Hausarbeit

im Modul „Mathematisches Seminar 1"

über das Thema

„Muster aus bunten Steinen"

Verfasser: Thi Kim Yen Le
Matrikelnummer: 5285804
Studiengang: Wirtschaftsmathematik B.Sc.

Betreuer: Prof. Dr. Andreas Görg

Inhaltsverzeichnis

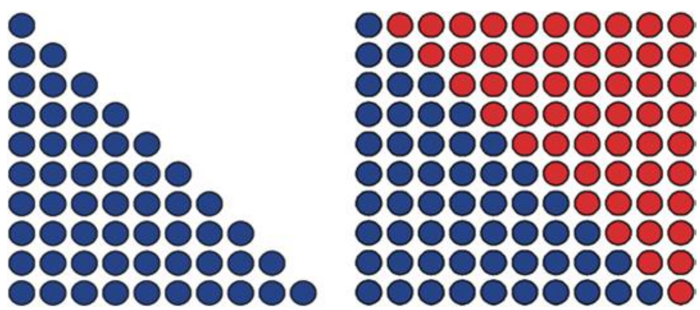
1. Einleitung

Liebe Leserin, lieber Leser,
dieses Dokument entstand im Rahmen des Seminars Mathematik des Sommersemesters 2021 unter der Leitung von Prof. Dr. Andreas Görg. Das Thema geht es um die Summe von natürlichen, ungeraden natürlichen, Quadratzahlen und Kubikzahlen von natürlichen Zahlen. „Bereits im 5. Jahrhundert v. Chr. Beschäftigten sich die Pythagoreer mit der Frage, wie man mathematische Gesetzmäßigkeiten veranschaulich kann. Hierzu benutzten sie unterschiedlich gefärbte bzw. helle und dunkle Steine.“ [1]

2. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

Das einfachste Muster ist, dass die Steine in einem Dreieck angeordnet sind, die Anzahl der Steine nimmt von oben nach unten um eins ab.
Es stellt sich hier die Frage: was ist 1+2+3+…+10?

Zur Lösung dieser Frage kann man die Figur sehen. Man legt die blaue aufsteingende Steine von oben nach unten. Danach verdoppelt man die rote absteingende Steine von unten nach oben. Damit bekommt man ein Rechteck-Muster mit insgesamt $10 \cdot 11 = 110$ Steinen. Das gesuchte Ergebnis ist: $\frac{1}{2}.110 = 55$



Die Formel der ersten n natürlichen Zahlen:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}.n.(n+1)$$

Mit der Gaußschen Summenformel lässt sich die Summe aller natürlichen Zahlen bis zu einer Obergrenze n berechnen. Sie lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang: n=1

[1] Seite 25, Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017
H.K. Strick, Mathematik ist schön, DOI 10.1007/978-3-662-53730-5_2

$$\sum_{i=1}^{1} 1 = 1 = \frac{1}{2}.1.(1+1)$$

- Induktionsvoraussetzung:
  Es gelte:

$$\sum_{i=1}^{n} i \; = \frac{1}{2}.n.(n+1)$$

- Induktionsschritt: n = n+1

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}.(n+1).(n+2)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{1}{2}.n.(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}.(n+1).(n+2)$$

Aufgabe 2.1*: Bestimmen Sie systematisch die Summe der ersten n natürlichen Zahlen mit größtem Summanden n = 1, 2, 3, …., 20.*

Lösung: $\sum_{i=1}^{20} 20 = \frac{1}{2}.20.(20+1) = 210$

Aufgabe 2.2*: Bis zu welcher natürlichen Zahlen n muss man summieren, bis die Summe 100 [1000; 1.000.000] überschritten wird?*

Lösung: Man muss bis zu folgenden natürlichen Zahlen 14, 45 und 1414 summieren, bis die Summe 100, 1000 und 1.000.000 überschritten wird.

3. Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

Mit Hilfe von farbigen Edelsteinen lassen sich quadratische Muster auch auf andere Weise erzeugen Anordnung. Ein quadratischer Haken, der sogenannte Gnomon, mit verschiedenfarbigen Steinen, wird um das vorhandene $m \cdot m$ Steinquadrat gelegt. Dafür $m + 1 + m$, d.h. $2m + 1$ Stein wird benötigt, d.h. Ungerade Anzahl von Steinen.

Einpaare einfache Beispiels:
$1 + 3 = 4 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$
…..

Regel: Summe der ersten n ungeraden Zahlen

Die Folge der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen kann als quadratisches Muster von Winkelhaken dargestellt werden.

Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist gleich der Quadratzahlen n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

***Beweis mit vollständiger Induktion**:*

- Induktionsanfang: n=1

$$\sum_{i=1}^{n}(2.1 - 1) = 1 = 1^2$$

- Induktionsvoraussetzung:
  Es gelte:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$$

- Induktionsschritt: n = n+1

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i - 1) = (n + 1)^2$$

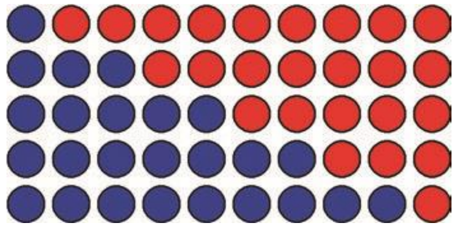
$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i - 1) = \sum_{i=1}^{n}(2i - 1) + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Beispiel: Summe der ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 9

Zur Lösung dieses Beispiels kann man entweder die obergenannte Formel verwenden:

$$\sum_{i=1}^{5}(2i - 1) = 5^2 = 25$$

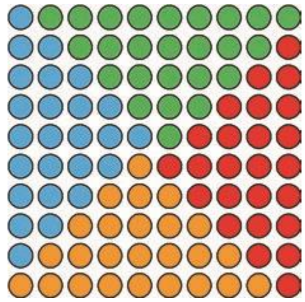
Oder man kann auch mit der Figur rechnen:



Zuerst muss man blauen aufsteigenden Steinen von oben nach unten 1, 3, 5, 7, 9 anordnen. Danach legt man noch die roten absteigenden Steine in Form ein Dreieck. Endlich bekommt man eine Figur in Form ein Rechteck. Das Doppelte der Summe $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ ist gleich $5 \,.\, 10 \;=\; 50$

Für die Summe $1+3+5+7+9$ ergibt sich der Wert $\frac{1}{2} . 50 = 25$

Aufgabe 2.5*: Begründen Sie: Eine weitere Möglichkeit der Herleitung der Formel (2.3) ergibt sich durch eine vielfache achsensymmetrische Anordnung von Steinen.*



Lösung*:* $4 \cdot (1+3+5+7+9) = 8 \cdot (1+2+3+4) + 4 \cdot 5$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 4 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 4^2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 4 \cdot 5^2$$

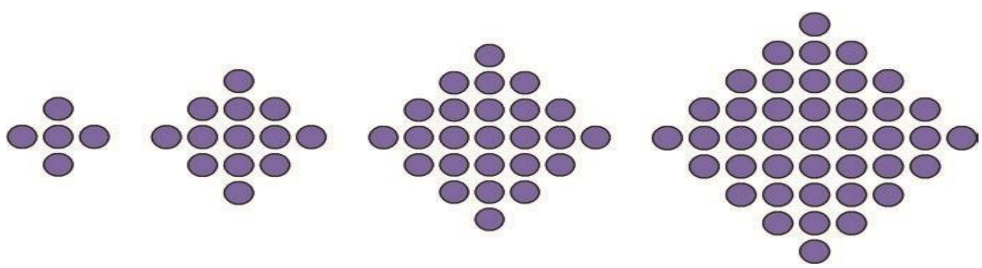
Allgemeine Herleitung:

$4 \cdot \big(1+3+5+\cdots+(2\mathrm{n}-1)\big) = 8 \cdot (1+2+3+\cdots+\mathrm{n}-1) + 4 \cdot \mathrm{n}$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n + 4n = 4(n-1) \cdot n + 4n = 4n^2 - 4n + 4n = 4n^2$$

$\Rightarrow (1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

Aufgabe 2.6*: Geben Sie einen gemeinsamen Term für die Anzahl der Steine der im folgenden abgebildeten Figuren an.*



Lösung: ↓ ↓ ↓ ↓

$= 2 \cdot 1 + 3$ $\quad = 2 \cdot 3 + 5$ $\quad = 2 \cdot 5 + 7$ $\quad = 2 \cdot 7 + 9$

=> der gemeinsame Term für die Anzahl der Steine der im folgenden abgebildeten Figuren lautet:

$$2 \cdot (2n-1) + 2n + 1$$

4. Quotienten von Summen ungerader natürlichen Zahlen

Galileo Galilei (1564 – 1642) bemerkte, dass eine spezielle Eigenschaft für gerade aufeinanderfolgende ungerade Zahlen erfüllt ist:

Die Summe der ersten ungeraden natürlichen Zahlen ist gleich $\frac{1}{3}$. Deswegen bildet man den Quotienten, dann ist dieser stets gleich $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \cdots$$

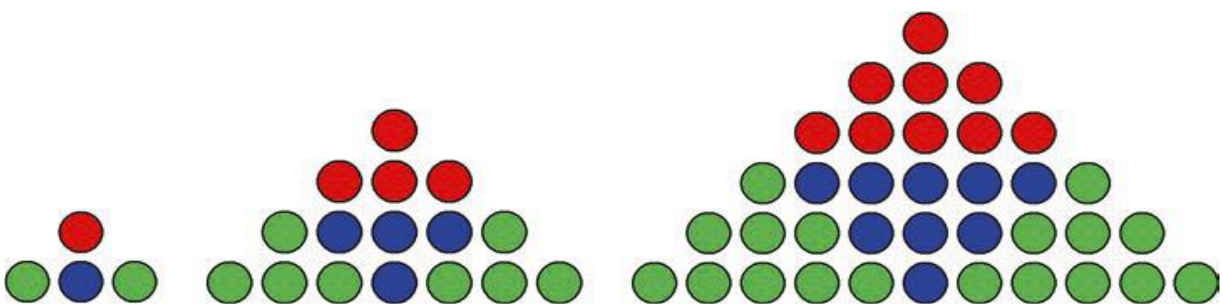
Aus diesen Quotienten hat man die allgemeine Formel:

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+\cdots+(2n+(2n-1))} = \frac{1}{3}$$

Damit kann man auch den Grenzwert berechnen:

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\frac{1}{2}.2n.(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{2n^2+n-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n} = \frac{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n} = \frac{n^2+n}{3n^2+n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

Diese Folge a_n konvergiert dann gegen den Grenzwert $\frac{1}{3}$. Dieser Grenzwert kann man auch grafisch darstellen.



Die rote Steine bezeichnet als die 1. Die blaue und die grüne Punkte sind die 3.

Aufgabe 2.7: *Erläutern Sie: Die letzten Abbildungen veranschaulichen auch eine Beziehung zwischen der n-ten und der 2n-ten Dreieckszahl, nämlich* $\Delta_{2n} + n = 4 \cdot \Delta_n$

Lösung: die n-te Dreieck $\Delta_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$, deshalb $\Delta_{2n} = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n+1)$

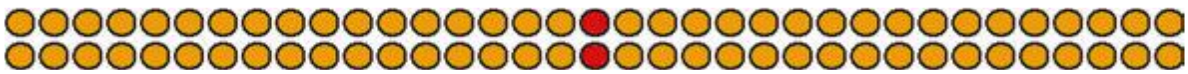
$$\Delta_{2n} + n = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n+1) + n = n(2n+1) + n = 2n^2 + 2n$$

$$4 \cdot \Delta_n = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) = 2n(n+1) = 2n^2 + 2n$$

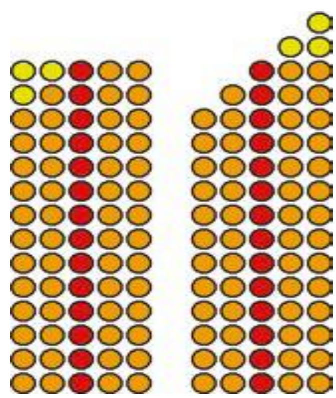
5. Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe aufeinanderfolgender natürlichen Zahlen

Es stehen zahlreichen Methoden zur Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe aufeinanderfolgender natürlichen Zahlen zur Verfügung. Hier wird ein Beispiel angeführt, und zwar: Darstellung der Zahl 70 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Um die Zahl 70 darzustellen, hat man 3 Möglichketen.

Die erste Möglichkeit ist, dass die Zahl 70 als 2 Mals 35 aufgeteilt ist. Dies führt zum einen Rechteck mit 2 Reihen, und jeweils Reihe enthält 35 Steinen.

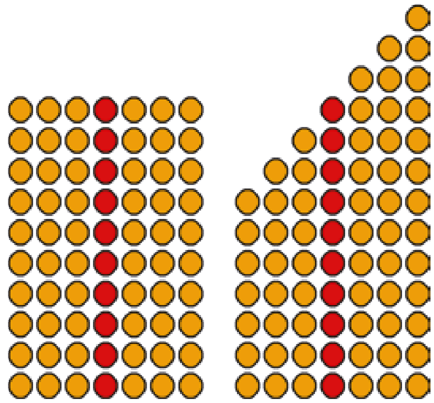


70 ist eine gerade Zahl und die 70 ist durch 5 teilbar. Deshalb bildet man die 70 ist gleich $5 \cdot 14$. Damit hat man ein Rechteck mit 5 Säulen und jeweils enthält 14 Steinen. Darüber hinaus gibt es eine alternative Methode, wenn die Zahl 14 auf 1 oder 2 addiert oder subtrahiert wird. Das bedeutet, die Zahl 70 = 12 + 13 + 14 + 15 + 16 ist. Also d.h., die Zahl 70 lässt sich als Summe von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahl darstellen.



Analog wie die 2. Möglichkeit hat man auch die dritte Methode, indem die Zahl 70 durch 7 aufgeteilt ist. Damit man erhält die 7 Säulen mit jeweils 10 Punkten. Wegen der 7 eine ungerade Zahl gibt es eine mittele Säule (rot). Außerdem kann man auch die Darstellung ändern, sodass man die Zahl 10 auf 1 bzw. 2 bzw. 3 Punkte bei den Säulen links weggenommen und bei den Säulen rechts hinzugefügt. Somit ergibt sich die Summendarstellung:

$$(10-3)+(10-2)+(10-1)+\mathbf{10}+(10+1)+(10+2)+(10+3)=70$$
$$=7+8+9+10+11+12+13$$



***Aufgabe 2.8**: Untersuchen Sie, auf wie viele Arten man die natürlichen Zahlen 18, 15, 45 als Summe aufeinanderfolgender natürlichen Zahlen darstellen kann. Veranschaulichen Sie diese Möglichkeiten jeweils mithilfe geeigneter Muster aus bunten Steinen.*

***Lösung**:* $18 = 3 + 4 + 5 + 6 = 5 + 6 + 7 = 6 + 6 + 6$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 4 + 5 + 6 = 5 + 5 + 5$$

$$45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9$$

***Aufgabe 2.9**: Erstellen Sie eine Übersicht über die Anzahl der ungeraden Teiler für die natürlichen Zahlen von 3 bis 100.*

***Lösung**:* $n = (99 - 3) : 2 + 1 = 49$

6. Summe der ersten n Quadratzahlen von natürlichen Zahlen

Abu Ali al-Hasan Ibn al-Haitham (965-1039), der im Deutschen unter Alhazen und im Arabischen unter Ibn al-Haitham bekannt ist, war ein bedeutender arabischer Mathematiker und Physiker. Besondere wissenschaftlicher Beiträge brachte er auf dem Gebiet der Optik und der experimentellen Methodik. Für seine Experimente auf diesem Gebiet gab man ihn den Beinamen „Vater der Optik“. Es gilt als Erfinder der Lupe und damit der Mikroskopie. Die Formel zur Bestimmung der Summe der ersten n Quadratzahlen von natürlichen Zahle wurde von Alhazen herausgefunden.

Die Summe der ersten n Quadratzahle von natürlichen Zahlen berechnet sich nach der Formel:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}.n.(n+1).(2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

***Beweis durch vollständige Induktion**:*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}.n.(n+1).(2n+1)$$

- Induktionsanfang: n =1

$$\sum_{i=1}^{1} 1 = 1 = \frac{1}{3}.1^3 + \frac{1}{2}.1^2 + \frac{1}{6}.1$$

- Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}.n.(n+1).(2n+1)$$

- Induktionsschritt: n = n+1

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}.(n+1).(n+2).(2n+3)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}.n.(n+1).(2n+1) + n^2 + 2n + 1 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1$$
$$= \frac{1}{6}.(n+1).(n+2).(2n+3)$$

***Aufgabe 2.11**: Führen Sie den Ansatz al-Haithams für die Summe der ersten fünf Quadratzahlen durch.*

***Lösung**:*

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot (5+1) \cdot (2 \cdot 5 + 1) = 55$$

***Aufgabe 2.12**: Stellen Sie eine Summenformel für die Summe der ersten n ungeraden Quadratzahlen auf.*

***Lösung**:* wir haben:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beide Seiten mal mit 2^2 bekommen wir:

$$2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Deshalb

$$1^2+3^2+\dots+(2n+1)^2=\frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3}-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

Man kann auch sagen:

$$1^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

mit n: die endliche natürliche ungerade Zahl.

***Aufgabe 2.13**: Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist eine ungerade Zahl und daher stets darstellbar als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, z.ß.:*

$$1^2+2^2=5=2+3;\ 2^2+3^2=13=6+7;\ 3^2+4^2=25=5^2=12+13$$

Geben Sie eine allgemeine Darstellung für die Summe $n^2+(n+1)^2$ an.

Lösung:

Die allgemeine Darstellung für die Summe $n^2+(n+1)^2$ lautet:

$$n^2+(n+1)^2=n^2+n^2+2n+1=2n^2+2n+1=(\frac{2n^2+2n+1-1}{2})+(\frac{2n^2+2n+1+1}{2})$$

Beweis:

$$(2n^2+2n+1)-\left(\frac{2n^2+2n+1-1}{2}\right)-\left(\frac{2n^2+2n+1+1}{2}\right)$$
$$=(2n^2+2n+1)-\left(\frac{2n^2+2n}{2}\right)-\left(\frac{2n^2+2n+2}{2}\right)$$
$$=\frac{4n^2+4n+2-2n^2-2n-2n^2-2n-2}{2}=0$$

7. Summe der ersten n Kubikzahlen von natürlichen Zahlen

Formel: Summe der ersten n Kubikzahlen:

Die Summe der ersten n Kubikzahlen ist gleich dem Quadrat der Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

$$1^3+2^3+3^3+\dots+4^3=(\frac{1}{2}.n.(n+1))^2=(1+2+3+\dots+n)^2$$

Beweis mithilfe der Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=(\frac{1}{2}.n.(n+1))^2$$

- Induktionsanfang mit n =1:

$$\sum_{i=1}^{1} 1^3=1=(\frac{1}{2}.1.(1+1))^2$$

- Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{1}{2}.n.(n+1))^2$$

- Induktionsschritt mit n = n+1

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (\frac{1}{2}.(n+1).(n+2))^2 = \frac{1}{4}.(n+1)^2.(n+2)^2 = \frac{1}{4}.(n^2+2n+1).(n^2+4n+4)$$

$$=\tfrac{1}{4}.n^4 + \tfrac{3}{2}.n^3 + \tfrac{13}{4}.n^2 + 3n + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = (\frac{1}{2}.n.(n+1))^2 + (n+1)^3 = (\frac{1}{2}.n.(n+1))^2 + (n+1)^2.(n+1)$$

$$= (n+1)^2.\left(\frac{1}{4}.n^2 + n + 1\right) = (n^2+2n+1).\left(\frac{1}{4}.n^2 + n + 1\right) = \frac{1}{4}.n^4 + \frac{3}{2}.n^3 + \frac{13}{4}.n^2 + 3n + 1$$

Aufgabe 2.15*: Addiert man die ersten Kubikzahlen von ungeraden Zahlen, dann fällt eine Regelmäßigkeit auf:*

- *Die Summe der ersten zwei ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 2):*
  - $1^3 + 3^3 = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 11100_2$
- *Die Summe der ersten vier ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 4):*
  $$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 = 111110000_2$$
- *Die Summe der ersten acht ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von sieben aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 6):*
  $$1^3 + 3^3 + \ldots + 13^3 + 15^3 = 2^6 + 2^7 + \ldots + 2^{11} + 2^{12} = 1111111000000_2$$
- *Die Summe der ersten 16 ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von neun aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 8):*
  $$1^3 + 3^3 + \ldots + 29^3 + 31^3 = 2^8 + 2^9 + \ldots + 2^{15} + 2^{16} = 11111111100000000_2$$

  Wie lauten die „nächsten" Gleichungen? Gilt diese Eigenschaft allgemein?

Lösung*:* die nächsten Gleichungen lautet: Die Summe der ersten 32 ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von elf aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 10):

$$1^3 + 5^3 + \ldots + 61^3 + 63^3 = 2^{10} + 2^{11} + \ldots + 2^{19} + 2^{20} = 111111111110000000000_2$$

Aufgabe 2.16*: Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Kubikzahlen ist eine ungerade Zahl und daher stets darstellbar als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, z.ß.:*

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4;$$

$$2^3 + 3^3 = 35 = 17 + 18 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8;$$

$$3^3 + 4^3 = 91 = 45 + 46 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$$

Begründen Sie, dass sich allgemein die Summe zweier Kubikzahlen $n^3 + (n+1)^3$auf mindestens zwei Arten als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt. Geben Sie eine allgemeine Darstellung für diese Summen an.

Lösung:

Wir machen analog wie die Aufgabe 2.13, damit haben die die erste allgemeine die Summe zweier Kubikzahlen $n^3 + (n+1)^3$ auf der ersten Art.

$$n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^3 + (n+1)^3 - 1}{2} + \frac{n^3 + (n+1)^3 + 1}{2}$$

Beweis:

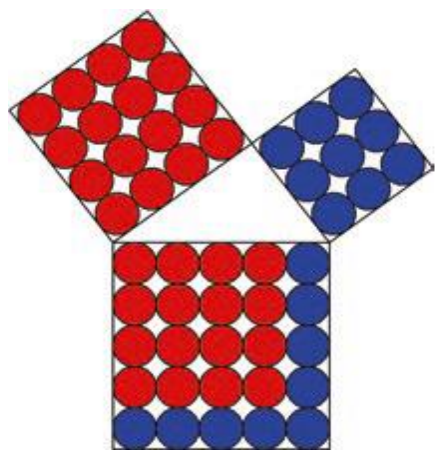
$$n^3 + (n+1)^3 - \frac{n^3 + (n+1)^3 - 1}{2} - \frac{n^3 + (n+1)^3 + 1}{2}$$
$$= \frac{2n^3 + 2(n+1)^3 - n^3 - (n+1)^3 + 1 - n^3 - (n+1)^3 - 1}{2} = 0$$

8. Pythagoreische Zahlentripel

8.1. Einfache Typen pythagoreischer Zahlentripel und weitere pythagoreische Zahlentripel.

Unter einem pythagoreischen Zahlentripel versteht man drei natürliche Zahlen, die die Bedingungen des pythagoreischen Lehrsatzes ($a^2 + b^2 = c^2$, die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypothenusenquadrat) erfüllen. Dies bedeutet, dass die Summe der Quadrate der zwei kleinsten Zahlen des Tripels gleich dem Quadrat der dritten Zahl sein muss. Einfachstes Beispiel hierfür ist das pythagoreische Zahlentripel (3; 4; 5).

Außerdem kann dieses pythagoreische Zahlentripels grafisch dargestellt werden.



In der Abbildung wird 4^2 als in Form eines Quadrats roten Steine bezeichnet. 3^2 ist durch die blauen Steine dargestellt. Die zusammen großen blauen und roten Steine in Form eines Quadrats ist 5^2.

Außer des einfachsten pythagoreischen Zahlentripels gibt es noch einige bekannte pythagoreische Zahlentripels wie z.ß. (6; 8; 10) oder (5; 12; 13), usw.

Regel: pythagoreische Zahlentripel, zu deren Darstellung ein Winkelhaken benötigt wird:

Allgemein findet man unendlich viele pythagoreische Zahlentripel $(a_n;\ b_n;\ c_n)$ mit $a_n = 2n+1$, $b_n = 2n(n+1)$, $c_n = 2n(n+1)+1$, also $c_n - b_n = 1$

Mithilfe dieser Regel kann diese folgende Tabelle über die pythagoreische Zahlentripels erstellen:

n	$a_n = 2n + 1$	$(2n+1)^2$	$b_n = 2n(n+1)$	$c_n = 2n(n+1)+1$
1	3	9 = 4 + 5	4	5
2	5	25 = 12 + 13	12	13
3	7	49 = 24 + 25	24	25
4	9	81 = 40 + 41	40	41
5	11	121 = 60 + 61	60	61
6	13	169 = 84 + 85	84	85
…	…	…	…	…

Daneben einfache pythagoreische Zahlentripel gibt es noch die primitive pythagoreische Zahlentripel. Unter einem primitive pythagoreische Zahlentripel versteht man ein Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen ohne gemeinsamen Teiler gleich 1, so dass gilt: $(x_n;\ y_n; z_n) = 1$.

8.2. Herleitung der Formel zur Erzeugung aller pythagoreischen Zahlentripel

Die pythagoreische Zahlentripel (x, y, z) werden durch diejenigen natürlichen Zahlen, u, v, für die gilt:

1. u < v

2. u und v sind teilerfremd und nicht beide ungerade vermöge

x = $v^2 - u^2; y = 2uv; z = \ v^2 +\ u^2$ *geliefert*

Folglich erhält man eine tabellarische Zusammenstellung der pythagoreischen Zahlentripel durch die Ermittlung der genannten speziellen Paare u, v. dafür wählt man als Leitgröße etwa u + v = 3, 5, 7, 9 …. Von den ungeraden Zahlen gilt es also, die 2er-Zahlpartionen (v, u) mit (v / u) = 1 festzustellen und die entsprechenden Werte für x, y, z auszurechnen.

Die diophantische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ wird umgeformt in:

$$(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 1$$

Man bedient sich der Abkürzung $a = \frac{x}{z}$ sowie $b = \frac{y}{z}$. Hierdurch zeigt sich eine Übersetzung der ursprünglichen zahlentheoretischen Frage in eine geometrische Frage an. Man muss also die von den Einheitspunkten (1, 0); (0, 1) verschiedenen rationalen Punkte (a, b) auf dem Einheitskreis ermitteln. Dazu ist wiederum eine weitere Umformung zweckmäßig:

$$b^2 = 1 - a^2 = (1-a)(1+a)$$

bzw.

$$\frac{b}{1+a} = \frac{1-a}{b}$$

Der gemeinsame Wert dieses Bruches sei:

$$t = \frac{b}{1+a} \ \rightarrow b = t \cdot (1+a)$$

Dann bestehen die beiden Gleichungen:

$$b - a \cdot t = t \cdot (1+a) - a \cdot t = t;$$

$$b \cdot t + a = b \cdot \frac{b}{1+a} + a = \frac{b^2}{1+a} + a = \frac{b^2 + a(1+a)}{1+a} = \frac{b^2 + a + a^2}{1+a} = \frac{a+1}{1+a} = 1$$

Setze $b = t \cdot (1+a)$ ein, dann gilt:

$$a^2 + t^2 \cdot (1+a)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow (a^2 - 1) + t^2 \cdot (1+a)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)(a+1) + t^2 \cdot (1+a)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (a+1)[(a-1) + t^2 \cdot (a+1)] = 0$$

Wegen $0 \leq a \leq 1, a + 1 > 0 => (a-1) + t^2 \cdot (a+1) = 0$

$$\Leftrightarrow a - 1 + t^2 a + t^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a(1 + t^2) = 1 - t^2$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$b = t \cdot (1+a)$$
$$\Leftrightarrow b = t \cdot \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow b = t \cdot \left(\frac{1 + t^2 + 1 - t^2}{1+t^2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$=> (a;b) = \left(\frac{x}{z}; \frac{y}{z}\right) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2})$$