Федеральное государственное автономное учреждение высшего образования

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

IV СЕМЕСТР

Физтех-школа: *ФПМИ*

Направления: *ПМФ*

Лектор: *Гусев Николай Анатольевич*

Автор: *Максим Иванов*

Долгопрудный, 2021 год.

Содержание

Лекция 1: Различные системы множеств.

В этом курсе имеется дело с функциями, аргументами которых являются множества.

Определение 1.1. Мерой на множестве X называется функция $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, где $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств X.

На $\mathcal{F}$ нужно наложить некоторые ограничения, потому как если, к примеру, определена мера для двух множеств, то логично было бы, чтобы была определена мера и на их сумме, пересечении, объеденении. Отсюда вытекают такие понятия как:

Определение 1.2. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X (далее используется обозначение $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) \equiv 2^X$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X) называется σ-алгеброй, если

1°. $\varnothing \in \mathcal{F}$.

2°. $\forall A,\, B \in \mathcal{F} :\; A \cap B \in \mathcal{F},\, A \cup B \in \mathcal{F},\, A \setminus B \equiv A \cap B^C \in \mathcal{F}$, где $B^C = X \setminus B$.

3°. $X \in \mathcal{F}$.

4°. $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ выполнено, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},\; \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Определение 1.3. $\mathcal{F}$ — кольцо если выполняются условия 1° и 2°.

Определение 1.4. $\mathcal{F}$ — алгебра если выполняются условия 1°, 2° и 3°.

Замечание. *Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, тогда $\forall A \in \mathcal{F} :\; A^C = X \setminus A \in \mathcal{F}$. Тогда*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{CC} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^C\right)^C.$$

Поэтому можно сказать, что вторая часть в условии 4° избыточно. Абсолютно аналогично и в обратную сторону, то есть эти два требования равносильны.

Замечание. *Пусть $\mathcal{F}$ — кольцо, тогда $A \cap B = A \cap \left(B^{CC}\right) = A \setminus B^C = A \setminus (X \setminus B) = A \setminus (A \setminus B)$. То есть требование замкнутости по пересечению в свойстве 2° избыточно.*

Пример 1.5. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех ограниченных подмножеств множества $\mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F}$ — кольцо, но не алгебра.

Определение 1.6. Кольцо $\mathcal{F}$ называется

a) σ-кольцом, если $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ выполнено, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

b) δ-кольцом, если $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ выполнено, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Замечание. *Любое σ-кольцо является δ-кольцом, но обратное неверно.*

Определение 1.7. Множество $I \subset \mathbb{R}$ называется промежутком, если $\forall a, b \in I$: $[a, b] \subset I$. Промежуток I называется конечным, если он ограничен.
Например, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ — промежутки.

Пусть K_1 — семейство всех конечных промежутков на прямой. Легко заметить, что это не кольцо (объединение промежутков — не всегда промежуток). Отсюда вытекает новая структура:

Определение 1.8. Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ называется полукольцом, если

1°. $\varnothing \in \mathcal{F}$.

2°. $\forall A, B \in \mathcal{F} :\ A \cap B \in \mathcal{F}$, а $A \setminus B$ представимо в виде конечного дизъюнктного объединения элементов $\mathcal{F}$, то есть

$$\exists n \in \mathbb{N} :\ \exists A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} :\ A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i, j : i \neq j.$$

Если множества попарно не пересекаются, то вводиться обозначение:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n.$$

Замечание. *Для любого семейства множеств $\mathcal{F}$ под $\mathrm{FDU}(\mathcal{F})$ будем понимать семейство всех конечных дизъюнктных объединений элементов $\mathcal{F}$ (FDU — finite disjoint union).*

Утверждение 1.9. *K_1 — полукольцо.*

Определение 1.10. $K_d = \{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$, где $I_l \in K_1 \quad \forall l = \overline{1..d}\}$, $d \in \mathbb{N}$ — семейство клеток в $\mathbb{R}^d$.

Утверждение 1.11. *K_d — полукольцо.*

Определение 1.12. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств множества X. Введем обозначение:

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ — кольцо, } \mathcal{F} \in \mathcal{G}\} := \bigcap M.$$

$\mathcal{R}(\mathcal{F})$ называется кольцом порожденным $\mathcal{F}$.

Теорема 1.13. *$\mathcal{R}(\mathcal{F})$ является кольцом и $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$. При этом $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ — наименьшее по вложению кольцо $\mathcal{S}$, такое что $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$.*

◁ *Начало доказательства* – - – - – - – - – - – - – - – - – - –

Шаг 1. *$\mathcal{R}$ — кольцо, так как*

1. *$\varnothing \in \mathcal{R}$: $\forall \mathcal{G}$ выполнено $\varnothing \in \mathcal{G}$.*

2. *$\forall A$, B верно, что A, $B \in \mathcal{G}$, но $\mathcal{G}$ — кольцо, поэтому $A \cup B \in \mathcal{G}$ и $A \setminus B \in \mathcal{G}$. Таким образом и пересечению данные множества принадлежат.*

Шаг 2. *Если $\mathcal{S}$ — кольцо и $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, то $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, так как $\mathcal{S} \in M \Rightarrow \bigcap M \subset \mathcal{S}$.*

– - – - – - – - – - – - – - – - – - – *Конец доказательства* ▷

Замечание. *Доказательство основано на том факте, что если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — кольца, то $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ — тоже кольцо.*

Опишем структуру кольца, порожденного полукольцом.

Теорема 1.14. *Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо. Тогда*

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigsqcup_{l=1}^{n} A_l : n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}, A_i \cap A_j = \varnothing : i \neq j \right\} = \mathrm{FDU}(\mathcal{S}).$$

Лемма 1.15. *Ослабим условие теоремы выше. Тогда все равно:*

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{l=1}^{n} A_l : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} : \forall i = \overline{1..n} \right\} \cup \{\varnothing\}.$$

◁ *Начало доказательства* – - – - – - – - – - – - – - – - – - –

Пусть $R = \{\bigcup_{l=1}^{n} A_l : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} : \forall i = \overline{1..n}\}$. Ясно, что $R \subset \mathcal{R}(\mathcal{S})$. Докажем в обратную сторону. Для этого достаточно доказать, что R — кольцо, тогда сразу выполнится $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subset R$.

Пустое множество очевидно лежит в $R \cup \{\varnothing\}$.

Пусть $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \mathcal{S}$ и $Q = \bigcup\limits_{l=1}^{m} B_l$, $B_l \in \mathcal{S}$. Тогда, во-первых,

$$P \cup Q = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m \in R.$$

Во-вторых,

$$P \setminus Q = \bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l \right) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \bigcap \left(\bigcup_{l=1}^{m} B_l \right)^C \right) =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \bigcap \left(\bigcup_{l=1}^{m} B_l^C \right) \right) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{l=1}^{m} A_k \cap B_l^C = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{l=1}^{m} A_k \setminus B_l.$$

Далее имеем $A_k,\, B_l \in \mathcal{S} \Rightarrow A_k \setminus B_l \in \mathrm{FDU}(\mathcal{S}) \Rightarrow A_k \setminus B_l = \bigsqcup_{i=1}^{N_{k,l}} S_i \Rightarrow \bigcap_{l=1}^{m} A_k \setminus B_l \in \mathrm{FDU}(\mathcal{S})$.

Конец доказательства ▷