HAUSARBEIT

im Modul *Mathematisches Seminar 1*

über das Thema

Muster aus bunten Steinen

Verfasser

Thi Kim Yen Le

Ort, im Monat Januar 20xx

Martrikelnummer: 5285804

Studiengang: Wirtschaftsmathematik B.Sc.

Betreuer: Prof. Dr. Andreas Görgcc

Abstract

"Die Zahl ist das Wesen aller Dinge."

"Das Universum ist auf der Macht der Zahlen aufgebaut."

- Pythagoras von Samos, 570-500 v.Chr., griechischer Philosoph und Mathematiker -

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Je mehr man sich in die Materie der Mathematik vertieft, umso intensiver bedient man sich des reichen Vorrats an abstrakten mathematischen Symbolen, um Gleichungen und logische Aussagen kompakt und präzise auszudrücken. Möchte ein mathematisch versierter Mensch z.B. die Gauß'sche Summenformel herleiten und nachweisen, tendiert er meist dazu, dies durch trockene Gleichungen und langwierige Induktionsschritte zu bewerkstelligen. Das resultiert in eine oft für den Laien kompliziert aussehende Beweisführung, die ihm schnell die Lust auf schöne Mathematik verderben lässt. Dabei kann die Mathematik auch mal bunt und attraktiv im wahrsten Sinne des Wortes sein, wie sie in dieser Seminararbeit dargestellt wird.

Diese Arbeit entstand im Rahmen des im Sommersemester 2021 unter der Leitung des Herrn Prof. Dr. Andreas Görg stattfindenden *mathematischen Seminars*. Wie auch der Titel erahnen lässt, werden in dieser Arbeit mit Hilfe der *unterschiedlich gefärbten Steinen* mehrere Summenformeln (Summe der ersten n natürlichen Zahlen, Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen, Quotienten von Summen ungerader natürlicher Zahlen et cetera) auf äußerst anschauliche, visuelle und einfache Weise hergeleitet. Diese bildhafte Methode der *Mustern aus bunten Steinen* wurde ebenfalls seit dem 5. Jahrhundert v. Chr. von den Pythagoreern angewandt, um verschiedene mathematische Gesetzmäßigkeiten zu veranschaulichen.

2 Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

Das einfachste Muster ist, dass die Steine in einer rechtwinkligen Dreiecksform angeordnet sind und die Anzahl der Steine von oben nach unten jeweils um eins zunimmt.

Es stellt sich hier die Frage, was die Summe $1+2+3+\cdots+10$ beträgt?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachtet man die Figur in folgender Abbildung 2.1. Dabei legt man die blauen Steine in einer rechtwinkliger Dreicksform von oben nach unten in aufsteigender Anzahl aus. Danach verdoppelt man die Figur, indem man gleich viele rote Steine von unten nach oben in absteigender Anzahl legt. Dadurch bekommt man ein rechteckiges Muster mit insgesamt $10 \cdot 11 = 110$ Steinen. Das gesuchte Ergebnis ist: $\frac{1}{2} \cdot 110 = 55$

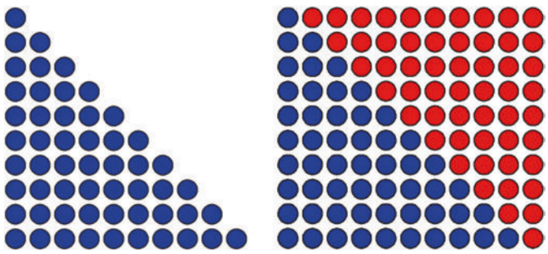

Abbildung 2.1: Muster aus bunten Steinen in Dreicksform

Die Summenformel der ersten n natürlichen Zahlen:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Mit der Gaußschen Summenformel lässt sich die Summe aller natürlichen Zahlen bis zu einer Obergrenze n berechnen. Sie lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

***Beweis durch vollständige Induktion*.**

- Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$$

- Induktionsvoraussetzung:
  Es gelte
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

- Induktionsschritt: $n = n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + (n+1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)
\end{aligned}$$

□

***Aufgabe 2.1*: ** Bestimmen Sie systematisch die Summe der ersten n natürlichen Zahlen mit größtem Summanden $n = 1, 2, 3, \ldots, 20$.

***Lösung*:**
$$\sum_{i=1}^{20} i = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (20+1) = 210$$

***Aufgabe 2.2*: ** Bis zu welcher natürlichen Zahlen n muss man summieren, bis die Summe 100 [1000; 1.000.000] überschritten wird?

***Lösung*: ** Man muss bis zu den natürlichen Zahlen 14, 45 und 1414 jeweils summieren, bis die Summe 100, 1000 und 1.000.000 überschritten wird.

3 Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

Mit Hilfe von farbigen Edelsteinen lassen sich quadratische Muster auch auf andere Weise erzeugen. Ein quadratischer Haken, der sogenannte *Gnomon*, mit andersfarbigen Steinen wird um ein vorhandene Steinquadrat aus $m \cdots m$ gelegt. Dafür werden $m+1+m$, d.h. $2m+1$, Steine benötigt. Das entspricht einer ungerade Anzahl von Steinen.

Ein paare einfache Beispiele:

$$
\begin{aligned}
&1+3=4=2^2\\
&1+3+5=9=3^2\\
&1+3+5+7=16=4^2\\
&1+3+5+7+9=25=5^2\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Regel: Summe der ersten n ungeraden Zahlen

Die Folge der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen kann als quadratisches Muster von Winkelhaken dargestellt werden.

Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist gleich der Quadratzahl n^2.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \tag{3.1}$$

***Beweis durch vollständige Induktion*.**

- Induktionsanfang: $n=1$
$$\sum_{i=1}^{1}(2\cdot 1-1)=1=1^2$$
- Induktionsvoraussetzung:
Es gelte
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$
- Induktionsschritt: $n=n+1$
$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)+2(n+1)-1\\
&= n^2+2n+1\\
&= (n+1)^2
\end{aligned}
$$

□

Beispiel. Summe der ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 9.

Zur Lösung dieses Beispiels kann man entweder die oben genannte Formel verwenden:

$$\sum_{i=1}^{5}(2i-1) = 5^2 = 25$$

Oder man kann auch mit der Figur rechnen:

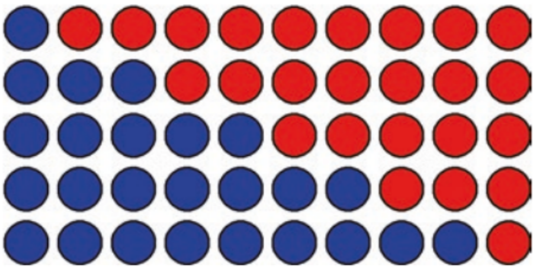

Abbildung 3.1: Muster aus bunten Steinen zur Berechnung der Summe der ungeraden Zahlen $1,3,5,7,9$

Zuerst legt man die blauen Steine in einer rechtwinkliger Dreicksform von oben nach unten in aufsteigender Anzahl $1,3,5,7,9$ aus. Danach verdoppelt man die Figur, indem man entsprechend viele rote Steine von unten nach oben in absteigender Anzahl legt. Als Resultat bekommt man eine Figure in Form eines Rechtecks. Das Doppelte der Summe $1+3+5+7+9$ ist gleich $5 \cdot 10 = 50$

Für die Summe $1+3+5+7+9$ ergibt sich der Wert $2 \cdot 50 = 25$.

***Aufgabe 2.5*:** Begründen Sie: Eine weitere Möglichkeit der Herleitung der Formel (3.1) ergibt sich durch eine vielfache achsensymmetrische Anordnung von Steinen.

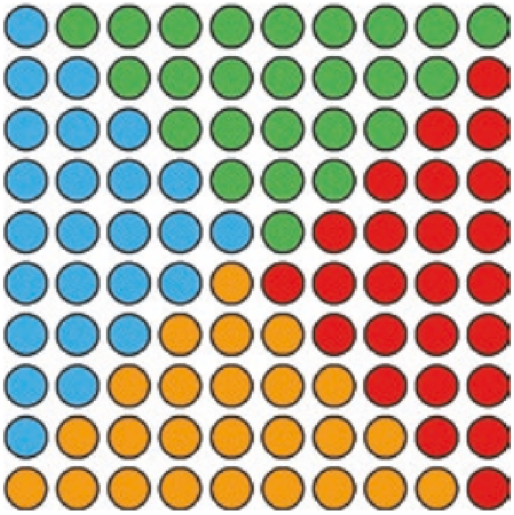

Abbildung 3.2

***Lösung*:**

$$4\cdot(1+3+5+7+9)=8\cdot(1+2+3+4+5)+4\cdot 5=8\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5=4\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5=4^2\cdot 5+4\cdot 5=4\cdot 5^2$$

4 Quotienten von Summen ungerader natürlicher Zahlen

Galileo Galilei (1564 - 1642) bemerkte, dass eine spezielle Eigenschaft für gerade Anzahl aufeinanderfolgender ungerader Zahlen erfüllt ist, nämlich:

Das Verhältnis (Quotient) der Summe der ersten Hälfte der ungeraden Zahlen zur Summe der verbleibenden Hälfte der natürlichen Zahlen beträgt immer $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots$$

Aus diesem Quotienten erhält man die allgemeine Formel:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+\dots+(2n+(2n-1))}$$

5 Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen

Es stehen zahlreiche Methoden zur Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zur Verfügung. Hier wird ein Beispiel zur Darstellung der Zahl 70 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen angeführt.

Um die Zahl 70 darzustellen, hat man drei Möglichkeiten. Die erste Möglichkeit ist die Aufteilung der Zahl 70 in zwei Mal 35. Diese führt zu einen Rechteck mit 2 Reihen mit jeweils 35 Steinen.

Abbildung 5.1: Aufteilung der Zahl 70 in zwei mal 35.

70 ist eine gerade, durch 5 teilbare natürliche Zahl. Man bildet 70 durch $5 \cdot 14$. Dadurch hat man ein Rechteck mit 5 Säulen, die jeweils 14 Steinen enthalten. Darüber hinaus gibt es eine alternative Methode, bei der die Zahl 14 um 1 oder 2 addiert oder subtrahiert wird, d.h. $70 = 12 + 13 + 14 + 15 + 16$. Also die Zahl 70 lässt sich als Summe von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahl darstellen.

6 Summe der ersten n Quadratzahlen von natürlichen Zahlen

Abu Ali al-Hasan Ibn al-Haitham (965-1039), der im Deutschen unter Alhazen und im Arabischen unter Ibn al-Haitham bekannt ist, war ein bedeutender arabischer Mathematiker und Physiker. Besondere wissenschaftliche Beiträge brachte er auf dem Gebiet der Optik und der experimentellen Methodik. Für seine Experimente auf diesem Gebiet gab man ihn den Beinamen "Vater der Optik". Es gilt als der Erfinder der Lupe und damit der Mikroskopie. Die Formel zur Bestimmung der Summe der ersten n Quadratzahlen von natürlichen Zahlen wurde ebenfalls von ihm entdeckt.

Abbildung 6.1: Mathematiker und Physiker Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham (965-1039).

Abbildungsverzeichnis