路が平面で与えられていたため , 三次元経路においても平面時と同様の結果が得られるか , NMとCSを比較することにより確認した . 結果 , 螺旋経路においても複数の特異点に対して , 平面経路時と同等の結果が得られた .

- シミュレーションによる7自由度マニピュレータを用いたセルフモーション

冗長マニピュレータのセルフモーションにおいて , NSM , CSSM , PISM の比較を行った . 比較した結果 , NSM は最高関節角加速度 , 最高関節トルクが一番小さく抑えられてることが確認でき , 先端の経路追従制御同様 , 最も安定したスムーズなセルフモーションだと結論づけた .

以上の結果をまとめると , NM は発散する点がなく , 制御が不安定になる点がないことから , スムーズな経路追従方法であり , 発散することのない有限な追従方法だと分かる . また ,  $b$ を定数として扱うだけで導入できる

ことから、導入が容易な追従方法でもある。さらに、複数の特異点付近を制御するときにおいても、角速度、加速度、トルクにおいて急激な変化が少ないことが分かった。また、同じ関節速度やトルクの領域において、等速軌道追従制御と比べ、より多くの経路も追従することができる。さらに冗長マニピュレータを用いたセルフモーションにおいても、先端制御時と同じ特徴を持っている。



# 第4章 反動零空間法に基づくモーション・フォース制御の提案

## 4.1 概要

マニピュレータに机の拭き掃除やドアの開閉，クランク回しなどの作業を行わせる場合，手先の位置制御と対象物に加える力制御を同時に満たすモーション・フォース制御法が求められる。モーション・フォース制御法は，過去に多く研究されており，Khatib[17]は，マニピュレータの運動方程式を作業空間について定式化(Operational space formulation: OSF)し選択行列を用いることで，分解加速度制御によるマニピュレータ先端の位置フィードバック制御と転置行列によるマニピュレータ先端の力制御を同時に満たしている。また，マニピュレータ先端モーション・フォース制御と非干渉な，マニピュレータの冗長自由度を利用した関節トルクの制御に成功している。また，上記に深く関係する研究として，Murrayら[14]が提唱する作業空間ダイナミクスがあげられる。これは，Khatibがマニピュレータ運動方程式のみに関する定式化を行なったのに対し，操作する対象物体の運動方程式を追加し定式化したものである。さらに，Khatibがマニピュレータ冗長自由度を関節トルク制御に用いているのに対し，Murrayらはマニピュレータ先端動作に影響しない，冗長自由度によるセルフモーションを，作業空間に対し陽に拡張した新たな座標として定義し，運動の制御に用いている。

本章では，OSFを用いたモーション・フォース制御の説明と上記と異なる新たなモーション・フォース制御法を提案する。本モーション・フォース制御法は，宇宙で用いるフリーフロー・ティングロボットの制御のために開発された反動零空間法(Reaction Null-Space: RNS)[19]に基づき，マニピュレータと対象物の動力学的干渉を利用する。過去の研究では，この動力学的干渉を柔軟ベース上マニピュレータの制御で利用することで，反動零空間法の概念に由来する様々な制御手法を開発している。

## 4.2 Khatibのモーション・フォース制御(OSF-HC)

一般的に， $n$ 自由度マニピュレータの運動方程式は，

$$M_l(\theta)\ddot{\theta} + c_l(\theta, \dot{\theta}) + g_l(\theta) = \tau \quad (4.1)$$

と示すことができる。式中，

$M_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : マニピュレータの慣性行列

$c_l \in \mathbb{R}^n$ : マニピュレータのコリオリ遠心力項

$g_l \in \mathbb{R}^n$ : マニピュレータの重力項

$\tau \in \mathbb{R}^n$ : 関節トルク

$\theta \in \mathbb{R}^n$ : 関節角度

である。ただし、関節角度に関しては前章までは $q$ を用いて表していた、 $q$ は一般化座標を表し、固定ベースマニピュレータにおいてはベース部の変位が無いため、関節角度を $q$ を使って表現したが、第4, 5章においては、ベース部の変位があるモデルも扱うため、相対的な関節角度変位を $\theta$ を用いて表現し、ベースの変位を含めた変位を $q$ を用いて表現する。

また、本章では外乱がない理想的な完全モデルを仮定し、モデル誤差や時間遅れによるロバスト安定性の問題は扱わない。ここで、上記マニ

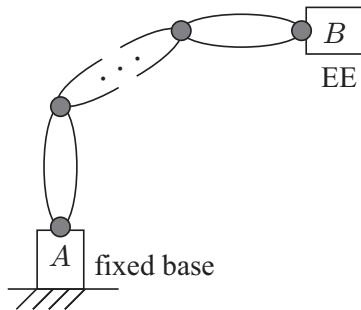


Fig. 4.1: Model of a manipulator in a fixed base.

ピュレータ運動方程式をマニピュレータ先端の作業空間について定式化する。ただし、Fig. 4.1に示すように、ベース部を $A$ 部、マニピュレータ先端部を $B$ 部と称する。 $m$ 自由度の作業空間における、 $B$ 部の順運動学を以下に示す。

$$\dot{\mathcal{V}}_B = J_{Bl}(\theta)\ddot{\theta} + \dot{J}_{Bl}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} \quad (4.2)$$

式中、 $\dot{\mathcal{V}}_B \in \mathbb{R}^m$ はマニピュレータ先端の加速度、 $J_{Bl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ は先端ヤコビ行列である。 $B$ 部の負荷力 $\mathcal{F}_B^{imp} \in \mathbb{R}^m$ とマニピュレータ関節トルクの関係は、

$$\tau = J_{Bl}^T \mathcal{F}_B^{imp} \quad (4.3)$$

である。ただし  $(\circ)^{imp}$  は負荷力を表し、マニピュレータに加える力である。Eq. (4.2), (4.3) を用いて、Eq. (4.1) をマニピュレータ先端の運動方程式に定式化を行うと、以下の式のように書き換えられる。

$$\mathbf{M}_x(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathcal{V}}_B + \mathcal{C}_x(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathcal{G}_x(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{F}_B^{imp} \quad (4.4)$$

ただし、式中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_x &= (\mathbf{J}_{Bl}\mathbf{M}_l^{-1}\mathbf{J}_{Bl}^T)^{-1} \\ \mathcal{C}_x &= -\mathbf{M}_x\dot{\mathbf{J}}_{Bl}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \bar{\mathbf{J}}_{Bl}^T\mathbf{c}_l \\ \mathcal{G}_x &= \bar{\mathbf{J}}_{Bl}^T\mathbf{g}_l \\ \mathbf{J}_{Bl}^\# &= \mathbf{M}_l^{-1}\mathbf{J}_{Bl}^T\mathbf{M}_x \end{aligned}$$

であり、 $\mathbf{J}_{Bl}^\#$  は慣性重み付き一般化逆行列 (Inertia-weighted generalized inverse matrix) である。Eq. (4.4) より  $B$  部の動作に必要な力  $\mathcal{F}_m$  と力制御に必要な負荷力  $\mathcal{F}_c$  をそれぞれ求めると以下のようになる。

$$\mathcal{F}_B^{ref} = \mathcal{F}_m^{ref} + \mathcal{F}_c^{ref} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{F}_m^{ref} = \mathbf{M}_x\dot{\mathcal{V}}_B^{ref}(\mathbf{S}) + \mathcal{C}_x + \mathcal{G}_x \quad (4.6)$$

$$\mathcal{F}_c^{ref} = \mathcal{F}_c^{ref}(\mathbf{S}^\perp) \quad (4.7)$$

モーション・フォース制御は、 $\mathcal{F}_m^{ref}$  と  $\mathcal{F}_c^{ref}$  を非干渉化するため、選択行列  $\mathbf{S} \in \Re^{m \times m}$  を用い、直交なベクトルとする。ただし、式中  $\mathbf{S}^\perp$  は  $\mathbf{S}$  と直交な行列を表しており、例えば、 $\mathbf{S} = \text{diag}[1, 0]$  とした場合  $\mathbf{S}^\perp = \text{diag}[0, 1]$  となる。関節指令トルクは  $\mathbf{J}_{Bl}^\#$  を用い、以下のように求まる。

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_{Bl}^T \mathcal{F}_B^{ref} + (\mathbf{U} - \mathbf{J}_{Bl}^T \mathbf{J}_{Bl}^{\#T}) \boldsymbol{\tau}_a \quad (4.8)$$

式中、 $\mathbf{U}$  は単位行列、 $\boldsymbol{\tau}_a \in \Re^n$  は任意のトルクである。ただし、右辺第2項は冗長マニピュレータ先端の力に非干渉な零空間ベクトルであり、冗長性を有したマニピュレータ ( $n > m$ ) にのみ存在し、非冗長マニピュレータでは 0 になる。最終的に Eq. (4.8) に Eqs. (4.5)~(4.7) を代入すると関節指令トルクは以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{ref} &= \mathbf{J}_{Bl}^T \mathbf{M}_x \dot{\mathcal{V}}_B^{ref}(\mathbf{S}) + \mathbf{J}_{Bl}^T \mathcal{F}_c^{ref}(\mathbf{S}^\perp) \\ &\quad + \mathbf{J}_{Bl}^T (\mathcal{C}_x + \mathcal{G}_x) + (\mathbf{U} - \mathbf{J}_{Bl}^T \mathbf{J}_{Bl}^{\#T}) \boldsymbol{\tau}_a \end{aligned} \quad (4.9)$$

### 4.3 反動零空間法に基づくモーション・フォース制御 [32]

本節では、マニピュレータと対象物の動力学的干渉を利用したモーション・フォース制御を提案する。Fig. 4.2 に示すように、ベースが固定されて

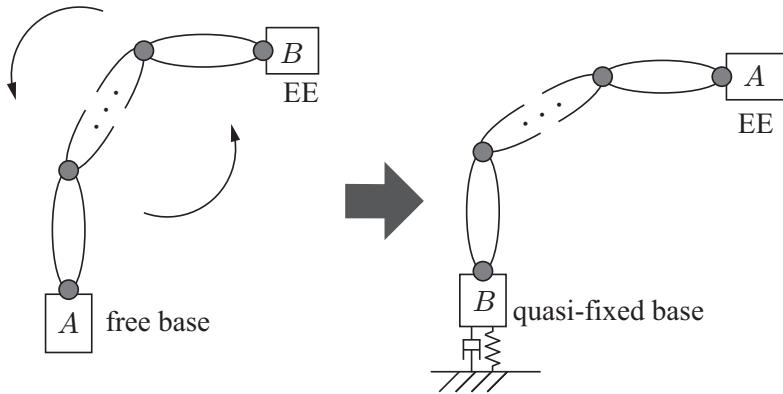


Fig. 4.2: Model of a manipulator in a quasi-fixed base.

いないフリーフロー・ティングモデル<sup>1</sup>のフリーベースを  $A$  とし、先端を  $B$  とする。提案するモーション・フォース制御法の要は、 $A$  部を新たなマニピュレータ先端として扱う点である。つまり、フリーフロー・ティングモデルのベースをマニピュレータ先端と定義することで、新たなマニピュレータ先端 ( $A$  部) とマニピュレータの動力学的干渉として扱うことができる。

ただし、 $B$  部は、強力なばねとダンパーで固定し固定ベースとして扱う。前節の OSF-HC では、 $B$  部をマニピュレータ先端として扱っていることに注意されたい。

まず、 $A$  部とマニピュレータの運動方程式を示す。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_A(\mathcal{X}_A, \boldsymbol{\theta}) & M_{Al}(\mathcal{X}_A, \boldsymbol{\theta}) \\ M_{Al}^T(\mathcal{X}_A, \boldsymbol{\theta}) & M_l(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{V}}_A \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}_A(\mathcal{X}_A, \boldsymbol{\theta}, \mathcal{V}_A, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{c}_l(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{G}_A(\mathcal{X}_A, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{g}_l(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_A^{ext} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^A_B T^T(\mathcal{X}_A, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}_{Bl}^T(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \mathcal{F}_B^{ext} \quad (4.10) \end{aligned}$$

式中

<sup>1</sup> フリーフロー・ティングモデルの運動方程式の作成方法は付録 C を参照。

$M_A \in \Re^{m \times m}$ : A部周りにおけるシステム全体の慣性行列  
 $M_{Al} \in \Re^{m \times n}$ : マニピュレータとA部の干渉慣性行列  
 $\mathcal{C}_A \in \Re^m$ : A部のコリオリ遠心力項  
 $\mathcal{G}_A \in \Re^m$ : A部の重力項  
 $\mathcal{F}_A^{ext} \in \Re^m$ : A部に加わる外力  
 $\mathcal{F}_B^{ext} \in \Re^m$ : B部に加わる外力であり,  
 前節の負荷力  $\mathcal{F}_B^{imp}$  と作用反作用の働きがある  
 $\mathcal{V}_A \in \Re^m$ : A部の速度  
 $\mathcal{X}_A \in \Re^m$ : A部の位置と姿勢  
 ${}^A_B T^T \in \Re^{m \times m}$ : B部に与えた外力をA部に変換する行列  
 ただし  $(\circ)^{ext}$  は反力を表し,  $\mathcal{F}^{ext} = -\mathcal{F}^{imp}$  である。

Eq. (4.10) は上段と下段にそれぞれ A 部とマニピュレータの運動方程式を示しており, A 部とマニピュレータ間の動力学的干渉を考慮することが可能となり, B 部に働く外力も考慮することができる。提案するモーション・フォース制御法は, Eq. (4.10) の上段, A 部の運動方程式より導出する。ただし,  $\dot{\mathcal{V}}_A$  と  $\mathcal{F}_A$  は, 非干渉化のため前章と同様に選択行列  $S$  を用いて  $\dot{\mathcal{V}}_A = \dot{\mathcal{V}}_A^{ref}(S)$  および  $\mathcal{F}_A^{imp} = \mathcal{F}_A^{ref}(S^\perp)$  となる。以上より, 求める関節角加速度指令値は以下として示すことができる。

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{\theta}}^{ref} = & M_{Al}^+ \left( \mathcal{F}_A^{ref}(S^\perp) - M_A \dot{\mathcal{V}}_A^{ref}(S) \right) \\ & + M_{Al}^+ \left( {}^A_B T^T \mathcal{F}_B^{ext} - \mathcal{C}_A + \mathcal{G}_A \right) + (\mathbf{U} - M_{Al}^+ M_{Al}) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_a\end{aligned}\quad (4.11)$$

ただし,  $(\circ)^+$  は擬似逆行列を表し,  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_a \in \Re^n$  は任意の関節角加速度を示す。Eq. (4.11) の右辺第1項は, A部のモーション・フォース制御を満たし, 右辺第2項は, A部に発生する外力や非線形項の補償, 右辺第3項は, 反動零空間  $\mathcal{N}(M_{Al})$  を張る  $M_{Al}$  の零空間ベクトルを示し, 物理的には, A部に対して動力学的に非干渉となるマニピュレータの動作を示す。ただし, 第3項は冗長マニピュレータ ( $n > m$ ) にのみ存在する項であり, 非冗長マニピュレータでは0となる。このように, 動力学的干渉による動作の分解を利用する手法が, 反動零空間法の概念である。

次に, 反動零空間に基づくモーション・フォース制御のための関節トルク指令値を求める。ここでは, 非線形項の線形化補償のため, 計算トルク法を用いる。Eq. (4.10) 下段のマニピュレータ運動方程式より, 計算トルク制御式は, 以下となる。

$$\boldsymbol{\tau} = M_{Al}^T \dot{\mathcal{V}}_A^{ref}(S) + M_l \ddot{\boldsymbol{\theta}}^{ref} + \mathbf{c}_l + \mathbf{g}_l - \mathbf{J}_{Bl}^T \mathcal{F}_B^{ext} \quad (4.12)$$

Eq. (4.12) の右辺第1項は興味深い項であり,  $A$ 部の位置制御  $\dot{\mathcal{V}}_A^{ref}$  によるマニピュレータ関節への動力学的な干渉トルクをフィードフォワード制御により補償することを可能とする。最終的に, Eq. (4.11) を Eq. (4.12) に代入することで, 関節トルク指令値は以下のように求まる。

$$\tau = \tau_{EE} + \tau_{RNS} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \tau_{EE} &= (\mathbf{M}_{Al}^T - \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{Al}^+ \mathbf{M}_A) \dot{\mathcal{V}}_A^{ref}(S) + \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{Al}^+ \mathcal{F}_A^{ref}(S^\perp) \\ &\quad + \left( \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{AlB}^{+A} \mathbf{T}^T - \mathbf{J}_{Bl}^T \right) \mathcal{F}_B^{ext} - \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{Al}^+ (\mathcal{C}_A + \mathcal{G}_A) + \mathbf{c}_l + \mathbf{g}_l \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\tau_{RNS} = \mathbf{M}_l(\mathbf{U} - \mathbf{M}_{Al}^+ \mathbf{M}_{Al}) \ddot{\theta}_a \quad (4.15)$$

### 4.3.1 冗長性を利用した反動制限制御

本節では, 冗長性を利用して制御方法の例として, ベース部の力を冗長自由度を用いて制限する反動制限制御について説明する。関節トルクと  $B$ 部の力には Eq. (4.3) のような関係があり,  $B$ 部の力と冗長自由度の関係は Eq. (4.15) を用いて以下のようになる。

$$\ddot{\theta}_a = (\mathbf{M}_l(\mathbf{U} - \mathbf{M}_{Al}^+ \mathbf{M}_{Al}))^+ (\mathbf{J}_{Bl}^T \mathcal{F}_B^{ref} - \tau_{EE}) \quad (4.16)$$

Eq. (4.16) を Eq. (4.15) に代入すると,  $\tau_{RNS}$  は以下のように求まる。

$$\tau_{RNS} = \mathbf{M}_l(\mathbf{U} - \mathbf{M}_{Al}^+ \mathbf{M}_{Al}) (\mathbf{M}_l(\mathbf{U} - \mathbf{M}_{Al}^+ \mathbf{M}_{Al}))^+ (\mathbf{J}_{Bl}^T \mathcal{F}_B^{ref} - \tau_{EE}) \quad (4.17)$$

しかし, 式中  $\mathbf{M}_l(\mathbf{U} - \mathbf{M}_{Al}^+ \mathbf{M}_{Al}) (\mathbf{M}_l(\mathbf{U} - \mathbf{M}_{Al}^+ \mathbf{M}_{Al}))^+$  は特異行列となるため計算することができない。そこで以下のように変換し用いる [33]。

$$\tau_{RNS} = \mathbf{M}_l(\mathbf{U} - \mathbf{M}_{Al}^+ \mathbf{M}_{Al}) \mathbf{M}_l^{-1} (\mathbf{J}_{Bl}^T \mathcal{F}_B^{ref} - \tau_{EE}) \quad (4.18)$$

Eq. (4.18) を用いることで, ベース部の力を冗長自由度で制御することが可能となる。しかし, 冗長自由度による制御なので制御が可能な範囲は限られており, 制御するベース部の力の数だけ冗長自由度が必要となる。例えば, ベース部の  $x$  軸と  $y$  軸方向の力を制御しようと考えた場合, 最低冗長自由度は 2 必要である。

Eq. (4.18) に許容反力の最大値  $\mathcal{F}_B^{max}$  と最小値  $\mathcal{F}_B^{min}$  を設け,  $\mathcal{F}_B^{ref}$  を以下のように定義する。

$$\mathcal{F}_B^{ref} = \begin{cases} \mathcal{F}_B^{max} - \mathcal{F}_{act} & \text{if } \mathcal{F}_B^{max} < \mathcal{F}_{act}, \\ \mathcal{F}_B^{min} - \mathcal{F}_{act} & \text{elseif } \mathcal{F}_{act} < \mathcal{F}_B^{min}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.19)$$

Eq. (4.19) を用いることで，反動を許容反力内に抑える反動制限御が可能となる．



# 第5章 反動零空間法に基づくモーション・フォース制御の比較解析

## 5.1 概要

前章までに，Khatib の提案するモーション・フォース制御法（以降，OSF-HC）と我々の提案する反動零空間法に基づくモーション・フォース制御法（以降，RNS-HC）について述べた。本章では Khatib の提案するモーション・フォース制御法と我々の提案する反動零空間法に基づくモーション・フォース制御法を非冗長マニピュレータと冗長マニピュレータのシミュレーションで比較し，提案するモーション・フォース制御法が，同等以上の性能を有することを示す。また，Khatib が用いたマニピュレータ冗長自由度の関節トルク制御と反動零空間法により得られるセルフモーションの制御の，マニピュレータ先端のモーション・フォース制御法に対する影響について議論し，その後，冗長性を制御しベース部に反動制限御を行う。

まず平面2自由度の非冗長マニピュレータと平面3自由度の冗長マニピュレータの動力学シミュレーションを通して，OSF-HC と RNS-HC の比較を行う。さらに RNS-HC 時に平面3自由度マニピュレータの冗長性を制御することにより，ベース部の力の制御を行う。

ただし，式中の記号は第4章と同じものを用いるが，扱うモデルはすべて平面モデルのため， $\mathcal{F}_A \rightarrow f_A$ ， $\mathcal{F}_B \rightarrow f_B$ ， $\mathcal{V}_A \rightarrow v_A$ ， $\mathcal{C}_A \rightarrow c_A$  と表記する。

### 5.1.1 非冗長マニピュレータを用いた検証

Fig. 5.1 に示す平面上2リンク ( $n = 2$ ) 非冗長マニピュレータ先端の  $x$  軸方向および  $z$  軸方向の計2自由度 ( $m = 2$ ) を制御する。また，各リンクの長さ，重心位置，質量はそれぞれ， $l_i = 1.0$  m， $a_i = 0.5$  m， $m_i = 10$  kg ( $i = 1, 2$ )

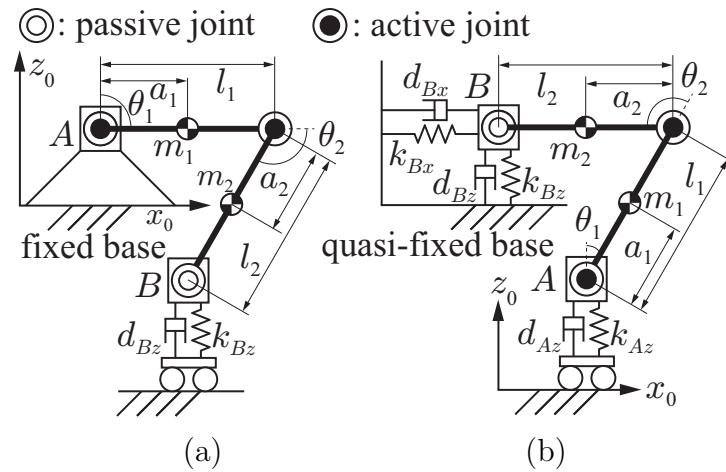


Fig. 5.1: Models of two similar non-redundant manipulators for (a) Operational Space formulation and (b) RNS formulation, and their initial configuration of several simulations.

とする。Fig. 5.1(a) は OSF-HC に対するモデルであり、A 部を固定ベース、B 部をマニピュレータ先端として扱う。また、B 部の  $z$  軸方向には、ばねとダンパそして壁を模擬する。これにより、 $x$  軸方向の位置制御と  $z$  軸方向の力制御を行う。一方、Fig. 5.1(b) は RNS-HC に対するモデルであり、B 部を  $x$  および  $z$  軸方向に、強力なばねとダンパで模擬された F/T センサを有する固定ベースとして、A 部をマニピュレータ先端として扱う（フリーフロー ティングモデルの作成方法については付録 C を参照。）また、A 部の  $z$  軸方向には、ばねとダンパそして壁を模擬する。これにより、 $x$  軸方向の位置制御と  $z$  軸方向の力制御を行う。OSF-HC と RNS-HC で固定部と先端部が異なる点に注意されたい。また、A 部と B 部にかかる拘束力  $f_A, f_B$  は以下のように求まり、拘束力は負荷力であり、Eq. (4.10) の右辺にある反力を代入するには負の値となる。

$$\mathbf{f}_i = -K_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i0}) - D_i \boldsymbol{\nu}_i \quad (5.1)$$

ただし、 $K_i = \text{diag}[k_{ix} \ k_{iz}]$  および  $D_i = \text{diag}[d_{ix} \ d_{iz}]$ 、 $x_i$  ( $i = A, B$ ) は、それぞれ  $i$  部のばねおよびダンパゲイン行列、位置ベクトルを示す。また、 $(\circ)_0$  は初期値を表している。重力加速度は 0 とし、Fig. 5.1(a) および (b) で用いたばねダンパゲイン値は Table 5.1 に示す。Eq. (4.9) および (4.13) における  $x$  軸方向の運動および  $z$  軸方向の力制御の指令値は、以下のフィードバック

制御式により得る。

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}_i^{ref} = \dot{\boldsymbol{\nu}}_i^{des} + {}^c\mathbf{R}_0^T \mathbf{S} \mathbf{K}_d {}^c\mathbf{R}_0 (\boldsymbol{\nu}_i^{des} - \boldsymbol{\nu}_i) + {}^c\mathbf{R}_0^T \mathbf{S} \mathbf{K}_p {}^c\mathbf{R}_0 (\mathbf{x}_i^{des} - \mathbf{x}_i) \quad (5.2)$$

$$\mathbf{f}_i^{ref} = \mathbf{f}_i^{des} + {}^c\mathbf{R}_0^T \mathbf{S}^\perp \mathbf{K}_f {}^c\mathbf{R}_0 (\mathbf{f}_i^{des} - \mathbf{f}_i) \quad (5.3)$$

式中， $\mathbf{K}_p$  と  $\mathbf{K}_d$  と  $\mathbf{K}_f$  は位置と速度のフィードバックゲインで， ${}^c\mathbf{R}_0$  はベース座標系から手先座標系への回転行列である。ただし，OSF-HC のとき  $i = B$  であり  $\mathbf{f}_B^{ref}$  は Eq. (4.9) 中の  $\mathcal{F}_c^{ref}$  を表しており，RNS-HC のとき  $i = A$  である。また，選択行列は  $\mathbf{S} = \text{diag}[1 \ 0]$  である。

初期角度はOSF-HCでは $\theta = [90 \ 120]^T$  deg, RNS-HCでは $\theta = [30 \ -120]^T$  deg とし，サンプリングタイムは1 ms，動作時間は5 s とし，先端の動作は $x$  軸方向に0.4 m 移動させ，フィードバックゲインは  $\mathbf{K}_d = \text{diag}[5, 5] \text{ s}^{-1}$ ,  $\mathbf{K}_p = \text{diag}[10, 10] \text{ s}^{-2}$ とした。先端の力制御は $z$  軸方向に-10 N とし，ゲイン  $\mathbf{K}_f = \mathbf{0}$  とした。今回目標動作は $x$  軸方向しか動作しないため， ${}^c\mathbf{R}_0$  は単位行列である。

OSF-HC の結果を Fig. 5.2 に示し，RNS-HC の結果を Fig. 5.3 に示す。ただし，図中，(a) は先端部の位置と $x$  軸方向の目標値，(b) は先端部 $x$  軸方向の位置の誤差，(c) は先端部の力と目標値，(d) は先端部の力の誤差，(e) は関節角度，(d) はベース部の力を示す。

Figs. 5.2, 5.3 (a), (b) より，両制御法とも先端の動作は目標値とほぼ一致しており，誤差が最大 0.1 mm ほどであり収束していることから正しく制御を行えることが分かる。また Figs. 5.2, 5.3 (c), (d) より，両制御法とも先端の力は目標値とほぼ一致しており，のフィードバックなしで最大誤差 30 mN ほどですぐに収束していることからフィードフォワードのみで正しく制御が行えていることが分かる。さらに Figs. 5.2, 5.3 (f) からベース部に発生する力も同程度である。以上のことから RNS-HC が非冗長マニピュレータにおいて OSF-HC と同等のモーション・フォース制御が行えると分かった。

Table 5.1: Gain values of spring and damper of end-links A and B.

	$k_{Ax}$	$k_{Az}$	$k_{Bx}$	$k_{Bz}$ [N/m]
OSF-HC	-	-	0	$2.0 \times 10^4$
RNS-HC	0	$2.0 \times 10^4$	$5.0 \times 10^6$	$5.0 \times 10^6$
	$d_{Ax}$	$d_{Az}$	$d_{Bx}$	$d_{Bz}$ [Ns/m]
OSF-HC	-	-	0	$5.0 \times 10^2$
RNS-HC	0	$5.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^3$	$1.0 \times 10^3$

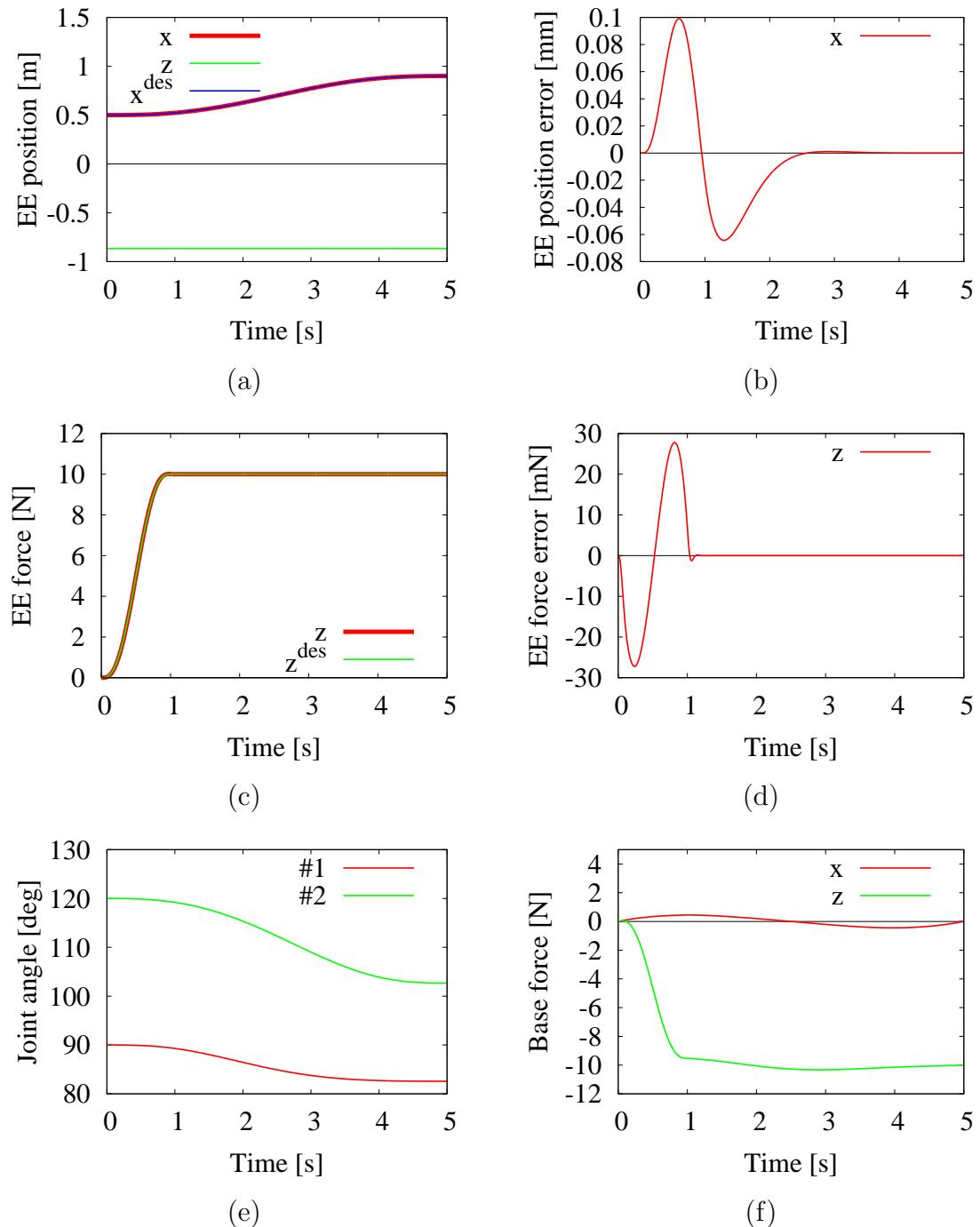


Fig. 5.2: The results of the numerical simulation via OSF-HC.

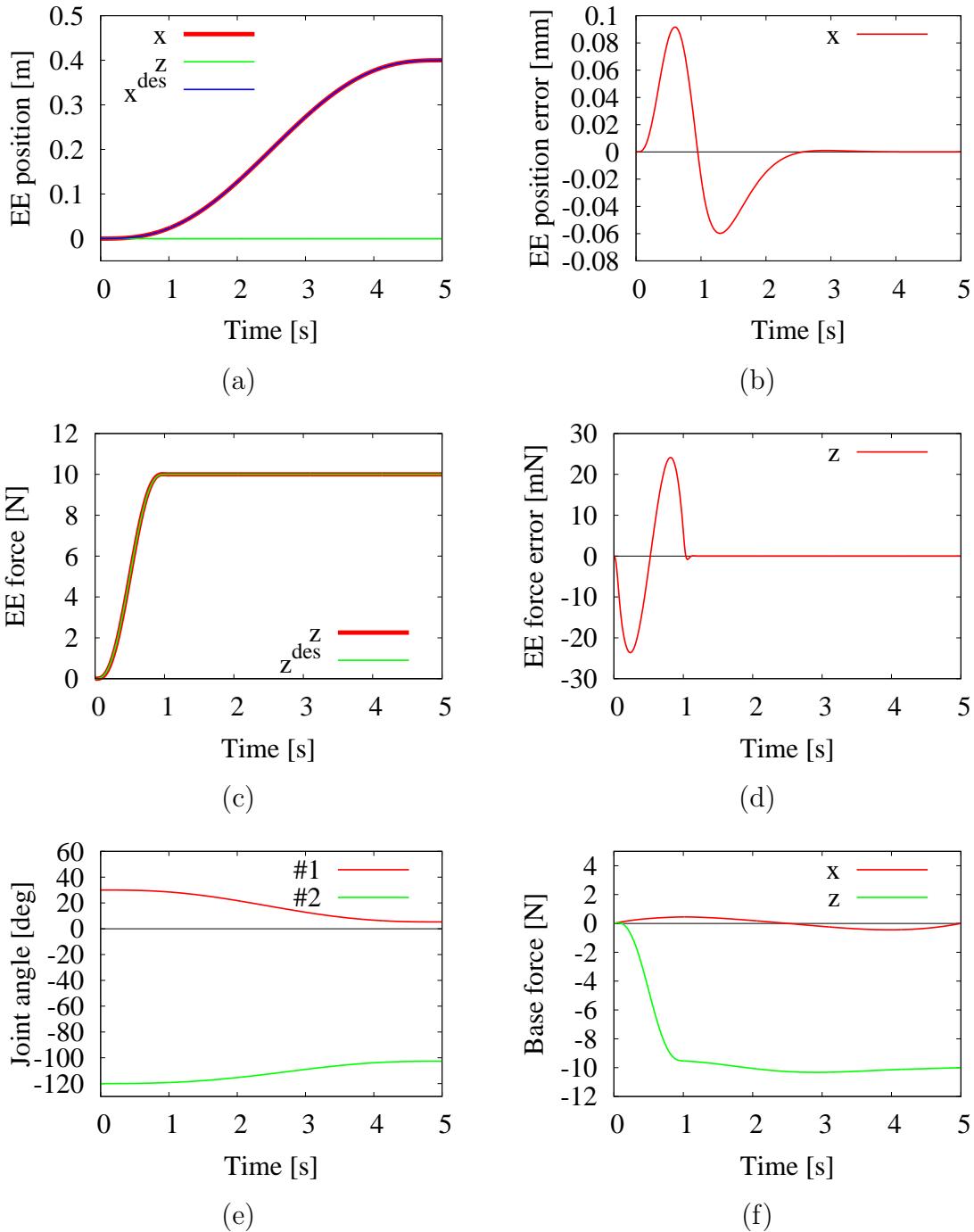


Fig. 5.3: The results of the numerical simulation via RNS-HC.

### 5.1.2 冗長1自由度マニピュレータを用いた検証

冗長マニピュレータにおいてもRNS-HCが正しく制御できるかOSF-HCと比較しながら確認する。また、零空間も正しく定義されているか確認する。

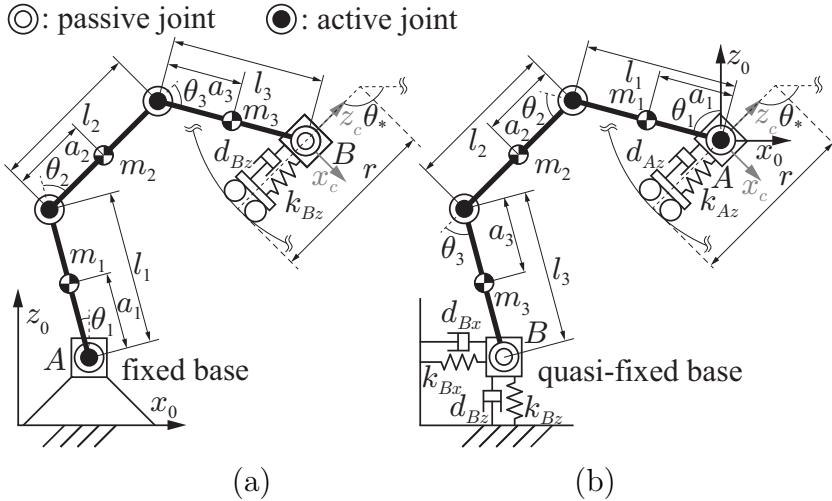


Fig. 5.4: Models of two similar redundant manipulators for (a) OSF-HC and (b) RNS-HC, and their initial configuration in the simulations.

Fig. 5.4に示す平面上3リンク( $n=3$ )冗長マニピュレータ先端の $x$ 軸方向および $z$ 軸方向の計2自由度( $m=2$ )を制御する。また、各リンクの長さ、重心位置、質量はそれぞれ、 $l_i = 1.0 \text{ m}$ ,  $a_i = 0.5 \text{ m}$ ,  $m_i = 10 \text{ kg}$  ( $i = 1, 2, 3$ )とする。非冗長マニピュレータのときと同様、Fig. 5.4(a)はOSF-HCに対するモデルであり、A部を固定ベース、B部をマニピュレータ先端として扱う。また、B部にはねとダンパそして円形の壁を模擬する。一方、図5.4(b)はRNS-HCに対するモデルであり、B部を $x$ および $z$ 軸方向に、F/Tセンサを有する固定ベースとして、A部をマニピュレータ先端として扱う。また、A部にはねとダンパそして円形の壁を模擬する。また、A部とB部にかかる拘束力 $f_A$ ,  $f_B$ は非冗長マニピュレータ時と同様Eq. (5.1)を用いた。ばねダンパゲイン値は非冗長マニピュレータ時と同様(Table 5.1)とした。

初期角度はOSF-HCでは $\theta = [-15 \ 60 \ 60]^T \text{ deg}$ , RNS-HCでは $\theta = [-75 \ -60 \ -60]^T \text{ deg}$ とし、サンプリングタイムは1 ms, 動作時間は10 s, 先端の動作は半径 $r = 0.707 \text{ m}$ の円軌道とし $\theta_*$ が135 degから45 degまで2往復するようにした。フィードバックゲインは $K_d = \text{diag}[10, 10] \text{ s}^{-1}$ ,  $K_p = \text{diag}[100, 100] \text{ s}^{-2}$ とした。先端の力制御は円法線方向に-10 Nとし、ゲイン $K_f = \text{diag}[5, 5]$ とし

た。今回目標動作は円軌道のため  ${}^cR_0$  は以下のように設定した。

$${}^cR_0(\theta_*(t)) = \begin{bmatrix} \sin(\theta_*(t)) & \cos(\theta_*(t)) \\ -\cos(\theta_*(t)) & \sin(\theta_*(t)) \end{bmatrix}$$

さらに以下の2種類の条件でシミュレーションを行った。

- 条件1:  $\ddot{\theta}_a = 0$  とし制御。

冗長マニピュレータにおいても正しくモーション・フォース制御が行えるか確認。

- 条件2: 5 sまでは  $\ddot{\theta}_a = 0$  とし、5 s後から  $\ddot{\theta}_a = [0, 1, 0]^T \text{ rad/s}^2$  として制御。

冗長自由度を制御することで、正しく零空間が定義されているか確認。

ただし、OSF-HCにおいて  $\tau_a = M_l \ddot{\theta}_a$  として制御した。OSF-HCとRNS-HCの2つの制御を2つの条件で行うため、シミュレーション回数は4回となる。

条件1のOSF-HCの結果をFig. 5.5に示し、RNS-HCの結果をFig. 5.6に示す。ただし、図中、(a)は先端部の位置と目標値、(b)は先端部の位置の誤差、(c)は先端部の力と目標値、(d)は先端部の力の誤差、(e)は関節角度、(f)は関節角速度、(g)はモビリティエンソルの行列式で  $\det(J_{Bl}M_l^{-1}J_{Bl}^T)$ 、(h)はベース部の力を示す。ただし、 $(\circ)_c$ は手先座標系を表している。Figs. 5.5, 5.6 (a), (b)より、両制御法とも先端位置は目標値に追従しており、 $z_c$ 軸方向の誤差は円軌道の法線方向に加えている力の影響で、加えた力の大きさだけバネが縮んだ結果であり、グラフから -0.5 mmに収束しており、バネ定数が  $2 \times 10^4 \text{ Nm}$ であることから、指令値どおり 10 N加えていることが分かる。また  $x_c$ 軸方向の誤差が収束していない。これは先端に力のフィードバックを行うために設置されたバネとダンパーの影響であり、制御の問題点ではない。また値も非常に小さいことから、先端の動作は正しく制御できていることが分かる。(c), (d)から両制御法とも先端の力は目標値と一致しており、誤差も手先座標系の  $z$  軸方向に微小に発生しているだけなので、先端の力も正しく制御できていると分かる。(e)から OSF-HC と RNS-HC で違う動作をしていることが分かる。Fig. 5.5 (f), (g), (h)から OSF-HC では  $\det(J_{Bl}M_l^{-1}J_{Bl}^T)$  が 0付近において急激な関節角速度が発生しており最高関節角速度は  $4.22 \text{ rad/s}$ まで達しており、その際に急激なベースの力が発生していることが分かる。一方 Fig. 5.6 (f), (g), (h)から RNS-HC

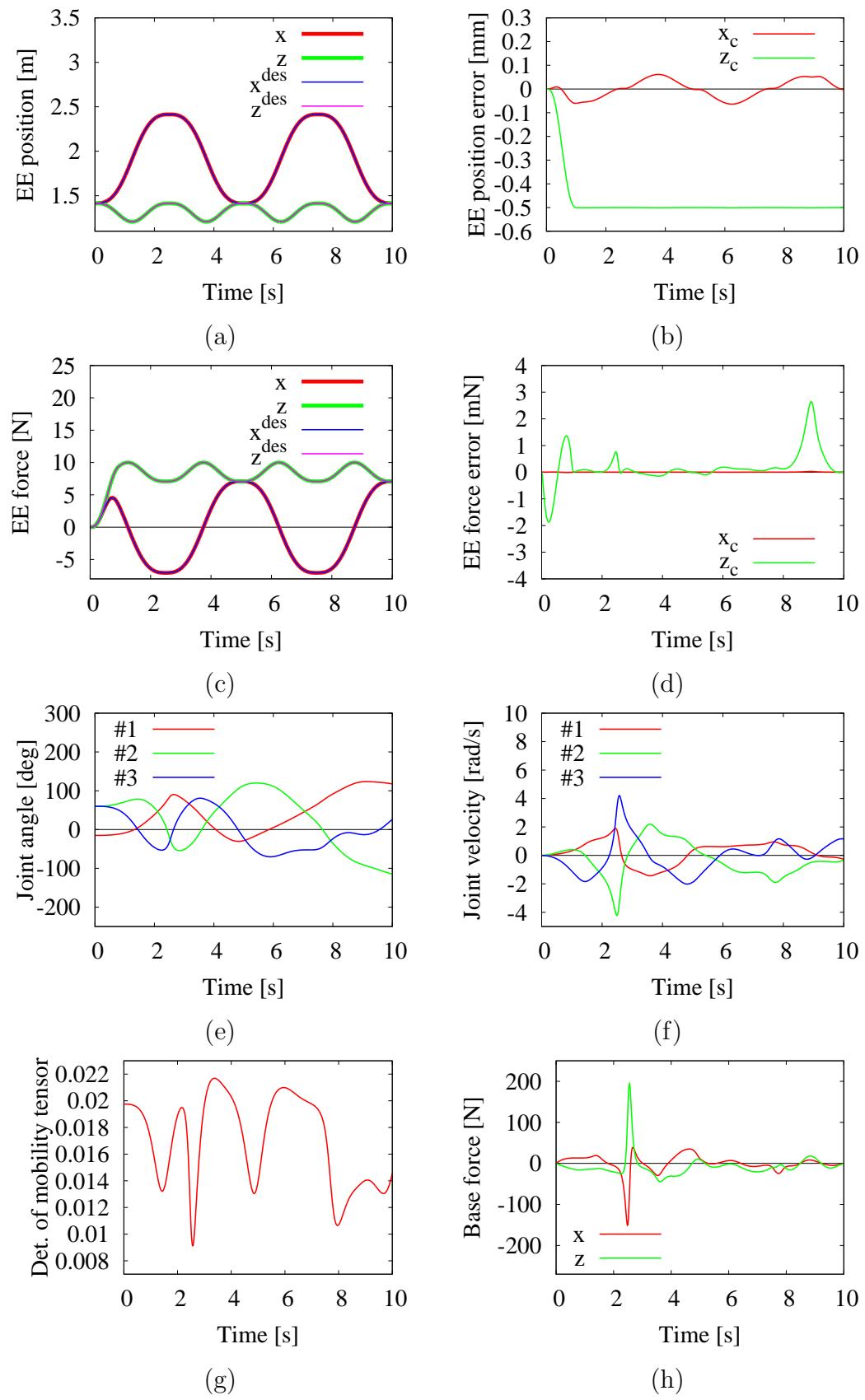


Fig. 5.5: OSF-HC simulation results without self motion.

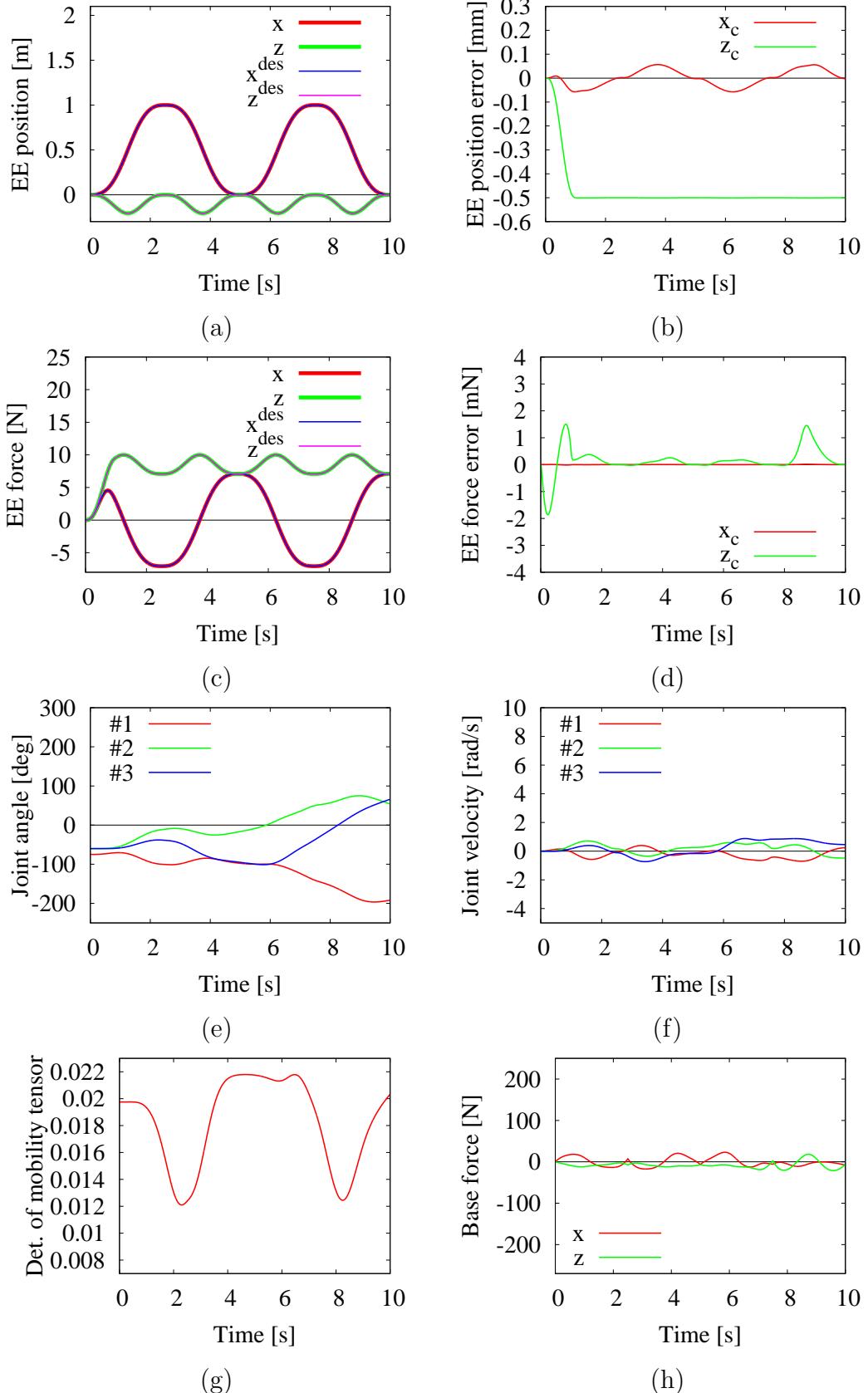


Fig. 5.6: RNS-HC simulation results without self motion.

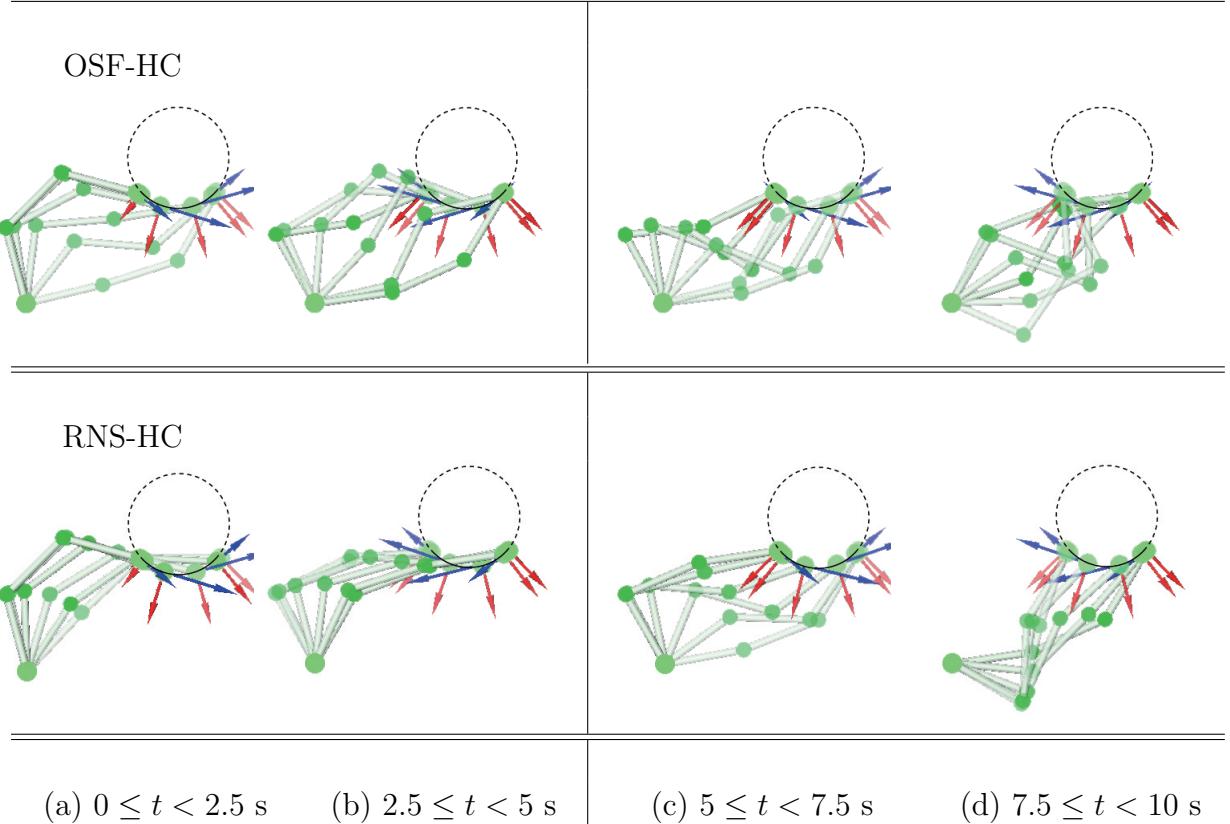


Fig. 5.7: Animation of the simulation via: (upper) OSF-HC with self motion and (bottom) RNS-HC with self motion. The blue and red arrows define the desired motion and force vectors, respectively. Hence, the blue arrow is orthogonal to the red one. The animation is separated into 4 phases. Phase 1 is from 0 s to 2.5 s, Phase 2 is from 2.5 s to 5 s, Phase 3 is from 5 s to 7.5 s, Phase 4 is from 7.5 s to 10 s.

では  $\det(\mathbf{J}_{Bl} \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{J}_{Bl}^T)$  が 0 付近においても関節角速度やベースの力に急激な変化は見られず、最高関節角速度は 0.730 rad/s に抑えられている。

条件 2 の OSF-HC の結果を Fig. 5.8 に示し、RNS-HC の結果を Fig. 5.9 に示す。また、その際のマニピュレータの動きを Fig. 5.7 に示す。

Fig. 5.8, 5.8 (e) と Fig. 5.7 から OSF-HC と RNS-HC で違う動作をしていることが分かる。また、Fig. 5.5, 5.5 (a)~(d) と Fig. 5.8, 5.8 (a)~(d) を比較すると先端のバネとダンパの影響により、多少の変化はあるが変化が非常に小さいため、正しく零空間が正しく定義されており、冗長自由度を制御しても先端のモーション・フォース制御には影響していないことが分かる。また、(f)~(h) は冗長自由度を制御しないときと同様、OSF-HC では  $\det(\mathbf{J}_{Bl} \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{J}_{Bl}^T)$  が 0 付近において急激な関節角速度が発生しておりその際に急激なベース

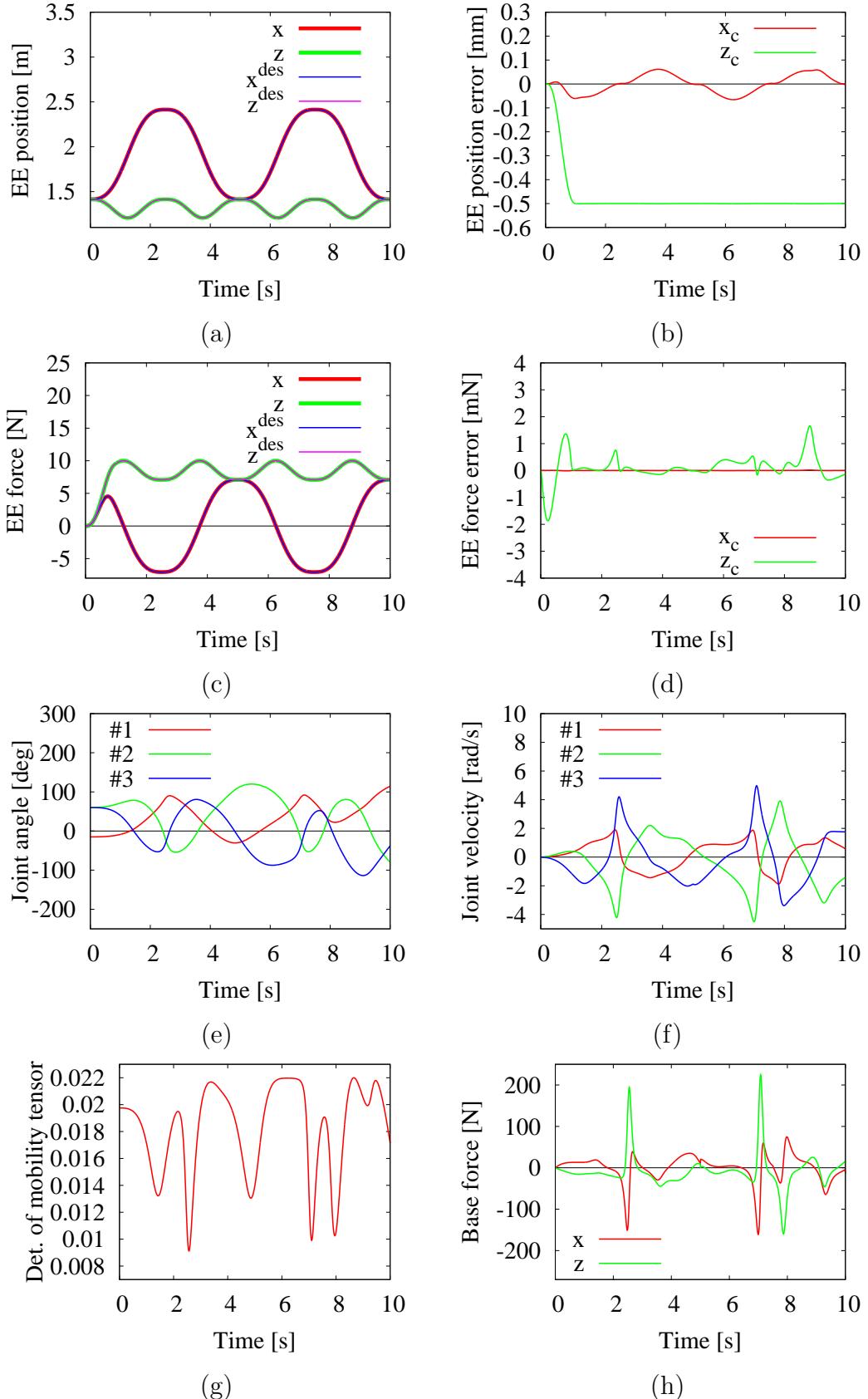


Fig. 5.8: OSF-HC simulation results with self motion.

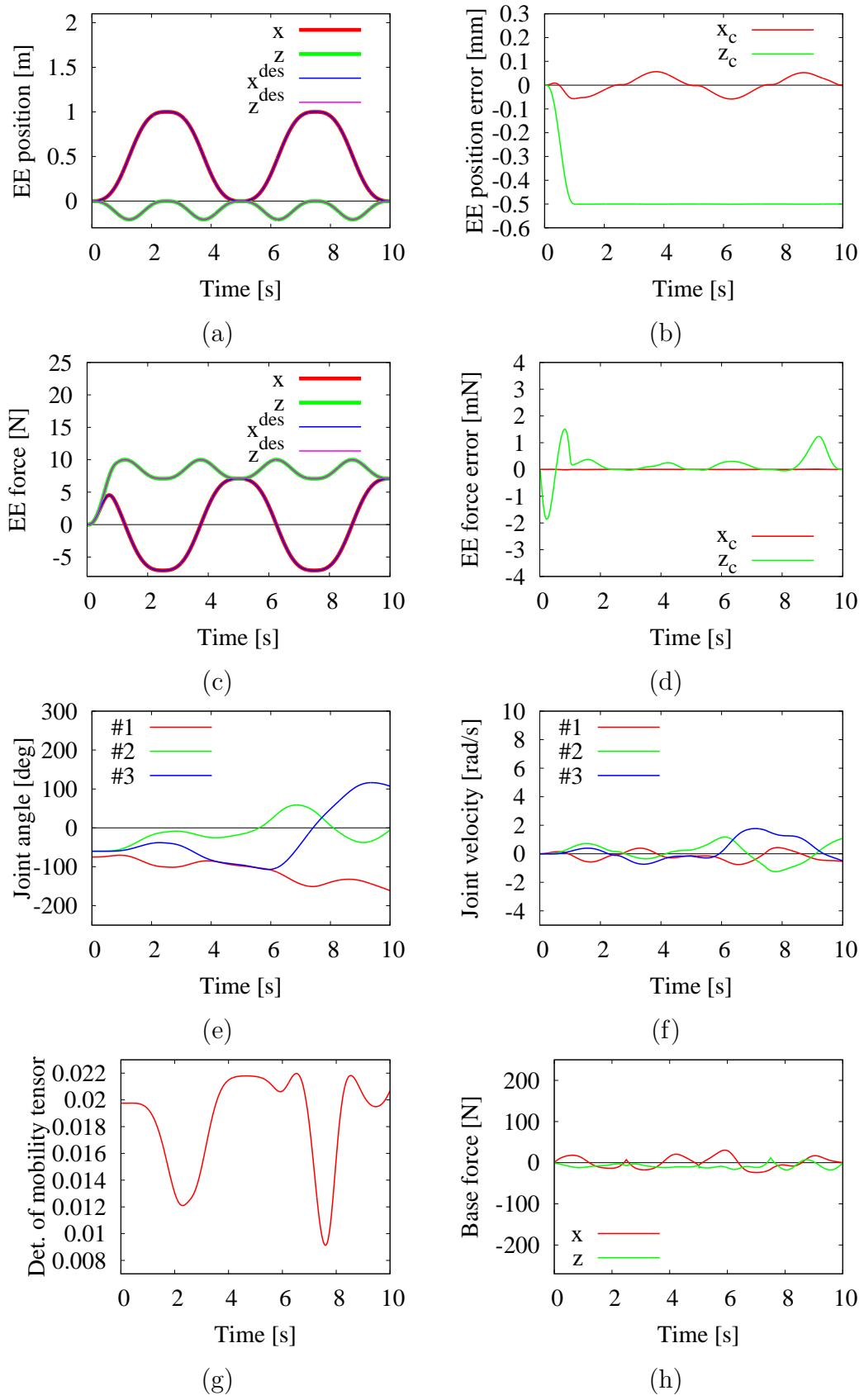


Fig. 5.9: RNS-HC simulation results with self motion.

の力が発生していることが分かるが，RNS-HCでは $\det(\mathbf{J}_{Bl}\mathbf{M}_l^{-1}\mathbf{J}_{Bl}^T)$ が0付近においても関節角速度やベースの力に急激な変化は見られず，安定した制御が行えている。

### 5.1.3 冗長性の利用

前節では冗長マニピュレータにおいてもRNS-HCが正しくモーション・フォース制御が行えることを確認した。また，正しく零空間が定義されており冗長自由度を制御しても先端の制御に影響を与えないことが分かった。本節では，前章で述べたベース部の力を冗長自由度を用いて制限する反動制限制御を行い，正しく制御することができるか確認する。

基本的なシミュレーション条件は前節のRNS-HCの条件1と同様とし， $\tau_{RNS}$ のみEq. (4.18)を用いて制御した。ただし，制御するベース部の力は $x$ 軸方向のみとし， $f_B^{max} = 15\text{ N}$ ， $f_B^{min} = -15\text{ N}$ とした。シミュレーション結果をFig. 5.10に示す。ただし，図中，(a)は先端部の位置と目標値，(b)は先端部の位置の誤差，(c)は先端部の力と目標値，(d)は先端部の力の誤差，(e)は関節角度，(f)は関節角速度，(g)は前節のRNS-HCの条件1の際のベース部の力，(h)はベース部の力を示す。

Fig. 5.6, 5.10 (e)よりマニピュレータの動作は反動制限制御を行うことで変化していることが分かる。また，(a)～(d)からモーション・フォース制御は正しく行えていることが分かる。Fig. 5.10 (g), (h)から反動制限制御を行わないときは，15 N以上発生していたベース部 $x$ 方向の力が，反動制限制御を用いることで15 N以下に制限されていることが分かる。ただし，現在行っている反動制限制御は切り替え制御なので振動が発生てしまっている。この問題に関してはEq. (4.19)を変更することで解決する可能性がある。

## 5.2 考察

反動零空間法を用いた新しいモーション・フォース制御(RNS-HC)を提案し，Khatibらが用いているモーション・フォース制御(OSF-HC)と比較した。結果，RNS-HCは非冗長マニピュレータにおいてはOSF-HCと同等の制御が行え，冗長マニピュレータにおいては最高関節角速度がOSF-HCよりも抑えられ， $\det(\mathbf{J}_{Bl}\mathbf{M}_l^{-1}\mathbf{J}_{Bl}^T)$ が0付近においても安定的に制御できること

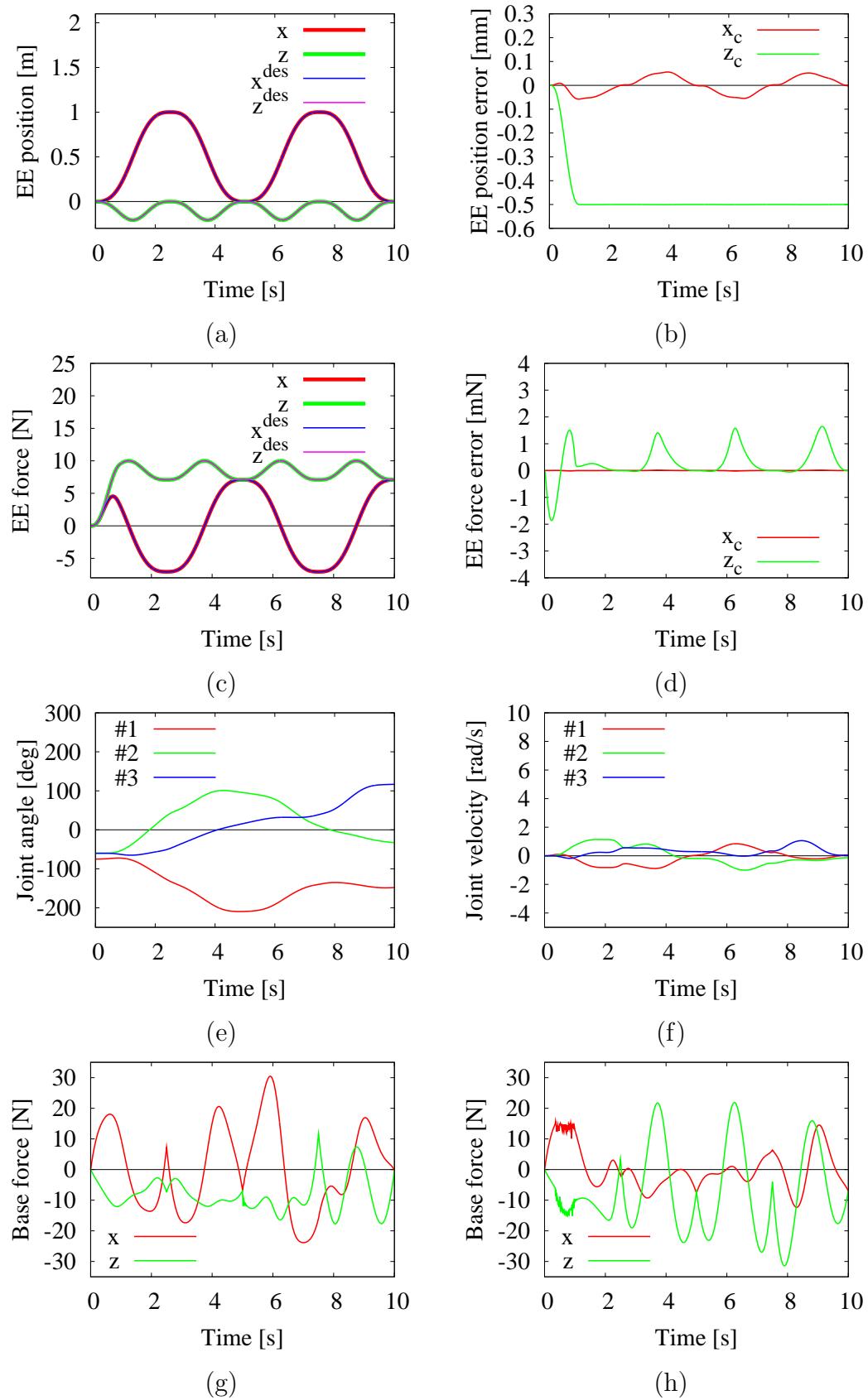


Fig. 5.10: RNS-HC simulation results with reaction limit control.

から、より優れた制御だと言える。しかし、RNSを用いた制御ではダイナミック特異点[21]が存在するため、今後対策が求められる。さらに、ベース部に発生する力を冗長自由度を用いて制御できることを示し、シミュレーションを用いて確認した。



# 第6章 結論および今後の研究について

## 6.1 結論

本論文では、多関節マニピュレータの安定的な制御法の開発を目的とし、先端が対象物と非接触時に用いる、運動学による制御ではNMを用いた経路追従制御の比較検証を行い、他の経路追従制御と比較することで、NMは他の制御に比べてよりスムーズで安定した制御方法だと示した。また、先端が対象物と接触時に用いる、動力学による力制御では反動零空間法を用いた新たなモーション・フォース制御を提案し、OSFに基づいたモーション・フォース制御と比較することで、有効性を示した。さらに、OSFに基づいた制御では制御が不安定になる点も、提案した制御法では安定的に制御できることを示し、冗長性によるベース部への反力を制御する方法を述べ、シミュレーションにより証明した。

以下で各章ごとの要点をまとめる。

### 第2章 Natural motionを用いた経路追従制御

マニピュレータの運動学、逆運動学について述べ、特異点問題について説明した。また、列拡張ヤコビ行列を用いた制御法について述べ、NMとNSMの用い方や動力学的影響について説明した。さらに、他の経路追従制御についても説明した。

### 第3章 Natural motionの比較解析

第2章で述べた、NMとNSMの比較解析を行った。NMでは直線経路、円経路、螺旋経路においてシミュレーションと一部実験機を用い、他の経路追従制御と比較することでNMの性能と特性について明確にし、NMがスムーズで安定的な制御だと言うことを示した。また、NMSでは他のセルフモーションと比較することで、冗長性を利用したセルフモーションにおいても経路追従制御時と同じ性質を持っていることを示した。

#### 第4章 反動零空間法に基づくモーション・フォース制御の提案

OSFに基づいたモーション・フォース制御の説明と、RNSを用いた新たなモーション・フォース制御について提案した。さらに、冗長性の制御によるベース部反力への反動制限御を示し、冗長性の活用方法の例も示した。

#### 第5章 反動零空間法に基づくモーション・フォース制御の比較解析

第4章で述べた、RNSを用いた新たなモーション・フォース制御を動力学シミュレータを用いて解析した。平面非冗長マニピュレータと冗長マニピュレータを用い、OSFを用いた制御と比較することで、提案した制御方法の有効性を証明した。さらに、冗長性の制御によるベース部反力への反動制限御が有効なことも確認した。

## 6.2 今後の研究について

本研究の今後の課題を述べる。

1. NMは現在非冗長マニピュレータの経路追従制御と冗長マニピュレータのセルフモーションに用いられているが、冗長マニピュレータの先端制御には用いられていない。これは第2章で述べたnatural parameterが曲線のパラメータとして定義されているためである。関節空間の冗長マニピュレータの軌道は一つの曲線ではなく、曲面として描かれるため、その範囲の中からnatural parameterの概念に則った、軌道を選定しなければならない。そのため新たなパラメータの設定方法が必要となる。
2. RNSを用いたモーション・フォース制御法は動力学シミュレーションによる確認は行えたが、フィードバック制御を用いる閉ループシステムのため制御法の安定性の解析をする必要がある。また、現在先端を点として扱っており、マニピュレータ自身の対象物などへの接触を考慮していない。そのため実用化を目指すにはマニピュレータ自身の接触も考慮する必要がある。さらに、シミュレーションも二次元平面モデルしか扱っていないため、三次元モデルにおいても検証が必要である。最終的には、RNSを用いたモーション・フォース制御法はシミュレーションによる検証しか行っておらず、実験機への適応が必要

である。そのためには、なるべく正確な実験機のパラメータを求め、正確な動力学モデルを作る必要がある。



## 謝辞

本研究は，2010年4月より2012年1月の期間に東京都市大学大学院工学研究科機会システム工学専攻ロボティックライフサポート研究室において行われました。

本研究を行うにあたり，指導教官である金宮好和教授ならびに佐藤大祐講師より，的確なご指導をいただきました。また，国内での学会発表をはじめ，様々な体験をさせていただきました。この場を借りて，謹んで感謝の意を表します。

また，貴重なご意見をいただきました，野原勉教授に対し深謝致します。

研究生活では，同期である岩渕羽純さん，佐藤冬樹君，高橋準君，西井達哉君，羽鳥裕樹君には，様々な面において支えていただき，研究の他に関しても相談に乗ってもらいました。五人のおかげで，公私ともに充実した研究生活を送ることができました。心から感謝いたします。

また，本研究を行うにあたり様々な面でお世話になりました，研究室の博士，修士，学部の皆様に感謝いたします。

最後になりましたが，研究生活を暖かく見守って，支えてくれた両親にこの場を借りて心から感謝いたします。

平成24年2月29日  
半田陽一



## 参考文献

- [1] K. G. Shin and N. D. McKay, “Minimum-time control of robotic manipulator with geometric path constraints,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-30, no. 6, pp. 531–541, June, 1985.
- [2] J. E. Bobrow, S. Dubowski and J. S. Gibson, “Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths,” *Int. J. of Robotics Research*, vol. 4, no. 3, pp. 3–17, 1985.
- [3] F. Pfeiffer and R. Johanni, “A concept for manipulator trajectory planning,” *IEEE J. of Robotics and Automation*, vol. RA-3, no. 2, pp. 115–123, 1987.
- [4] J. M. Hollerbach, “Dynamic scaling of manipulator trajectories,” *Trans. ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 106, pp. 102–106, March, 1984.
- [5] H. Arai, K. Tanie, and S. Tachi, “Path tracking control of a manipulator considering torque saturation,” *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 41, no. 1, pp. 25–31, Feb, 1994.
- [6] O. Dahl and L. Nielsen, “Torque-limited path following by on-line trajectory time scaling,” *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 6, no. 5, pp. 554–561, 1994.
- [7] D. N. Nenchev, “Natural motion and singularity-consistent inversion of robot manipulators,” in *Advances in Robot Control*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 9–33, 2007.

- [8] A. Liegeois, “Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms,” *IEEE Trans. Sys. Man and Cybern.*, vol. SMC-7, pp. 868–871, 1977.
- [9] Y. Nakamura, H. Hanafusa and T. Yoshikawa, “Task-priority based redundancy control of robot manipulators,” *Int. J. of Robotics Research*, vol. 16, no. 2, pp. 3–15, 1987.
- [10] K. Kazerounian and Z. Wang, “Global versus local optimization in redundancy resolution of robotic manipulators,” *Int. J. of Robotics Research*, vol. 7, no. 5, pp. 3–12, 1988.
- [11] S. Ma and D. N. Nenchev, “Local torque minimization for redundant manipulators: a correct formulation,” *Robotica*, vol. 14, No. 2, pp. 235–239, 1996.
- [12] 菱沼利光 , D. N. ネンシェフ：“特異点適合法に基づいた柔軟ベース上冗長マニピュレータの振動抑制制御”, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会'06 講演論文集, 1A1B07, 2006.
- [13] 菱沼利光 , D. N. ネンシェフ：“特異点適合法に基づいた柔軟ベース上冗長マニピュレータの振動抑制制御”, 第7回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会 , 2C1-3, 2006.
- [14] R. M. Murray, Z. Li and S. S. Sastry: A mathematical introduction to robotic manipulator. pp. 282–290, CRC press, 1994.
- [15] M. W. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasagar, “Force control” in *Robot Modeling and Control*, John Wiley and Sons, Inc., 2005, ch. 9, pp. 319–338.
- [16] L. Villani and J. De Schutter, “Force Control,” in *Springer Handbook of Robotics*, B. Siciliano and O. Khatib, Eds. New York: Springer-Verlag, 2008, ch. 7, pp. 161–185.
- [17] O. Khatib, “A unified approach for motion and force control of robot manipulators: the operational space formulation,” *Int. J. of Robotics and Automation*, vol. RA-3, no. 1, pp. 43–53, 1987.
- [18] O. Khatib, “Inertial properties in robotic manipulation: an object-level framework,” *Int. J. Robotics Research*, vol. 14, no. 1, pp. 19–36, Feb. 1995.

- [19] D. N. Nenchev, K. Yoshida and Y. Umetani, "Introduction of redundant arms for manipulation in space," in *Proc. IEEE Int. Workshop Intell. Robot. Systems.*, Tokyo, Japan, Oct. 31–Nov. 2, 1988, pp. 679–684.
- [20] D. N. Nenchev, Y. Tsumaki, and M. Uchiyama, "Singularity-consistent parameterization of robot motion and control," *Int. J. of Robotics Research*, vol. 19, no. 2, pp. 159–182, 2000.
- [21] S. Dubowsky and E. Papadopoulos, "On the Dynamic Singularities in the Control of Free-Floating Space Manipulators," in *Proc. ASME Winter Annual Meeting*, San Francisco, Dec. 1989.
- [22] D. N. Nenchev and K. Yoshida, "Impact analysis and post-impact motion control issues of a free-floating space robot subject to a force impulse," *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 15, no. 3, Jun. 1999, pp. 548–557.
- [23] D. N. Nenchev, K. Yoshida, P. Vichitkulsawat and M. Uchiyama, "Reaction null-space control of flexible structure mounted manipulator systems," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 15, no. 6, pp. 1011–1023, Dec. 1999.
- [24] D. N. Nenchev and A. Nishio, "Ankle and hip strategies for balance recovery of a biped subjected to an impact," *Robotica*, vol. 26, pp. 643–653, June 2008.
- [25] Y. Kanamiya, "Natural self motion of a robotics limb with single degree-of-redundancy," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Kobe, Japan, May. 12-17, pp. 2925–2930, 2009.
- [26] D. N. Nenchev and M. Uchiyama, "Natural motion analysis based on the singularity-consistent parameterization," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Albuquerque, USA, April 20–25, pp. 2683–2688, 1997.
- [27] J. Baillieul, "Kinematic programming alternatives for redundant manipulators," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, St. Louis, USA, Mar. 25–28 pp. 722–728, 1985.
- [28] (2011, December 20) 三菱重工 | 可搬式汎用知能アーム PA10 [Online]. Available: <http://www.mhi.co.jp/products/pdf/pa10manope400.pdf>

- [29] 半田陽一, 金宮好和, 佐藤大祐, “Natural motionを用いた軌道追従制御の有用性”, 日本機械学会ロボティクス, メカトロニクス講演会, 2010.
- [30] 宋薇, 見浪護, 青柳誠司, “クオータニオンを用いたフィードフォワードオンラインポーズ遺伝的認識法”, 日本ロボット学会誌, pp. 55–64, 2010.
- [31] D. N. Nenchev, Y. Handa and D. Sato, “Natural motion: efficient path tracking with robotic limbs,” in *Proc. 2010 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Taipei, Taiwan, pp. 18–22.
- [32] 半田陽一, 原直行, 金宮好和, “反動零空間法に基づく冗長マニピュレータ先端の位置と力のハイブリッド制御法の提案”, 第29回日本ロボット学会学術講演会, 2011.
- [33] D. N. Nenchev, K. Yoshida and M. Uchiyama, “Reaction null-space based control of flexible structure mounted manipulator systems,” in *Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control*, Kobe, Japan, Dec. 11–13, 1996, pp. 4118–4123.
- [34] 吉田浩治, 池田展也, 前田浩一, “6自由度産業用マニピュレータに対するパラメータ同定法の実証的研究”, 日本ロボット学会誌, pp. 564–573, 1993.
- [35] 小林尚登ほか, “ロボット制御の実際”, コロナ社, 1997, pp. 62–85.
- [36] 前田浩一, “ロボットアームの動的モデルと同定”, 日本ロボット学会誌, pp. 95–100, 1989.
- [37] 坂本武志, 諸富徳行, 峯松睦雄, 平井慎一, “6自由度マニピュレータの混合同定法によるモデルパラメータの推定”, 第16回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 463–464, 1998.
- [38] 半田陽一: ”7自由度冗長マニピュレータの運動学制御と動力学制御への取り組み”, 卒業論文, 武藏工業大学工学部機械システム工学科, 2010 .
- [39] N. A. Bompos, P. K. Artermiadis, A. S. Oikonomopoulos and K. J. Kyriakopoulos, “Modeling, full identification and control of the mitsubishi PA-10 robot arm,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Advanced intelligent mechatronics*, pp. 1–6, 2007.

- [40] C. W. Kennedy and J. P. Desai, "Modeling and control of the Mitsubishi PA-10 robot arm harmonic drive system," *IEEE Trans. Mechatronics*, vol 10, no. 3, pp. 263-274, June 2005.



## 研究成果

- [1] 半田陽一，金宮好和，佐藤大祐，“Natural motion を用いた軌道追従制御の有用性”，第22回日本機械学会ロボティクス,メカトロニクス講演会，2010.
- [2] D. N. Nenchev, Y. Handa and D. Sato, “Natural motion: efficient path tracking with robotic limbs,” in *Proc. 2010 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Taipei, Taiwan, pp. 18–22.
- [3] 半田陽一，原直行，金宮好和，“反動零空間法に基づく冗長マニピュレータ先端の位置と力のハイブリッド制御法の提案”，第29回日本ロボット学会学術講演会，2011.
- [4] N. Hara, Y. Handa and D. N. Nenchev, “End-link dynamics of redundant robotic limbs: the reaction null space approach,” in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Saint Paul, Minnesota, 2012, to be published.



# 付録A 関節空間の曲率の求め方

## A.1 概要

マニピュレータの制御を行ったときに現れる関節空間の曲線の曲率の求め方について論じる。

## A.2 一般的な曲線の曲率の求め方

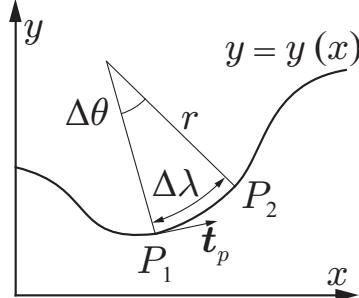


Fig. A.1: Image of curve.

曲線上の点  $P$  を  $q$  とし、その角度までの曲線の長さは弧長  $\lambda$  とすると、点  $P$  を  $\lambda$  の関数  $q(\lambda)$  として表すことが出来る。そのとき点  $P$  での接線方向の単位ベクトル  $t_P$  は以下のように求まる。

$$t_p = t(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{q}(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \mathbf{q}(\lambda) \quad (\text{A.1})$$

また， $t$ も $\lambda$ の関数で表せるので，曲率 $\kappa(\lambda)$ は以下の式で求まる．

$$\begin{aligned}\kappa(\lambda) &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{t}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{t}(\lambda)}{\Delta\lambda} \right\| \\ &= \left\| \frac{d}{d\lambda} \mathbf{t}(\lambda) \right\| = \left\| \frac{d^2}{d\lambda^2} \mathbf{q}(\lambda) \right\| = \frac{1}{r(\lambda)}\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

$r(\lambda)$ は曲率半径である．

### A.3 パラメータ曲線の曲率の求め方

動作物体の曲線を考えた場合，曲線は一般的に時間の関数 $t$ で変化する．このようにパラメータ（この場合は $t$ ）により変化する曲線をパラメータ曲線と呼ぶ．パラメータ曲線の場合，単位時間あたりの弧長 $\lambda$ ，単位接線ベクトル $\mathbf{t}$ は以下のように求まる．

$$\Delta\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)\| = \|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_P = \mathbf{t}(t) &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{q}(\lambda)}{\Delta\lambda} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\|\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)\|} = \frac{\dot{\mathbf{q}}(t)}{\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|}\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

また，2Rマニピュレータのときの曲率 $\kappa$ と曲率半径 $R$ は以下のように表す．

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{t}(t + \Delta t) - \mathbf{t}(t)}{\|\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)\|} \right\| = \frac{\dot{q}_1 \ddot{q}_2 - \dot{q}_2 \ddot{q}_1}{(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r} \quad (\text{A.5})$$

## 付録B 動的パラメータの同定

### B.1 概要

マニピュレータの運動のシミュレーションを行ったり、高速に高精度で制御を行うためには、高精度な動的モデルが必要になる。動的モデルは複数のパラメータで構成されており、仕様などからも判断することができるが、値が確かではなく摩擦係数などを知ることは出来ない。そこで、マニピュレータの動作結果からパラメータを推定するパラメータ同定がある。本章では、本研究で行うパラメータ同定の理論の説明と本研究で扱うマニピュレータの仕様を説明し、実際に推定した結果を示す。構成は、最初に理論の説明を行い、2リンクモデルの同定、7自由度マニピュレータを用いた同定実験とする。

### B.2 パラメータの同定法

一般的にロボットアームは剛体リンクの開ループ運動学チェーンでモデル化され、各関節に独立な駆動系により、力やトルクを供給している。このようなロボットアームの動的パラメータは以下のパラメータが求まると決定できる[34]。

- 機構パラメータ

リンク長、隣り合う関節のねじれ角、関節の種類

- 慣性パラメータ

質量、重心位置、慣性テンソル

- 駆動系パラメータ

粘性摩擦係数、クーロン摩擦、モータイナーシャ

機構パラメータは設計仕様などにより簡単に得ることができるが、その他のパラメータは容易には得ることができない。そこで最も現実的な方法として、ロボットアームに適当な運動をさせ、そこから得られた運動データ（関節角度、関節角速度、関節角加速度、関節トルク）を使い他のパラメータを同定する方法がある[35]。しかし、慣性パラメータは1リンクにつき10個存在し、 $n$ 自由度では $10n$ 個のパラメータを同定しなければならず、運動データからすべての慣性パラメータを推定することは不可能である[36]。そこで、動的モデルを決定するための最小個数のパラメータ（基底パラメータ）を求ることにより、近似的に決定することができる。

一般的な $n$ 自由度マニピュレータの動力学モデルは以下のようになる。

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + G(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.1})$$

ただし、 $\boldsymbol{q} \in \Re^n$  は関節角度、 $\boldsymbol{\tau} \in \Re^n$  は関節のトルク、 $M(\boldsymbol{q}) \in \Re^{n \times n}$  は慣性行列、 $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \in \Re^n$  はコリオリ遠心力項、 $G(\boldsymbol{q}) \in \Re^n$  は重力項、 $\boldsymbol{F} \in \Re^n$  は摩擦項を表している。それぞれの関節の摩擦モデルは様々な表現方法がある。例を以下に示す。

$$F_i = f_1 \dot{q}_i + f_2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_i) \quad (\text{B.2})$$

$$F_i = f_1 \dot{q}_i + f_2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_i) - f_3 \operatorname{sgn}(\dot{q}_i) e^{-\frac{|\dot{q}_i|}{f_4}} - f_5 \operatorname{sgn}(\dot{q}_i) e^{-\frac{|1|}{f_6}} \quad (\text{B.3})$$

Eq. (B.2) は静止摩擦係数と動摩擦係数を用いたモデルであり、Eq. (B.3) はストライベックモデルと言われるモデルである。ただし、 $F_i$  は関節  $i$  の摩擦項を表しており、 $f_1$  は粘性摩擦係数、 $f_2$  は動摩擦係数である。

パラメータの同定法には、多自由度マニピュレータを1軸毎（または2軸）に簡単な試験運動を順次行っていく、同定をした値から代入して次の関節を同定していく逐次同定法と、マニピュレータの全関節を同時に運動させ、基底パラメータを一度にすべて同定する同時同定法がある。また、それらの欠点を補った混合同定法がある。

### B.3 2リンクモデル

以下にそれぞれの方法の例として、Fig. B.1 の2リンクモデルについて考えていく。ただし、重力の方向は $-Z$ 方向とし、 $\hat{*}$ は $*$ の推定値とする。また、今回摩擦項  $\boldsymbol{F}$  は Eq. (B.2) の摩擦モデルを用い、以下のように表した。

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}(\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (\text{B.4})$$

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は粘性摩擦行列 ,  $D(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  は動摩擦項 . その際 , それぞれの項は以下のように表される .

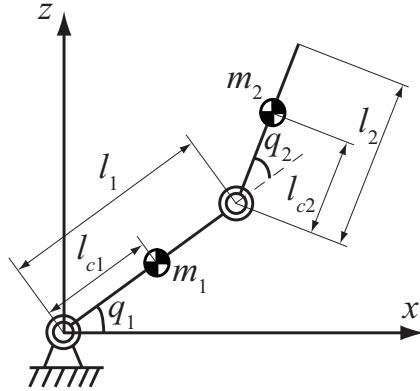


Fig. B.1: 2 DOF manipulator model.

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_1 + 2R \cos(q_2) & M_2 + R \cos(q_2) \\ M_2 + R \cos(q_2) & M_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2R\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(q_2) - R\dot{q}_2^2 \sin(q_2) \\ R\dot{q}_1^2 \sin(q_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} G_1 g \cos(q_1) + G_2 g \cos(q_1 + q_2) \\ G_2 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$D(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} D_1 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) \\ D_2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$M_1 = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2) \quad (\text{B.10})$$

$$M_2 = I_2 + m_2 l_{c2}^2 \quad (\text{B.11})$$

$$R = m_2 l_1 l_{c2} \quad (\text{B.12})$$

$$G_1 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \quad (\text{B.13})$$

$$G_2 = m_2 l_{c2} \quad (\text{B.14})$$

ただし,  $I_i$  はリンク  $i$  の重心まわりの慣性モーメント,  $g$  は重力加速度,  $B_i$ ,  $D_i$  はそれぞれリンク  $i$  の粘性摩擦係数と動摩擦係数である。Eq. (B.1)~(B.14) から基底パラメータ  $\rho$  は以下のようになる。

$$\rho = [M_1, R, M_2, G_1, G_2, B_1, B_2, D_1, D_2]^T \quad (\text{B.15})$$

### B.3.1 逐次同定法

2リンクモデルを逐次同定法で同定するには3回の実験が必要となる。まず1回目は,  $\rho_2 = [M_2, G_2, B_2, D_2]$  の同定を行う。Fig. B.2 のように第1関節を固定し, 第2関節を単独で運動させる。

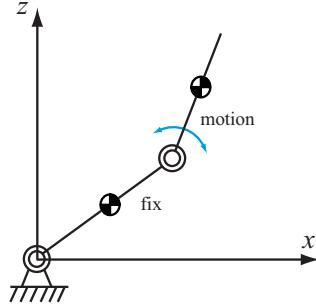


Fig. B.2: Steps 1.

その時の運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_2(t) &= M_2 \ddot{q}_2(t) + G_2 g \cos(q_1(t) + q_2(t)) + B_2 \dot{q}_2(t) + D_2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_2(t)) \quad (\text{B.16}) \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_2(t) & g \cos(q_1(t) + q_2(t)) & \dot{q}_2(t) & \operatorname{sgn}(\dot{q}_2(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ G_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\rho}_2 \end{aligned}$$

ここで, 時刻  $t = t_1 \dots t_N$  における  $q_2(t)$ ,  $\dot{q}_2(t)$ ,  $\ddot{q}_2(t)$ ,  $\tau_2(t)$  がすべて入手できれば Eq. (B.16) より以下の式を得る。

$$\boldsymbol{\tau}_{2N} = \mathbf{Y}_{2N} \boldsymbol{\rho}_2 \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{Y}_{2N} = [\mathbf{Y}(t_1), \dots, \mathbf{Y}(t_N)]^T \quad (\text{B.18})$$

$$\boldsymbol{\tau}_{2N} = [\tau_2(t_1), \dots, \tau_2(t_N)]^T \quad (\text{B.19})$$

ここから、 $\rho_2$  の最小2乗法推定  $\hat{\rho}_2$  は以下のようになる。

$$\hat{\rho}_2 = (\mathbf{Y}_{2N}^T \mathbf{Y}_{2N})^{-1} \mathbf{Y}_{2N}^T \boldsymbol{\tau}_{2N} \quad (\text{B.20})$$

2回目に Fig. B.2 のように第2関節を 0 deg に固定し、第1関節を単独で運動させ、 $\rho_1 = [M_1 + 2R, G_1, G_2, B_1, D_1]$  の同定を行う。

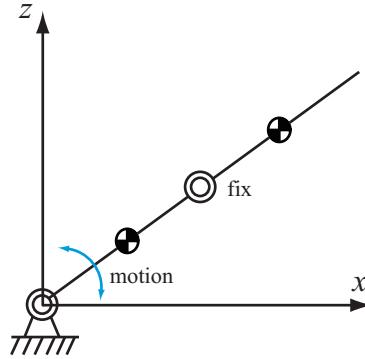


Fig. B.3: Steps 2.

その時の運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_1(t) &= (M_1 + 2R)\ddot{q}_1(t) + G_1g \cos(q_1(t)) + G_2g \cos(q_1(t) + q_2(t)) + B_1\dot{q}_1(t) + D_1\text{sgn}(\dot{q}_1(t)) \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) & g \cos(q_1(t)) & g \cos(q_1(t) + q_2(t)) & \dot{q}_1(t) & \text{sgn}(\dot{q}_1(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 + 2R \\ G_1 \\ G_2 \\ B_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Y}_{1a}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\rho}_{1a} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

ここで、時刻  $t = t_1 \dots t_N$  における  $q_1(t)$ ,  $\dot{q}_1(t)$ ,  $\ddot{q}_1(t)$ ,  $\tau_1(t)$  がすべて入手できれば Eq. (B.21) より以下の式を得る。

$$\boldsymbol{\tau}_{1N} = \mathbf{Y}_{1aN} \boldsymbol{\rho}_{1a} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{Y}_{1aN} = [\mathbf{Y}_{1a}(t_1), \dots, \mathbf{Y}_{1a}(t_N)]^T \quad (\text{B.23})$$

$$\boldsymbol{\tau}_{1N} = [\tau_1(t_1), \dots, \tau_1(t_N)]^T \quad (\text{B.24})$$

ここから、Eq. (B.20) と同様に  $\boldsymbol{\rho}_{1a}$  の最小2乗法推定  $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{1a}$  を求める。

3回目に Fig. B.4 のように第2関節を 90 deg に固定し、第1関節を単独で運動させ、 $\boldsymbol{\rho}_1 = [M_1, G_1, G_2, B_1, D_1]$  の同定を行う。

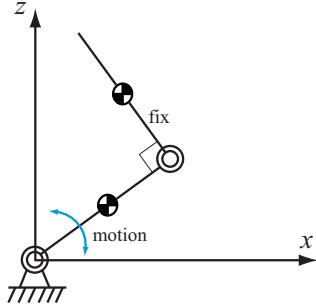


Fig. B.4: Steps 3.

その時の運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 \tau_1(t) &= M_1 \ddot{q}_1(t) + G_1 g \cos(q_1) + G_2 g \cos(q_1(t) + q_2(t)) + B_1 \dot{q}_1(t) + D_1 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1(t)) \\
 &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) & g \cos(q_1) & g \cos(q_1(t) + q_2(t)) & \dot{q}_1(t) & \operatorname{sgn}(\dot{q}_1(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ G_1 \\ G_2 \\ B_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{Y}_{1b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\rho}_{1b}
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

ここで、時刻  $t = t_1 \dots t_N$  における  $q_1(t)$ ,  $\dot{q}_1(t)$ ,  $\ddot{q}_1(t)$ ,  $\tau_1(t)$  がすべて入手できれば Eq. (B.25) より以下の式を得る。

$$\boldsymbol{\tau}_{1N} = \mathbf{Y}_{1bN} \boldsymbol{\rho}_{1b} \tag{B.26}$$

$$\mathbf{Y}_{1bN} = [\mathbf{Y}_{1b}(t_1), \dots, \mathbf{Y}_{1b}(t_N)]^T \tag{B.27}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{1N} = [\tau_1(t_1), \dots, \tau_1(t_N)]^T \tag{B.28}$$

ここから、Eq. (B.20) と同様に  $\boldsymbol{\rho}_{1b}$  の最小2乗法推定  $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{1b}$  を求める。

2回目の最小2乗推定値  $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{1a}$  と3回目の最小2乗推定値  $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{1b}$  より  $\hat{R}$  を推定する。

$$\hat{R} = \frac{(\hat{M}_2 + 2\hat{R}) - \hat{M}_2}{2} \tag{B.29}$$

以上 の方法より、逐次同定法で基底パラメータをすべて同定できる。

逐次同定法は、長所として各実験毎の試験運動が単純で、計算が容易である。しかし、自由度が多くなるほど同定誤差の蓄積が起こりやすい。また、多くの試験運動が必要と言う欠点がある。

### B.3.2 同時同定法

同時同定法では、すべての関節を1度にすべて動かし、逐次同定法とは違い1回の実験ですべての基底パラメータを同定する。この時運動方程式は以下のようになる。

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{q}) + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{q}}) = \mathbf{Y}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\rho} \quad (\text{B.30})$$

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \cos(q_2)(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - \sin(q_2)(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2) & \ddot{q}_2 \\ 0 & \cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ g\cos(q_1) & g\cos(q_1 + q_2) & \dot{q}_1 & 0 & \text{sgn}(\dot{q}_1) & 0 \\ 0 & g\cos(q_1 + q_2) & 0 & \dot{q}_2 & 0 & \text{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\rho} = [M_1, R, M_2, G_1, G_2, B_1, B_2, D_1, D_2]^T$$

時刻  $t = t_1, \dots, t_N$  における運動データ  $q_i(t)$ ,  $\dot{q}_i(t)$ ,  $\ddot{q}_i(t)$ ,  $\tau_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) がすべて測定できるとき、 $\boldsymbol{\rho}$  の最小2乗推定値  $\hat{\boldsymbol{\rho}}$  は以下のように求まる。

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N)^{-1} \mathbf{Y}_N^T \boldsymbol{\tau}_N \quad (\text{B.31})$$

$$\mathbf{Y}_N = [\mathbf{Y}(t_1), \dots, \mathbf{Y}(t_N)]^T \quad (\text{B.32})$$

$$\boldsymbol{\tau}_N = [\boldsymbol{\tau}(t_1), \dots, \boldsymbol{\tau}(t_N)]^T \quad (\text{B.33})$$

以上のことより、同時同定法で基底パラメータをすべて同定できる。

同時同定法の利点としては、試験運動が單一でよく、一度にすべてのパラメータを同定できるなどがあげられるが、自由度が多くなると取り扱うデータのサイズが大きくなることや、駆動系パラメータの推定の制度が悪いという欠点を持つ[37]。

### B.3.3 混合同定法

混合同定法は逐次同定法の蓄積誤差が残りやすい欠点と、同時同定法の駆動系パラメータの推定の制度が悪いという欠点をそれぞれ補った同定法である[37]。混合同定法は、まず各関節を関節毎に等速運動させ駆動機パラメータの推定を行う。その後、全関節を同時に動かし慣性パラメータの推定を行う。

等速運動時の運動データを $(q_c, \dot{q}_c, \ddot{q}_c, \tau_c)$ とすると、運動方程式は $\ddot{q}_c = 0$ がとなるので慣性項が0になり、1関節ずつ動作させるためコリオリ遠心力項も0となる。さらに動作軸を重力方向と垂直にすることで重力項の影響も0とする。よって Eq. (B.1) は以下のようになる。

$$\tau_c = B\dot{q}_c + D(\dot{q}_c) \quad (\text{B.34})$$

この運動方程式から先に推定粘性摩擦行列 $\hat{B}$ と推定動摩擦項 $\hat{D}$ を求める。

次に推定した摩擦項を除き、残りのパラメータを同時同定法により同定する。同時同定法時の運動データ $(q_a, \dot{q}_a, \ddot{q}_a, \tau_a)$ とすると以下のようになる。

$$M(q_a)\ddot{q}_a + C(q_a, \dot{q}_a) + G(q_a) = \tau - \hat{B}\dot{q}_a + \hat{D}(\dot{q}_a) = Y(q_a, \dot{q}_a, \ddot{q}_a)\rho \quad (\text{B.35})$$

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) =$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \cos(q_2)(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - \sin(q_2)(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2) & \ddot{q}_2 & g \cos(q_1) & g \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & \cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & 0 & g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\rho = [M_1, R, M_2, G_1, G_2]^T$$

時刻 $t = t_1, \dots, t_N$ における運動データがすべて測定できるとき、最小2乗法により残りのパラメータを推定することができる。この方法を用いることにより、同時同定法の駆動系パラメータ推定の制度が悪いという欠点と、逐次同定法の同定誤差の蓄積という欠点を補うことができる。

## B.4 7自由度可搬式汎用知能アーム PA-10

三菱重工業株式会社製可搬式汎用知能アーム PA-10 は、人間の腕と同じ7自由度を有するマニピュレータである。我々が生活している3次元空間で、マニピュレータを任意の位置姿勢にとらせるためには、位置に3自由度、姿勢に3自由度、合計6自由度必要である。これに対して PA-10 は7自由度持つており、1自由度冗長性を持っている。冗長性とは必要な自由度以上の自由度を有するときに生まれ、冗長マニピュレータは冗長性を持たないマニピュレータに比べ、作業の融通性やマニピュレータ自体の障害物回避能力が高く、汎用性の高いマニピュレータである。また、速度と電流値による制御が可能で、速度制御時の指令トルク値を得ることができる。

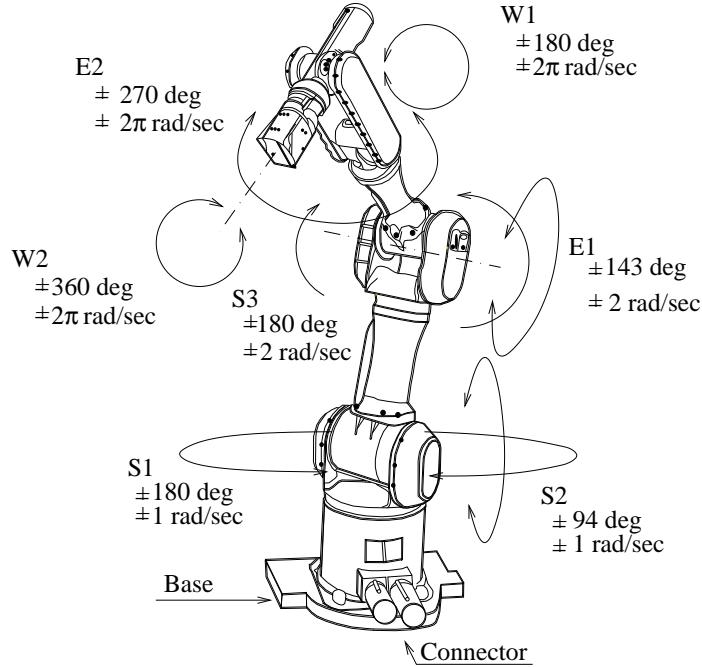


Fig. B.5: Image of PA-10 joint limits.

PA-10 の主な仕様を Table B.1 に示し , 全体図を Fig. B.5 に示す .

Table B.1: Specifications of PA-10.

Item	Specification
Name	PA-10
Format	7 DOF, vertical articulated robot
Protective structure	Control of dust, splash-proof construction
Jointed structure	S1-S2-S3-E1-E2-W1-W2 ( S:Shoulder E:Elbow W:Wrist )
Working area	Ref. Fig. B.5
Max synthesized velocity	1.55 m/s
Weight capacity	10 kgf
Drive system	AC servo motor with brushless resolver
Sensor	Output axis brushless resolver, micro switch
Weight	35 kgf

また , PA-10 の各軸の座標系を Fig. B.6 に示し , DH パラメータを Table B.2

に、各リンクの長さを Table B.3 に示す。ただし、DH パラメータは DH 法における座標系定義法に従い、関節  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ )、リンクのねじれ角  $\alpha_i$ 、共通垂線の長さ  $a_i$ 、リンク間距離  $d_i$ とした。

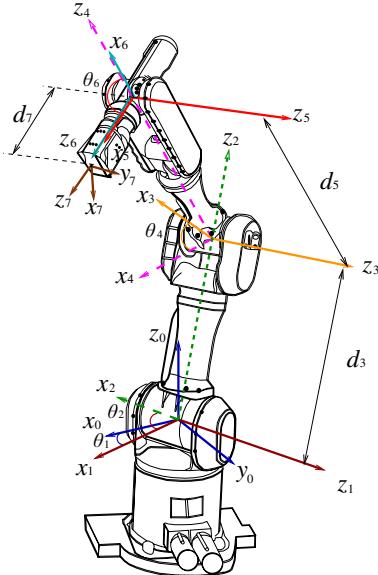


Fig. B.6: PA-10 coordinate frame.

Table B.2: DH parameters of PA-10.

$i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$q_i$
1	$\pi/2$	0	0	$q_1$
2	$-\pi/2$	0	0	$q_2$
3	$\pi/2$	0	$d_3$	$q_3$
4	$-\pi/2$	0	0	$q_4$
5	$\pi/2$	0	$d_5$	$q_5$
6	$-\pi/2$	0	0	$q_6$
7	0	0	$d_7$	$q_7$

Table B.3: Link parameters.

$i$	1	3	5	7
$d_i$ [m]	0.315	0.450	0.500	0.080

Table B.4 に各関節ごとの、モータ、減速機、ブレーキの詳細スペックを示す。

Table B.4: Specification of actuator.

		W <sub>2/1</sub> E <sub>2</sub>	E <sub>1</sub> S <sub>3</sub>	S <sub>2</sub> S <sub>1</sub>	remarks column
*Each axis performance		*****			
Load inertia	[kgm <sup>2</sup> ]	0.108	4.33	15.53	
Output torque	[Nm]	9.8	77.3	171.2	
Operation speed	[rad/sec]	2π	2.0	1.0	At the maximum load
*Deceleration machine		*****			
Deceleration ratio		50			
Rated torque	[Nm]	5.39	39.0	76.0	
Ratings input rotational speed	[rpm]	3500	2000	2000	
Max input rotational speed	[rpm]	5000	4000	4000	MAX
Average input rotational speed	[rpm]	3500	3500	3500	
Load inertia	[kgm <sup>2</sup> ]	0.108	4.33	15.53	
Output torque	[Nm]	9.8	77.3	171.2	
Operation speed	[rad/sec]	2π	2.0	1.0	At the maximum load
Lubrication method		Grease lubrication			Mobilgrease 28
Minimum gear rigidity	[Nm/rad]	4040	22572	50535	At the maximum load
Gear inertia	[kgm <sup>2</sup> ]	3.3e-7	0.36e-4	1.293e-4	
*Brake		*****			
Static friction torque	[Nm]	0.15	1.96	3.92	
Moment of inertia	[kgm <sup>2</sup> ]	2.7e-7	1.625e-5	2.5e-5	
Voltage	[V]	24			
Current	[A]	0.20	0.55	0.63	
*Motor		*****			
Rated torque	[Nm]	0.36	2.0	5.3	
Max Instantaneous torque	[Nm]	0.68	3.7	8.6	
Rated speed	[rpm]	3000	1000	500	
Rated voltage	[V]	100			
Motor classification		AC brushless servo			
Motor constant	[Nm/W <sup>1/2</sup> ]	0.0619	0.239	0.438	Km=Ktt/Rtt <sup>1/2</sup>
Torque constant	[Nm/A <sup>1/2</sup> ]	0.0831	0.501	0.692	Ktt=Kb/1000*60/2π
Inverse Power constant	[V/Krpm]	8.7	52.5	72.8	
Coil Resistance	[ohm]	1.8	4.4	2.5	
Coil Inductance	[H]	0.0023	0.0080	0.0088	
Number of Poles	[poles]	6	10	10	
Rotor Inertia	[kgm <sup>2</sup> ]	2.3e-6	8.5e-5	3.0e-4	

## B.5 PA-10を用いた同定実験

同時同定法によるPA-10のパラメータ同定を試みたが、慣性モーメントの値が負の値になってしまった[38]。原因としてはPA-10の減速比は1/50と非常に大きく、摩擦項の影響が大きいため、同時同定法では推定が困難だと考えられる。そこで、混合同定法をPA-10に適応しパラメータ同定を行う。

### B.5.1 摩擦項の同定

PA-10の各関節には減速器としてハーモニックドライブが使用されている。ハーモニックドライブの特長を以下に示す。

#### ハーモニックドライブ

- 高回転精度・高位置決め精度

同時噛み合い歯数が多く、また180 deg 対称の2ヶ所で噛み合っているため、歯のピッチ誤差や累積ピッチ誤差の回転精度への影響が平均化され、高回転精度・高位置決めが得られる。

- 高減速比

複雑な機構や構造を用いることなく、一段同軸上で1/30~1/320という減速比をもつ。

- ノンバックラッシュ

ハーモニックドライブの構造の特長により、歯車と歯車が密着している。それにより制御不能となるバックラッシュが非常に少ない。

- 小型・軽量

他の減速器に比べ1/3以下の体積と、1/2以下の重量で同等のトルク容量と減速比が得られる。

ハーモニックドライブは金属のたわみによる弾性力学を応用しており、Fig. ??に示すような、以下の3つの基本部品から構成されている。

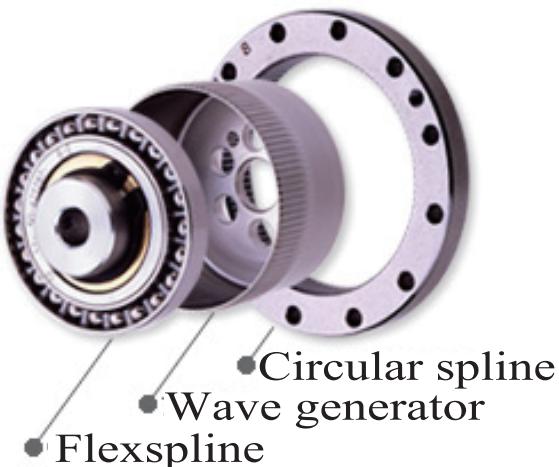


Fig. B.7: Harmonic drive (©Harmonic Drive Systems.)

- ウェーブジェネレータ

楕円状カムの外周に、薄肉のボール・ベアリングをはめている。ベアリングの内輪はカムに固定されており、外輪はボールを介して弾性変形を行う。一般的には入力軸に取り付ける。

- フレクススpline

薄肉カップ状の金属弾性体の部品。開口部外周に歯が刻まれてあり、フレクススplineの底をダイヤフラムと呼び、カップ状の形状をしている通常、出力軸に取り付ける。

- サーキュラ・スpline

剛体リング状の部品。内周に歯が刻まれてあり、フレクススplineより歯数が2枚多くなっている。一般にはケーシングに固定されている。

このうちのウェーブジェネレータは、常に弾性変形を繰り返しながら動作しており、この事よりウェーブジェネレータには柔軟性があると考えられる。この柔軟性によって、ハーモニックドライブは外部から受けた荷重に対して適応を行う。そのため、アームに大きい荷重がかかると、ハーモニックドライブの剛性が高くなる。

PA-10の摩擦項はハーモニックドライブの影響で、通常用いられる速度依存摩擦だけではなく、以下のように考えられる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_d(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_s \quad (\text{B.36})$$

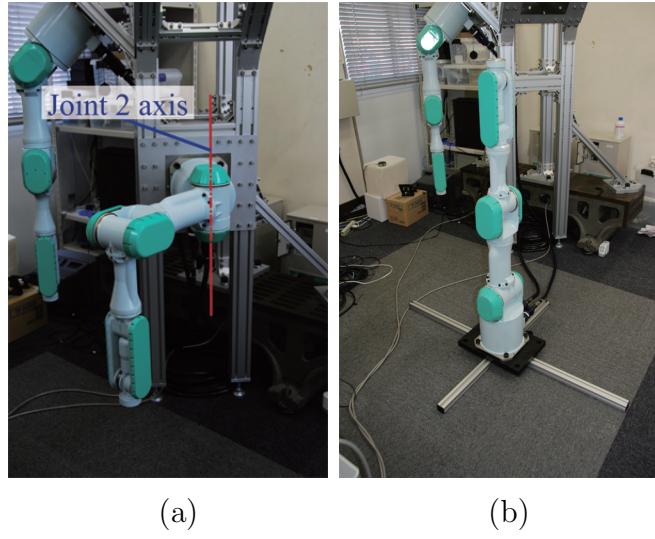


Fig. B.8: Setting of PA-10:(a) Flat posture and (b) Vertical posture.

$F_v \in \Re^n$  は速度依存摩擦 ,  $F_d \in \Re^n$  は位置依存摩擦 ,  $F_s \in \Re^n$  は剛性トルクを示している .

これらの摩擦項を求めるために各関節毎に等速運動を行う . さらに , 動作軸を重力方向と平行にすることで , 重力項の影響が無くなり , PA-10 のトルク値が摩擦項の値となる .

PA-10 を Fig. B.8 のように設置し実験を行った . Fig. B.8(a) では PA-10 を地面と水平設置し , 第 2 , 4 , 6 関節の運動データをそれぞれ重力項の影響を無視できる姿勢として測定を行った .

(b) では PA-10 を地面に対して垂直に設置し , 第 1 , 3 , 5 , 7 関節の運動データを (a) の場合と同様に重力項を無視できる姿勢として測定を行った .

## B.6 速度依存摩擦

PA-10 の動作時の関節速度の変化に依存する摩擦項の推定を行う .

### B.6.1 実験方法

実験は PA-10 の全 7 関節で行い , 重力が影響しない姿勢で , 関節毎に等速運動させた . 動作速度は  $\pm 0.8 \sim \pm 0.001$  rad/s で行い . 等速運動時のトルク値 (電流値) の平均をその速度のトルク値とした .

速度依存摩擦モデルはストライベックモデルと呼ばれる Eq. (B.3) のモデルに同定した [39]. Eq. (B.3) のモデルは低速時の静止摩擦項の影響も考慮していることから採用した .

### B.6.2 実験結果・考察

実験結果と Eq. (B.37) のモデルの近似曲線を Fig. B.9 に示す. ただし,  $\tau_n$  は第  $n$  関節の等速運動時のトルク値(電流値)を表し, fitted model (FM) は近似曲線を表している. また, 推定したそれぞれのパラメータを Table B.5 に示す.

Fig. B.9(a)~(c) の結果から, すべての関節の摩擦モデルの推定することができた. 推定結果から, 第 1 関節が他の関節に比べ約 5 倍摩擦トルクが発生することがわかる. これは, 第 1 関節が他の関節に比べ関節のアクチュエータが大きく, 静止摩擦トルクが大きいことが原因だと考えられる. また, 各関節の結果において, 関節の速度が低速に近づくと摩擦トルクの値が高くなり, 静止摩擦による摩擦の影響が全ての関節で確認された .

Table B.5: Parameter for velocity dependent friction.

Joint	Positive velocity					
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
1	632.5	-1057	-248.9	0.05	-1536	1800
2	554.1	-133.0	-259.2	0.082	-654.9	2250
3	124.9	-39.7	-116.5	0.0476	-155.9	85.0
4	138.8	145	-87.78	0.05	-15.57	1100
5	10.0	-55.86	-27.99	0.0373	-102.0	1600
6	61.13	-98.26	-87.02	0.0516	-181.0	160
7	9.276	-78.4	-64.4	0.0345	-118.7	160
	Negative velocity					
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
1	505.8	-322.7	-169.3	0.05	-850.1	1800
2	468.5	-939.4	-332.0	0.047	-1505	2250
3	130.1	-13.67	-119.1	0.049	-142.0	85.0
4	142.3	145	-87.62	0.05	-12.21	1100
5	6.773	-55.86	-27.9	0.041	-102.0	1600
6	62.9	-71.12	-56.57	0.0786	-148.9	160
7	14.57	-9.19	-20.37	0.082	-46.77	160

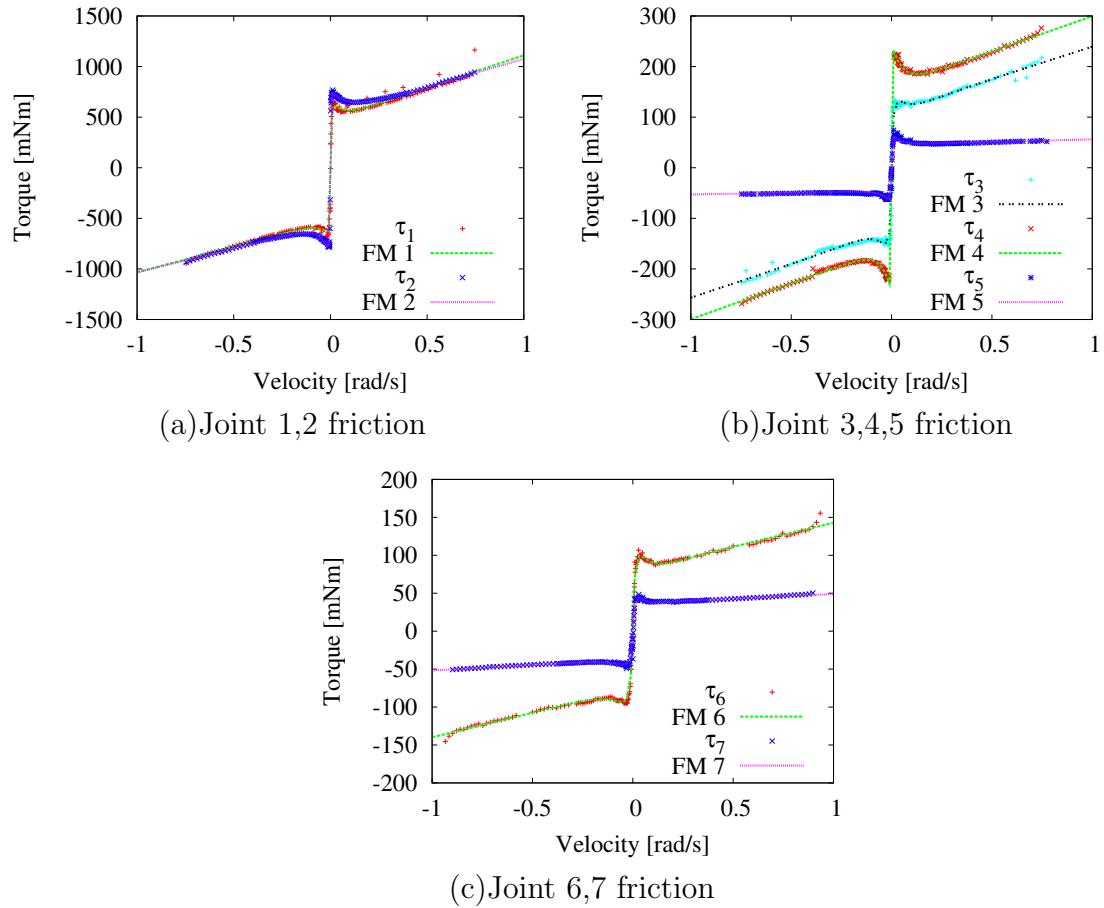


Fig. B.9: Velocity dependent friction.

### B.6.3 補足事項

Fig. B.9 に示した速度依存摩擦の同定を行った後に、実験で用いる PA-10 の第1関節でオイル漏れが発見された。その後、第1関節の挙動に不審な点がいくつか見受けられたため、第1, 2関節において同様の実験を再度行った。

#### 第1, 2関節の再実験結果

Fig. B.10 に再実験の結果を示す。結果より第2関節の測定値では異常は確認されなかった。しかし、第1関節の結果では、測定値のプロットにはらつきが見られる。このばらつきは測定を行う毎にばらつきに変化することが確認されている。なお、後の章では Fig. B.9 で同定した結果を用いて研究を行う。

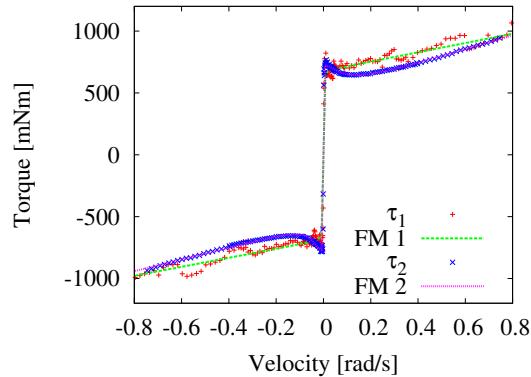


Fig. B.10: Result of re-experiment on joint1,2.

## B.7 位置依存摩擦

PA-10 が動作する際に各関節の角度の変化に依存する摩擦項を推定する。PA-10 の関節にはハーモニックドライブがあり、ウェーブジェネレータの噛み合わせによって発生する摩擦トルクが変化する。それが位置依存摩擦となる。

### B.7.1 実験方法

速度依存摩擦を推定した時と同様に動作させる関節に対して重力が影響しない姿勢で以下のように実験を行う。

各関節の角度依存の摩擦を同定するため、PA-10 の各関節を  $0.01 \text{ rad/s}$  で速度制御し運動データを得る。等速運動することにより、その時に発生するトルクの値を観察した。また、実験結果に近似曲線を引くため、グラフの周期を gnuplot で FFT(fast Fourier transform) を用いて求める。

### B.7.2 実験結果・考察

測定結果から近似曲線を引くため、各グラフの周期を FFT を用いて求めた結果を Fig. B.11 に示す。また、位置依存摩擦の測定結果と近似したモデルを Fig. B.12 に示す。ただし、 $\tau_n$  は第  $n$  関節の等速運動時のトルク値(電流値)を表し、fitted model (FM) は近似曲線を表している。近似するモデルは以下の式とした [39]。

$$\tau_{pf} = f_1 \sin(2\pi f_2 + f_3) + f_4 \sin(2\pi f_5 + f_6) \quad (\text{B.37})$$

$f_2, f_5$  に Fig. B.11 の周波数を用い、最小二乗により  $f_1, f_3, f_4, f_6$  を求めた。結果より推定した各パラメータを Table B.6 に示す。

Table B.6: Parameter for position dependent friction.

Joint	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
1	58	311	2.871	-30.38	48	-11.01
2	22	340	1.952	120.8	48	41.48
3	14	240	3.495	-20.68	40	-24.51
4	5	240	-0.73	-8.0	80	-1.17
5	10	96	2.634	10	48	2.667
6	6	98	-0.4759	-8.661	24	-4.547
7	7	96	2.535	15.52	24	-1.024

## B.8 非線形剛性トルク

PA-10 の関節はハーモニックドライブがあるため荷重がかかった場合、各関節には剛性トルクが生じ PA-10 のトルク値に影響すると考えられる。そのため駆動パラメータの推定の一貫として、PA-10 の剛性についても推定する必要がある。

ウェーブジェネレータを固定し、フレクススライン側にトルクを加えるとトルクに比例したねじれがフレクススラインに生じる。さらに、フレクススラインに掛かったトルクを、アームを動作させて 0 Nm に近づけていくと生じていたねじれ角が 0 まで戻らず、このねじれ角が元に戻ろうとする際にトルクが生じる。この事から、負荷していたトルクが 0 Nm に近づくことで、ねじれ角が元に戻ろうとするトルクを受け急激なトルクの変化が生じてしまう。また、ハーモニックドライブに生じている剛性トルクが比例関係だけでは表すことが出来ないことから、剛性トルクが線形モデルではなく非線形モデルによって表されると考えられる。

### B.8.1 モデル

ハーモニックドライブでのトルクを表す式を以下に示す [40]。

$$T_{in}N = T_{cf}(q) + T_{vf}(\dot{q}) + T_g(\ddot{q}) + T_c(T_{cf}, T_{vf}, T_g) \quad (\text{B.38})$$

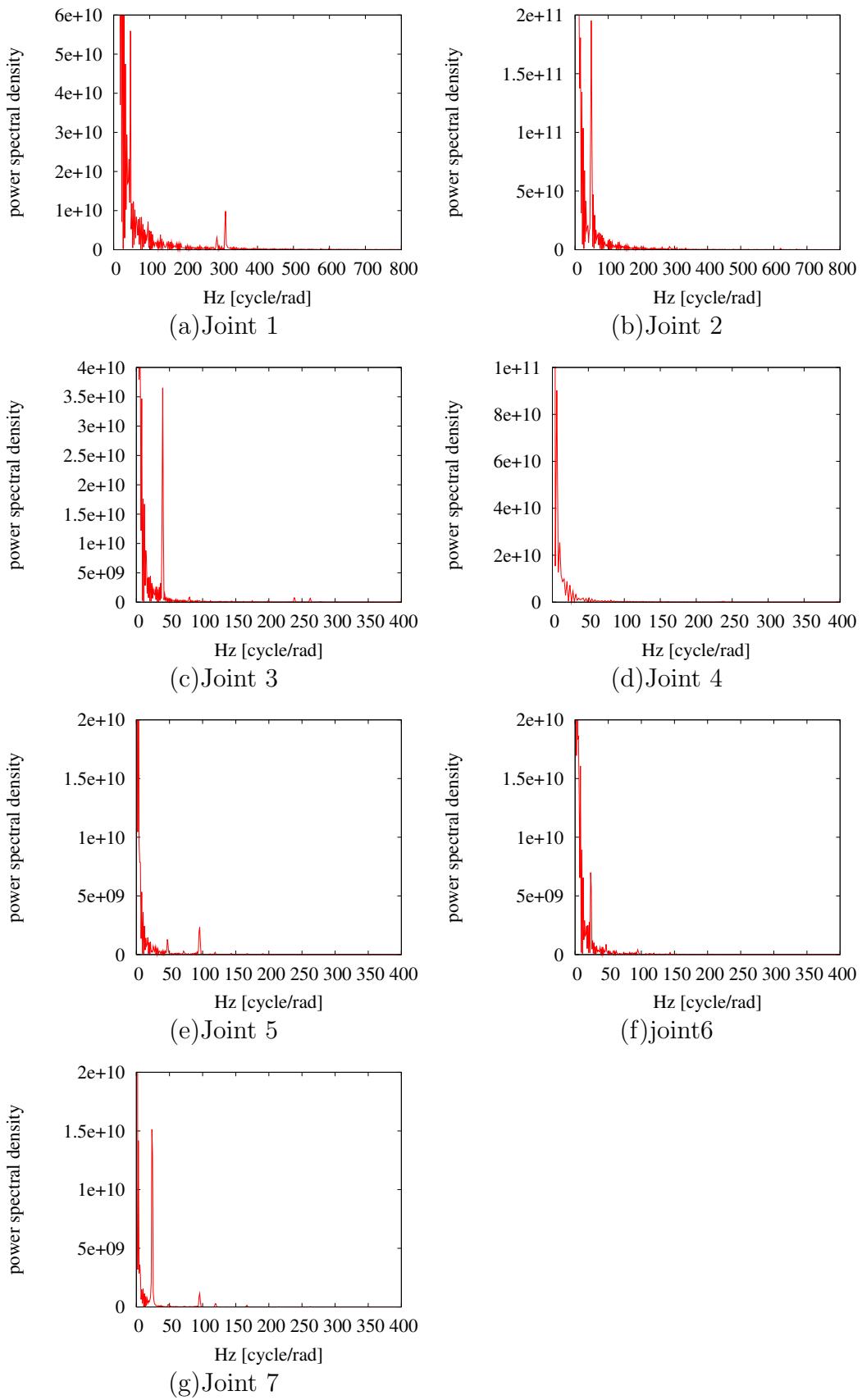


Fig. B.11: Position dependent friction.

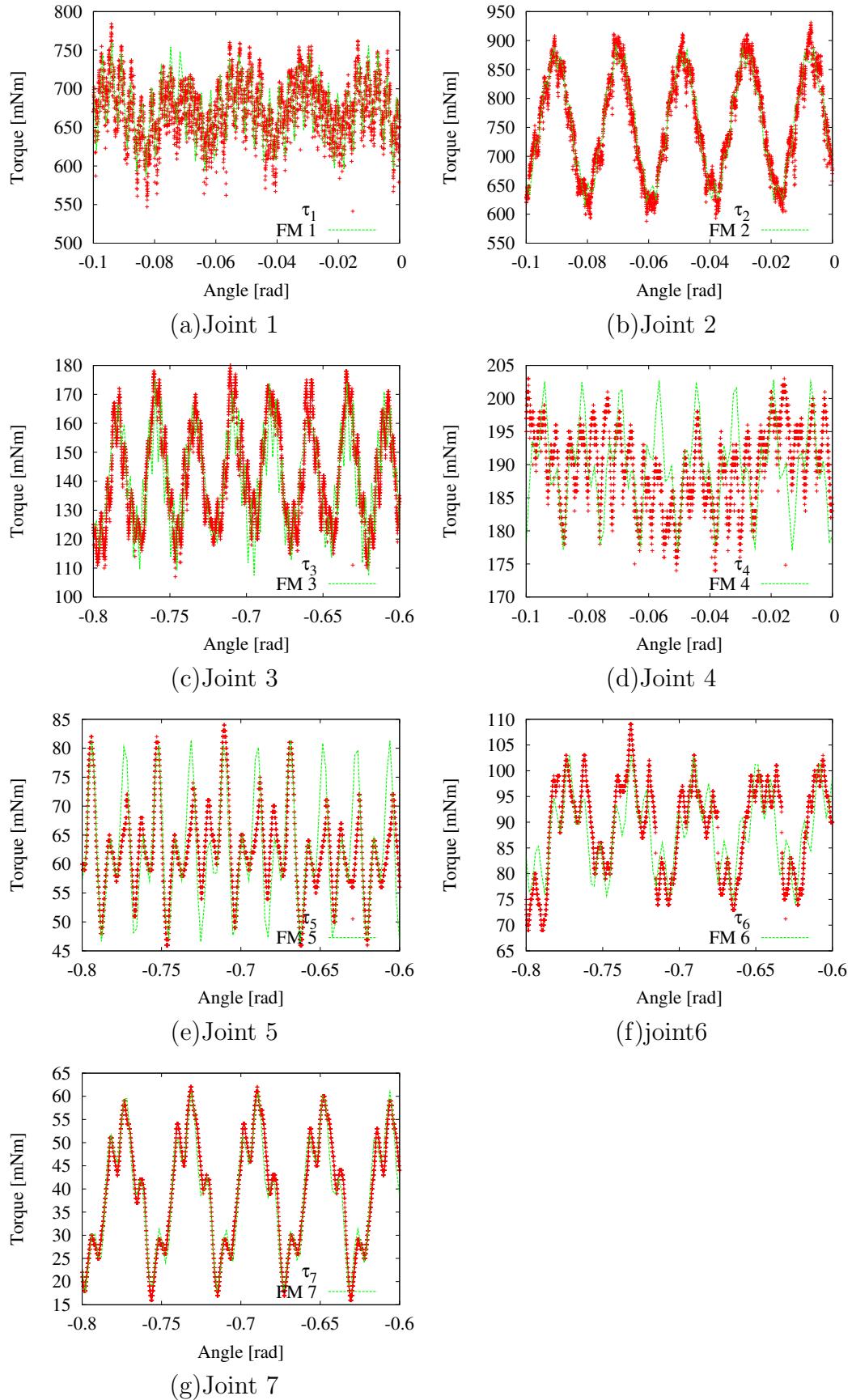


Fig. B.12: Position dependent friction.

ただし， $T_{in}$  は入力トルク， $N$  は伝達率 (PA-10 の場合  $N$  は全ての関節において 50)， $T_{cf}$  はクーロン摩擦， $T_{vf}$  は速度依存摩擦トルク， $T_g$  は重力トルク， $T_c$  はウェーブジェネレータの変形で生じるトルクをそれぞれ表している。重力トルクは PA-10 の各リンクの重量，重心位置から求められる。クーロン摩擦、速度依存摩擦については前節により推定されている。

よって Eq. (B.38) より PA-10 から得られる出力トルクから，速度依存摩擦，クーロン摩擦，そして重力トルクをひくことで剛性トルクが求まる。

### B.8.2 実験方法

測定方法について述べる。測定する関節によってアームを設置する場所と姿勢を以下のようにした。

- 第 1, 3, 5 関節

Fig. B.8 (a) のように壁に対して PA-10 を垂直に取り付ける。測定時は測定する関節の次の関節を初期姿勢から 90 deg 倒し壁と平行に位置させる。

- 第 2, 4, 6 関節

Fig. B.8 (b) のように台座に PA-10 を設置し，初期姿勢が地面と垂直になるようする。

設置をした状態から測定する関節の初期姿勢を -90 deg (最大トルク) とし，角度を増加させていく。0 deg (アームが地面と垂直) を通過し，+90 deg (最小トルク) まで動作を続ける。この時，アームは一定速度で動作させる。これによって，出力トルクが測定値として得られる。

Eq. (B.38) ハーモニックドライブのモデルより，クーロン摩擦と速度依存摩擦トルク，重力トルクを引くことでハーモニックドライブの変形に用いられているトルクの値を求めることができる。

同様の実験をアームに荷重をつけた状態などでも行い，求まった剛性トルクを複数プロットすることでその近似曲線から非線形剛性モデルの同定を行う。

### B.8.3 実験結果・考察

各関節の非線形トルクの実験結果を Fig. B.13 に示す。Fig. B.13 の  $\tau_n$  は

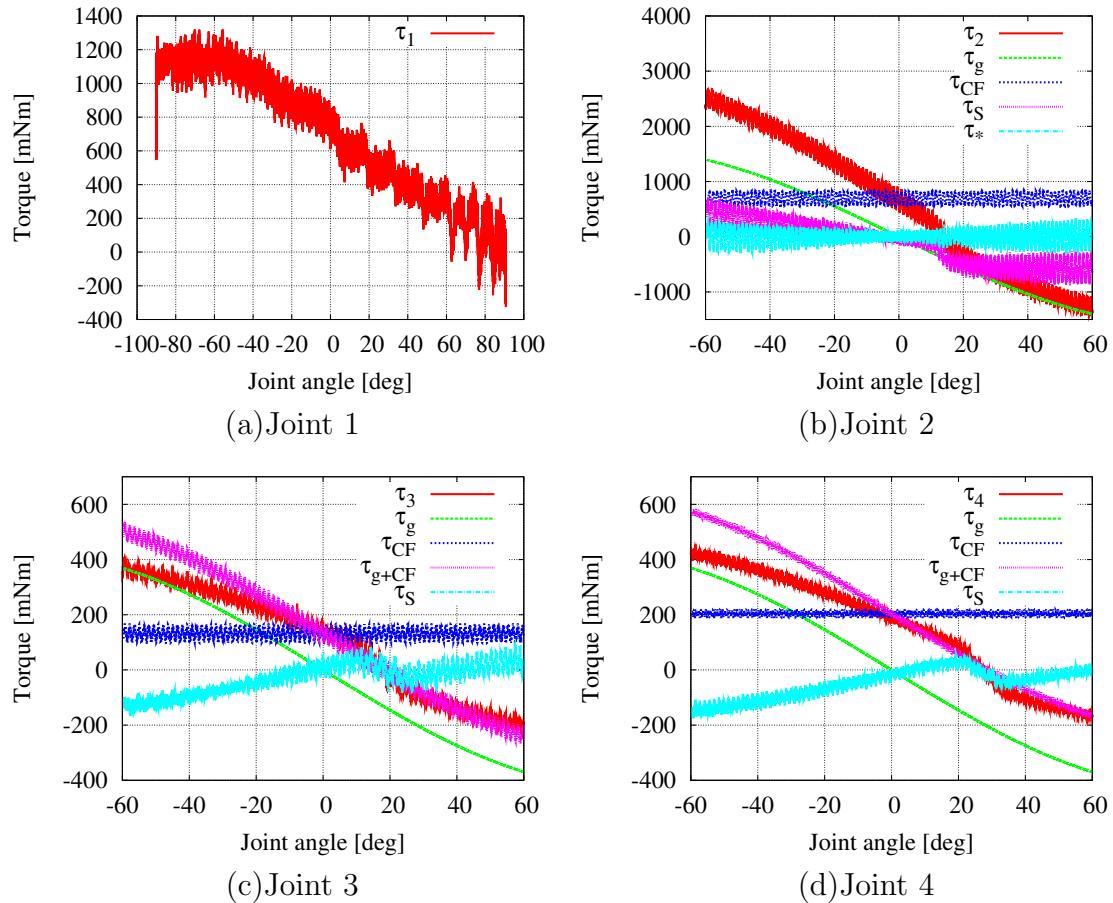


Fig. B.13: Nonlinear stiffness.

PA-10より返ってきた第n関節の出力トルクを表している。 $\tau_g$ は関節に生じていた重力トルク、 $\tau_{CF}$ は速度依存摩擦を含んだクーロン摩擦のトルク値となっている。 $\tau_{g+CF}$ は重力トルクと摩擦トルクを合成したものである。 $\tau_S$ は重力トルクとクーロン摩擦を出力トルクから引くことで、生じていた剛性トルクを表している。 $\tau_*$ については次節にて後述。

結果の $\tau_S$ より、第1関節以外の各関節の剛性トルクには傾きの変化が見られ、非線形であることが確認された。第1関節においてはPA-10の出力トルクに傾きの変化が確認されず測定値にばらつきが出てしまった。この原因として、速度依存摩擦の項で補足したように、本研究で用いているPA-10の第1関節では関節よりオイルが漏れるアクシデントが非線形剛性の実験を行う前に起こっている。それにより実験結果に影響が出たことも考えられる。

また第3, 4関節の実験結果においては出力トルクの値に対して、速度依

存摩擦，クーロン摩擦，重力トルクの合計の値が上回ってしまう問題が生じている。

剛性トルクが確認できた第2関節において剛性トルクのモデルを推定する。Fig. B.13(b)の結果を重力トルクと剛性トルクの関係に着目したものをFig. B.14に示す。Fig. B.14において剛性トルクの急激な変化が起こる重力トルクの位置を $T_1$ ,  $T_2$ ( $T_1 < T_2$ )と置く。この2点より以下のように場合分けを行う。

- $T_1 > \tau_g \Rightarrow$  Slope 1 の傾きの一次関数で近似
- $T_2 \geq \tau_g \geq T_1 \Rightarrow$  Slope 2 の傾きの一次関数で近似
- $\tau_g > T_2 \Rightarrow$  Slope 3 の傾きの一次関数で近似

Slope n は各近似の傾きを示す。得られた剛性トルクのモデルを Fig. B.14 の FM に示す。また、第2関節で得られたパラメータを Table B.7 に示す。

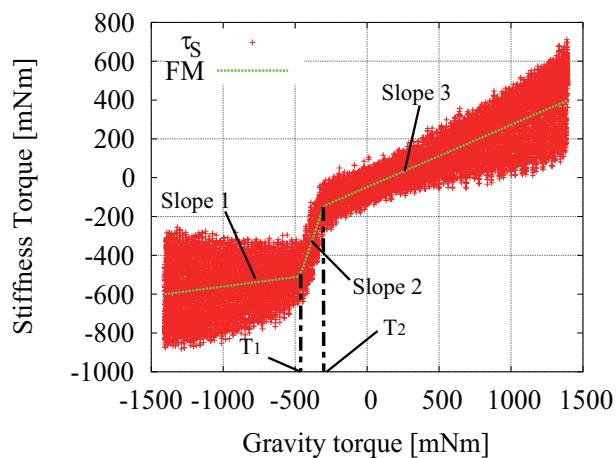


Fig. B.14: Joint 2 stiffness fit model.

剛性トルクのモデルが得られたことによって、出力トルクからクーロン摩擦、重力トルク、近似した剛性トルクを引いたものをFig. B.13 (b) の  $\tau_*$  に示す。関節の角度が 0 deg 付近で  $\tau_*$  が 0 mNm に近い値となっているが、角度が大きくなるにつれ  $\tau_*$  の振れ幅が大きくなってしまっている。

### 荷重取り付け

第3, 4関節の実験結果では出力トルクの値より摩擦トルクと重力トルクの合計が上回る問題が生じた。そのためアームの先端に荷重を取り付

Table B.7: Parameter for nonlinear stiffness as a function of gravity torque for joint2 for both the positive and negative direction.

Joint2	Slope 1 [mNm/mNm]	$T_1$ [mNm]	Slope 2 [mNm/mNm]	$T_2$ [mNm]	Slope 3 [mNm/mNm]	Zero gravity stiffness[mNm]
Positive	0.0971	-470	2.21885	-300	0.321	-48.8365
Negative	-0.293	330	-2.548	460	-0.0906	64.4245

することで関節により負荷がかかり、測定対象の大きな剛性トルクが生じるよう実験を行った。取り付ける荷重は1 kgと2 kgとし実験を行った。

### 再実験結果・考察

実験は第3関節で行う。アームに外部荷重を掛けた状態で行った結果をFig. B.15に示す。Fig. B.15の(a)では1 kg、(b)では2 kgの荷重をPA-10の

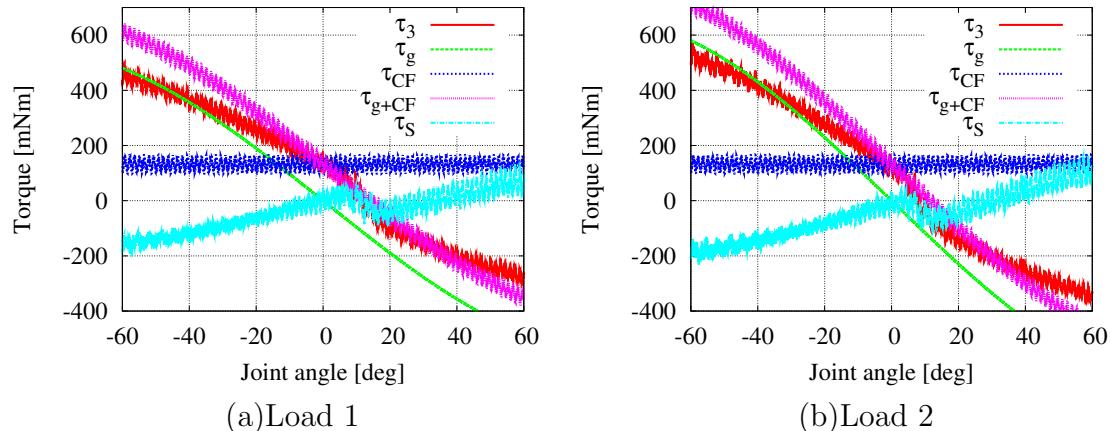


Fig. B.15: Load stiffness.

先端にそれぞれ取り付け第3関節の運動データをまとめた。Fig. B.13(c)とFig. B.15(a), (b)のそれぞれ第3関節の結果を比較を行うと、荷重が掛かっていないFig. B.13(c)から荷重を一番大きく掛けたFig. B.15(b)では $\tau_3$ の値が大きくなっていることが確認できた。しかし、どの結果においても出力トルクの値より、摩擦トルクと重力トルクの合計が上回り剛性トルクが負の値を示してしまっている。この原因としては、負荷荷重が軽過ぎる、重力項の推定が間違っているなどが考えられる。

## B.9 慣性パラメータの同定

上記で求めた駆動系パラメータを用いて、混合同定法に基づいて2自由度のマニピュレータと仮定したPA-10の慣性パラメータの推定を行う。

Eq. (B.1) の運動方程式より、駆動系パラメータである  $B \in \Re^{n \times n}$  の粘性摩擦行列と  $D(\dot{q}) \in \Re^n$  の動摩擦項の補償を行う。また、重力トルクはPA-10の各リンクの重量、重心位置から求められるため、重力項である  $G(q) \in \Re^n$  も補償できる。そのため運動方程式は以下とする。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) = \tau_i \quad (\text{B.39})$$

その際、それぞれの項は以下のように表せる。

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_1 + 2R \cos(q_2) & M_2 + R \cos(q_2) \\ M_2 + R \cos(q_2) & M_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.40})$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2R\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(q_2) - R\dot{q}_2^2 \sin(q_2) \\ R\dot{q}_1^2 \sin(q_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.41})$$

$$M_1 = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2) \quad (\text{B.42})$$

$$M_2 = I_2 + m_2 l_{c2}^2 \quad (\text{B.43})$$

$$R = m_2 l_1 l_{c2} \quad (\text{B.44})$$

式中の  $I_i$  はリンク  $i$  の重心まわりの慣性モーメント。Eq. (B.39)~(C.1) から基底パラメータ  $\rho$  は以下となる。

$$\rho = [M_1, R, M_2]^T \quad (\text{B.45})$$

同時同定法は運動方程式が基底パラメータに線形であることを利用している。これより、Eq. (B.39) は以下の式に書き換えられる。

$$\tau_i = \mathbf{Y}(q, \dot{q}, \ddot{q})\rho \quad (\text{B.46})$$

$$\mathbf{Y}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \cos(q_2)(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - \sin(q_2)(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2) & \ddot{q}_2 \\ 0 & \cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

時刻  $t = t_1, \dots, t_N$  における運動データ  $q_i(t)$ ,  $\dot{q}_i(t)$ ,  $\ddot{q}_i(t)$ ,  $\tau_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) がすべて測定できるとき、 $\rho$  の最小2乗推定値  $\hat{\rho}$  は以下のように求まる。

$$\hat{\rho} = (\mathbf{Y}_N^T \mathbf{Y}_N)^{-1} \mathbf{Y}_N^T \boldsymbol{\tau}_N \quad (\text{B.47})$$

$$\mathbf{Y}_N = [\mathbf{Y}(t_1), \dots, \mathbf{Y}(t_N)]^T \quad (\text{B.48})$$

$$\boldsymbol{\tau}_N = [\boldsymbol{\tau}(t_1), \dots, \boldsymbol{\tau}(t_N)]^T \quad (\text{B.49})$$

## B.10 同定実験

実験では、PA-10 の第 2 関節（2 リンクモデルの第 1 関節）と第 4 関節（2 リンクモデルの第 2 関節）に、関節の角速度の指令値として 0.083 Hz の正弦波を送り、60 s 間実験を 6 回行った。

## B.11 実験結果・考察

Fig. B.16 の (a) に  $M_1$ 、(b) に  $M_2$ 、(c) に  $R$  の推定結果を示す。また、各関節の角速度を (d) に示す。Fig. B.16 の各結果より実験の回毎に収束する推定値にはばらつきが見られた。各実験毎の基底パラメータの推定値を Table B.8 に示す。Table B.8 の推定結果と Eq. (B.42), (B.43) より各実験の回毎に慣性モーメント  $I_1, I_2$  を算出し、Table B.9 に示す。

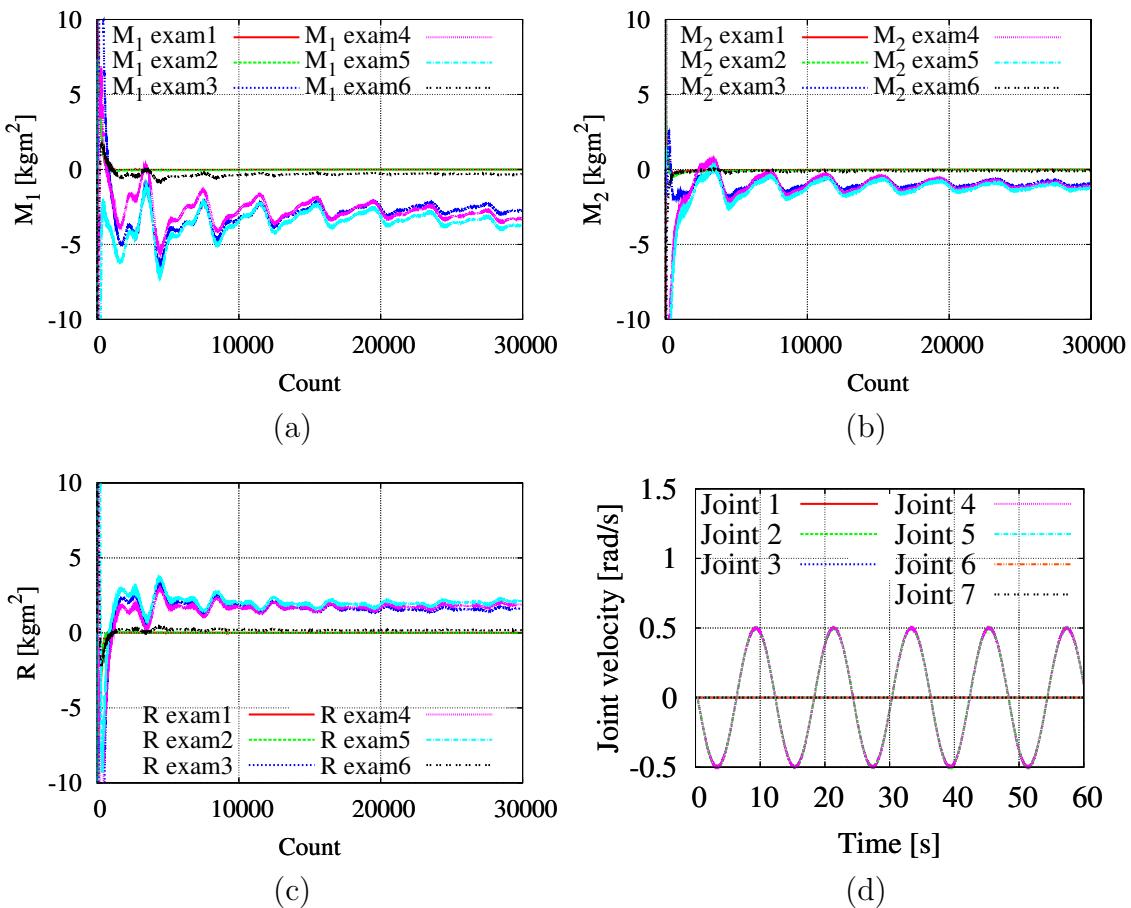


Fig. B.16: Inertia parameter.

Table B.8: Base parameter.

	$\hat{M}_1$ [kgm <sup>2</sup> ]	$\hat{M}_2$ [kgm <sup>2</sup> ]	$\hat{R}$ [kgm <sup>2</sup> ]
Exam1	-0.00579	-0.00757	0.00295
Exam2	-0.0112	-0.0143	0.00577
Exam3	-2.70	-0.930	1.61
Exam4	-3.23	-1.07	1.89
Exam5	-3.66	-1.20	2.11
Exam6	-0.320	-0.104	0.185

Table B.9: Dynamics parameters.

	$I_1$ [kgm <sup>2</sup> ]	$I_2$ [kgm <sup>2</sup> ]
Exam1	-2.185	-0.507
Exam2	-2.184	-0.5137
Exam3	-3.953	-1.429
Exam4	-4.352	-1.568
Exam5	-4.651	-1.698
Exam6	-2.403	-0.603

算出結果より慣性モーメントの値は  $I_1, I_2$  共に負の値となってしまった。原因としては、実験では関節トルク値に PA-10 の電流値を用いており、実際に発生している関節トルク値と差が生じていると考えられ、電流値とトルク値の検証を行う必要があると思われる。また、重力項の補償に PA-10 の仕様書の重心の位置と質量を用いており、こちらもパラメータ同定することで確認する必要がある。

## B.12 まとめ

本章では PA-10 の 7 各部の詳細なスペックについての説明を行った。さらに、パラメータの同定法について、逐次同定法、同時同定法、混合同定法の理論についてを 2 リンクマニピュレータを例に説明を行った。また、これらの理論を踏まえ本研究室における PA-10 の動的パラメータに含まれる駆動系パラメータについて推定を行った。さらに、駆動系パラメータの補償を行い、慣性パラメータの推定を行った。その結果、速度依存摩擦、位置依存摩擦について推定モデル作成した。しかし、剛性トルクのモデル化と慣性パラメータの推定には課題が残っている。



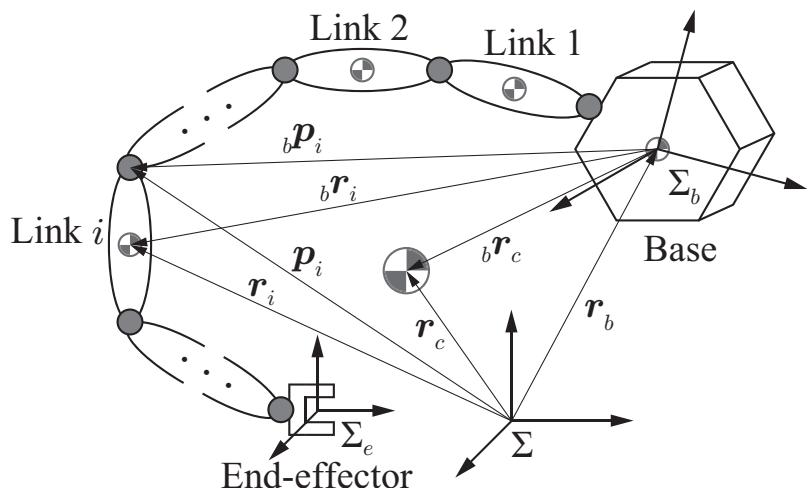
# 付録C フリーフロー-ティングマニピュレータの運動方程式

## C.1 概要

本章では第4章で用いたフリーフロー-ティングモデルの運動方程式の算出方法について述べる。また、例として簡単な平面3自由度フリーフロー-ティングモデルで作成する。

## C.2 Modeling

Fig. C.1にフリーフロー-ティングマニピュレータのモデル図を示す。フリ-



$\Sigma$ :Inertial frame  $\Sigma_b$ :Base frame  $\Sigma_e$ :End-link frame

$\oplus$ :Center of gravity of all parts       $\odot$ :Center of gravity of the whole system

Fig. C.1: Model of a free-floating manipulator.

フローティングマニピュレータはベース部が固定されておらず、ベース部自身が運動するため、ベース座標系とは別に慣性座標系を定義する必要がある。慣性座標系はマニピュレータとベース部の動作にまったく影響しない、座標系でこの座標系からマニピュレータとベースの動作を表現することで、ベース部に自由度を与えることが可能となる。

慣性座標系におけるベース部の位置ベクトルは  $\mathbf{r}_b \in \mathbb{R}^m$  であり、 $i$  リンクの重心位置ベクトルは  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^m$  である。一方、ベース座標系における  $i$  リンクの重心位置ベクトルは  ${}_b\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^m$  であり、 $\mathbf{r}_i$  と  ${}_b\mathbf{r}_i$  には以下の関係がある。

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_b + {}_b\mathbf{r}_i \quad (\text{C.1})$$

またベース座標系における  $i$  リンクの重心速度ベクトルは、並進成分が  ${}_b\nu_i \in \mathbb{R}^3$ 、回転成分が  ${}_b\omega_i \in \mathbb{R}^3$  で表される。また、慣性座標系における  $i$  リンクの重心速度ベクトルは、並進成分が  $\nu_i \in \mathbb{R}^3$ 、回転成分が  $\omega_i \in \mathbb{R}^3$  で表し、それぞれ以下のような関係がある。

$$\nu_i = \nu_b + {}_b\nu_i + \omega_i \times {}_b\mathbf{r}_i \quad (\text{C.2})$$

$$\omega_i = \omega_b + {}_b\omega_i \quad (\text{C.3})$$

### C.3 運動方程式

フリーフロー・ティングマニピュレータの運動方程式は以下のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} M_b(\mathcal{X}_b, \boldsymbol{\theta}) & M_{bl}(\mathcal{X}_b, \boldsymbol{\theta}) \\ M_{bl}^T(\mathcal{X}_b, \boldsymbol{\theta}) & M_l(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{V}}_b \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}_b(\mathcal{X}_b, \boldsymbol{\theta}, \mathcal{V}_b, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{c}_l(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_b^{rect} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_b\mathbf{T}^T(\mathcal{X}_b, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}_{el}^T(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \mathcal{F}_e^{rect} \quad (\text{C.4})$$

式中

$M_b \in \mathbb{R}^{m \times m}$ : ベース部周りにおけるシステム全体の慣性行列

$M_{bl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ : マニピュレータとベース部の干渉慣性行列

$M_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : マニピュレータの慣性行列

$\mathcal{C}_b \in \mathbb{R}^m$ : ベース部のコリオリ遠心力項

$\mathbf{c}_l \in \mathbb{R}^n$ : マニピュレータのコリオリ遠心力項

$\mathcal{F}_b^{rect} \in \mathbb{R}^m$ : ベース部に加わる外力

$\mathcal{F}_e^{rect} \in \mathbb{R}^m$ : 先端部に加わる外力

- $\tau \in \Re^n$  : 関節トルク  
 $\theta \in \Re^n$  : 関節角度  
 $v_b \in \Re^m$  : ベース部の速度  
 $x_b \in \Re^m$  : ベース部の位置と姿勢  
 ${}^b_e T^T \in \Re^{m \times m}$ : 先端部に与えた外力をベース部に変換する行列

### C.3.1 慣性行列

Eq. (C.4) 中の 3 つの慣性行列の導出の仕方について記述する。

$$M_b = \begin{bmatrix} m_c U & m_c {}^b r_c^{\times T} \\ m_c {}^b r_c^{\times} & M_{\omega} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$M_{bl} = \begin{bmatrix} J_{T\omega} \\ M_{\omega q} \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$M_l = \sum_{i=1}^n (J_{Ri}^T I_i J_{Ri} + m_i J_{Ti}^T J_{Ti}) \quad (\text{C.7})$$

$m$  は一般的に 6 であり、並進成分を 3、回転成分を 3 としたとき、式中

$$M_{\omega} \in \Re^{3 \times 3} = \sum_{i=1}^n (I_i + m_i {}^b r_i^{\times T} {}^b r_i^{\times}) + I_b \quad (\text{C.8})$$

$$M_{\omega q} \in \Re^{3 \times n} = \sum_{i=1}^n (I_i J_{Ri} + m_i {}^b r_i^{\times} J_{Ti}) \quad (\text{C.9})$$

$$J_{T\omega} \in \Re^{3 \times n} = \sum_{i=1}^n m_i J_{Ti} \quad (\text{C.10})$$

$$J_{Ti} \in \Re^{3 \times n} = [\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_1), \mathbf{k}_2 \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_2), \dots, \mathbf{k}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_i), \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \quad (\text{C.11})$$

$$J_{Ri} \in \Re^{3 \times n} = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_i, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \quad (\text{C.12})$$

ただし、 $(\circ)^{\times}$  はベクトル  $(\circ)$  の歪み対象行列を表し、 $I_i$  はリンク  $i$  の重心まわりの慣性テンソル、 $I_b$  はベース部の重心まわりの慣性テンソル、 $m_i$  はリンク  $i$  の質量、 $m_c$  はシステム全体の質量、 $U$  は単位行列、 $k_i$  は慣性座標系における関節  $i$  の回転軸の単位ベクトルであり、 $x$  軸回転では  $[1, 0, 0]^T$ 、 $y$  軸回転では  $[0, 1, 0]^T$ 、 $z$  軸回転では  $[0, 0, 1]^T$  となる。

### C.3.2 コリオリ遠心力項

Eq. (C.4) 中の 2 つのコリオリ遠心力項の導出の仕方について記述する。前節で述べた慣性行列を用いコリオリ遠心力項を求める。ただし、以下に示す方法は姿勢角での偏微分が可能なときを対象としており、偏微分が行えない場合は正確にコリオリ遠心力項を算出することはできない。また、本節では下付き文字はその行列の行と列を表している。

$$\hat{\mathbf{c}}(\mathcal{X}_b, \mathcal{V}_b, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{C}}^1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{C}}^{m+n} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{C.13})$$

式中  $\hat{\mathbf{C}}^i \in \Re^{(m+n) \times (m+n)}$  の各成分  $\hat{\mathbf{C}}_{jk}^i$  ( $j, k$  はそれぞれ行と列を表しており 1 から  $m+n$  までの整数である。) は  $\hat{\mathbf{M}}$  の各成分を用いて以下のように表せる。

$$\hat{\mathbf{C}}_{jk}^i = \frac{\partial \hat{\mathbf{M}}_{ij}}{\partial \hat{q}_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\mathbf{M}}_{jk}}{\partial \hat{q}_i} \quad (\text{C.14})$$

ただし、 $\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$  は以下のように定義した。

$$\hat{\mathbf{M}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_{bl} \\ \mathbf{M}_{bl}^T & \mathbf{M}_l \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

$$\hat{\mathbf{c}} \equiv [\mathcal{C}_b^T \ \mathbf{c}_l^T]^T \quad (\text{C.16})$$

$$\hat{\mathbf{q}} \equiv [\mathcal{X}_b^T \ \boldsymbol{\theta}^T]^T \quad (\text{C.17})$$

## C.4 平面3自由度フリーフロー・ティングマニピュレータ

例として第4章で用いた、平面3自由度フリーフロー・ティングマニピュレータの運動方程式を示す。ただし、第4章では A 部、B 部としていたが、この章では分かりやすいようベース部と先端部とする。また、一般性をもたせるため導出過程では  $m = 6$  で計算を行う。

平面3自由度フリーフロー・ティングマニピュレータのモデル図を Fig. C.2 に示し、記号の意味は以下の通りである

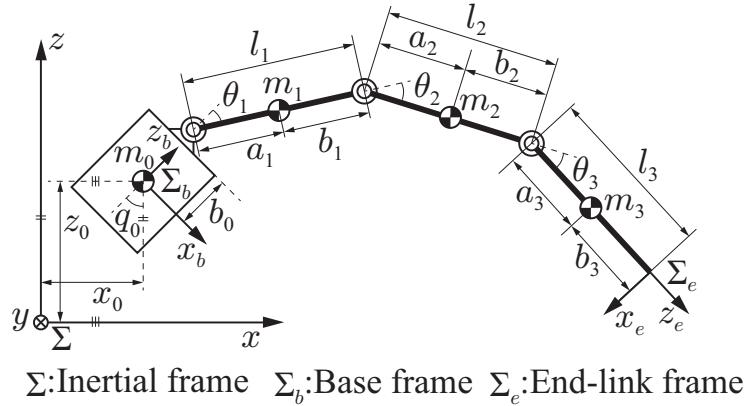


Fig. C.2: 3R free-floating manipulator.

$\Sigma$	慣性座標系
$\Sigma_b$	ベース座標系
$\Sigma_e$	手先座標系
$q_0$	ベース座標系の角度
$x_0$	ベース座標系の $x$ 軸方向変異
$z_0$	ベース座標系の $y$ 軸方向変異
$\theta_1$	マニピュレータの第1関節角度
$\theta_2$	マニピュレータの第2関節角度
$\theta_3$	マニピュレータの第3関節角度
$m_c$	マニピュレータ全体質量
$m_0$	ベース部の質量
$m_1$	第1リンクの質量
$m_2$	第2リンクの質量
$m_3$	第3リンクの質量
$l_1$	マニピュレータ第1リンクの長さ
$l_2$	マニピュレータ第2リンクの長さ
$l_3$	マニピュレータ第3リンクの長さ
$a_1$	第1関節から第1リンクの重心位置までの長さ
$a_2$	第2関節から第2リンクの重心位置までの長さ
$a_3$	第3関節から第3リンクの重心位置までの長さ
$b_0$	ベースの重心位置から第1関節までの長さ
$b_1$	第1リンクの重心位置から第2関節までの長さ
$b_2$	第2リンクの重心位置から第3関節までの長さ
$b_3$	第3リンクの重心位置からマニピュレータ先端までの長さ
$I_b$	ベースの重心まわりの慣性モーメント
$I_1$	第1リンクの重心まわりの慣性モーメント
$I_2$	第2リンクの重心まわりの慣性モーメント
$I_3$	第3リンクの重心まわりの慣性モーメント

ただし、Sin, Cosは、以下の様に略して記載する。

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \sin(q_0) & C_0 &= \cos(q_0) \\
 S_1 &= \sin(\theta_1) & C_1 &= \cos(\theta_1) \\
 S_2 &= \sin(\theta_2) & C_2 &= \cos(\theta_2) \\
 S_3 &= \sin(\theta_3) & C_3 &= \cos(\theta_3) \\
 S_{01} &= \sin(q_0 + \theta_1) & C_{01} &= \cos(q_0 + \theta_1) \\
 S_{012} &= \sin(q_0 + \theta_1 + \theta_2) & C_{012} &= \cos(q_0 + \theta_1 + \theta_2) \\
 S_{0123} &= \sin(q_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & C_{0123} &= \cos(q_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
 S_{12} &= \sin(\theta_1 + \theta_2) & C_{12} &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 S_{123} &= \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & C_{123} &= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)
 \end{aligned}$$

### 慣性テンソル

$$\boldsymbol{I}_b = \text{diag}[I_{x0}, I_{y0}, I_{z0}]$$

$$\boldsymbol{I}_1 = \text{diag}[I_{x1}, I_{y1}, I_{z1}]$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \text{diag}[I_{x2}, I_{y2}, I_{z2}]$$

$$\boldsymbol{I}_3 = \text{diag}[I_{x3}, I_{y3}, I_{z3}]$$

### 回転方向 $\boldsymbol{k}$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{k}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{k}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{k}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 慣性座標系からの関節と重心の位置ベクトル

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{r}_b &= \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{r}_b + b_0 \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ C_0 \end{bmatrix} \\
 \boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{p}_1 + a_1 \begin{bmatrix} S_{01} \\ 0 \\ C_{01} \end{bmatrix} & \boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{p}_1 + l_1 \begin{bmatrix} S_{01} \\ 0 \\ C_{01} \end{bmatrix} \\
 \boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{p}_2 + a_2 \begin{bmatrix} S_{012} \\ 0 \\ C_{012} \end{bmatrix} & \boldsymbol{p}_3 &= \boldsymbol{p}_2 + l_2 \begin{bmatrix} S_{012} \\ 0 \\ C_{012} \end{bmatrix} \\
 \boldsymbol{r}_3 &= \boldsymbol{p}_3 + a_3 \begin{bmatrix} S_{0123} \\ 0 \\ C_{0123} \end{bmatrix} & \boldsymbol{p}_e &= \boldsymbol{p}_3 + l_3 \begin{bmatrix} S_{0123} \\ 0 \\ C_{0123} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r}_c = (\boldsymbol{r}_1 m_1 + \boldsymbol{r}_2 m_2 + \boldsymbol{r}_3 m_3) / m_c$$

## ベース座標からの関節と重心位置ベクトル

$$\begin{aligned} {}_b\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{r}_b & {}_b\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b \\ {}_b\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{r}_b & {}_b\mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_b \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$${}_b\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{r}_b \quad {}_b\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_b \quad (\text{C.19})$$

$${}_b\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_e - \mathbf{r}_b \quad {}_b\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b \quad (\text{C.20})$$

(C.21)

各リンクの重心ヤコビ行列の並進成分  $J_{Ti}$  と回転成分  $J_{Ri}$  の計算

$$\mathbf{J}_{T1} = [\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{p}_1), \mathbf{0}, \mathbf{0}] \quad (\text{C.22})$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 C_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_1 S_{01} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.23})$$

$$\mathbf{J}_{T2} = [\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{p}_1), \mathbf{k}_2 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{p}_2), \mathbf{0}] \quad (\text{C.24})$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 C_{01} + a_2 C_{012} & a_2 C_{012} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -l_1 S_{01} - a_2 S_{012} & -a_2 S_{012} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

$$\mathbf{J}_{T3} = [\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{p}_1), \mathbf{k}_2 \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{p}_2), \mathbf{k}_3 \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{p}_3)] \quad (\text{C.26})$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 C_{01} + l_2 C_{012} + a_3 C_{0123} & l_2 C_{012} + a_3 C_{0123} & a_3 C_{0123} \\ 0 & 0 & 0 \\ -l_1 S_{01} - l_2 S_{012} - a_3 S_{0123} & -l_2 S_{012} - a_3 S_{0123} & -a_3 S_{0123} \end{bmatrix} \quad (\text{C.27})$$

$$\mathbf{J}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{R3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## C.4.1 慣性行列の計算

ベースの慣性行列は Eq. (C.5) から

$$\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} m_c \mathbf{U} & m_c {}_b\mathbf{r}_c^{\times T} \\ m_c {}_b\mathbf{r}_c^{\times} & \mathbf{M}_{\omega} \end{bmatrix} \quad (\text{C.28})$$

$$\mathbf{M}_{\omega} = \mathbf{I}_1 + m_1 {}_b\mathbf{r}_1^{\times T} {}_b\mathbf{r}_1^{\times} + \mathbf{I}_2 + m_2 {}_b\mathbf{r}_2^{\times T} {}_b\mathbf{r}_2^{\times} + \mathbf{I}_3 + m_3 {}_b\mathbf{r}_3^{\times T} {}_b\mathbf{r}_3^{\times} + \mathbf{I}_b \quad (\text{C.29})$$

マニピュレータとベースの干渉慣性行列は Eq. (C.6) から

$$\mathbf{M}_{bl} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{T\omega} \\ \mathbf{M}_{\omega q} \end{bmatrix} \quad (\text{C.30})$$

$$\mathbf{J}_{T\omega} = m_1 \mathbf{J}_{T1} + m_2 \mathbf{J}_{T2} + m_3 \mathbf{J}_{T3} \quad (\text{C.31})$$

$$\mathbf{M}_{\omega q} = \mathbf{I}_1 \mathbf{J}_{R1} + m_1 {}_b \mathbf{r}_1^\times \mathbf{J}_{T1} + \mathbf{I}_2 \mathbf{J}_{R2} + m_2 {}_b \mathbf{r}_2^\times \mathbf{J}_{T2} + \mathbf{I}_3 \mathbf{J}_{R3} + m_3 {}_b \mathbf{r}_3^\times \mathbf{J}_{T3} \quad (\text{C.32})$$

マニピュレータの慣性行列は Eq. (C.7) から

$$\mathbf{M}_l = (\mathbf{J}_{R1}^T \mathbf{I}_1 \mathbf{J}_{R1} + m_1 \mathbf{J}_{T1}^T \mathbf{J}_{T1}) + (\mathbf{J}_{R2}^T \mathbf{I}_2 \mathbf{J}_{R2} + m_2 \mathbf{J}_{T2}^T \mathbf{J}_{T2}) + (\mathbf{J}_{R3}^T \mathbf{I}_3 \mathbf{J}_{R3} + m_3 \mathbf{J}_{T3}^T \mathbf{J}_{T3}) \quad (\text{C.33})$$

最終的に平面モデルなので  $m = 3$  となり他の成分はすべて0となる。計算結果を以下に示す。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_{bl} \\ \mathbf{M}_{bl}^T & \mathbf{M}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{b11} & M_{b12} & M_{b13} & M_{bl11} & M_{bl12} & M_{bl13} \\ M_{b21} & M_{b22} & M_{b23} & M_{bl21} & M_{bl22} & M_{bl23} \\ M_{b31} & M_{b32} & M_{b33} & M_{bl31} & M_{bl32} & M_{bl33} \\ M_{bl11} & M_{bl21} & M_{bl31} & M_{l11} & M_{l12} & M_{l13} \\ M_{bl12} & M_{bl22} & M_{bl32} & M_{l21} & M_{l22} & M_{l23} \\ M_{bl13} & M_{bl23} & M_{bl33} & M_{l31} & M_{l32} & M_{l33} \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

$$M_{b11} = M_{b22} = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 \quad (\text{C.35})$$

$$M_{b12} = M_{b21} = 0 \quad (\text{C.36})$$

$$\begin{aligned} M_{b13} = M_{b31} &= b_0(m_1 + m_2 + m_3)C_0 + (a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01} \\ &+ a_2 m_2 C_{012} + l_2 m_3 C_{012} + a_3 m_3 C_{0123} \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} M_{b23} = M_{b32} &= b_0(m_1 + m_2 + m_3)S_0 - (a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01} \\ &- a_2 m_2 S_{012} - l_2 m_3 S_{012} - a_3 m_3 S_{0123} \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

$$\begin{aligned} M_{b33} &= I_{y0} + I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + a_1^2 m_1 + b_0^2 m_1 + a_2^2 m_2 + b_0^2 m_2 + l_1^2 m_2 + a_3^2 m_3 \\ &+ b_0^2 m_3 + l_1^2 m_3 + l_2^2 m_3 + 2b_0((a_1 m_1 + l_1((m_2 + m_3))))C_1 \\ &+ 2l_1((a_2 m_2 + l_2 m_3))C_2 + 2a_2 b_0 m_2 C_{12} + 2b_0 l_2 m_3 C_{12} \\ &+ 2a_3 l_2 m_3 C_3 + 2a_3 l_1 m_3 C_{23} + 2a_3 b_0 m_3 C_{123} \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

$$M_{bl11} = a_1 m_1 C_{01} + m_2 (l_1 C_{01} + a_2 C_{012}) + m_3 (l_1 C_{01} + l_2 C_{012} + a_3 C_{0123}) \quad (\text{C.40})$$

$$M_{bl12} = a_2 m_2 C_{012} + m_3 (l_2 C_{012} + a_3 C_{0123}) \quad (\text{C.41})$$

$$M_{bl13} = a_3 m_3 C_{0123} \quad (\text{C.42})$$

$$M_{bl21} = -a_1 m_1 S_{01} + m_2 (-l_1 S_{01} - a_2 S_{012}) + m_3 (-l_1 S_{01} - l_2 S_{012} - a_3 S_{0123}) \quad (\text{C.43})$$

$$M_{bl22} = -a_2 m_2 S_{012} + m_3 (-l_2 S_{012} - a_3 S_{0123}) \quad (\text{C.44})$$

$$M_{bl23} = -a_3 m_3 S_{0123} \quad (\text{C.45})$$

$$\begin{aligned} M_{bl31} = & I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + a_1^2 m_1 + ((a_2^2 + l_1^2)) m_2 + ((a_3^2 + l_1^2 + l_2^2)) m_3 \\ & + b_0 ((a_1 m_1 + l_1 ((m_2 + m_3))) C_1 + 2 l_1 ((a_2 m_2 + l_2 m_3)) C_2 \\ & + a_2 b_0 m_2 C_{12} + b_0 l_2 m_3 C_{12} + 2 a_3 l_2 m_3 C_3 + 2 a_3 l_1 m_3 C_{23} + a_3 b_0 m_3 C_{123} \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

$$\begin{aligned} M_{bl32} = & I_{y2} + I_{y3} + a_2^2 m_2 + ((a_3^2 + l_2^2)) m_3 + l_1 ((a_2 m_2 + l_2 m_3)) C_2 \\ & + b_0 ((a_2 m_2 + l_2 m_3)) C_{12} + a_3 m_3 ((2 l_2 C_3 + l_1 C_{23} + b_0 C_{123})) \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

$$M_{bl33} = I_{y3} + a_3^2 m_3 + a_3 m_3 ((l_2 C_3 + l_1 C_{23} + b_0 C_{123})) \quad (\text{C.48})$$

$$\begin{aligned} M_{l11} = & I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + a_1^2 m_1 + a_2^2 m_2 + l_1^2 m_2 + a_3^2 m_3 \\ & + l_1^2 m_3 + l_2^2 m_3 + 2 l_1 ((a_2 m_2 + l_2 m_3)) C_2 + 2 a_3 l_2 m_3 C_3 + 2 a_3 l_1 m_3 C_{23} \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

$$\begin{aligned} M_{l12} = M_{l21} = & I_{y2} + I_{y3} + a_2^2 m_2 + a_3^2 m_3 + l_2^2 m_3 \\ & + l_1 ((a_2 m_2 + l_2 m_3)) C_2 + 2 a_3 l_2 m_3 C_3 + a_3 l_1 m_3 C_{23} \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

$$\begin{aligned} M_{l13} = & I_{y2} + I_{y3} + a_2^2 m_2 + a_3^2 m_3 + l_2^2 m_3 \\ & + l_1 ((a_2 m_2 + l_2 m_3)) C_2 + 2 a_3 l_2 m_3 C_3 + a_3 l_1 m_3 C_{23} \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

$$M_{l22} = I_{y2} + I_{y3} + a_2^2 m_2 + a_3^2 m_3 + l_2^2 m_3 + 2 a_3 l_2 m_3 C_3 \quad (\text{C.52})$$

$$M_{l23} = M_{l32} = I_{y3} + a_3^2 m_3 + a_3 l_2 m_3 C_3 \quad (\text{C.53})$$

$$M_{l31} = I_{y3} + a_3^2 m_3 + a_3 l_2 m_3 C_3 + a_3 l_1 m_3 C_{23} \quad (\text{C.54})$$

$$M_{l33} = I_{y3} + a_3^2 m_3 \quad (\text{C.55})$$

## C.4.2 コリオリ遠心力項の計算

コリオリ遠心力項は慣性行列を用いて Eqs. (C.13), (C.14) から以下のように求まる。

$$\hat{\mathbf{c}}(\mathcal{X}_b, \mathcal{V}_b, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{C}}^1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{C}}^{m+n} \end{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} = \hat{\mathbf{C}} \dot{\hat{\mathbf{q}}} \quad (\text{C.56})$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & \hat{C}_{13} & \hat{C}_{14} & \hat{C}_{15} & \hat{C}_{16} \\ \hat{C}_{21} & \hat{C}_{22} & \hat{C}_{23} & \hat{C}_{24} & \hat{C}_{25} & \hat{C}_{26} \\ \hat{C}_{31} & \hat{C}_{32} & \hat{C}_{33} & \hat{C}_{34} & \hat{C}_{35} & \hat{C}_{36} \\ \hat{C}_{41} & \hat{C}_{42} & \hat{C}_{43} & \hat{C}_{44} & \hat{C}_{45} & \hat{C}_{46} \\ \hat{C}_{51} & \hat{C}_{52} & \hat{C}_{53} & \hat{C}_{54} & \hat{C}_{55} & \hat{C}_{56} \\ \hat{C}_{61} & \hat{C}_{62} & \hat{C}_{63} & \hat{C}_{64} & \hat{C}_{65} & \hat{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{C.57})$$

$$\hat{C}_{11} = \hat{C}_{12} = 0 \quad (\text{C.58})$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{13} = & -(((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_1) \\ & - ((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_2 - a_3 m_3 S_{0123}\dot{\theta}_3 \\ & + (-b_0(m_1 + m_2 + m_3)S_0) - (a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01} - a_2 m_2 S_{012} \\ & - l_2 m_3 S_{012} - a_3 m_3 S_{0123})\dot{q}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{14} = & -(((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_1) \\ & - ((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_2 - a_3 m_3 S_{0123}\dot{\theta}_3 \\ & + (-((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01}) - (a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} - a_3 m_3 S_{0123})\dot{q}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{15} = & -(((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_1) \\ & - ((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_2 - a_3 m_3 S_{0123}\dot{\theta}_3 \\ & - ((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{q}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

$$\hat{C}_{16} = -a_3 m_3 S_{0123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{q}_0) \quad (\text{C.62})$$

$$\hat{C}_{21} = \hat{C}_{22} = 0 \quad (\text{C.63})$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{23} = & -(((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_1) \\ & - ((a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_2 - a_3 m_3 C_{0123}\dot{\theta}_3 \\ & + (-b_0(m_1 + m_2 + m_3)C_0) - (a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01} \\ & - a_2 m_2 C_{012} - l_2 m_3 C_{012} - a_3 m_3 C_{0123})\dot{q}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{24} = & -((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_1 \\ & - ((a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_2 - a_3 m_3 C_{0123}\dot{\theta}_3 \\ & + (-((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01}) - (a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} - a_3 m_3 C_{0123})\dot{q}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{25} = & -(((a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_1) \\ & - ((a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_2 - a_3 m_3 C_{0123}\dot{\theta}_3 \\ & - ((a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{q}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

$$\hat{C}_{26} = -(a_3 m_3 C_{0123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{q}_0)) \quad (\text{C.67})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{31} = & (((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_1 \\ & + ((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_2 + a_3 m_3 S_{0123}\dot{\theta}_3 \\ & + (b_0(m_1 + m_2 + m_3)S_0 + (a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01} \\ & + a_2 m_2 S_{012} + l_2 m_3 S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{q}_0)/2\end{aligned}\quad (\text{C.68})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{32} = & (((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_1 \\ & + ((a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_2 + a_3 m_3 C_{0123}\dot{\theta}_3 \\ & + (b_0(m_1 + m_2 + m_3)C_0 + (a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01} \\ & + a_2 m_2 C_{012} + l_2 m_3 C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{q}_0)/2\end{aligned}\quad (\text{C.69})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{33} = & (-((b_0(m_1 + m_2 + m_3)S_0 + (a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01} \\ & + a_2 m_2 S_{012} + l_2 m_3 S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{x}_0) - (b_0(m_1 + m_2 + m_3)C_0 \\ & + (a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01} + a_2 m_2 C_{012} + l_2 m_3 C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{z}_0)/2\end{aligned}\quad (\text{C.70})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{34} = & (-2b_0((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_1 + (a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{12} + a_3 m_3 S_{123})\dot{\theta}_1 \\ & - 2b_0((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{12} + a_3 m_3 S_{123})\dot{\theta}_2 - 2a_3 b_0 m_3 S_{123}\dot{\theta}_3 \\ & - 4a_1 b_0 m_1 S_1 \dot{q}_0 - 4b_0 l_1 m_2 S_1 \dot{q}_0 - 4b_0 l_1 m_3 S_1 \dot{q}_0 - 4a_2 b_0 m_2 S_{12} \dot{q}_0 \\ & - 4b_0 l_2 m_3 S_{12} \dot{q}_0 - 4a_3 b_0 m_3 S_{123} \dot{q}_0 - a_1 m_1 S_{01} \dot{x}_0 - l_1 m_2 S_{01} \dot{x}_0 \\ & - l_1 m_3 S_{01} \dot{x}_0 - a_2 m_2 S_{012} \dot{x}_0 - l_2 m_3 S_{012} \dot{x}_0 - a_3 m_3 S_{0123} \dot{x}_0 \\ & - a_1 m_1 C_{01} \dot{z}_0 - l_1 m_2 C_{01} \dot{z}_0 - l_1 m_3 C_{01} \dot{z}_0 \\ & - a_2 m_2 C_{012} \dot{z}_0 - l_2 m_3 C_{012} \dot{z}_0 - a_3 m_3 C_{0123} \dot{z}_0)/2\end{aligned}\quad (\text{C.71})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{35} = & (-2(2l_1(a_2 m_2 + l_2 m_3)S_2 + b_0(a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{12} + a_3 m_3(2l_1 S_{23} + b_0 S_{123}))\dot{\theta}_1 \\ & - 2(l_1(a_2 m_2 + l_2 m_3)S_2 + b_0(a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{12} + a_3 m_3(l_1 S_{23} + b_0 S_{123}))\dot{\theta}_2 \\ & - 2a_3 l_1 m_3 S_{23} \dot{\theta}_3 - 2a_3 b_0 m_3 S_{123} \dot{\theta}_3 - 4a_2 l_1 m_2 S_2 \dot{q}_0 \\ & - 4l_1 l_2 m_3 S_2 \dot{q}_0 - 4a_2 b_0 m_2 S_{12} \dot{q}_0 - 4b_0 l_2 m_3 S_{12} \dot{q}_0 - 4a_3 l_1 m_3 S_{23} \dot{q}_0 \\ & - 4a_3 b_0 m_3 S_{123} \dot{q}_0 - a_2 m_2 S_{012} \dot{x}_0 - l_2 m_3 S_{012} \dot{x}_0 - a_3 m_3 S_{0123} \dot{x}_0 \\ & - a_2 m_2 C_{012} \dot{z}_0 - l_2 m_3 C_{012} \dot{z}_0 - a_3 m_3 C_{0123} \dot{z}_0)/2\end{aligned}\quad (\text{C.72})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{36} = & -(a_3 m_3(2(2l_2 S_3 + 2l_1 S_{23} + b_0 S_{123})\dot{\theta}_1 + 2(2l_2 S_3 + l_1 S_{23} + b_0 S_{123})\dot{\theta}_2 \\ & + 2l_2 S_3 \dot{\theta}_3 + 2l_1 S_{23} \dot{\theta}_3 + 2b_0 S_{123} \dot{\theta}_3 + 4l_2 S_3 \dot{q}_0 \\ & + 4l_1 S_{23} \dot{q}_0 + 4b_0 S_{123} \dot{q}_0 + S_{0123} \dot{x}_0 + C_{0123} \dot{z}_0))/2\end{aligned}\quad (\text{C.73})$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{41} = & ((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_1 \\
& + ((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{\theta}_2 + a_3 m_3 S_{0123}\dot{\theta}_3 \\
& + a_1 m_1 S_{01}\dot{q}_0 + l_1 m_2 S_{01}\dot{q}_0 + l_1 m_3 S_{01}\dot{q}_0 + a_2 m_2 S_{012}\dot{q}_0 \\
& + l_2 m_3 S_{012}\dot{q}_0 + a_3 m_3 S_{0123}\dot{q}_0)/2
\end{aligned} \tag{C.74}$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{42} = & (((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_1 \\
& + ((a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{\theta}_2 + a_3 m_3 C_{0123}\dot{\theta}_3 + a_1 m_1 C_{01}\dot{q}_0 \\
& + l_1 m_2 C_{01}\dot{q}_0 + l_1 m_3 C_{01}\dot{q}_0 + a_2 m_2 C_{012}\dot{q}_0 + l_2 m_3 C_{012}\dot{q}_0 + a_3 m_3 C_{0123}\dot{q}_0)/2
\end{aligned} \tag{C.75}$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{43} = & (b_0((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_1 + (a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{12} + a_3 m_3 S_{123})\dot{\theta}_1 \\
& + b_0((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{12} + a_3 m_3 S_{123})\dot{\theta}_2 + a_3 b_0 m_3 S_{123}\dot{\theta}_3 \\
& + 2a_1 b_0 m_1 S_1 \dot{q}_0 + 2b_0 l_1 m_2 S_1 \dot{q}_0 + 2b_0 l_1 m_3 S_1 \dot{q}_0 + 2a_2 b_0 m_2 S_{12} \dot{q}_0 \\
& + 2b_0 l_2 m_3 S_{12} \dot{q}_0 + 2a_3 b_0 m_3 S_{123} \dot{q}_0 - a_1 m_1 S_{01} \dot{x}_0 - l_1 m_2 S_{01} \dot{x}_0 - l_1 m_3 S_{01} \dot{x}_0 - a_2 m_2 S_{012} \dot{x}_0 \\
& - l_2 m_3 S_{012} \dot{x}_0 - a_3 m_3 S_{0123} \dot{x}_0 - a_1 m_1 C_{01} \dot{z}_0 - l_1 m_2 C_{01} \dot{z}_0 \\
& - l_1 m_3 C_{01} \dot{z}_0 - a_2 m_2 C_{012} \dot{z}_0 - l_2 m_3 C_{012} \dot{z}_0 - a_3 m_3 C_{0123} \dot{z}_0)/2
\end{aligned} \tag{C.76}$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{44} = & (-b_0((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_1 + (a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{12} + a_3 m_3 S_{123})\dot{q}_0) \\
& - ((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))S_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)S_{012} + a_3 m_3 S_{0123})\dot{x}_0 \\
& - ((a_1 m_1 + l_1(m_2 + m_3))C_{01} + (a_2 m_2 + l_2 m_3)C_{012} + a_3 m_3 C_{0123})\dot{z}_0)/2
\end{aligned} \tag{C.77}$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{45} = & (-4l_1((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_2 + a_3 m_3 S_{23})\dot{\theta}_1 - 2l_1((a_2 m_2 + l_2 m_3)S_2 + a_3 m_3 S_{23})\dot{\theta}_2 \\
& - 2a_3 l_1 m_3 S_{23} \dot{\theta}_3 - 4a_2 l_1 m_2 S_2 \dot{q}_0 - 4l_1 l_2 m_3 S_2 \dot{q}_0 - a_2 b_0 m_2 S_{12} \dot{q}_0 \\
& - b_0 l_2 m_3 S_{12} \dot{q}_0 - 4a_3 l_1 m_3 S_{23} \dot{q}_0 - a_3 b_0 m_3 S_{123} \dot{q}_0 - a_2 m_2 S_{012} \dot{x}_0 - l_2 m_3 S_{012} \dot{x}_0 \\
& - a_3 m_3 S_{0123} \dot{x}_0 - a_2 m_2 C_{012} \dot{z}_0 - l_2 m_3 C_{012} \dot{z}_0 - a_3 m_3 C_{0123} \dot{z}_0)/2
\end{aligned} \tag{C.78}$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{46} = & -(a_3 m_3 (4(l_2 S_3 + l_1 S_{23})\dot{\theta}_1 + 2(2l_2 S_3 + l_1 S_{23})\dot{\theta}_2 \\
& + 2l_2 S_3 \dot{\theta}_3 + 2l_1 S_{23} \dot{\theta}_3 + 4l_2 S_3 \dot{q}_0 \\
& + 4l_1 S_{23} \dot{q}_0 + b_0 S_{123} \dot{q}_0 + S_{0123} \dot{x}_0 + C_{0123} \dot{z}_0))/2
\end{aligned} \tag{C.79}$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{51} = & (((a_2 m_2 + l_2 m_3) S_{012} + a_3 m_3 S_{0123}) \dot{\theta}_1 + ((a_2 m_2 + l_2 m_3) S_{012} + a_3 m_3 S_{0123}) \dot{\theta}_2 \\ & + a_3 m_3 S_{0123} \dot{\theta}_3 + a_2 m_2 S_{012} \dot{q}_0 + l_2 m_3 S_{012} \dot{q}_0 + a_3 m_3 S_{0123} \dot{q}_0) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.80})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{52} = & (((a_2 m_2 + l_2 m_3) C_{012} + a_3 m_3 C_{0123}) \dot{\theta}_1 + ((a_2 m_2 + l_2 m_3) C_{012} + a_3 m_3 C_{0123}) \dot{\theta}_2 \\ & + a_3 m_3 C_{0123} \dot{\theta}_3 + a_2 m_2 C_{012} \dot{q}_0 + l_2 m_3 C_{012} \dot{q}_0 + a_3 m_3 C_{0123} \dot{q}_0) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.81})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{53} = & ((2l_1(a_2 m_2 + l_2 m_3) S_2 + b_0(a_2 m_2 + l_2 m_3) S_{12} + a_3 m_3(2l_1 S_{23} + b_0 S_{123})) \dot{\theta}_1 \\ & + (l_1(a_2 m_2 + l_2 m_3) S_2 + b_0(a_2 m_2 + l_2 m_3) S_{12} + a_3 m_3(l_1 S_{23} + b_0 S_{123})) \dot{\theta}_2 \\ & + a_3 l_1 m_3 S_{23} \dot{\theta}_3 + a_3 b_0 m_3 S_{123} \dot{\theta}_3 + 2a_2 l_1 m_2 S_2 \dot{q}_0 + 2l_1 l_2 m_3 S_2 \dot{q}_0 + 2a_2 b_0 m_2 S_{12} \dot{q}_0 \\ & + 2b_0 l_2 m_3 S_{12} \dot{q}_0 + 2a_3 l_1 m_3 S_{23} \dot{q}_0 + 2a_3 b_0 m_3 S_{123} \dot{q}_0 - a_2 m_2 S_{012} \dot{x}_0 - l_2 m_3 S_{012} \dot{x}_0 \\ & - a_3 m_3 S_{0123} \dot{x}_0 - a_2 m_2 C_{012} \dot{z}_0 - l_2 m_3 C_{012} \dot{z}_0 - a_3 m_3 C_{0123} \dot{z}_0) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.82})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{54} = & (2l_1((a_2 m_2 + l_2 m_3) S_2 + a_3 m_3 S_{23}) \dot{\theta}_1 + l_1((a_2 m_2 + l_2 m_3) S_2 + a_3 m_3 S_{23}) \dot{\theta}_2 \\ & + a_3 l_1 m_3 S_{23} \dot{\theta}_3 + 2a_2 l_1 m_2 S_2 \dot{q}_0 + 2l_1 l_2 m_3 S_2 \dot{q}_0 - a_2 b_0 m_2 S_{12} \dot{q}_0 \\ & - b_0 l_2 m_3 S_{12} \dot{q}_0 + 2a_3 l_1 m_3 S_{23} \dot{q}_0 - a_3 b_0 m_3 S_{123} \dot{q}_0 - a_2 m_2 S_{012} \dot{x}_0 - l_2 m_3 S_{012} \dot{x}_0 \\ & - a_3 m_3 S_{0123} \dot{x}_0 - a_2 m_2 C_{012} \dot{z}_0 - l_2 m_3 C_{012} \dot{z}_0 - a_3 m_3 C_{0123} \dot{z}_0) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.83})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{55} = & (-l_1((a_2 m_2 + l_2 m_3) S_2 + a_3 m_3 S_{23}) \dot{\theta}_1) - (l_1(a_2 m_2 + l_2 m_3) S_2 \\ & + b_0(a_2 m_2 + l_2 m_3) S_{12} + a_3 m_3(l_1 S_{23} + b_0 S_{123})) \dot{q}_0 - a_2 m_2 S_{012} \dot{x}_0 - l_2 m_3 S_{012} \dot{x}_0 \\ & - a_3 m_3 S_{0123} \dot{x}_0 - a_2 m_2 C_{012} \dot{z}_0 - l_2 m_3 C_{012} \dot{z}_0 - a_3 m_3 C_{0123} \dot{z}_0) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.84})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{56} = & -(a_3 m_3((4l_2 S_3 + l_1 S_{23}) \dot{\theta}_1 + 4l_2 S_3 \dot{\theta}_2 + 2l_2 S_3 \dot{\theta}_3 \\ & + 4l_2 S_3 \dot{q}_0 + l_1 S_{23} \dot{q}_0 + b_0 S_{123} \dot{q}_0 + S_{0123} \dot{x}_0 + C_{0123} \dot{z}_0)) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.85})$$

$$\hat{C}_{61} = (a_3 m_3 S_{0123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{q}_0)) / 2 \quad (\text{C.86})$$

$$\hat{C}_{62} = (a_3 m_3 C_{0123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{q}_0)) / 2 \quad (\text{C.87})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{63} = & (a_3 m_3((2l_2 S_3 + 2l_1 S_{23} + b_0 S_{123}) \dot{\theta}_1 + (2l_2 S_3 + l_1 S_{23} + b_0 S_{123}) \dot{\theta}_2 + l_2 S_3 \dot{\theta}_3 \\ & + l_1 S_{23} \dot{\theta}_3 + b_0 S_{123} \dot{\theta}_3 + 2l_2 S_3 \dot{q}_0 + 2l_1 S_{23} \dot{q}_0 + 2b_0 S_{123} \dot{q}_0 - S_{0123} \dot{x}_0 - C_{0123} \dot{z}_0)) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.88})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{64} = & (a_3 m_3(2(l_2 S_3 + l_1 S_{23}) \dot{\theta}_1 + (2l_2 S_3 + l_1 S_{23}) \dot{\theta}_2 + l_2 S_3 \dot{\theta}_3 + l_1 S_{23} \dot{\theta}_3 + 2l_2 S_3 \dot{q}_0 \\ & + 2l_1 S_{23} \dot{q}_0 - b_0 S_{123} \dot{q}_0 - S_{0123} \dot{x}_0 - C_{0123} \dot{z}_0)) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.89})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{65} = & (a_3 m_3((2l_2 S_3 - l_1 S_{23}) \dot{\theta}_1 + 2l_2 S_3 \dot{\theta}_2 + l_2 S_3 \dot{\theta}_3 \\ & + 2l_2 S_3 \dot{q}_0 - l_1 S_{23} \dot{q}_0 - b_0 S_{123} \dot{q}_0 - S_{0123} \dot{x}_0 - C_{0123} \dot{z}_0)) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.90})$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{66} = & -(a_3 m_3((l_2 S_3 + l_1 S_{23}) \dot{\theta}_1 + l_2 S_3 \dot{\theta}_2 + l_2 S_3 \dot{q}_0 + l_1 S_{23} \dot{q}_0 + b_0 S_{123} \dot{q}_0 \\ & + S_{0123} \dot{x}_0 + C_{0123} \dot{z}_0)) / 2\end{aligned}\quad (\text{C.91})$$



## 付録D フリーフロー・ティンギマニピュレータの拘束力

### D.1 概要

第5章や付録Cなどで紹介した、フリーフロー・ティンギモデルのラグランジュの未定乗数法を用いた拘束力の求め方について論じる。ただし、ラグランジュの未定乗数法による拘束は、制御トルク入力後に計算されるものであり、順動力学計算で用いることはできるが、逆動力学計算で用いることはできない。

### D.2 ベース部の拘束力

Eq. (C.4)に示した、フリーフロー・ティンギマニピュレータの運動方程式を以下のように変換する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_{bl} \\ \mathbf{M}_{bl}^T & \mathbf{M}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{V}}_b \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}_b \\ \mathbf{c}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^b_e \mathbf{T}^T & {}^b_b \mathbf{T}^T \\ {}^e \mathbf{J}_{el}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_e^{rct} \\ \mathcal{F}_b^{rct} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

${}^b_b \mathbf{T}$ は単位行列  $\mathbf{I}$ となる。

$$\hat{\mathbf{M}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_{bl} \\ \mathbf{M}_{bl}^T & \mathbf{M}_l \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

$$\hat{\mathbf{c}} \equiv [\mathcal{C}_b^T \ \mathbf{c}_l^T]^T \quad (\text{D.3})$$

$$\hat{\mathbf{q}} \equiv [\mathcal{X}_b^T \ \boldsymbol{\theta}^T]^T \quad (\text{D.4})$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} \equiv [\mathbf{0}^T \ \boldsymbol{\tau}^T]^T \quad (\text{D.5})$$

$$\hat{\mathbf{J}}_e \equiv \begin{bmatrix} {}^b_e \mathbf{T}^T & \mathbf{J}_{el}^T \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

$$\hat{\mathbf{J}}_b \equiv \begin{bmatrix} {}^b_b \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

とすると、ベース部の拘束力  $\Lambda_b$  はラグランジュの未定乗数法より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\Lambda_b &= -\left(\hat{\mathbf{J}}_b \hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{J}}_b^T\right)^{-1} \left(\dot{\hat{\mathbf{J}}}_b \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{J}}_b \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\mathbf{c}})\right) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\mathbf{c}})\right)\end{aligned}\quad (\text{D.8})$$

式中、 $\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\mathbf{c}})\right)$  は外力がない際のベース部の加速を表している。最終的にベース部が固定されたマニピュレータの順動力学計算は以下の式で求めることができる。

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{J}}_b^T \Lambda_b) \quad (\text{D.9})$$

### D.3 先端部の拘束力

先端部の拘束力  $\Lambda_e$  はラグランジュの未定乗数法より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\Lambda_e &= -\left(\hat{\mathbf{J}}_e \hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{J}}_e^T\right)^{-1} \left(\dot{\hat{\mathbf{J}}}_e \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{J}}_e \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\mathbf{c}})\right) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} {}^b\mathbf{T}^T & \mathbf{J}_{el}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \begin{bmatrix} {}^b\mathbf{T}^T \\ \mathbf{J}_{el}^T \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} {}^b\dot{\mathbf{T}}^T & \mathbf{J}_{el}^T \end{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \begin{bmatrix} {}^b\mathbf{T}^T & \mathbf{J}_{el}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\mathbf{c}})\right)\end{aligned}\quad (\text{D.10})$$

式中、 $\left(\begin{bmatrix} {}^b\dot{\mathbf{T}}^T & \mathbf{J}_{el}^T \end{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \begin{bmatrix} {}^b\mathbf{T}^T & \mathbf{J}_{el}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\mathbf{c}})\right)$  は外力がない際の先端部の加速を表している。最終的に先端部が固定されたマニピュレータの順動力学計算は以下の式で求めることができる。

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{J}}_e^T \Lambda_e) \quad (\text{D.11})$$

### D.4 両端が固定されたときの順動力学

両端が固定されたモデル(closed-loop model)の順動力学計算は以下の式で求めることができる。

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\mathbf{c}} + [\hat{\mathbf{J}}_e^T \quad \hat{\mathbf{J}}_b^T] \begin{bmatrix} \Lambda_e \\ \Lambda_b \end{bmatrix}) \quad (\text{D.12})$$