

Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего образования

Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)

---

М Е Р А  
И И Н Т Е Г Р А Л Л Е Б Е Г А

---

IV СЕМЕСТР

Физтех-школа: ФПМИ

Направления: ПМФ

Лектор: Гусев Николай Анатольевич

$\hbar \backslash nu$

Автор: *Максим Иванов*

Долгопрудный, 2021 год.

## Содержание

|   |                                       |   |
|---|---------------------------------------|---|
| 1 | Лекция 1: Различные системы множеств. | 3 |
|---|---------------------------------------|---|

## Лекция 1: Различные системы множеств.

В этом курсе имеется дело с функциями, аргументами которых являются множества.

**Определение 1.1.** Мерой на множестве  $X$  называется функция  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ , где  $\mathcal{F}$  — семейство подмножеств  $X$ .

На  $\mathcal{F}$  нужно наложить некоторые ограничения, потому как если, к примеру, определена мера для двух множеств, то логично было бы, чтобы была определена мера и на их сумме, пересечении, объединении. Отсюда вытекают такие понятия как:

**Определение 1.2.** Семейство  $\mathcal{F}$  подмножеств множества  $X$  (далее используется обозначение  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ , где  $\mathcal{P}(X)$  — множество всех подмножеств множества  $X$ ) называется  $\sigma$ -алгеброй, если

1°.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .

2°.  $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}, A \cup B \in \mathcal{F}, A \setminus B \equiv A \cap B^C \in \mathcal{F}$ , где  $B^C = X \setminus B$ .

3°.  $X \in \mathcal{F}$ .

4°.  $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  выполнено, что  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

**Определение 1.3.**  $\mathcal{F}$  — кольцо если выполняются условия 1° и 2°.

**Определение 1.4.**  $\mathcal{F}$  — алгебра если выполняются условия 1°, 2° и 3°.

**Замечание.** Пусть  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра, тогда  $\forall A \in \mathcal{F} : A^C = X \setminus A \in \mathcal{F}$ . Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^{CC} = \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^C \right)^C.$$

Поэтому можно сказать, что вторая часть в условии 4° избыточно. Абсолютно аналогично и в обратную сторону, то есть эти два требования равносильны.

**Замечание.** Пусть  $\mathcal{F}$  — кольцо, тогда  $A \cap B = A \cap (B^{CC}) = A \setminus B^C = A \setminus (X \setminus B) = A \setminus (A \setminus B)$ . То есть требование замкнутости по пересечению в свойстве 2° избыточно.

**Пример 1.5.** Пусть  $\mathcal{F}$  — семейство всех ограниченных подмножеств множества  $\mathbb{R}$ . Тогда  $\mathcal{F}$  — кольцо, но не алгебра.

**Определение 1.6.** Кольцо  $\mathcal{F}$  называется

а)  $\sigma$ -кольцом, если  $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$  выполнено, что  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

б)  $\delta$ -кольцом, если  $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$  выполнено, что  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

**Замечание.** Любое  $\sigma$ -кольцо является  $\delta$ -кольцом, но обратное неверно.

**Определение 1.7.** Множество  $I \subset \mathbb{R}$  называется промежутком, если  $\forall a, b \in I : [a, b] \subset I$ . Промежуток  $I$  называется конечным, если он ограничен.

Например,  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  — промежутки.

Пусть  $K_1$  — семейство всех конечных промежутков на прямой. Легко заметить, что это не кольцо (объединение промежутков — не всегда промежуток). Отсюда вытекает новая структура:

**Определение 1.8.** Семейство  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  называется полукольцом, если

1°.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .

2°.  $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}$ , а  $A \setminus B$  представимо в виде конечного дизъюнктного объединения элементов  $\mathcal{F}$ , то есть

$$\exists n \in \mathbb{N} : \exists A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} : A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n A_i, A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j : i \neq j.$$

Если множества попарно не пересекаются, то вводится обозначение:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n.$$

**Замечание.** Для любого семейства множеств  $\mathcal{F}$  под  $\text{FDU}(\mathcal{F})$  будем понимать семейство всех конечных дизъюнктных объединений элементов  $\mathcal{F}$  ( $\text{FDU}$  — finite disjoint union).

**Утверждение 1.9.**  $K_1$  — полукольцо.

**Определение 1.10.**  $K_d = \{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d, \text{ где } I_l \in K_1 \quad \forall l = \overline{1..d}\}$ ,  $d \in \mathbb{N}$  — семейство клеток в  $\mathbb{R}^d$ .

**Утверждение 1.11.**  $K_d$  — полукольцо.

**Определение 1.12.** Пусть  $\mathcal{F}$  — семейство подмножеств множества  $X$ . Введем обозначение:

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}) := \bigcap \{ \mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ — кольцо, } \mathcal{F} \in \mathcal{G} \} := \bigcap M.$$

$\mathcal{R}(\mathcal{F})$  называется кольцом порожденным  $\mathcal{F}$ .

**Теорема 1.13.**  $\mathcal{R}(\mathcal{F})$  является кольцом и  $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$ . При этом  $\mathcal{R}(\mathcal{F})$  — наименьшее по вложению кольцо  $\mathcal{S}$ , такое что  $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ .

◁ *Начало доказательства* -----

**Шаг 1.**  $\mathcal{R}$  — кольцо, так как

1.  $\emptyset \in \mathcal{R} : \forall \mathcal{G}$  выполнено  $\emptyset \in \mathcal{G}$ .
2.  $\forall A, B$  верно, что  $A, B \in \mathcal{G}$ , но  $\mathcal{G}$  — кольцо, поэтому  $A \cup B \in \mathcal{G}$  и  $A \setminus B \in \mathcal{G}$ . Таким образом и пересечению данные множества принадлежат.

**Шаг 2.** Если  $\mathcal{S}$  — кольцо и  $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ , то  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ , так как  $\mathcal{S} \in M \Rightarrow \bigcap M \subset \mathcal{S}$ .

----- ▷ *Конец доказательства*

**Замечание.** Доказательство основано на том факте, что если  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  — кольца, то  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  — тоже кольцо.

Опишем структуру кольца, порожденного полукольцом.

**Теорема 1.14.** Пусть  $\mathcal{S}$  — полукольцо. Тогда

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigsqcup_{l=1}^n A_l : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}, A_i \cap A_j = \emptyset : i \neq j \right\} = \text{FDU}(\mathcal{S}).$$

**Лемма 1.15.** Ослабим условие теоремы выше. Тогда все равно:

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{l=1}^n A_l : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} : \forall i = \overline{1..n} \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

◁ *Начало доказательства* -----

Пусть  $R = \{ \bigcup_{l=1}^n A_l : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} : \forall i = \overline{1..n} \}$ . Ясно, что  $R \subset \mathcal{R}(\mathcal{S})$ . Докажем в обратную сторону. Для этого достаточно доказать, что  $R$  — кольцо, тогда сразу выполнится  $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subset R$ .

Пустое множество очевидно лежит в  $R \cup \{\emptyset\}$ .

Пусть  $P = \bigcup_{k=1}^n A_k, A_k \in \mathcal{S}$  и  $Q = \bigcup_{l=1}^m B_l, B_l \in \mathcal{S}$ . Тогда, во-первых,

$$P \cup Q = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m \in R.$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} P \setminus Q &= \bigcup_{k=1}^n \left( A_k \setminus \bigcup_{l=1}^m B_l \right) = \bigcup_{k=1}^n \left( A_k \cap \left( \bigcup_{l=1}^m B_l \right)^C \right) = \\ &= \bigcup_{k=1}^n \left( A_k \cap \left( \bigcap_{l=1}^m B_l^C \right) \right) = \bigcup_{k=1}^n \bigcap_{l=1}^m A_k \cap B_l^C = \bigcup_{k=1}^n \bigcap_{l=1}^m A_k \setminus B_l. \end{aligned}$$

Далее имеем  $A_k, B_l \in \mathcal{S} \Rightarrow A_k \setminus B_l \in \text{FDU}(\mathcal{S}) \Rightarrow A_k \setminus B_l = \bigsqcup_{i=1}^{N_{k,l}} S_i \Rightarrow \bigcap_{l=1}^m A_k \setminus B_l \in \text{FDU}(\mathcal{S})$ .

----- Конец доказательства  $\triangleright$