Федеральное государственное автономное учреждение
высшего образования

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

МЕРА
И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

IV СЕМЕСТР

Физтех-школа: *ФПМИ*

Направления: *ПМФ*

Лектор: *Гусев Николай Анатольевич*

Автор: *Максим Иванов*

Долгопрудный, 2021 год.

Содержание

Лекция 1: Различные системы множеств.

В этом курсе имеется дело с функциями, аргументами которых являются множества.

Определение 1.1. Мерой на множестве X называется функция $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, где $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств X.

На $\mathcal{F}$ нужно наложить некоторые ограничения, потому как если, к примеру, определена мера для двух множеств, то логично было бы, чтобы была определена мера и на их сумме, пересечении, объеденении. Отсюда вытекают такие понятия как:

Определение 1.2. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X (далее используется обозначение $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) \equiv 2^X$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X) называется σ-алгеброй, если

1°. $\varnothing \in \mathcal{F}$.

2°. $\forall A,\, B \in \mathcal{F} :\; A \cap B \in \mathcal{F},\; A \cup B \in \mathcal{F},\; A \setminus B \equiv A \cap B^C \in \mathcal{F}$, где $B^C = X \setminus B$.

3°. $X \in \mathcal{F}$.

4°. $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ выполнено, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},\; \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Определение 1.3. $\mathcal{F}$ — кольцо если выполняются условия 1° и 2°.

Определение 1.4. $\mathcal{F}$ — алгебра если выполняются условия 1°, 2° и 3°.

Замечание. *Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, тогда $\forall A \in \mathcal{F} :\; A^C = X \setminus A \in \mathcal{F}$. Тогда*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{CC} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^C\right)^{C}.$$

Поэтому можно сказать, что вторая часть в условии 4° избыточна. Абсолютно аналогично и в обратную сторону, то есть эти два требования равносильны.

Замечание. *Пусть $\mathcal{F}$ — кольцо, тогда $A \cap B = A \cap \left(B^{CC}\right) = A \setminus B^C = A \setminus (X \setminus B) = A \setminus (A \setminus B)$. То есть требование замкнутости по пересечению в свойстве 2° избыточно.*

Пример 1.5. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех ограниченных подмножеств множества $\mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F}$ — кольцо, но не алгебра.

Определение 1.6. Кольцо $\mathcal{F}$ называется

a) σ-кольцом, если $\forall\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ выполнено, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

b) δ-кольцом, если $\forall\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ выполнено, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Замечание. *Любое σ-кольцо является δ-кольцом, но обратное неверно.*

Определение 1.7. Множество $I \subset \mathbb{R}$ называется промежутком, если $\forall a,\, b \in I$: $[a,\, b] \subset I$. Промежуток I называется конечным, если он ограничен.
Например, $[a,\, b]$, $(a,\, b)$, $[a,\, b)$, $(a,\, b]$ — промежутки.

Пусть K_1 — семейство всех конечных промежутков на прямой. Легко заметить, что это не кольцо (объединение промежутков — не всегда промежуток). Отсюда вытекает новая структура:

Определение 1.8. Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ называется полукольцом, если

1°. $\varnothing \in \mathcal{F}$.

2°. $\forall A,\, B \in \mathcal{F}:\ A \cap B \in \mathcal{F}$, а $A \setminus B$ представимо в виде конечного дизъюнктного объединения элементов $\mathcal{F}$, то есть

$$\exists n \in \mathbb{N}:\ \exists A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}:\ A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i, j : i \neq j.$$

Если множества попарно не пересекаются, то вводиться обозначение:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n.$$

Замечание. *Для любого семейства множеств $\mathcal{F}$ под* $\mathrm{FDU}(\mathcal{F})$ *будем понимать семейство всех конечных дизъюнктных объединений элементов $\mathcal{F}$ (FDU — finite disjoint union).*

Утверждение 1.9. K_1 — полукольцо.

Определение 1.10. $K_d = \{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$, где $I_l \in K_1 \quad \forall l = \overline{1..d}\}$, $d \in \mathbb{N}$ — семейство клеток в $\mathbb{R}^d$.

Утверждение 1.11. K_d — полукольцо.

Определение 1.12. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств множества X. Введем обозначение:

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{G} : \mathcal{G} — \text{кольцо}, \mathcal{F} \in \mathcal{G}\} := \bigcap M.$$

$\mathcal{R}(\mathcal{F})$ называется кольцом порожденным $\mathcal{F}$.

Теорема 1.13. $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ является кольцом и $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$. При этом $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ — наименьшее по вложению кольцо $\mathcal{S}$, такое что $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$.

◁ *Начало доказательства*

Шаг 1. *$\mathcal{R}$ — кольцо, так как*

1. *$\varnothing \in \mathcal{R}$: $\forall \mathcal{G}$ выполнено $\varnothing \in \mathcal{G}$.*
2. *$\forall A, B$ верно, что $A, B \in \mathcal{G}$, но $\mathcal{G}$ — кольцо, поэтому $A \cup B \in \mathcal{G}$ и $A \setminus B \in \mathcal{G}$. Таким образом и пересечению данные множества принадлежат.*

Шаг 2. *Если $\mathcal{S}$ — кольцо и $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, то $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, так как $\mathcal{S} \in M \Rightarrow \bigcap M \subset \mathcal{S}$.*

Конец доказательства ▷

Замечание. *Доказательство основано на том факте, что если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — кольца, то $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ — тоже кольцо.*

Опишем структуру кольца, порожденного полукольцом.

Теорема 1.14. Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо. Тогда

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigsqcup_{l=1}^{n} A_l : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}, A_i \cap A_j = \varnothing : i \neq j \right\} = \mathrm{FDU}(\mathcal{S}).$$

Лемма 1.15. Ослабим условие теоремы выше. Тогда все равно:

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{l=1}^{n} A_l : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} : \forall i = \overline{1..n} \right\} \cup \{\varnothing\}.$$

◁ *Начало доказательства*

Пусть $R = \left\{\bigcup_{l=1}^{n} A_l : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} : \forall i = \overline{1..n}\right\}$. Ясно, что $R \subset \mathcal{R}(\mathcal{S})$. Докажем в обратную сторону. Для этого достаточно доказать, что R — кольцо, тогда сразу выполнится $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subset R$.

Пустое множество очевидно лежит в $R \cup \{\varnothing\}$.

Пусть $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \mathcal{S}$ и $Q = \bigcup\limits_{l=1}^{m} B_l$, $B_l \in \mathcal{S}$. Тогда, во-первых,

$$P \cup Q = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m \in R.$$

Во-вторых,

$$P \setminus Q = \bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l\right) = \bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k \bigcap \left(\bigcup_{l=1}^{m} B_l\right)^C\right) =$$
$$= \bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k \bigcap \left(\bigcap_{l=1}^{m} B_l^C\right)\right) = \bigcup_{k=1}^{n}\bigcap_{l=1}^{m} A_k \cap B_l^C = \bigcup_{k=1}^{n}\bigcap_{l=1}^{m} A_k \setminus B_l.$$

Далее имеем $A_k,\ B_l \in \mathcal{S} \Rightarrow A_k \setminus B_l \in \mathrm{FDU}(\mathcal{S}) \Rightarrow A_k \setminus B_l = \bigsqcup_{i=1}^{N_{k,l}} S_i \Rightarrow \bigcap_{l=1}^{m} A_k \setminus B_l \in \mathrm{FDU}(\mathcal{S})$.

Конец доказательства $\triangleright$

Лекция 2: Сигма-алгебры.

2.1 Разбор задач с лекции 1.

1. Показать, что любое σ-кольцо является δ-кольцом, а также, что обратное неверно.

◁ *Начало доказательства*

$\Rightarrow$ *Выразим счетное объеденение через счетное пересечение:*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i)$$

$\Leftarrow$ *Контрпример: Множество всех ограниченных подмножеств прямой или более формально:* $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} : A$ *— ограничено*$\}$.

Конец доказательства ▷

Замечание. *Можно заметить, что δ-алгебра является σ-алгеброй. Доказательство по существу такое же, как выше, но вместо A_1 фигурирует единица кольца.*

2. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}$ и $A \cup B \in \mathcal{F}$. Верно ли что $\mathcal{F}$ — полукольцо?

◁ *Начало доказательства*

Неверно. *Контрпример:* $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$

Конец доказательства ▷

3. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ — кольцо, $E \subset X$, $E \notin \mathcal{F}$. Найти (описать) кольцо, порожденное семейством $\mathcal{F} \cup E$.

◁ *Начало доказательства*

$$\mathcal{R}(\mathcal{F} \cup E) = \{A \setminus E, E \setminus A, A \cap E, A \cup E \mid A \in \mathcal{F} \cup E\} \cup \mathcal{F}. \tag{1}$$

Обозначим множество, простроенное в формуле (1) $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ является кольцом, так как:

1. $\varnothing \in \mathcal{F} \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{G}$;
2. *Замкнутость для любых $A, B \in \mathcal{F}$ — очевидна. Замкнутость для любого $A \in \mathcal{F}$ и E выполняется благодаря левой части.*

Минимальность очевидна. @О.В. Бесов.

Конец доказательства ▷

2.2 Теорема о структуре кольца, порожденного полукольцом.

Замечание. *Если $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, то $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{G})$.*

Данное замечание можно использовать для упрощения доказательства леммы 1.15.

Лемма 2.1. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ — полукольцо и $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$. Тогда имеем $A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathrm{FDU}(\mathcal{S})$. Другими словами $\exists B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{S}: B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$.

◁ *Начало доказательства*

Докажем по индукции по n.

При $n = 1$ утверждение следует из определения полукольца.

Допустим утверждение выполнение для n, а именно, что $\exists B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{S} : B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} B_j$. Докажем для $n+1$.

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \setminus A_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{k} \left(B_i \setminus A_{n+1} \right).$$

Далее по определению полукольца имеем: $B_i \setminus A_{n+1} = \bigcup\limits_{l=1}^{N_i} C_{il}$, где $C_{il} \in \mathcal{S}$ и $B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j \Rightarrow C_{il} \cap C_{js} = \varnothing$ если $(i, l) \neq (j, s)$. Значит можно продолжить

$$\bigsqcup_{i=1}^{k} (B_i \setminus A_{n+1}) = \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{l=1}^{N_i} C_{il}.$$

Проще говоря, множество $B_i \setminus A_{n+1}$ можно дизъюнктно разбить на некоторые множества C_{il}. И такие можества не будут пересекаться, а значит их дизъюнктное объеденение и даст требуемое.

Конец доказательства ▷

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ — полукольцо. Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathrm{FDU}(\mathcal{S})$.

◁ *Начало доказательства*

Введем обозначения:

$$B_1 = A_1 \in \mathcal{S}$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1 \in \mathrm{FDU}(\mathcal{S}) \ \textit{(по определению полукольца)}$$

$$\ldots$$

$$B_{k+1} = A_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathrm{FDU}(\mathcal{S}) \ \textit{(по лемме 2.1)}$$

По построению $B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j$, поэтому $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i \in \mathrm{FDU}(\mathcal{S})$.

Конец доказательства ▷

Замечание. *Если* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, *то* $\forall B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{FDU}(\mathcal{F})$ *таких, что* $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$ *выполнено* $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i \in \mathrm{FDU}(\mathcal{F})$.

Следствие. *Теорема 1.14.*

◁ *Начало доказательства*

По лемме 1.15 $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}: \ A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. *И по лемме 2.2* $\exists$ *попарно не пересекающиеся* $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{S}: \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$.

Конец доказательства ▷

2.3 Сигма-алгебра.

Напомним основное понятие:

Определение 2.3. σ-кольцо $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ называется σ-алгеброй, если $X \in \mathcal{F}$.

Утверждение 2.4 (Критерий σ-алгебры)**.** Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ является σ-алгеброй тогда и только тогда, когда выполнены следующие свойства:

1°. $\varnothing \in \mathcal{F}$;

2°. $\forall A \in \mathcal{F} \quad A^C = X \setminus A \in \mathcal{F}$;

3°. $\forall A, B \in \mathcal{F} \quad A \cap B \in \mathcal{F}$;

4°. $\forall$ дизъюнктного $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ (то есть $A_k \in \mathcal{F}, \forall k$ и $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i, j, i \neq j$) выполнено $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

◁ *Начало доказательства*

(⇒) *Очевидно из определения σ-алгебры.*

(⇐) *Докажем, что из пунктов 1°, 2°, 3° следует, что $\mathcal{F}$ — алгебра.*

- $\varnothing \in \mathcal{F}$ *и* $X = \varnothing^C \Rightarrow X \in \mathcal{F}$;
- $A \setminus B = A \cap B^C \in \mathcal{F}$ *(пункты 1° и 2°).*

Замечание. *Доказывать замкнутость по объединению не нужно в силу замечания об эквивалентности условий (1).*

Осталось доказать, что при условии 4°, то $\mathcal{F}$ — σ-алгебра. Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Докажем, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$. Рассмотрим:

$$B_1 = A_1 \in \mathcal{S}$$
$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$
$$\dots$$
$$B_{k+1} = A_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

Так как было уже доказано, что $\mathcal{F}$ — алгебра, то все $B_i \in \mathcal{F}$. По построению $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j \Rightarrow$ по пункту 4° имеем $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$, с другой стороны $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Конец доказательства ▷

Определение 2.5. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Сигма-алгеброй, порожденной семейством $\mathcal{F}$, называется семейство

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X) \text{ — } \sigma\text{-алгебра такая, что } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}\}$$

Замечание. *Доказательство того, что построенное множество является σ-алгеброй по существу аналогично доказательству теоремы 1.13. Причем $\sigma(\mathcal{F})$ — минимальная по вложению σ-алгебра $\mathcal{G}$ такая, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.*

Определение 2.6. Пусть $\tau = \{U \subset \mathbb{R}^d : U \text{ — открыто}\}$ (то есть τ — евклидова топология).
Множество называется открытым если вместе с любой своей точкой содержит некоторый шарик радиуса r, где под расстоянием понимается евклидова метрика: $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2}$.

Определение 2.7. $\sigma(\tau)$ называется борелевской σ-алгеброй. Обозначение $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$.

Замечание. *Аналогичное определение можно ввести для любого метрического пространства.*

Утверждение 2.8. Если K_d — семейство всех клеток в $\mathbb{R}^d$, то $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(K_d)$.