Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической кибернетики

Отчёт по преддипломной практике

«Поиск быстрых алгоритмов умножения матриц»

студента группы 418

Баканова Артёма Михайловича

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., проф.

Алексеев В. Б.

Руководитель практики от факультета:

д.ф.-м.н., проф.

Алексеев В. Б.

Москва, 2023

Содержание

1 Введение

Умножение матриц является одной из фундаментальных операций в линейной алгебре и широко используется в различных приложениях, таких как машинное обучение, компьютерное зрение и обработка сигналов. Однако, найти оптимальный алгоритм умножения матриц является сложной задачей.

Традиционно сложность алгоритмов умножения матриц оценивается в количестве операций умножения чисел. Это связано с тем, что последняя является наиболее ресурсозатратной. Таким образом, оптимальный алгоритм должен выигрывать у остальных по числу умножений. Так, стандартный алгоритм умножения матрицы $m \times n$ на матрицу $n \times p$

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj}, \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, p} \tag{1}$$

требует n^3 операций умножения, то есть имеет асимптотическую сложность $\mathcal{O}(n^3)$.

Крайне важным шагом в поиске быстрых алгоритмов стала работа Штрассена [1]. В ней он приводит алгоритм умножения двух квадратных матриц порядка n с асимптотической сложностью $\mathcal{O}(n^{\log_2 7})$. Алгоритм Штрассена основан на том, что для умножения квадратных матриц порядка 2 требуется лишь 7 операций умножения.

2 Постановка задачи

Козловым Александром была написана программа, вычисляющая решение системы для переменных (0), (2), (3), (4), (5), (6) с невязкой порядка 10^{-6}. Передо мной ставилась задача попытаться расширить данные решения для переменных (7) и (8) на множестве комплексных чисел.

3 Полученные результаты

3.1 Краткое напоминание предыдущих итогов работы

Исходя из системы

$$\sum_{d=1}^{q} \alpha_{ij}\beta_{kl}\gamma_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, l = r, s = i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

и используя ряд предположений, была получена новая система. Левая часть уравнения системы для тройки (m, p, q) имеет вид

$$2 \cdot (x_m y_p z_q + x_p y_q z_m + x_q y_m z_p) +$$
$$+2 \cdot (\varphi_2(x_m)\varphi_2(y_p)\varphi_2(z_q) + \varphi_2(x_p)\varphi_2(y_q)\varphi_2(z_m) + \varphi_2(x_q)\varphi_2(y_m)\varphi_2(z_p)) +$$

$$+\sum_{d=3}^{6} (\varphi_d(a_m)\varphi_d(b_p)\varphi_d(c_q) + \varphi_d(a_p)\varphi_d(b_q)\varphi_d(c_m) + \varphi_d(a_q)\varphi_d(b_m)\varphi_d(c_p)). \tag{3}$$

а правая часть определяется, как

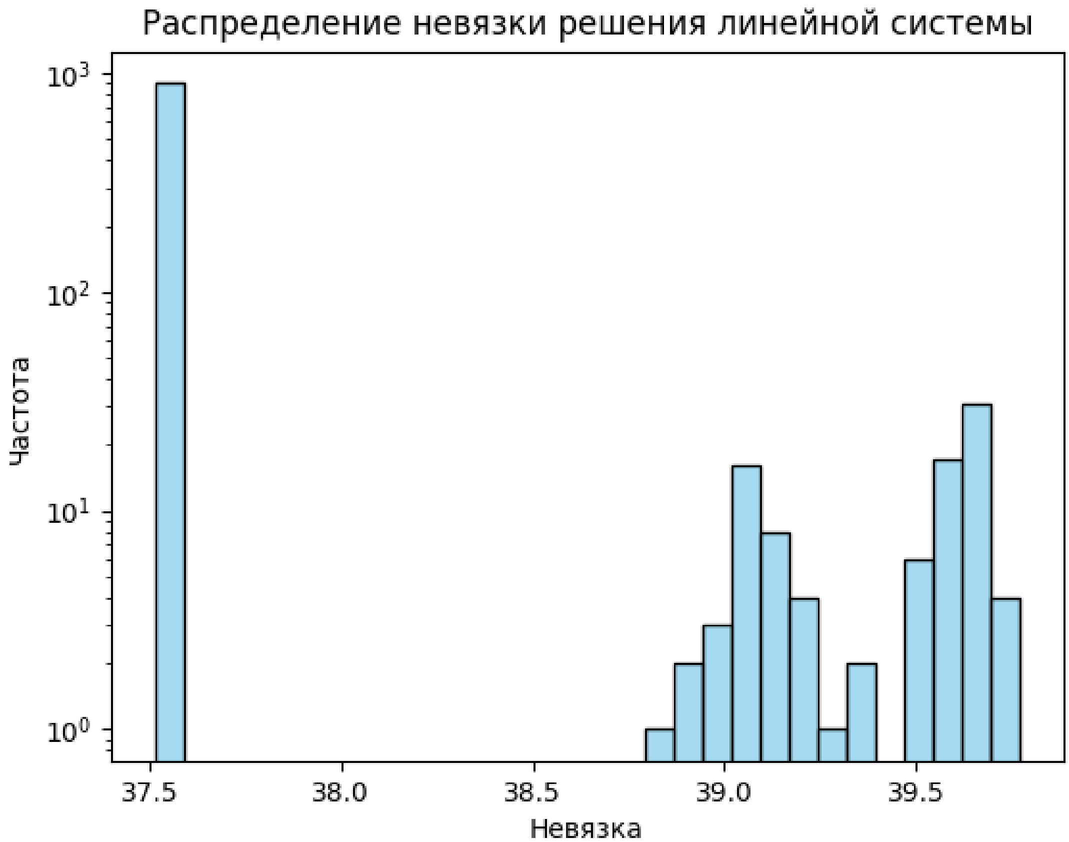
$$\sum_{i,j,k,l,r,s=0}^{2} t_{ij}^{(m)} t_{kl}^{(p)} t_{rs}^{(q)} f_{ij,kl,rs}. \tag{4}$$

3.2 Отсеивание решений

Поскольку программа Александра умеет генерировать практически бесконечное число потенциальных решений, необходимо эффективно отбирать их.

Если среди исходных 125 уравнений оставить только те, которые включают в себя переменные групп (7) и (8), то их останется ровно 65. При этом после подстановки решения 49 из них оказываются линейными. Это даёт нам возможность не искать сразу решение в общем случае сложными алгоритмами, а попытаться проанализировать линейную систему. Если система разрешима, то отбираем решение с минимальной невязкой и по её значению решаем, продолжать ли поиски в поле комплексных чисел.

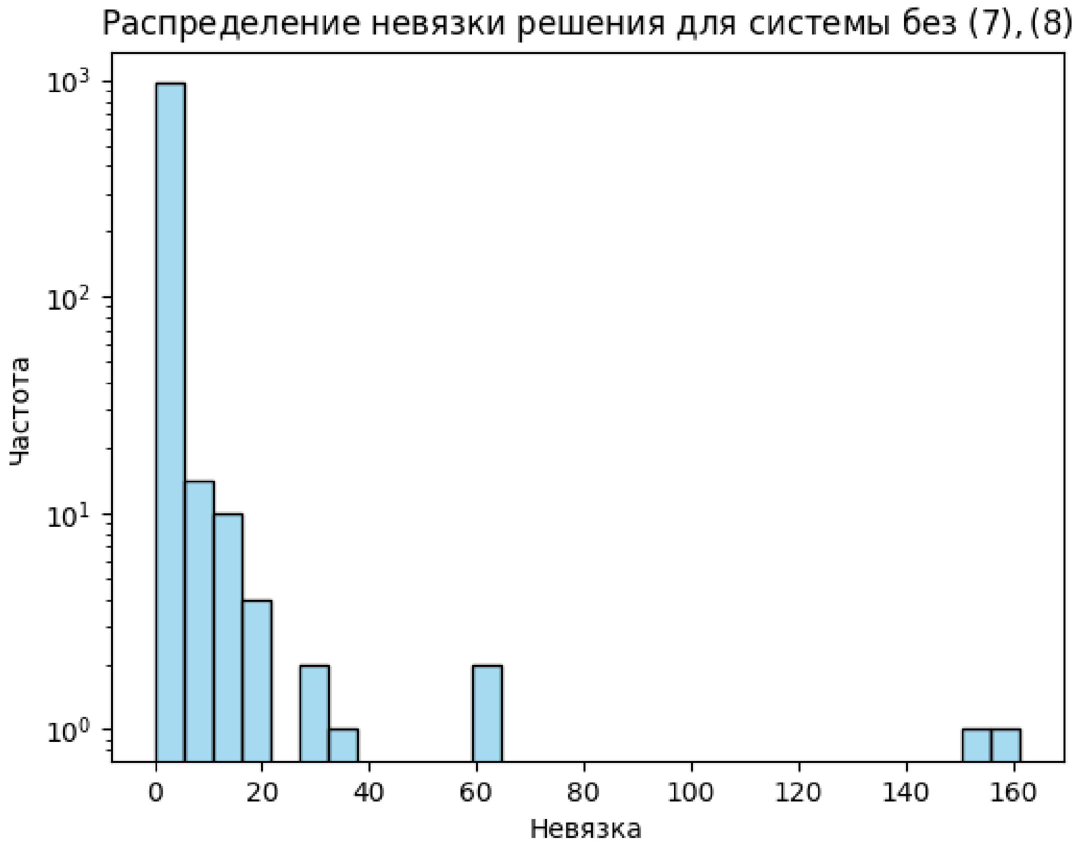
Было сгенерировано и проанализировано 1000 решений. Для каждого вычислялась минимальная невязка на линейной подсистеме. Результаты приведены на изображении ниже.



Таким образом, нет смысла пытаться дополнять данные решения значениями для переменных (7) и (8). Все они дают большую невязку уже на линейной подсистеме.

3.3 Пересчёт невязки

Стало интересно проверить, действительно ли решения Александра получаются с невязкой порядка 10^{-6}. Были отобраны 60 уравнений, которые содержат только переменные групп $(0)-(6)$. Для тех же 1000 решений невязка считалась, как евклидова норма вектора разности левой и правой частей уравнений. Полученные результаты отображены ниже.



Соответственно, минимальное значение невязки, которое было получено, имеет порядок 10^{-3}. Также встречаются решения с аномально большой невязкой.

3.4 Сравнение систем

После такого расхождения в невязке было принято решение программно сравнить коэффициенты уравнений системы Козлова и моей системы. Для каждой тройки (m, p, q) с точностью до эквивалентных перестановок коэффициенты уравнения совпали. Различия заключаются лишь в том, что в моей системе присутствует уравнение для тройки $(1, 1, 1)$, которое имеет вид

$$a_1 b_1 c_1 + x_1 y_1 z_1 = 2 \tag{5}$$

На значение невязки оно принципиально не влияет.

4 План дальнейших работ

Разработать новые подходы к исследованию возможности существования решения с малой невязкой для рассматриваемой задачи, разработать для них алгоритмы и программы и провести эксперименты.

Список литературы

[1] Strassen V. Gaussian elimination is not optimal // Numer. Math. 1969, том 13. С. 354–356.