

Федеральное государственное автономное учреждение
высшего образования

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

М Е Р А
И И Н Т Е Г Р А Л Л Е Б Е Г А

IV СЕМЕСТР

Физтех-школа: ФПМИ

Направления: ПМФ

Лектор: Гусев Николай Анатольевич

h/nu

Автор: *Фамилия Имя*
Проект на GitHub

Долгопрудный, 2021 год.

Содержание

1	Лекция 1: Различные системы множеств.	3
---	---------------------------------------	---

Лекция 1: Различные системы множеств.

В этом курсе имеется дело с функциями, аргументами которых являются множества.

Определение 1. Мерой на множестве X называется функция $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$, где \mathcal{F} — семейство подмножеств X .

На \mathcal{F} нужно наложить некоторые ограничения, потому как если, к примеру, определена мера для двух множеств, то логично было бы, чтобы была определена мера и на их сумме, пересечении, объединении. Отсюда вытекают такие понятия как:

Определение 2. Семейство \mathcal{F} подмножеств множества X (далее используется обозначение $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) \equiv 2^X$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X) называется σ -алгеброй, если

1°. $\emptyset \in \mathcal{F}$.

2°. $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}, A \cup B \in \mathcal{F}, A \setminus B \equiv A \cap B^C \in \mathcal{F}$, где $B^C = X \setminus B$.

3°. $X \in \mathcal{F}$.

4°. $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ выполнено, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Определение 3. \mathcal{F} — кольцо если выполняются условия 1° и 2°.

Определение 4. \mathcal{F} — алгебра если выполняются условия 1°, 2° и 3°.

Примечание. Пусть \mathcal{F} — σ -алгебра, тогда $\forall A \in \mathcal{F} : A^C = X \setminus A \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^{CC} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^C \right)^C.$$

Поэтому можно сказать, что вторая часть в условии 4° избыточно. Абсолютно аналогично и в обратную сторону, то есть эти два требования равносильны.

Примечание. Пусть \mathcal{F} — кольцо, тогда $A \cap B = A \cap (B^{CC}) = A \setminus B^C = A \setminus (X \setminus B) = A \setminus (A \setminus B)$. То есть требование замкнутости по пересечению в свойстве 2° избыточно.

Пример. Пусть \mathcal{F} — семейство всех ограниченных подмножеств множества \mathbb{R} . Тогда \mathcal{F} — кольцо, но не алгебра.

Определение 5. Кольцо \mathcal{F} называется

а) σ -кольцом, если $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ выполнено, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

b) δ -кольцом, если $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ выполнено, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Примечание. Любое σ -кольцо является δ -кольцом, но обратное неверно.

Определение 6. Множество $I \subset \mathbb{R}$ называется промежутком, если $\forall a, b \in I : [a, b] \subset I$.

Промежуток I называется конечным, если он ограничен.

Например, $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ — промежутки.

Пусть K_1 — семейство всех конечных промежутков на прямой. Легко заметить, что это не кольцо (объединение промежутков — не всегда промежуток). Отсюда вытекает новая структура:

Определение 7. Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ называется полукольцом, если

1°. $\emptyset \in \mathcal{F}$.

2°. $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}$, а $A \setminus B$ представимо в виде конечного дизъюнктного объединения элементов \mathcal{F} , то есть

$$\exists n \in \mathbb{N} : \exists A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} : A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n A_i, A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j : i \neq j.$$

Если множества попарно не пересекаются, то вводится обозначение:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n.$$

Примечание. Для любого семейства множеств \mathcal{F} под $\text{FDU}(\mathcal{F})$ будем понимать семейство всех конечных дизъюнктных объединений элементов \mathcal{F} (FDU — finite disjoint union).

Утверждение. K_1 — полукольцо.

Определение 8. $K_d = \{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d, \text{ где } I_l \in K_1 \quad \forall l = \overline{1..d}\}$, $d \in \mathbb{N}$ — семейство клеток в \mathbb{R}^d .

Утверждение. K_d — полукольцо.

Определение 9. Пусть \mathcal{F} — семейство подмножеств множества X . Введем обозначение:

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ — кольцо, } \mathcal{F} \in \mathcal{G}\} := \bigcap M.$$

$\mathcal{R}(\mathcal{F})$ называется кольцом порожденным \mathcal{F} .

Теорема 1.1. $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ является кольцом и $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$. При этом $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ — наименьшее по вложению кольцо \mathcal{S} , такое что $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$.

Доказательство. **Шаг 1.** \mathcal{R} — кольцо, так как

1. $\emptyset \in \mathcal{R} : \forall \mathcal{G}$ выполнено $\emptyset \in \mathcal{G}$.
2. $\forall A, B$ верно, что $A, B \in \mathcal{G}$, но \mathcal{G} — кольцо, поэтому $A \cup B \in \mathcal{G}$ и $A \setminus B \in \mathcal{G}$. Таким образом и пересечению данные множества принадлежат.

Шаг 2. Если \mathcal{S} — кольцо и $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, то $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, так как $\mathcal{S} \in M \Rightarrow \bigcap M \subset \mathcal{S}$. \square

Примечание. Доказательство основано на том факте, что если \mathcal{F} и \mathcal{G} — кольца, то $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ — тоже кольцо.

Опишем структуру кольца, порожденного полукольцом.

Теорема 1.2. Пусть \mathcal{S} — полукольцо. Тогда

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{l=1}^n A_l : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}, A_i \cap A_j = \emptyset : i \neq j \right\} = \text{FDU}(\mathcal{S}).$$

Лемма 1.1. Ослабим условие теоремы выше. Тогда все равно:

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{l=1}^n A_l : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} : \forall i = \overline{1..n} \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

Доказательство. Пусть $R = \left\{ \bigcup_{l=1}^n A_l : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} : \forall i = \overline{1..n} \right\}$. Ясно, что $R \subset \mathcal{R}(\mathcal{S})$. Докажем в обратную сторону. Для этого достаточно доказать, что R — кольцо, тогда сразу выполнится $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subset R$.

Пустое множество очевидно лежит в $R \cup \{\emptyset\}$.

Пусть $P = \bigcup_{k=1}^n A_k, A_k \in \mathcal{S}$ и $Q = \bigcup_{l=1}^m B_l, B_l \in \mathcal{S}$. Тогда, во-первых,

$$P \cup Q = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m \in R.$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} P \setminus Q &= \bigcup_{k=1}^n \left(A_k \setminus \bigcup_{l=1}^m B_l \right) = \bigcup_{k=1}^n \left(A_k \cap \left(\bigcup_{l=1}^m B_l \right)^C \right) = \\ &= \bigcup_{k=1}^n \left(A_k \cap \left(\bigcup_{l=1}^m B_l^C \right) \right) = \bigcup_{k=1}^n \bigcap_{l=1}^m A_k \cap B_l^C = \bigcup_{k=1}^n \bigcap_{l=1}^m A_k \setminus B_l. \end{aligned}$$

Далее имеем $A_k, B_l \in \mathcal{S} \Rightarrow A_k \setminus B_l \in \text{FDU}(\mathcal{S}) \Rightarrow A_k \setminus B_l = \bigsqcup_{i=1}^{N_{k,l}} S_i \Rightarrow \bigcap_{l=1}^m A_k \setminus B_l \in \text{FDU}(\mathcal{S})$. \square