

の肝となる。この背景知識を持つ元のデータセットにPCアルゴリズムを適用し、プログラムのテストで.05の有意水準を使用すると、図5のようなパターンが得られます。

この場合、 $X$ 変数と $Y$ の相関が有意でないため、PCアルゴリズムは正しいはずの結果を出し、それが影響なしを判断するために必要なすべてである。 $Y$ を個々の $X$ 変数に回帰させるだけでも、本質的に同等のテストとなる。PC検索のタイプIエラーを推定するために、図5に示すモデルの最尤推定値（正規分布と仮定）を求め、それを用いてそれぞれ19サイズの100個の模擬データセットを生成した。次に、PCアルゴリズムを各データセットに適用した。100個のサンプルのうち4個で、この手順は $Y$ と $X$ 変数の1つまたは別のものとの間にエッジを誤って導入した。

$X_1$  = 体重

$X_2$  = 肝臓の重さ

$X_3$  = 投与量

$Y$  = 肝臓で発見された薬物

$Y$

PCアルゴリズムによるモデル出力

図5

代替案に対する本手法の威力を調べるため、 $Y$ が少なくとも1つの $X$ 変数と関連している3つのモデルを検討する。1つ目は、サンプルから推定された回帰変数間の相関を持つ回帰モデルである。 $X_1$ と $X_3$ の間の相関が約0.99であるため、相関誤差を持つ回帰モデルはほぼ不誠実であり、検索が構造を発見しない責任を負うと予想されるはずである。我々は、19、50、100、1000の各サイズで100個のサンプルを作成した。

回帰、因果関係、予測

そして、各サンプルに対してPCアルゴリズムを実行し、YとあるX変数の間にエッジが含まれない場合、出力をタイプ2エラーとしてカウントした。図6は、最初の3つのサンプルサイズについての結果である。

100

90

80

70

60

50

40

30

20

10

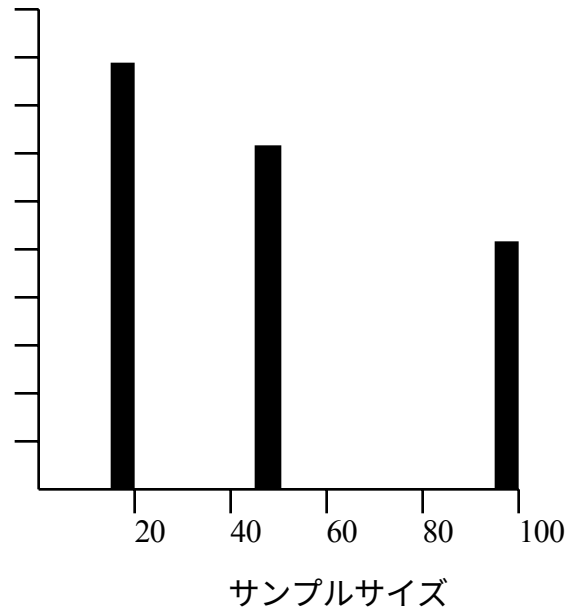


図6: 回帰モデルにおいて、PCが少なくとも1つのエッジを省略したサンプルの割合

サンプルサイズ1,000で100回の試行で、PCはこの代替案に対して2型エラーを起こすことはない。

第二の選択肢は、元のPCの出力を精緻化したものである。体重から結果にエッジを追加すると、図7のようなグラフになる。

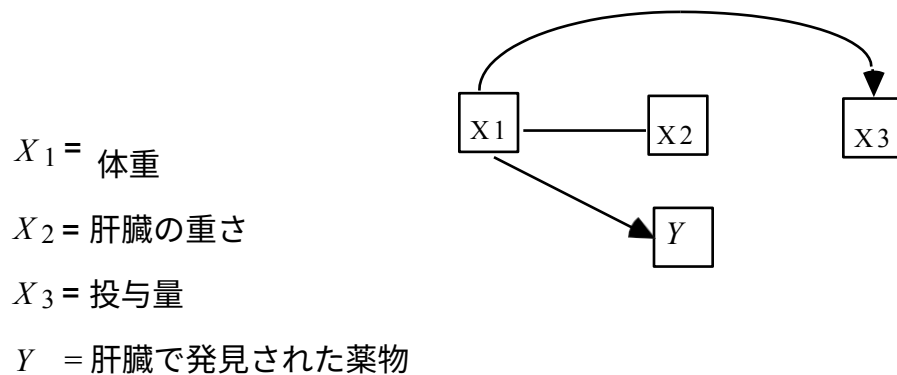


図7

このモデルをEQSプログラムで推定したところ、 $X_1 \rightarrow Y$ エッジに関連する線形係数

回帰、因果関係、予測

の値が.228となり、推定したモデルを用いて、4つのサンプルサイズそれぞれで再び100

100サンプルを生成した。最初の3つのサンプルサイズでの結果を図8に示す。

80

70

60

50

40

30

20

10

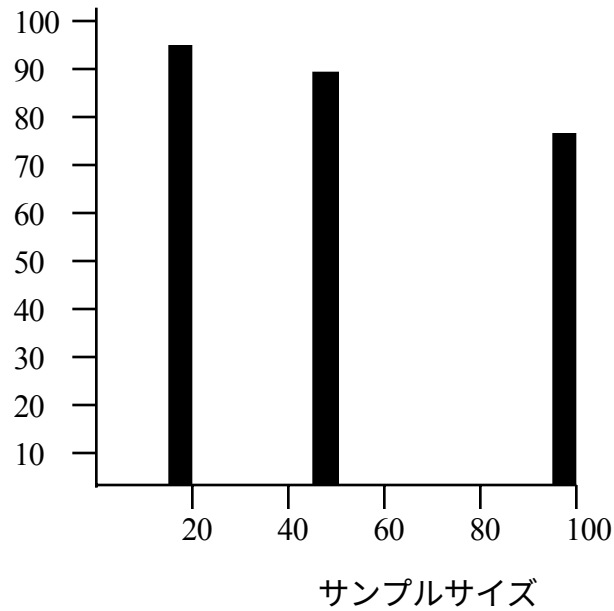


図8: 図7のモデルのうち、PCが $X_1 \rightarrow Y$ を省略したサンプルの割合

サンプルサイズ1,000でも、55%のケースでこの選択肢に対して2型の誤りを犯している。 $Y$ に対する体重の "小さな" 影響は検出できない。投与量についても同じことが言えると思われます。

3つ目のケースは、図7のモデルで $X_1$ と $Y$ を結ぶ線形係数を1.0にしました。

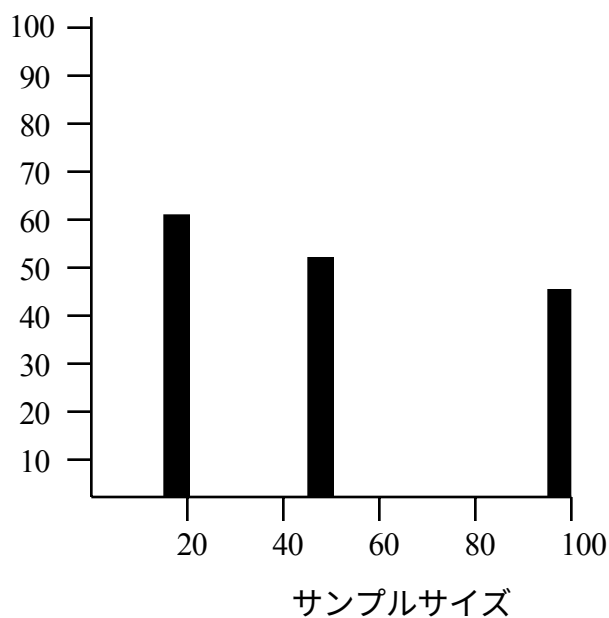


図9: 図7のモデルで、PCが $X_1 \rightarrow Y$ を省略したサンプルの割合

サンプルサイズ1,000の場合、検索は2%のケースでこの選択肢に対してエラーを起こします。

この問題では、サンプル数が少ない場合、いくつかの選択肢に対して検索はほとんど力を発揮せず、サンプル数が多い場合でも、ありえないとは言えない選択肢に対してはほとんど力を発揮しません。

## 8.4 まとめ

非常に強い因果関係の事前知識がない場合、重回帰は、非対照研究からのデータで結果または基準変数に影響を与える変数を選択するために使用すべきではありません。私たちが知る限り、因果関係が問題となるような状況では、一般的な自動回帰

検索手順は全く使用されるべきではない。そのような状況では、ここで説明したようなアルゴリズムの改良版が必要であり、回帰によって結果に対する影響を確実に推定できる変数を選択する必要がある。アプリケーションでは、データの合理的な代替説明に対する仕様検索の威力は、シミュレーションで簡単に判断でき、調査する必要がある。

100

なお、このアルゴリズムの現状は、直接原因の選択に関する最後の言葉ではないと

80

いうことである。 $O$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ の部分配向誘導経路グラフに、 $O$ に

70

対して $X$ が $Y$ の直接原因でないにもかかわらず、 $X$ から $Y$ への有向辺が含まれる場合が

60

ある（もちろん、 $G$ には $X$ から $Y$ への有向経路が存在するが）。しかし、定理6.8は、

50

部分配向誘導経路グラフの有向辺が、 $X$ が $Y$ の直接原因であると含意するだけの条件

30

を示している。場合によっては、6.9節で述べたVerma and Pearlのような制約に基づ

20

くテストがこの問題を解決するのに役立つが、開発・実装はされていない。



## 第9章

### 実証研究のデザイン

前章の結果の単純な拡張は、実証研究の設計に関連する。本章では、いくつかの基本的な問題のみを検討する。観察デザインと実験デザインの力の比較、サンプリングと変数選択の意味、倫理的な実験デザインに関する考察などである。最後に、喫煙と健康に関する疫学研究から正当に導き出される因果関係の結論をめぐる有名な論争について、現在の視点から再考することにする。

#### 9.1 観察的研究か実験的研究か？

実験的研究と非実験的研究の両方について、ここでは気にしないが、実用的な問題はいくつもある。適切な無作為標本を得ることの実際的な難しさはさておき、代替可能な因果構造を実験なしで区別できるのはいつなのか、実験によってのみ区別できるのはいつなのか。

Fisher, R. Fisher (1959)によれば、無作為化実験の重要な利点は、検証すべき因果関係の仮説に対するいくつかの選択肢を考慮から排除できることである。もし $T$ の値がランダムに割り当てられるなら、 $O$ が $T$ を引き起こすという仮説や、 $O$ と $T$ に測定不能な

共通原因があるという仮説が排除されうる。 $T$ が $O$ を引き起こすかどうかという問題は、 $T$ が $O$ に統計的に依存しているかどうかという問題に帰着する（もちろん、これはマルコフ条件と忠実条件の適用を前提としている）。

ランダム化実験の批判者、例えばHowson and Urbach (1989)は、すべてのケースでランダム化がこの対立仮説を排除するかどうか、正しく疑問を呈している。人々に与えられる治療は、一般的に非常に複雑で、多くの確率変数の値を変化させる。たとえば、タバコの煙を吸い込むと肺がんになるかどうかという問題に関心があるとします。さらに、実験者は、タバコの紙巻きの一部に含まれる化学物質の存在など、タバコの記録されていない特徴が肺がんの実際の原因であり、タバコの煙を吸っても肺がんにはならないことを知らないと想像してください。この場合、肺がんタバコの煙の吸引は、タバコの煙の吸引が肺がんの原因でないにもかかわらず、統計的に依存している。なぜなら、治療グループへの割り当ては、タバコの煙の吸入と肺がんの共通の原因であるからです。

フィッシャー(1951, p. 20)は、「異なる方法で処理する対象をランダムに選択することは、これらの処理が実験反応に影響を与える可能性のある対象の物理的履歴の段階の時間的に最後のものであれば、有意性の検定の有効性を完全に保証する」と示唆しています。しかし、これでは、タバコの紙が何らかの癌を引き起こす化学物質で処理されているかもしれないと疑うことすらしない実験者が、処理群に無作為に割り付けたにもかかわらず、肺癌やタバコの煙を吸い込む共通の原因をすべて排除できていないことをどうやって知ることができるのか説明できない。これは無作為化に関する重要かつ困難な問題であり、無作為化によって薬剤の投与量と治療群のような変数の間に決定論的關係が生じることが多く、「忠実な条件」の違反が生じるという事実によってより困難になっている。

一般に、実験からの因果推論は、第6章と第7章で説明した原則に基づいている。この理論は、実験データからの推論にも、非実験データからの推論にも、一様に適用

される。因果関係が実験操作と論理的に結びついているからではなく、実験的な設定が、非実験データでは得られない関連する背景的な因果関係の知識を提供するからである。(同様の点については、Pearl and Verma 1991を参照されたい)。

もちろん、無作為化によっていくつかの代替的因果仮説が検討の対象から外れるという議論以外にも、無作為化を支持するさまざまな議論がある。観察者バイアスを減らすこと、実験者が帰無仮説が真であることを条件として結果に確率分布を割り当てることを保証し、それによって統計的検定を行ってタイプIエラーの確率を計算できること、離散確率変数の場合、連続性をシミュレーションすることによって検定の検出力を高めること、「厄介な要因」をバイパスすることによって正確な信頼レベルの基礎を与えることなどが議論されてきた。ベイズの観点からのこれらの議論については、Kadane and Seidenfeld (1990)などを参照してください。

実験操作によって、 $B$ や $C$ に起因しない $A$ に関する既知の分布を作り出すことができ、 $A$ や $B$ に起因しない $C$ に関する既知の分布を作り出すことができれば、これらの因果関係を区別することができる。実験では、非実験集団の因果グラフの $A$ への辺がすべて壊れ、 $U$ から $A$ への辺に置き換えられる。さらに、 $U$ とグラフ内の他の変数の間には、 $U$ から $A$ への辺を含まない空でない無向きの経路はない。これらの性質を持つ変数 $U$ によってのみ $A$ が引き起こされる手順を、我々は**管理実験**と呼ぶことにする。 $U$ が $A$ を引き起こすこと、 $U$ と $C$ に共通の原因はないこと、 $U$ が $C$ を引き起こす場合、 $A$ が一定であればブロックされるメカニズムによってそうなること（すなわち、因果グラフにおいて $U$ から $C$ への有向パスが存在する場合、それは $A$ を含む）、です。第7章で述べたように、 $U$ は政策変数ではないので、複合型、操作型、非操作型の因果グラフには含まれない。

$A$ -実験は $A$ を $A$ に分解する操作、 $C$ -実験は $C$ を $C$ に分解する操作である。 $A$ -実験を行って $\{A, C\}$ 上の部分配向誘導経路グラフ( $ia^*$ )を見つけた場合、すべてのエッジを $A$ に分解したことがわかるため、 $A$ が $C$ を引き起こすことがわかる。(図1の部分配向誘導経

路グラフに $U$ (または $V$ )を含めないのは、それらを含めてもこの場合に引き出せる結論は強まらないが、 $U$ と $A$ の間に決定論的関係があり得るため分析が複雑になるからである)同様に、 $C$ 実験を行い、部分的に方向づけられた誘導経路グラフ(iiic\*)が見つければ、 $C$ が $A$ を引き起こすことがわかる。 $A$ 実験を行い(iiia\*)、 $C$ 実験を行い(iiic\*)が得られれば、 $A$ と $C$ の共通原因が潜在していることがわかる（ $A$ と $C$ が実験しない集団で依存していると仮定する）。

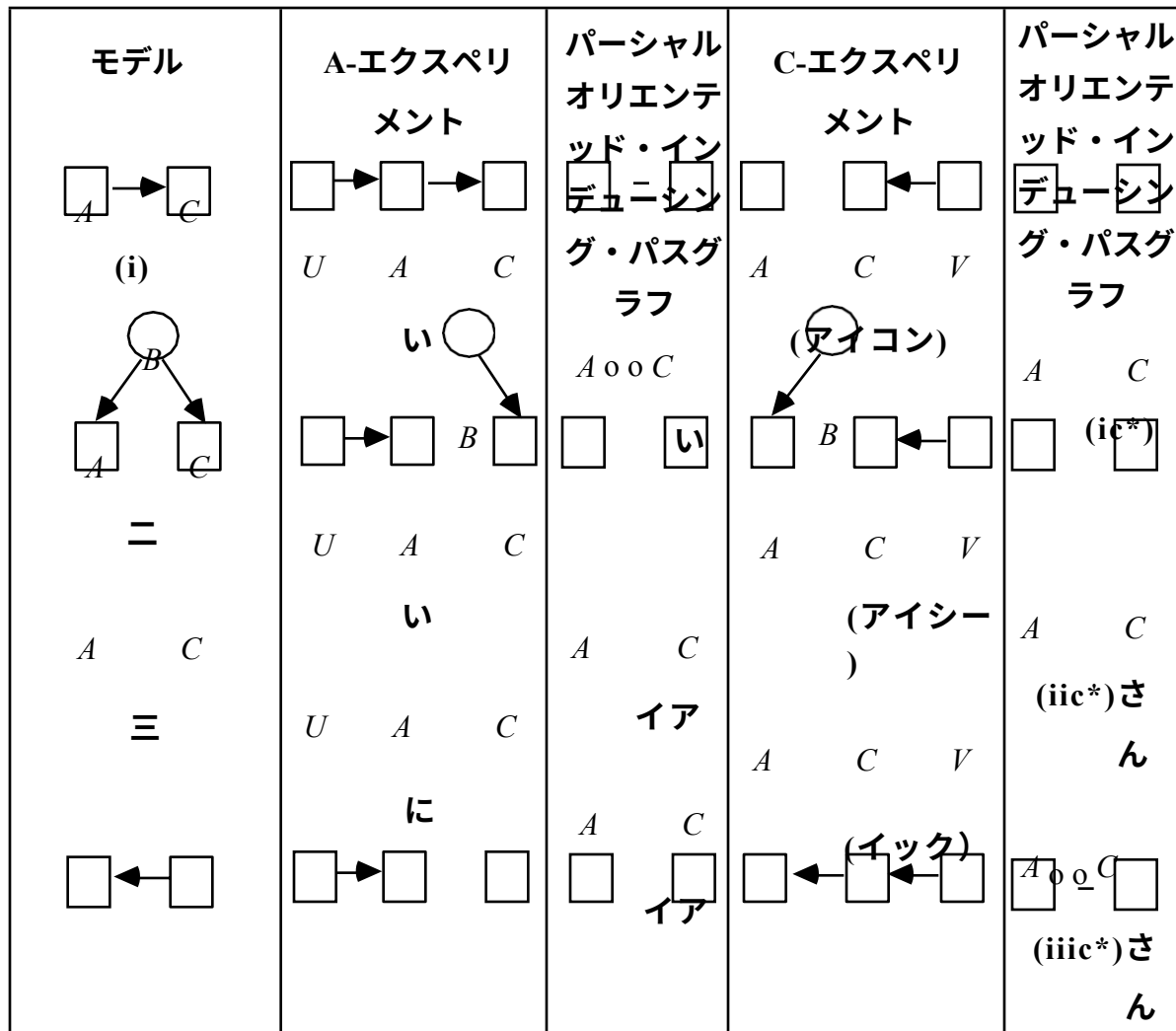


図1

ここで、非実験集団の中に、実験設定と同じようにA、Cとそれぞれ同じ関係を持つことが知られている変数U、Vが存在するとする。(非実験集団において、AはUの決定論的関数ではなく、CはVの決定論的関数ではないと仮定する)。つまり、UはAを引き起こし、UとCの共通原因はなく、UからCへの有向パスがあればAを含む、また、VはCを引き起こし、VとAの共通原因はなく、VからAへの有向パスがあればCを含む。答えはイエスである。図2において、(io\*)、(iio\*)、(iiio\*)はそれぞれ(io)、(iio)、(iiio)に対応する部分配向誘導経路グラフである。FCIアルゴリズムが(io\*)を構築したとする。UがAを引き起こすことが分かっている場合、UとAの間の

エッジと $A$ と $C$ の間のエッジが衝突しないことから、 $A$ と $C$ の間のエッジは誘導経路グラフにおいて $A \rightarrow C$ のように配向していると結論づけることができる。同様に、FCIアルゴリズムが(iiio\*)を理想的に構築した場合、 $C$ が $A$ を引き起こすと結論づけることができる。(iiio\*)の部分配向誘導経路グラフは、定理6.9により、 $A$ と $C$ の共通の原因が潜んでいること、定理6.6により、 $A$ が $C$ を引き起こさず、 $C$ が $A$ を引き起こさないことを示す。



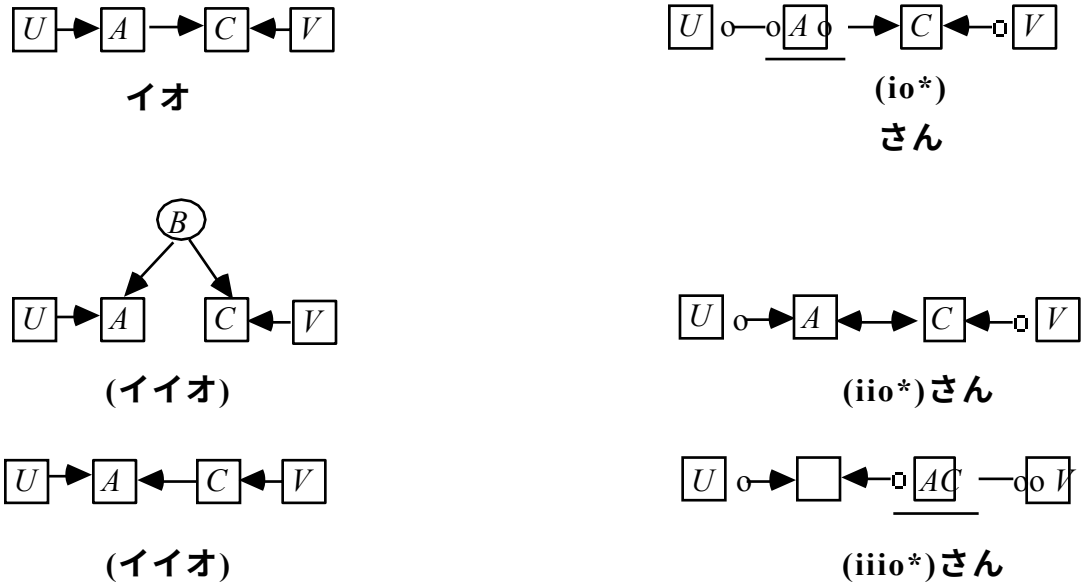


図2

もし、図3の $W$ 、 $U$ 、 $V$ 、 $X$ のような変数を測定していれば、対応する部分配向誘導経路グラフによって、実験することなく、変数間の因果関係についての予備知識を用いることなく、(i)、(ii)、(iii)を区別することができることに注意する。

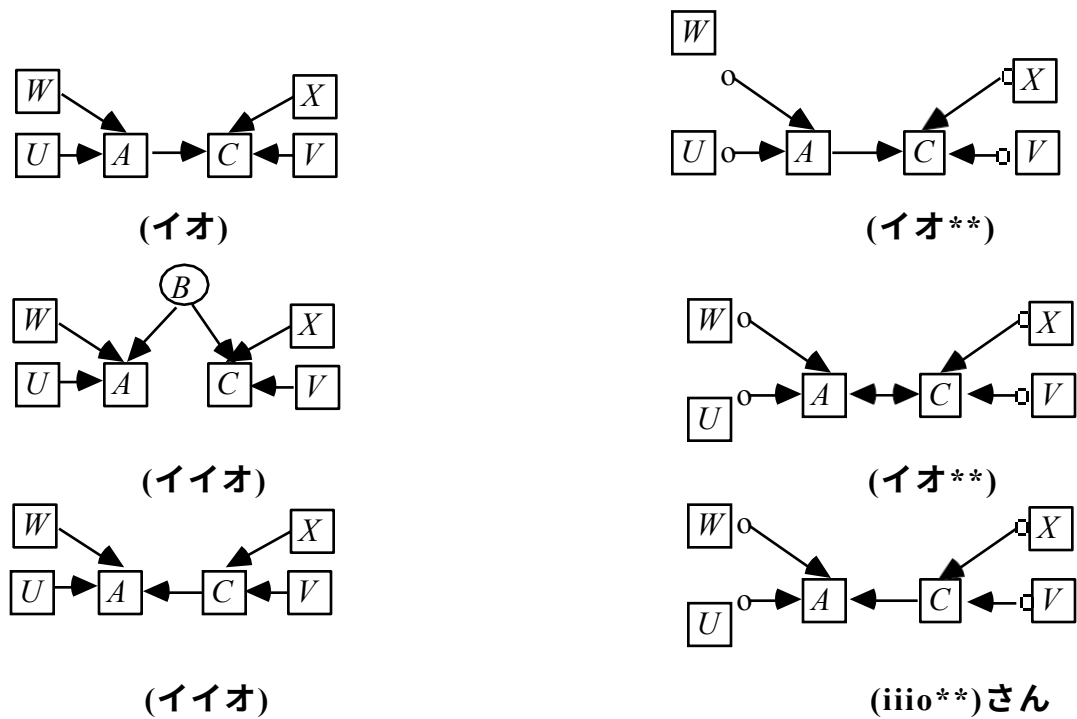


図3

ここで、より複雑なケースとして、(i)  $A$  が  $C$  を引き起こし、 $A$  と  $C$  の共通原因  $B$  が潜在している、(ii)  $A$  と  $C$  の共通原因  $B$  が潜在している、(iii)  $C$  が  $A$  を引き起こし、 $A$  と  $C$  の共通原因  $B$  が潜在している、という可能性を考えてみることにする。

(iii)は、あるシステムのサンプルについて、エッジを $A$ に分割して $A$ に分布を与え、別のサンプルについて、エッジを $C$ に分割して $C$ に分布を与えるという実験操作によって他と区別することができる。

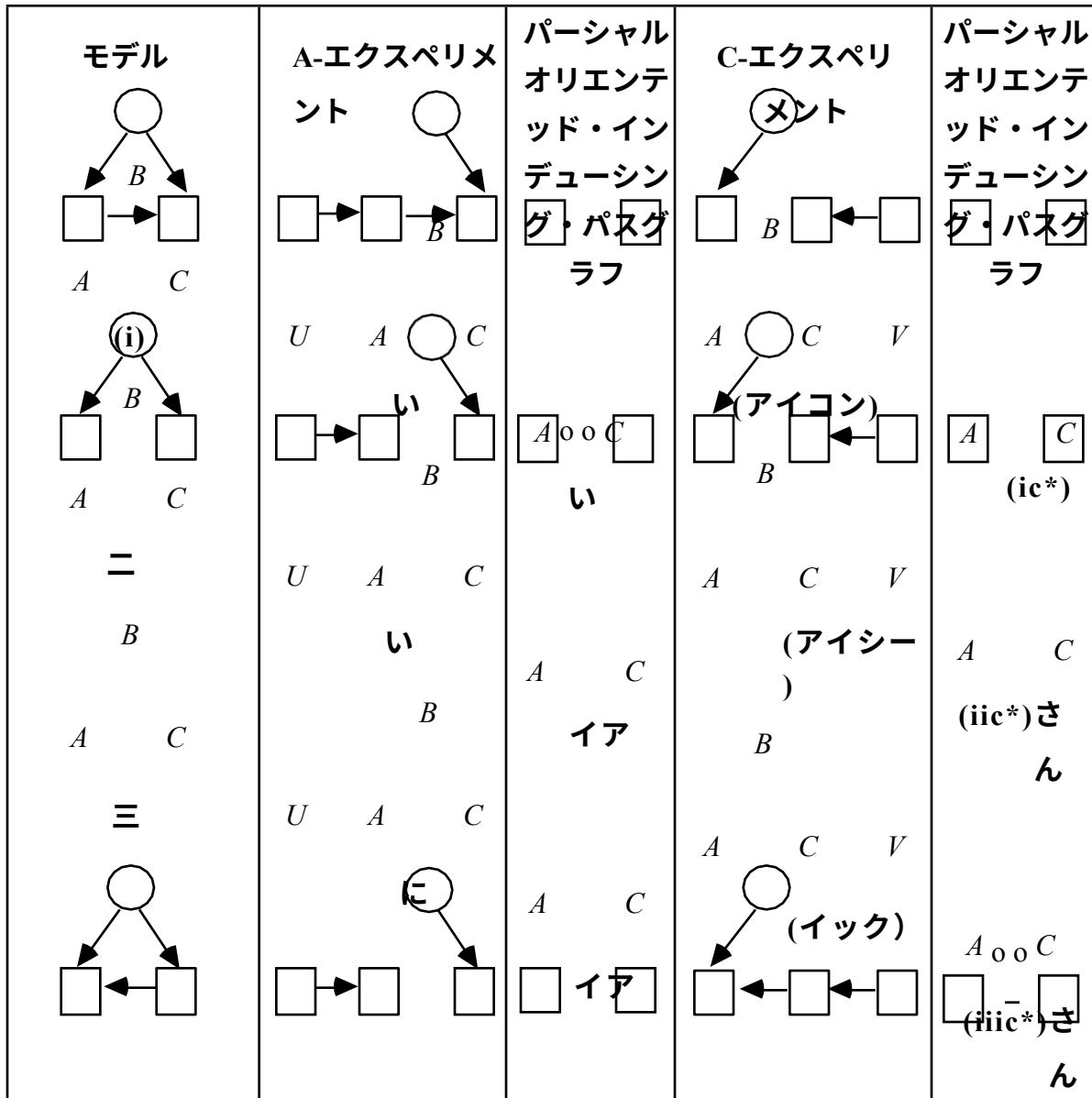


図4

対応する非実験的なケースの分析はより複雑である。変数 $U$ があり、 $U$ が $A$ を引き起こすことが知られており、 $U$ と $A$ の共通の原因はなく、 $U$ から $C$ への有向パスがあれば $A$ を含むと仮定し、変数 $V$ があり、 $V$ が $C$ を引き起こすことが知られており、 $V$ と $A$ の

共通の原因はなく、 $V$ から $A$ への有向パスがあれば $C$ を含むと仮定します。有向無尽グラフとそれに対応する部分有向誘導経路グラフを図5に示します。ここで、有向無サイクルグラフが、観察された非実験集団の真であるとする。この場合でも、(i)、(ii)、(iii)を区別することができるだろうか。

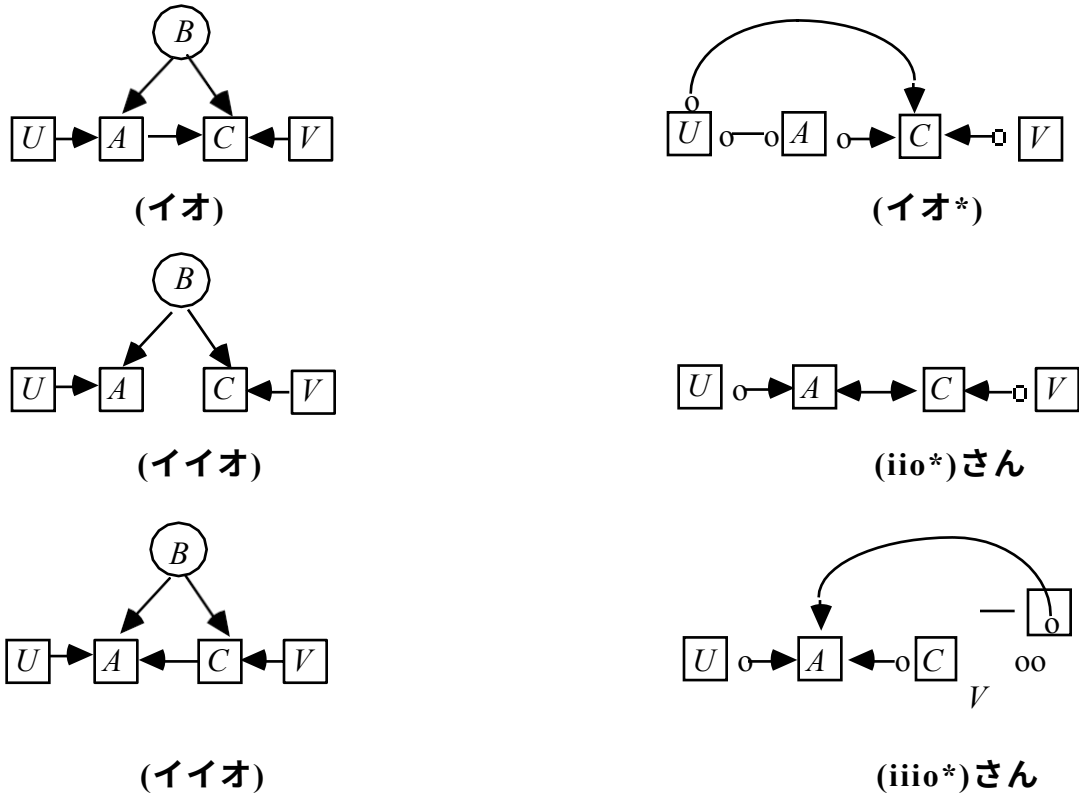
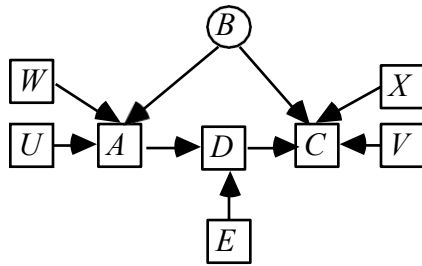


図5

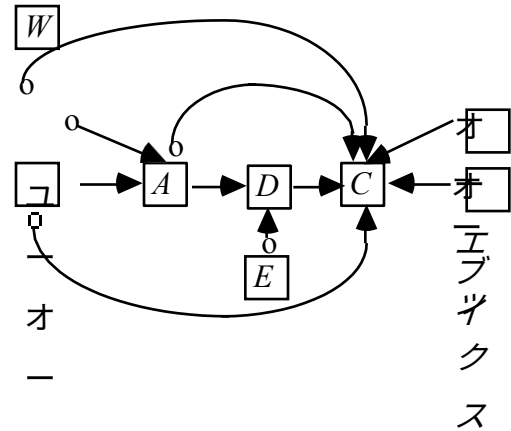
もう一度言いますが、答えは「イエス」です。例えば、FCIアルゴリズムの適用により、(io\*)が生成されたとする。 $U \circ \rightarrow C$ のエッジの存在は、UとCの共通の原因か、UからCへの有向パスのどちらかが存在することを伴います。仮定により、UとCの共通の原因はないので、UからCへの有向パスが存在します。部分配向誘導経路グラフにUとCの間の辺があることと、同じ背景知識を考えると、AとCの共通原因が潜在的に存在することも成り立つ（証明はやや複雑なので、本章の付録としました）。同様に、(iiio\*)が得られれば、CがAを引き起こし、AとCの潜在的な共通原因があることがわかる。(iio\*)が得られれば、AとCは潜在的な共通原因を持つが、AはCを引き起こさず、CはAを引き起こさないとわかる。もし(io\*\*)が得られれば、AはCを引き起こすこと、AとCの共通の原因が潜在的に存在することが、変数間の因果関係に関するそのような事前知識を用いることなくわかり、(iio\*\*)と(iiio\*\*)も同様である。

このような場合、受動的な観察よりも実験に重要な利点があります。実験を行うことで、(i)、(ii)、(iii)の $A$ を操作した場合の結果を定量的に予測することができるのです。しかし、(i)が正しい因果モデルであるならば、我々は

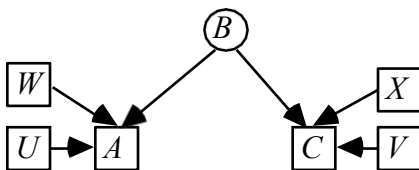
は、予測アルゴリズムを使って、 $A$ を操作したときの効果を定量的に予測することはできません（線形ケースでは、 $U$ が「道具変数」として機能するため、予測を行うことができます）。



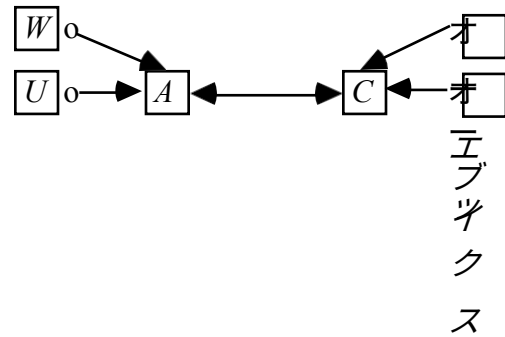
(イオ)



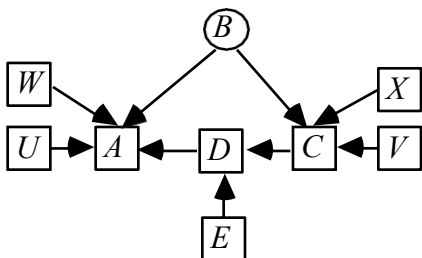
(イオ\*)



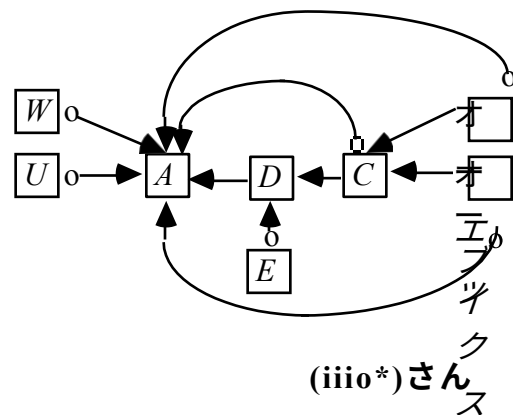
(イイオ)



(iiio\*)さん



(イイオ)



(iiio\*)さん

具体的には、図7の(i)(ii)(iii)のいずれが成立するかを、 $B$ が未測定であることを念頭に置きながら区別したいとするのである。



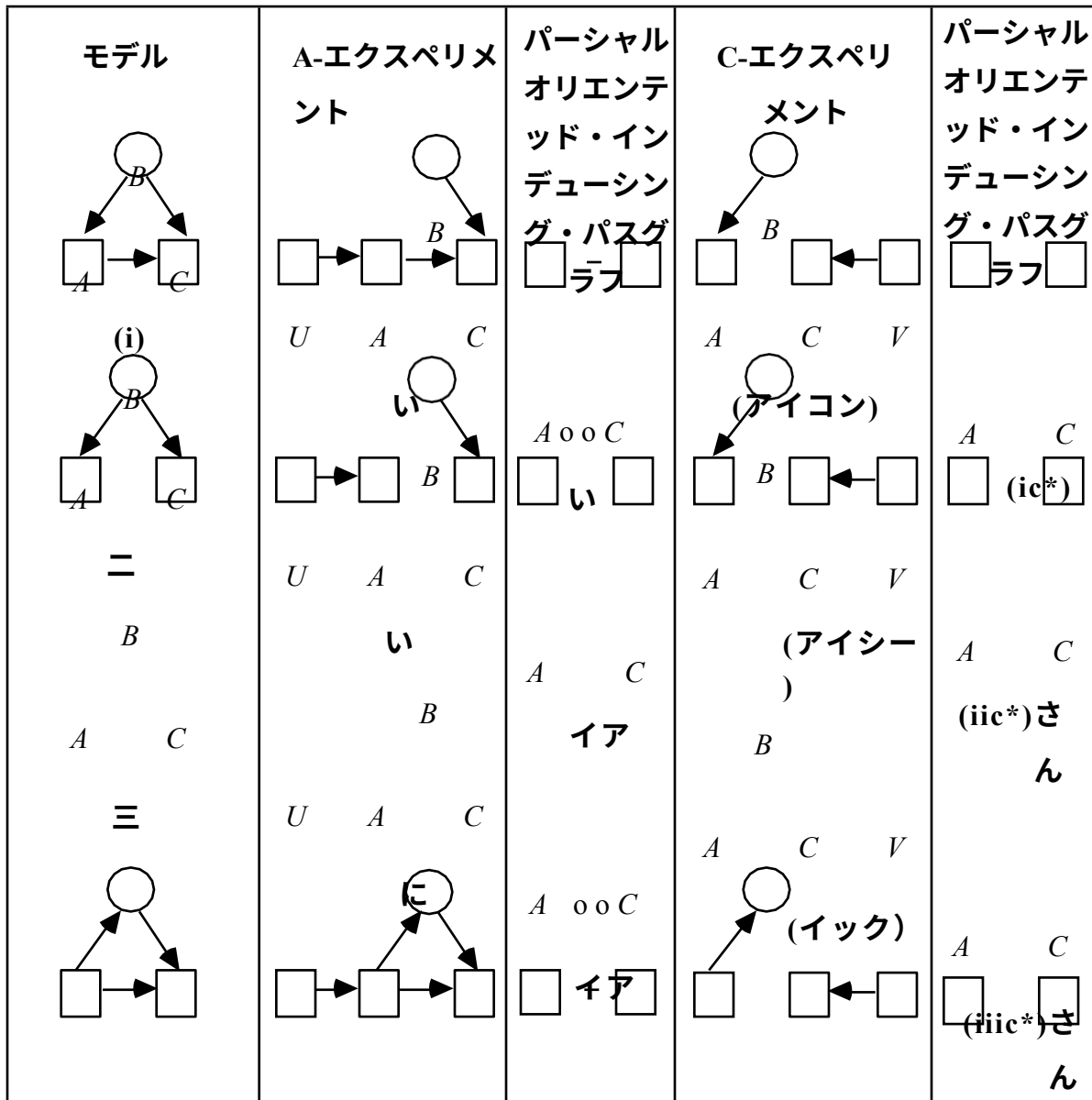


図7

この問題は、ブライス版シンプソンのパラドックスにかなり近い。 $A$ へ誘導する辺を壊し、 $A$ に分布を与える実験的操作により、構造(i)と(iii)を構造(ii)から区別することができるが、互いに区別することはできない。なお、図7において、部分配向誘導パスグラフ (ia\*) は (iiia\*) と、(ic\*) は (iiic\*) と同一である。

非実験集団において、 $U$ が $A$ を引き起こすことが知られており、 $U$ と $C$ の共通の原因は

なく、 $U$ から $C$ へのパスがあれば $A$ を含む、 $V$ が $C$ を引き起こすことが知られており、 $V$ と $A$ の共通の原因はなく、 $V$ から $A$ へのパスがあれば $C$ を含むともう一度仮定する。

有向無サイクルグラフとそれに対応する部分指向誘導パスグラフは図8のようになる。

。

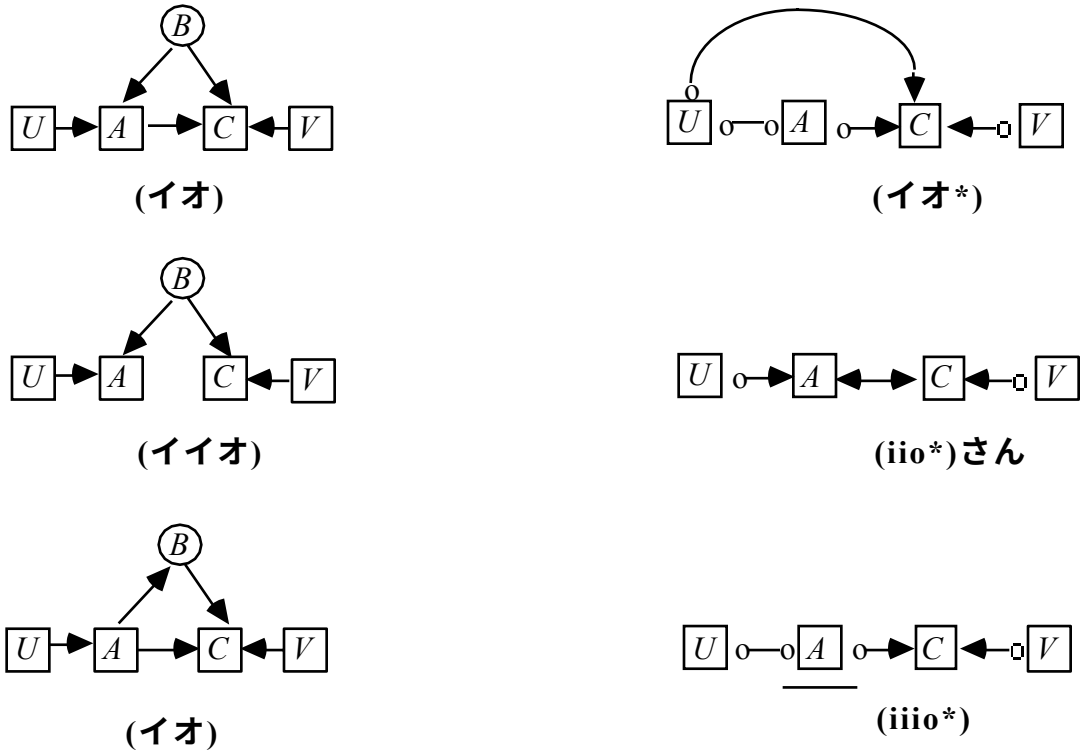


図8

(i)と(iii)が区別できない対照実験の場合と異なり、非実験の場合は区別できる。(iiio\*)が得られたとする。したがって、対応する誘導経路グラフにはAからCへの辺があり、対応する有向無サイクルグラフにはAからCへの経路がある(もちろん、AからCへの経路がいくつあるかはわからない)。(iiio\*)は、 $\langle A, B, C \rangle$ 経路が存在しないが(iiio)と同様のグラフと両立する)。また、(iiio\*)は背景知識と合わせて、AとCの間の誘導経路グラフにAへの経路がないことを含意するので、AとCの潜在的な共通原因はないことがわかる。背景知識と部分的に方向づけられた誘導経路グラフは、AがCの原因であり、AとCの潜在的な共通原因があることを含意していることを思い出してください(この証明は本章の付録として置いています)。

もう一度、より多くの変数を測定すれば、図9に示すように、変数間の因果関係に関する背景知識がなくても、これら3つのケースを区別することも可能である。

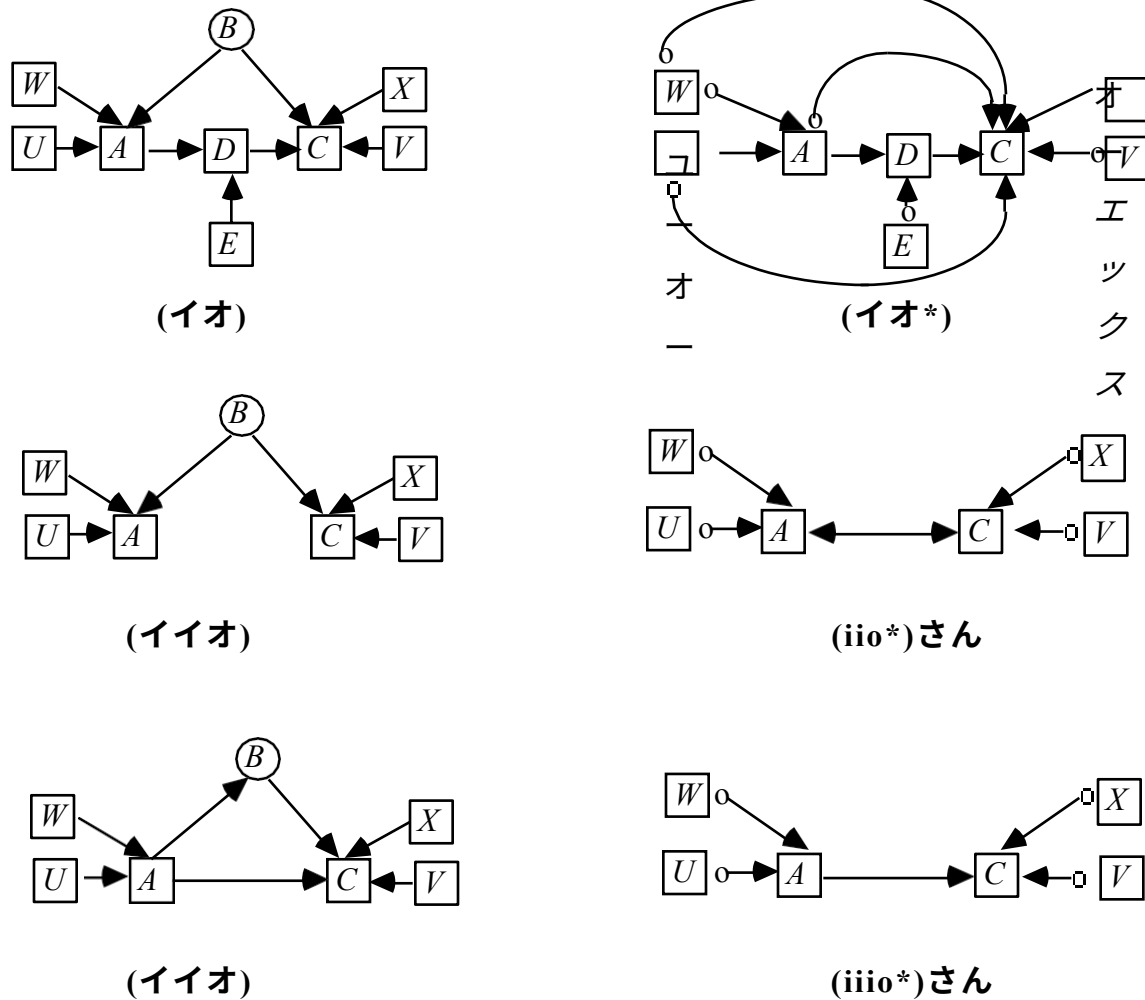


図9

そのため、実験操作や予備知識がなくても、3つの構造を区別することができる。

図7の構造(i)は制御された実験では構造(iii)と区別できないが、変数が測定されるより大きな構造の中に適切に埋め込まれていれば、実験制御なしに区別できると主張するのは異常と思われるかもしれません。 $A$ が $C$ を引き起こすとき、制御された実験では、測定されていない共通の原因を持つ $A$ と $C$ を区別することはできないが、 $A$ が $B$ に影響を与える第2のメカニズムを持つことは、実験なしの観察でこれらの状況を区別できることがあると主張するのは、常識に反している。しかし、 $A$ に分配を強いる制御された実験操作は、構造(i)における $A$ の $B$ に対する依存関係を（実験サンプルに

において)壊してしまうので、2つの構造を区別するために不可欠な情報が失われてしまう。

対照実験だけでは図7の(i)と(iii)を区別できないが、単純な観察研究と対照実験の組み合わせで(i)と(iii)を区別することができる。A実験から、AからCへの経路があり、CからAへの経路はないと判断できる。 $P(C|A)$ がAの操作で不変でないなら、CとAの間にAへのトレッキングがあることがわかる。もし、 $P(C|A)$ がAの操作によって不変であれば、AとCの共通の原因が存在しないか、モデルの特定のパラメータ値が「偶然」不変を生み出していることがわかる。観察研究と実験研究の情報を組み合わせることで、どちらか一方だけでは推論できない因果関係を推論することができる場合がある。これは非公式な方法で行われることが多い。例えば、A実験とC実験の両方において、AとCが独立であるとする。もちろん実際には、この2つのモデルは、非実験集団においてAとCが独立しているかどうかを判断することによって区別される。忠実であると仮定すると、AがCから独立していない場合にのみ、AとCの間にトレックが存在する。

このような事実から、因果関係を特定（測定とは異なる）するための実験的手法の利点は、再考する必要がある。もちろん、欠損値のない適切な非実験的無作為標本を得ることには、現実的な困難があることはよく知られているが、我々は原理的な問題に関心がある。非実験的研究の欠点は、例示したような構造の区別をするためには、測定された変数の因果関係の一部について事前に何かを知っていなければならないか、さもなければ、正しい因果関係に立つ変数を実際に測定する幸運に恵まれなければならないことである。実験の最大の利点は、適切な因果関係の作り方を知ることができることである。実験研究のさらなる利点は、混合標本における因果構造を特定することである。実験集団では、操作する変数と操作される変数の間の因果関係は、そのように扱われるすべてのシステムに共通であることが知られています。異なる因果構造を混合することは、潜在的な変数の導入のように作用し、部

分的に方向づけられた誘導経路グラフから他の因果関係についての推論を難しくする。同様の結論は、実験的コントロールと統計的コントロールを組み合わせた場合にも当てはまる。

これまで述べてきた「統制」実験では、実験操作によって非実験集団の因果グラフの $A$ へのエッジがすべて切れ、 $A$ の値を操作するための変数 $U$ は $C$ と共通の原因を持たないと仮定してきた。しかし、以下を満たす情報実験が可能である。

のどちらにも当てはまらない。例えば、図10の因果関係グラフが非実験的な集団を表しているとします。

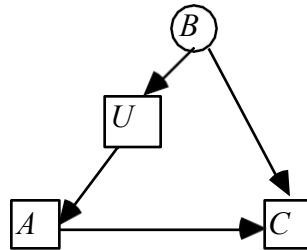


図10

$A$ を操作する実験において、 $P(A|U)$ に分布を強制したとする。この場合、実験集団の因果グラフは非実験集団の因果グラフと同じになるが、グラフのパラメトリゼーションは2つの集団で異なっていることはもちろんだ。より一般的には、 $U$ に含まれない $A$ の直接原因 $V$ が、 $U$ のメンバーを非結合員として含む無向パスによってのみ、ある結果変数 $C$ に接続されるように、 $A$ の値に影響を与えるために用いられる変数 $U$ のセットが存在すると仮定します。(これは例えば、 $U$ が $A$ の値を固定するために使われる変数の適切な部分集合であり、 $A$ の値を固定するために使われる他の変数が $A$ のみに直接接続されている場合に起こりうる。) これらは、 $U$ と $A$ を与えられた変数 $C$ の分布の不変性を保証するために必要な条件にすぎず、したがって予測アルゴリズムの使用を可能にします。(この種の実験については、9.4節でより広範な議論がなされている)。このような実験により、図7のモデル(i)とモデル(iii)を区別することが可能である。もちろん、 $P(A|U)$ の分布を変えない非実験的な研究でも、同じ背景知識の仮定で(i)と(iii)を区別することは可能である。実際、この種の実験では、実験集団の分析と非実験集団の分析の違いは、採用した背景知識の違いにしかない。



## 9.2 変数の選択

変数の選択は、現在のところほとんど人間の判断に依存している推論の部分である。変数の選択が不適切でも、それ自体が誤った因果関係の結論につながることは通常ありませんが、情報の喪失につながる可能性が非常に高いことは、これまで述べてきました。離散化

連続変数と離散変数の連続近似値の使用は、いずれも条件付き独立性に関する統計的判断の結果を変更する危険性があります。

前節で説明したように、このような性質を持つ変数は、 $A$ が $C$ を引き起こすのか、 $C$ が $A$ を引き起こすのか、あるいはどちらも引き起こさないが $A$ と $C$ に共通の原因があるのかについて、特に情報を与えてくれる。

$A$ と $B$ の共通の原因である可能性のあるすべての変数を測定し、そのようなすべての変数に条件付けをするという戦略は危険である。追加変数の1つが実際には $B$ の効果であるか、 $A$ と $B$ の共通の原因を共有している場合、その変数での条件づけは、 $A$ と $B$ の間の偽の従属性を生み出す。それは、共通の原因であるかもしれないと考えられる場合、追加変数を測定すべきではないということではなく、測定する場合、重回帰ではなく、5章と6章の手法で分析するべきであるということである。

最後に、第5章、第6章、第7章で説明したような方法を採用するのであれば、条件付き独立性検定が利用できる変数を選択するという、当たり前だが珍しい提案をしている。現在のところ、我々のシミュレーションでは、例えば心理測定や社会測定のテストデザインにおいて、可能な限り二値変数を避けるべき理由であることを示唆している。

### 9.3 サンプルング

多くのサンプルングデザインは、2値または数値を持つ特性 $S$ を指定し、特定の $S$ 値を持つ部分集団から、抽出された $i$ 番目のユニットの値の分布が、その部分集団からの他

のすべてのサンプル場所の分布とは独立かつ同一に分布するサンプルを抽出する手順とみなすことができます。最も単純な場合、 $S$ は2値変数とみなすことができ、値1はユニットがサンプル特性を持つことを示しますが、もちろん、そのユニットが特定の実際のサンプルで発生することを意味するわけではありません。我々は、サンプルの特性 $S$ を、サンプルのメンバーに適用されるかもしれないあらゆる処置から区別する。特性 $S$ に従ったサンプリングでは、一般集団についてではなく、 $S$ の様々な値を持つ集団のセグメントについて直接情報を得ることができます。

したがって、一般的な問題は、母集団内の任意の $S$ 値を条件とした場合に、母集団内の各ユニットの因果構造を記述する因果グラフ $G$ の変数の条件付き確率や条件付き独立関係が変化しないか、という点にある。すなわち、すべてのユニットの因果構造が有向グラフ $G$ で記述される集団があり、変数の値が $P$ として分布し、 $P$ が $G$ に忠実であるとする。ある値を持つすべてのユニットからなる部分集団が、 $P$ 、ひいては因果構造 $G$ の条件付き独立関係を正確に反映するために、サンプリング特性 $S$ が満たすべき因果的・統計的制約は何であるか、その部分集団の条件付き確率はどんな条件の下で $P$ 通りであると言えるか。これらの質問に対する答えは、レトロスペクティブサンプリングとプロスペクティブサンプリング、ランダムサンプリングと他のサンプリングアレンジメントの適切さなど、サンプリングに関する多くの身近な問題に関係している。ここでは、サンプルの $S$ の値の分布に様々な制約を課すことによって得られるサンプリング分布に関する疑問は考えない。我々の議論では、 $S$  ( $G$ の変数の1つと同一である場合もある) は、 $G$ の他の変数のどの部分集合によっても決定されないと仮定する。

この議論では、サンプリング手順によって母集団の一部がサンプルに含まれないように必然的に除外される場合、除外された単位が同じ $S$ 値を持つように $S$ が定義されると仮定します。例えば、身長180cm以上の人の部分集団からサンプルを抽出する場合、 $S=0$ は身長180cm以下の人、 $S=1$ は身長180cm以上の人に対応すると仮定します。

興味のある変数に関係する因果グラフ $G$ は、 $S$ と $S$ と他の変数が実現する因果関係を含むグラフ $G(S)$ に展開することができます。 $G(S)$ に忠実な分布 $P(S)$ を仮定し、その $S$ 値に対するマージナル分布の和はもちろん $P$ となる。サンプリング分布は、条件付き分布 $P(\cdot | S)$ で決定されると仮定する。そして、より正確には、この条件付き分布が $P$

と同じ条件付き確率と条件付き独立関係を持つときが問題である。さらに、その答えがグラフ  $G(S)$  の特性の観点から与えられることが必要である。次の定理は自明であり、証明はしない。

**定理9.1**  $P(S)$ が $G(S)$ に忠実であり、 $X$ と $Y$ が $G(S)$ において $S$ を含まない変数の集合であるとき、 $X$ が $G(S)$ において $Y$ と $S$ をd分離する場合にのみ、 $P(Y | X) = P(Y | X, S)$ とする。

また、 **$X$ は、** $Y$ とサンプリング特性の両方の直接的または間接的な効果であってはならない。(第2項は、実質的にシンプソンのパラドックスの回避を保証するものである)。

を忠実な分布で表す)。この定理は本質的に、 $P(Y|X \boxtimes Z) = P(Y|X$   
 $P$ において $Y$ と $S$ が $X \boxtimes Z$ の条件下で独立である場合に限り、 $\square Z \square \{S\}$ ) となる。  
 これは、例えば、 $S$ 特性（例えば $S=1$ ）を持つユニットのサンプルから $X$ に対す  
 る $Y$ の条件付き確率を推定したい場合、次のことが保証される。

- (i)  $Y$ の中のどの $Y$ も $S$ との間に直接のエッジはない、
- (ii)  $Y$ の中の任意の $Y$ と $S$ の間に、 $X$ の中の任意の $X$ を含まないトレックはない。
- (iii)  $Y$ の中の任意の $Y$ から $X$ の中の $X$ へ、また $S$ から $X$ への有向パスの組はない。

図11は、サンプリング特性による推定が、 $X$ と $Z$ が与えられたときの $Y$ の条件付き確率の推定に偏りを与えることを示すものである。

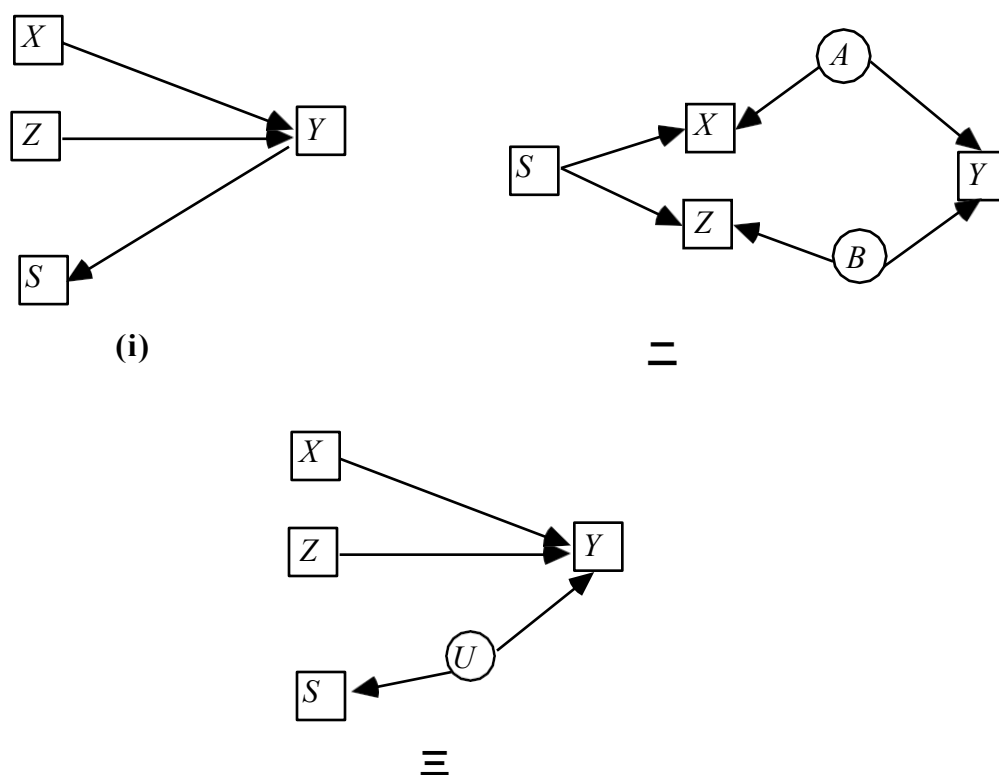


図11

ケース(i)と(iii)は、レトロスペクティブデザインに典型的なものである。ケース(ii)では、 $Y$ とサンプルの特性 $S$ が条件付きで依存するため、サンプリングの特性は $P(Y|X$

, $Z$ )の推定値に偏りを与える。

$\{X, Z\}$ である。定理9.1は、以下の概念を（非常に）部分的に正当化するものである：

前者が、原因である $X$ を通してのみ、結果である $Y$ を引き起こす、または引き起こされる特性によって選択する手順を意味し、後者が、 $Y$ を通してのみ $X$ を引き起こす、または引き起こされる特性によって選択する手順を意味する場合、「前向き」サンプリングは「後ろ向き」サンプリングより信頼できる。 $X$ が唯一の直接的な原因であるプロスペクティブ・サンプリング・デザインにおいて

$S$ がどの変数も引き起こさない場合、 $P(Y|X, Z)$ の推定値に偏りはない。しかし、ケース(ii)は、ある条件下では、前向きなサンプルも推定値にバイアスをかけることがあることを示している。

ランダムサンプリングについても同様の結論が導かれるはずである。前述したように、分布 $P$ における条件付確率 $P(Y|X)$ を推定することが目的であるとし、 $P$ からユニットの無作為標本を抽出する際、システムにおける関心のある変数とは完全に切り離された特性 $S$ に従って標本を抽出しようとする。もしそれが成功すれば、 $S$ には条件付き確率の推定を偏らせるような因果関係がないことが保証される。もちろん、ランダム・サンプルでも、研究対象として選ばれたこと自体の性質（この性質は、 $S$ のある特定の値を持つこととは異なることに注意すべきである）が結果に影響を与える場合は失敗することがある。さらに、同じような因果関係の断絶を持つ性質であれば、サンプリングの根拠として十分である。この点で、無作為化には、無作為な $S$ が他の変数と因果的に断絶していると信じられていることを除いて、特別なことは何もない。

分布 $P$ や $P$ の条件付き確率を推定するのではなく、因果構造を決定することだけを目指す場合、プロスペクティブサンプリングとレトロスペクティブサンプリングの非対称性は消失する。

レトロスペクティブ・デザインの例である図11のモデル (i) 、 (iii) では、 $S$ を含まない3つの不連続な変数集合 $A$ 、 $B$ 、 $C$ に対して、 $A$ が $C \square S$ で $B$ から $d$ 分離している場合に限り、 $A$ は $C$ で $B$ から $d$ 分離する。つまり、 $P$ の条件付き確率が $S$ のサンプルから決定できないこれらのケースは、それにもかかわらず、 $P$ の条件付き独立性、ひいては因果構造が $S$ のサンプルから決定できるケースなのです。



定理9.2は、母集団全体で成立する条件付き独立関係の集合と、 $S$ が一定値の部分母集団で成立する条件付き独立関係の集合とが異なる条件を示したものである。

**定理9.2:** グラフ $G$ に忠実な合同分布 $P$ について、 $\perp\!\!\!\perp_{YX|Z}$   
のうち正確に1つだけである；

$\perp\!\!\!\perp_{YX|Z \sqcup \{S\}}$ が $P$ において真であるのは、対応するメンバーで、かつ、以下の  
場合のみである。

のメンバは、 $G$ において $\langle Z \text{ d-separates } X; Y; Z \sqcup \{S\} \text{ d-separates } X, Y \rangle$ が真である。

定理9.2は定理3.3の再定義に過ぎないが、その帰結はかなり複雑である。分布 $P$ において、 $X$ と $Y$ が $Z$ を条件として独立であるとします。サンプル特性 $S$ によって、 $X$ と $Y$ が代わりに $Z$ を条件として従属であるように見えるのはどんなときでしょうか。答えは、 $P(S)$ において、 $X, Y$ が $Z \sqcup S$ を条件として依存しているときです。この

状況-- $P$ における条件付き独立と $P(S)$ における条件付き依存--は、忠実な分布について、次のような $X$ 中の $X$ から $Y$ 中の $Y$ への無向パス $U$ が存在するときのみ発生し得るものである。

- i. は、 $U$ 上のノンコライダーが $Z \square \{S\}$ に存在しない；
- ii.  $U$ 上のすべてのコライダーは $Z \square \{S\}$ に子孫を持つ；
- iii.  $U$ 上のあるコライダーは、 $Z$ に子孫を持たない。

逆のエラーは、 $P$ における条件付き依存と $P(S)$ における条件付き独立を含む。忠実分布でこのようなことが起こるのは、次のような $X$ から $Y$ への無向きの経路 $U$ が存在するときだけです。

- i.  $U$ 上のすべてのコライダーは $Z$ に子孫を持つ；
- ii. は、 $U$ の非コライダーは $Z$ にはない；

であり、 $S$ はそのような経路の全てにおいて非結合員である。繰り返しますが、漸近的にはこれらの誤差はどちらもランダムにサンプリングすること、あるいは興味のある変数と関係のない任意の性質 $S$ によって回避することが可能です。

実験デザインでは、周囲の集団からサンプリングし、サンプリングした単位に様々な治療を施し、その結果から、ある治療方針を一般集団に適用した場合の効果を推論することが目的であることがあります。次節では、実験デザイン、政策予測、因果推論との関係について考察する。

## 9.4 実験計画における倫理的問題

代替療法の臨床試験には、少なくとも2つの倫理的問題がある。(1) 試験の過程で（

あるいは事前に)、ある治療法が他の治療法よりも優れているという疑いが確信に近いところまで高まるかもしれない; 効果が低いと分かった治療法に人々を割り当てたり、治療を継続したりすることは倫理的に問題ないだろうか? (2) 臨床試験では、無作為化試験であれその他の試験であれ、患者は一般に治療カテゴリーに割り当てられる。もし患者が実験デザインの一部でなければ、おそらく患者は自由に治療を選択できるだろう (自由、つまり、もし患者がその費用を支払えるか、保険者を説得できるのなら)。これらの質問に対する答えが、それぞれ否定的であったとする。倫理的な問題を回避または軽減し、かつ実験対象者の集団全体における治療の効果を合理的に予測できる臨床試験の実験デザインはあるのだろうか。

Kadane and Sedransk (1980) は、最初の問題を解決するためのデザイン（Kadane, Sedransk, Seidenfeldの共同提案）を記述している。このデザインは、心臓手術後の患者に対する薬剤の試験やその他の用途で使用されている。KadaneとSeidenfeld(1990)がデザインを説明する際に行う推論は、Markov条件と一致し、実際にそこから導かれるもので、この事例は実験デザインにおける因果関係の推論の役割をうまく示している。さらに、Markov条件とFaithfulness条件を組み合わせ、Manipulation Theoremと定理7.1を用いると、2つの新しい結論が導かれる：

1. 患者さんの好みを考慮して治療を割り当てる実験手順では、治療効果を確実に評価することができますが、特別な場合を除き、そうして得られた知識は、一般的な治療方針の効果を予測するために使うことはできませんでした。
2. より現実的な興味として、専門家側の因果関係の知識が比較的弱い場合、治療配分が患者の好みに依存する別のデザインを使って、実験における患者の自己割り当てが、一般集団における治療方針の結果の予測に交絡するかどうかを判断することが可能であろう。すべての影響が直線的であれば、交絡が発生しても治療方針の効果を予測することができる。

#### 9.4.1 カダン/セドランスク/サイデンフェルドのデザイン

Kadane/Sedransk/Seidenfeld実験デザイン（Kadane and Seidenfeld (1990)に記述）では、専門家パネルの各メンバーについて、 $X_1 \dots X_n$ の値の各プロファイルの条件付きで各治療 $T$ の結果 $O$ に関する確信度が抽出される。抽出した判断は、治療過程のモデルにおけるパラメータに関するある事前分布を指定するために用いられる。各実験対象

者について、専門家パネルは、変数 $X_1, X_n$ に関する情報を受け取る、

...,  $X_n$ 。患者に関する他のことは、専門家には何も知られていない。 $X_1, \dots, \dots$ の値に基づく、

$X_n$  各専門家  $i$  は、患者に好ましい治療法  $p_i(X)$  を推奨し、患者は、 $X$  値と  $X$  で記述された患者に対する専門家の治療嗜好  $(p_1, \dots, p_k)$  の関数である何らかの規則  $T = h(X, p_1, \dots, p_k)$  によって治療に割り当てられ、おそらく何らかのランダム要因もある。このルールは、少なくとも1人の専門家がそのプロフィールを持つ患者に対して治療を推奨しない限り、どの患者にも治療が与えられないことを保証している。モデルは、パラメータ値の各ベクトルについて、 $X$  と  $T$  の値を条件とする結果の尤度を決定する。患者に関するデータが収集されると、パラメータに関する事前分布は条件付けによって更新される。エビデンスが、プロフィール  $X$  を持つ患者に対するある治療法  $T$  が、すべての専門家が同意する段階に達した場合

がその患者にとって最良の治療法でない場合、そのような患者には治療法 $T$ を中止する。エビデンスが蓄積されるにつれて、尤度モデルのパラメータ値に関する専門家の確信度は収束していくはずである。

$X_j$ を $j$ 番目の患者の観察された特性のベクトルとし、「各患者が受けるべき治療を決定するための基礎として使用されるもの、およびおそらく他の特性も含む」とする。(KadaneとSeidenfeldの表記に合わせるため、 $X_j$ を太字にしない)。患者 $j$ に割り当てられた治療法を $T_j$ とする。患者 $j$ の転帰を $O_j$ とする。 $P_j = (O_j, T_j)$ とする、

$X_j, O_{j-1}, T_{j-1}, X_{j-1}, \dots, X_1$  は、患者 $j$ について知られていることまでの過去の証拠とする。 $\theta$ の確率を決定する、関心のあるパラメータのベクトルであるとする。

特性 $X_j$ と治療 $T_j$ が与えられた患者 $j$ の結果 $O_j$ 。例えば、専門家の信念の度合いは、外来性の分散、平均、および線形係数によってパラメータ化された線形モデルの混合によって表現されるかもしれない。そして、これらのパラメータのユニークな値が、 $X$ の値が与えられた結果の確率を「決定」する。後に明らかになる理由により、パラメータの代替値が $X$ 変数の分布の代替仕様を与えないことが、定義上不可欠である。

$f(P_j)$ という式は、専門家の条件付き確信度を表し、与えられた、総証拠 $\theta$ が $P_j$ であることを表しています。KadaneとSeidenfeldは、「それは、パラメータとして其の

$$f(O_j | T_j, X_j, P_{j-1}) = f(O_j | T_j, X_j) \quad (1 \leq j \leq J) \quad (1)$$

この意味は  $\theta$   $P_{j-1}$ に含まれる情報のうち、 $T_j$ と $X_j$ から $O_j$ を予測するのに有用と思われるすべての情報が含まれて。"信念の度合いを因数分解したもの、

$$f(P_j) = \prod_{j=1}^J (O_j / T_j, X_j, P_{j-1}) \prod_{j=1}^J f(T_j / X_j, P_{j-1}) \prod_{j=1}^J \eta_\theta(X_j / P_{j-1})$$

1
2
3

は、条件付き確率の定義により、次のようになる。用語は1、2、3と記されている。  
 $\theta$

KadaneとSeidenfeldは、実験的試行における以前の被験者の特徴、治療、結果が、その後被験者となる「人々の種類」に影響を与えないと信じるなら、項3は依存しないと主張している。 $(X_1 \dots X_n)$ の分布に関連するパラメータは、 $\theta$ に含まれないことを思い出してほしい)。KadaneとSeidenfeldはまた、項2が以下になるとも言っている。

$X$ 値の関数としての治療割り当てに一定の規則があるため、依存しない。

と実験結果の経緯を説明します。

(1)からは、次のようになります。

$$\prod_{j=1}^J (\theta_j | T_j, X_j, p_{j-1}) = \prod_{j=1}^J (\theta_j | T_j, X_j)$$

KadaneとSeidenfeldは、この項によって与えられる比例を言う：

$$f_{\theta}(p_J) \propto \prod_{j=1}^J f(\theta_j | T_j, X_j)$$

"ここで考えているような臨床試験の結果を評価するのに使う形式である。"つまり、 $\theta$ の各値について、 $f_{\theta_i}(p_J)$ に $\theta_i$ の事前密度を掛けると、 $\theta_i$ の事後密度に比例した量が得られ、したがって、 $\theta$ の2つの値の事後密度の比を求めることができる。

ここで、新しいケースについて、 $X$ プロフィールと治療法 $T$ が与えられた場合の治療結果の確率を決定する各値の事後分布は、任意の1人の専門家について、様々なクラスの治療方針の結果に対する信念の程度をもたらす。KadaneとSeidenfeldは、治療方針の効果を予測することについて何も明言していないが、結果が何らかの方法で定量化されれば、これらの信念の度合いは期待値に変換されるかもしれない。いずれにせよ、 $T = k(X)$ で与えられる治療方針が最も頻繁に成功すると信じていた専門家が、別の治療方針、例えば  $T = g(X)$  がより頻繁に成功すると予測するようになる可能性がある。

なぜ実験では、被験者が自分で治療法を選び、好きなアドバイスを求めることができないのでしょうか。KadaneとSeidenfeldは2つの理由を挙げている。一つは、もし患者が自分で治療法を決めるようになったら、因数分解の項2が依存しないという議論が



成り立たなくなるからである。もう一つは、「患者が治療法を選択する際の行動を統計的に説明する必要性が生じ、その選択と治療効果そのものとの間に汚染が生じる可能性はある」というものである。これらの力を検討する。

を次の小節で考察する。

#### 9.4.2 実験計画における因果関係推論

専門家は、このような実験の分析、あるいは予測の導出を正当化するものは何であると信じているのだろうか。専門家は、未知の共通原因 $U$ が患者の $X$ の特徴と患者の治療結果の両方に影響する可能性をきつと受け入れている。しかし、この分析では、専門家の信念の度合いにおいて、治療は、 $X$ の値に対する条件付きで、そのような $U$ とは無関係であると仮定しているのである。それは、因数分解の項2がから独立しているという主張に暗黙のうちに含まれている。なぜ、治療 $T$ と未知の原因 $U$ は、 $X$ が与えられたときに条件付きで独立していなければならないのか？その理由は、明らかに、実験において、ある患者が受ける治療に影響を与える要因は、その患者の $X$ 値と $p_{j-1}$ だけであり、そのような $U$ が存在するとすれば、 $X$ を通して以外には $T$ に影響を与えないからである。因果関係のある事実とは、その根拠となる確率の独立性のために使用します。

専門家の実験セットに対する理解の一端を図12に示す（ここでは $X_j$ を単一変数とした）。

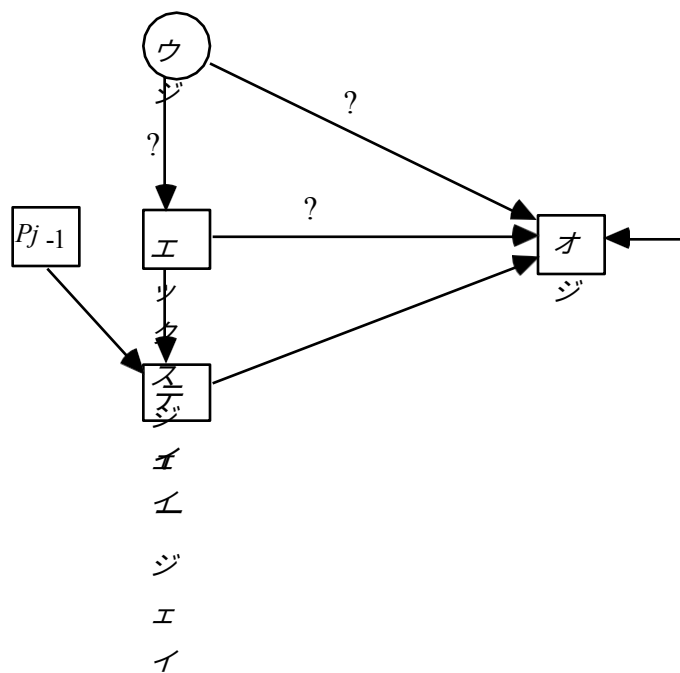


図12

専門家は、"? "のついたエッジが実際の影響に対応しているかどうかは全くわからないかもしれないが、図13の太字のような影響がないことは確かである。

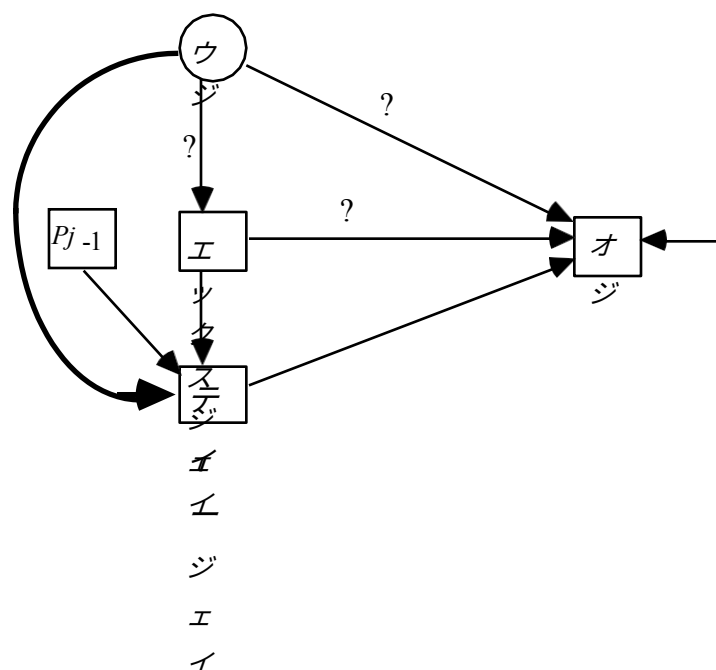


図13

治療割り付けを $X$ 変数と $p_{j-1}$ のみの関数とする実験デザインは、そのような影響を排除するために工夫されたものである。専門家の考えは、もし $U$ が $X$ を通してのみ $T$ に影響を与えるなら、 $U$ と $T$ は $X$ を条件として独立である、というものであるようです。この思考は、マルコフ条件の一例である。マルコフ条件における確率は、客観的にも主観的にも理解することができる。なぜなら、マルコフ条件の確率は、条件付き分布の混合であり、マルコフ条件を満たす分布の混合は、常にマルコフ条件を満たすとは限らないからである。ここでは、条件付き分布がそうであると仮定する。

理想化された専門家の信念のもう一つの特徴について考えてみよう。KadaneとSeidenfeldの実験では、理想化された専門家が、実験過程のモデルを指定するパラメータの確率分布を変化させる。実験終了後、専門家は、プロフィール $X$ を持つ新しい患者に、実験で使ったルール $T = h(X, p_{j-1})$ に従って治療を割り当てた場合に期待される結果についてだけでなく、プロフィール $X$ を持つ新しい患者に、エキスパートが

証拠に照らして現在好むルール  $T = g(X)$  に従って治療を割り当てた場合に期待される結果についても見解を持っている。原理的には、新患が  $T = g(X)$  のルールに従って治療された場合の結果に関する専門家の確率は

実験則  $T = h(X, p_j - I)$  は、その確率が、の各値に対して決定され、専門家の事後分布が  
 $\theta$   $\theta$   
 わかっているので、計算が簡単である。しかし、その確率を決定するものは

プロファイル  $X$  を持つ患者を好ましいルール  $T = g(X)$  に従って治療した場合の結果について、専門家の確率は？ なぜルールを変えても、 $O$  の  $X$  と  $T$  への依存性が変わらないのか？ Kadane と Seidenfeld の分析に含まれる賢明な答えは、どの患者の結果も、患者の  $X$  プロファイルと患者に与えられた治療法に依存するが、治療法が割り当てられる「ルール」には依存しない、というものである。治療法の割り当てルールを変更することで

は、プロフィール $X$ が与えられたときの治療 $T$ の確率に影響を与えるが、他の関連する条件付き確率には影響を与えない。このことは、次のようにして、より公式に導くことができる。

分布 $f(O_j, T_j, X_j, P_{j-1})$ の固定値が図12のタイプのグラフのマルコフ条件を満たす場合、定理7.1は $f(O_j|T_j, X_j)$ が $T_j$ の操作の下で不変であることを包含する。定理7.1によれば、図12のタイプのグラフのマルコフ条件を満たす分布において、 $T_j$ を与えられた $O_j$ と $X_j$ をd-connectするパスで $T_j$ に入るものがない場合、 $f(O_j|T_j, X_j)$ は $T_j$ の操作の下で不変であるといえる。ある $X_j$ 変数を含む $T_j$ と $O_j$ の間のすべての無向パスがこの条件を満たすのは、 $X_j$ のあるメンバーがそのようなパス上の非共闘者であるためである。 $T_j$ と $O_j$ の間には、 $P_{j-1}$ を含む無向きのパスは存在しない。したがって、 $f(O_j|T_j, X_j)$ は $T_j$ の操作の下で不変である。

しかし、Kadane/Sedransk/Seidenfeld仕様で設計された実験で、 $f(O_j, T_j, X_j, P_{j-1})$ が度数ではなく専門家の意見を表す場合、マルコフ条件は合理的に適用できるのだろうか。実験が終了し、専門家の信念の度合いが収束したと仮定した場合の状況を考えてみます。専門家は、 $X$ と結果に共通する原因があるのか、あるいはいくつかあるのか不明であるが、彼女が考える因果構造はすべて図12のようなものであり、図13のようなものはない。ある特定の因果仮説を条件として、マルコフ条件が満たされると仮定するが、専門家の実際の信念の度合いは、以下のような混合である。

異なる因果構造である。に対する専門家の分布が複数の混合分布である場合、 $f(O_j|T_j, X_j)$ は $T_j$ の操作の下で不変であるべきである。

異なる因果関係の仮説があるのか？ 答えはイエスで、次の論証が示すとおりである。

実験（第7章の意味で操作されていない）集団を $Exp$ 、実験結果に基づく何らかの政策を受ける仮想集団を $Pol$ と呼ぶことにする。 $f_{Exp}(O_j, T_j, X_j, P_{j-1})$ は、 $O_j, T_j, X_j, P_{j-1}$ に関

する専門家の確信度を表すとする。

を、 $f_{\theta, Pol}(O_j, T_j | X_j, P_{j-1})$ は、実験集団における専門家のある政策が適用された仮想的な集団の中で、 $O_j$ 、 $T_j$ 、 $X_j$ 、 $P_{j-1}$ についての信念の度合いを示すものである。因果構造を示す確率変数をCSとする。定理7.1から次のようになることは既に述べた。

$$f_{\theta, Exp}(O_j | T_j, X_j, CS) = f_{\theta, Pol}(O_j | T_j, X_j$$

, CS) Becauseは、 $T_j$ と $X_j$ を条件とする $O_j$ の密度を決定しま

す、

$$\begin{aligned} f_{Exp}(O_j | T_j, X_j, CS) &= f_{\theta_{Exp}}(O_j | T_j, X_j) \\ f_{Pol}(O_j | T_j, X_j, CS) &= f_{\theta_{Pol}}(O_j | T_j, X_j) \end{aligned}$$

それゆえ

$$f_{Exp}(O_j | T_j, X_j) = f_{\theta_{Pol}}(O_j | T_j, X_j)$$

次に、KadaneとSeidenfeldが提起した「偏り」の問題を考えてみよう。この概念では、信念の度合いだけでなく、いくつかの事実と潜在的な事実も考慮する必要がある。尤度モデルのパラメータには本当に正しい（あるいはほぼ正しい）値があり、その真の値は実験で進行するプロセスの特徴を表しているとする。専門家が真実に収束し、その事後分布が真値の周辺に集中すると仮定する。このような実験の費用を負担する国民が気にするのは、最善の治療法に関する専門家の見解が正しいかどうかである。専門家が好む治療ルール、例えば $T=g(X)$ を導入する政策は、検討中の代替政策よりも良い結果をもたらすだろうか？ この質問を見る1つの方法は、 $X$ プロフィールと治療を条件とする結果に対する専門家の期待値が、これらの条件下での結果に対する集団平均とほぼ等しいかどうかを尋ねることである。信念の度合いが母集団分布と一致するのであれば、母集団のすべての関係者が実験的割り当てルール $T$ に基づいて治療を受けた場合に生じる、 $T$ と $X$ を条件とする $O$ の頻度がいつになるかを問えばよいことになる。

$h(X, p_j | I)$ は、治療法の割り当てルール $T=g(X)$ を修正した場合、一般集団の $T$ と $X$ を条件とする $O$ の頻度とほぼ同じになります。つまり、「 $T$ と $X$ を条件とする $O$ の頻度は、 $T$ を直接操作しても不変なのだろうか？

この場合、先ほど見たように、マルコフ条件と定理7.1は、図12のグラフ、およびそれに類するすべてのグラフ（ $O_j$ と $T_j$ の共通の原因を持つすべてのトレックが $X_j$ 変数を



含み、 $O_j$ が $T_j$ を引き起こさず、 $X_j$ 変数と $T_j$ の共通の原因がすべて $X_j$ 変数であるもの) について、 $T_j$ と $X_j$ 上の $O_j$ の確率が $T_j$ を直接操作しても不変である、という条件を含んでいます。それ以外の仮定は必要ない。この例は、条件付き確率が直接操作の下で不変であるための一般的な十分条件の非常に特殊なケースである。

次に、なぜ実験計画では、治療割り付けが $Y$ のような患者の「記録されていない」特徴に直接依存することが禁じられているのかを考えてみよう。KadaneとSeidenfeldは、結果が「汚染」されるかもしれないと述べているが、これは次のような意味であると理解している。

患者を選ぶ原因、つまり  $T_j$  の原因として記録されていないものもあるかもしれないこと。

オジです。そうすると、図14のような因果関係のある絵になります。

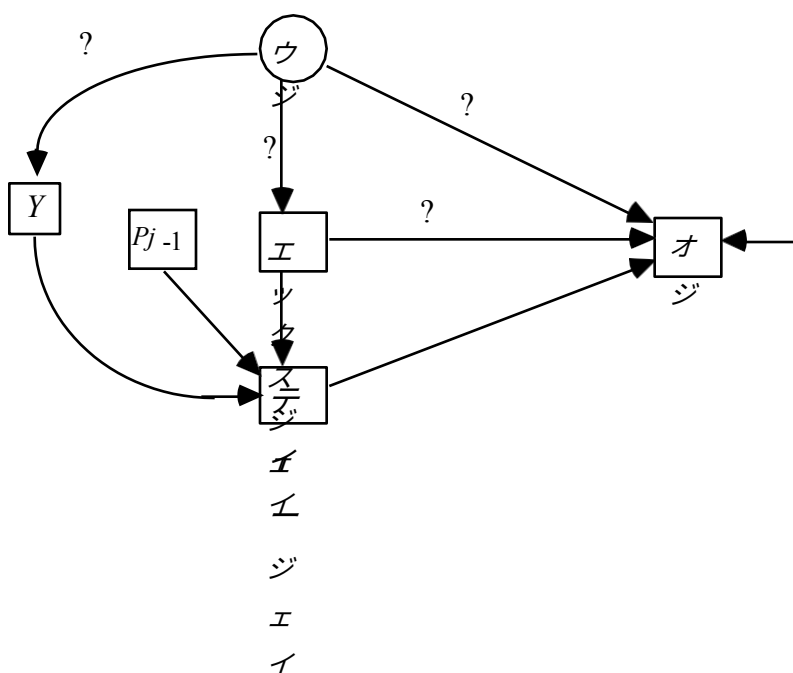


図14

疑問符は、対応する因果関係が存在するかどうか、我々（または専門家）が不確かであることを示す。U<sub>j</sub>からY、U<sub>j</sub>からO<sub>j</sub>への有向辺が存在するとする。すると、O<sub>j</sub>とT<sub>j</sub>の間には、Yを含む無向きのパスが存在する。この場合、マルコフ条件は、T<sub>j</sub>とX<sub>j</sub>の変数を条件とするO<sub>j</sub>の確率は、T<sub>j</sub>を直接操作しても、「偶然の」パラメータ値を除いて不変であることを伴います。つまり、もし記録されていないYの値が割り当てに影響するとしたら、私たちや専門家が知っている限り、専門家が提案したルール  $T = g(X)$  の効果に関する予測は間違っていることになる。

ここで、なぜ患者の好みを治療に影響させるために使うことができないのかという問題に戻ろう。患者選好を実験における治療割り付けの決定に使えない理由は、患者選好と治療結果との間に、知る限りでは因果的な相互作用があるかもしれないから

だけではない。確かに、そのような交絡が起こらないことが分かっているならば、患者の好みを治療割り当てに使うことができるのだが、交絡があってもなぜそのような割り当てができないのだろうか。治療割り当てを患者の選好に依存させるためには（おそらく  $X_j$  変数のような他の特徴にも依存する）、患者の選好が確認されなければならない。もし嗜好がわかっているならば、 $T$  と  $X_j$  変数に結果を条件づけしたように、 $Preference$ 、 $T$ 、 $X_j$  変数に結果を条件づけしてはどうだろうか。 $Preference$ 、 $X_j$  変数、 $T_j$  を条件とする  $O_j$  の確率は、 $X_j$  変数と  $T_j$  を条件とする  $O_j$  の確率と形式的に異なる役割を持たない。図14で  $Y = Preference$  とすると、マルコフ条件と定理7.1により、 $T_j$ 、 $X_j$ 、 $Preference$  を条件とする  $O_j$  の確率は、 $T_j$  を操作しても不変であることがわかります。もちろん、以下のような注意は必要である。

患者さんの好みが治療割り当てに影響を与えるような実験では、そのような配慮が必要です。患者に治療法を選択させる場合、その選択が情報提供されない限り、あまり意味がない。実験では、各患者が受ける情報やアドバイスを標準化することが必要であろう。

このデザインは、治療方針の効果を予測するために実際に使用することができるだろうか？ 研究の終わりに、専門家は  $T$ 、 $X$ 、 $Preference$  が与えられた結果の密度関数を持つ。その後の患者の治療に対する好みは記録されなければならない（しかし、必ずしも治療の決定に使われる必要はない）。発表された研究結果が  $Preference$  を変化させた場合、 $Preference$ 、 $X$ 、 $T$  を条件とする結果の確率は、図12の  $U$  に隣接するエッジで表される影響が存在するかどうか依存する。しかし、患者が実験結果を知らされた場合、多くの場合、患者の選好が変化することを確実に予想しなければならない、つまり、実験結果を発表することは、選好を直接操作することである。つまり、実験結果を公表することは、選好を直接操作することになるのである！

したがって、患者の好みを治療の割り振りに使えないという理由は、単になぜなら、彼らの選好は、治療の結果と複雑な相互作用をする可能性があるからです。 $-X$  の変数もそうかもしれません。ある政策が、実験的研究の結果に関連する変数をどのように変化させるかを考慮しない分析は、予測がいつ信頼されるかを完全に説明することはできない。Kadane が指摘したように、実験集団における  $Preference$  の原因が非実験集団における  $Preference$  の原因と異なる可能性は、実験集団における  $X$  の原因が非実験集団における  $X$  の原因と異なる可能性よりも高いのである。私たちが考えているケースでは、治療を割り当てるために患者のプリファレンスを使用する政策についての実験結果（または勧告）の発表は、一般的に、まさにそのプリファレンスを直接変えることが期待されます - 一方、治療を割り当てるために  $X$  変数を使用す

る政策は、一般的に集団内の人々の $X$ 変数の値を変えることはありません。(もちろん、患者の嗜好に基づく治療を行わない研究の結果が、 $X$ 変数の分布を直接操作する場合もあり、その場合は、治療と $X$ 変数に条件付けられた結果の予測も信頼できないことになる。仮に、コレステロール値の関数として治療を割り当てる実験的な試験で、ある薬がコレステロール値の低い被験者の癌に非常に有効であることがわかったとする (fanciful)。

---

<sup>1</sup>パーソナル・コミュニケーション

このように、Kadane/Sedransk/Seidenfeldのデザインは、非ランダム化試験に対する従来の方法論の偏見が隠してきた倫理的な難問を明らかにしている。最も効果的で費用対効果の高い治療法を見つける義務と、臨床試験の被験者として参加する人々の好みを治療において考慮する義務がある。どちらも満たすことができる。しかし、治療に関する決定に影響を与える関連する科学的結果について、患者に十分に知らせる義務もある。この義務は、他の義務と相容れないものである。

#### 9.4.3 倫理的なトライアルに向けて

最後に、因果関係分析を用いて、実験的な臨床試験における患者の治療選択について、より楽観的な結果を得ることができる。ある実験において、治療の割り当てが関数  $T = h(X_j, \text{Preference}, p_{j-1})$  であり、Preferenceと $O_j$ の間のすべての無向パスが、 $X_j$ のメンバーを非干渉者として含むとする。(このような場合、Preferenceは $O$ と混同されていないということにする。)そして、 $T_j$ と $X_j$ を条件とする $O_j$ の確率は、 $T_j$ を直接操作しても不変であることが、マルコフ条件と忠実条件の結果として厳密に示されます。*Preference*を条件としたり、政策に用いる治療ルールに*Preference*を考慮したりしない場合もあり、その場合、発表した実験結果が好みの分布を変えるかどうかは、予測の精度には関係しません。しかし、場合によっては、患者の選好が治療結果と混同されないこともあり得る。もし、研究者が実際にプリファレンスが $O$ と交絡していないことを発見できれば、そのようなプリファレンスを実験プロトコルの治療割り当てと推奨政策の両方の要因にすることができます。KadaneとSeidenfeldは、このような依存関係が存在するとしても、検出不可能であると述べている。もし専門家が、治療の結果に影響を与えない要因について全く知らないのであれば、KadaneとSeidenfeldは正しい。しかし、もし専門家が、患者によって異なり、治療を通じて以

外は結果に影響を与えず、結果と共通の原因を持たない何か、何でも知っているなら、我々は同意できない。その何かとは、患者の最後の誕生日の月の満ち欠けであったり、患者の母親の誕生日の天球上の太陽と木星の角度間隔であったり、単に各患者に割り当てられた無作為化装置の出力であったりする。どうなんだ？

図15のグラフに忠実な分布では、 $E$ と $C$ は $B$ を条件として依存関係にある。この関係は、忠実性を仮定しなくても、線形モデルで必要である。

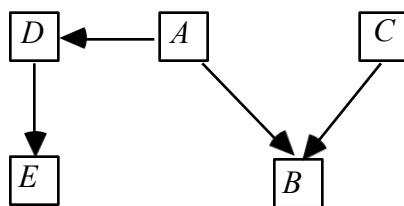


図15

さて、今回の問題に戻って、患者ごとに異なる特徴で、治療に対する患者の選好とは無関係で、治療によってのみ結果に影響を及ぼすと専門家が認めるものを $Z$ とする。実験では、治療を $Preference$ 、患者の $X$ プロファイル、 $p_{j-1}$ 、患者の $Z$ 値の関数とするルールを採用する。そうすると、実験における因果過程の専門家の見解は、図16のようになる：

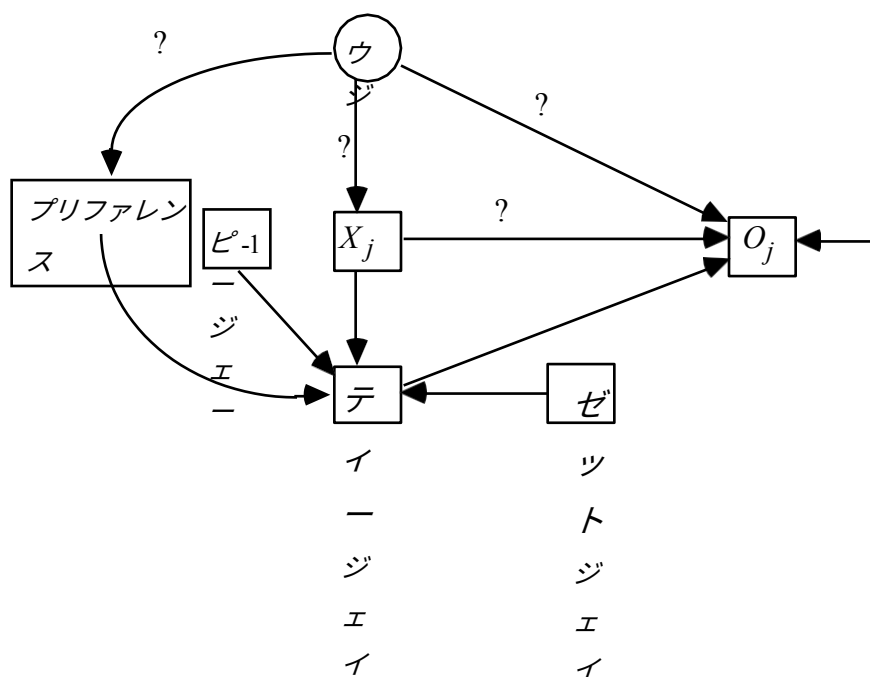


図16

$O_j$ と $Z_j$ が $T_j$ と $X_j$ を条件として独立であるならば、 $X_j$ を与えられた $Preference_j$ と $O_j$ を結ぶ d-connecting pathで $Preference_j$ に入るものは（忠実と仮定して）存在しない。 $Preference_j$ と $O_j$ の間に交絡関係があるとするれば、それは実験データから発見できる。（同様に、



実験集団が因果構造の混合物からなるため、 $X_j$ を与えられた $T_j$ と $O_j$ が依存するとすれば、ある特定のパラメータ値のセットが「偶然の」独立性を生み出さない限り、 $O_j$ と $Z_j$ は $T_j$ と $X_j$ を条件に依存します)実際、すべての依存関係が線形であるというかなり勇気のいる仮定によれば、 $Z_j$ は道具変数であり (Bowden and Turkington, 1984)、 $O$ と $X$ を条件とする $T$ の影響を表す線形係数は、相関と偏相関から計算することができる。

このことは、実験集団において、*Preference*が $O$ と交絡しているかどうかを判断するためのパイロットスタディが可能であることを示唆している。パイロットスタディでは、*Preference*が要因になる可能性がある

パイロット研究の結果、実験集団において *Preference* が *O* と混同されていないことが判明した場合、*Preference* が *T* を完全に決定する大規模な研究を行うことができる、それ以外の場合は Kadane/Sedransk/Seidenfeld デザインを採用できる。

医学実験の目的は、患者の好みを考慮せずに治療法を割り当てる方針を採用した集団における結果を予測することかもしれない。例えば、"全身麻酔にハロタンだけを使用した場合の死亡率はどうか?" というようなことである。この場合、患者の好みは割り当てられた治療法とはほとんど関係がない。患者の選好が政策集団の治療割り当てに使用されない場合、患者が治療を選択する（あるいは少なくとも影響を与える）実験に基づくと、政策集団の  $P(O|X, T)$  の予測が不正確になると考える理由はなく、選好と *O* は混同されないのです。

しかし、実験の目的は、政策集団における  $P(O|X, T)$  を予測し、患者が受ける治療の選択をするか、少なくとも影響を与えるようにすることであるのかもしれない。例えば、乳房切除術と乳房切除術の選択において、患者の好みが決め手となる場合がある。この場合、私たちが提案するデザインに基づく政策集団における  $P(O|X, T)$  の予測の正確性を疑う理由がいくつもある。しかし、この場合、患者が実験的な治療を受けたかどうかにかかわらず、どのデザインも同じ困難に直面します。これらは、Kadane/Sedransk/Seidenfeld や古典的なランダム化計画に基づいて、政策集団における  $P(O|X, T)$  の予測（信念の度合いではなく、頻度や予感として解釈）の正確さを疑問視する同じ良い理由です。根本的な問題は、実験集団における選好と他の変数の因果関係が、政策集団における因果関係と異なる可能性があるもっともらしい方法がいくつも存在することである<sup>20</sup>。しかし、実際の集団では、治療法の選択は所得に大きく依存する可能性がある。収入と結果をつなぐ共通の因果経路が、患者の *X* プロ

ファイルのどの変数も含んでいないことが容易にあり得る。この場合も、実験集団では、患者が受ける情報やアドバイスを標準化することができる。また、与えられたアドバイスが患者の $X$ プロファイルのみの関数であることを保証しようとすることも可能である。しかし、政策集団では、患者さんが受けるアドバイスや情報をこのようにコントロールすることはできない。この場合、嗜好の決定は、政策集団における異なる因果構造が混在している可能性がある。最後に、政策集団における患者の選好の決定が

---

<sup>2</sup>Preferenceが直接操作されていなくても、実験集団と非実験集団でPreferenceと他の変数の因果関係が異なる可能性を指摘してくれたJay Kadane氏に感謝する。

の母集団が不安定になりやすい。患者さんの間にも流行り廃りがあり、医師の間にも流行り廃りがある。新しい情報が発表されたり、集中的な広告キャンペーンが行われたりすることもある。これらのいずれかが、Preferenceと $O$ の間、ひいては $T$ と $O$ の間に、 $X$ プロファイルのメンバーをノンコライダーとして含まないトレックを作り出すかもしれない。

つまり、実験集団ではPreferenceと $O$ が交絡していなくても、政策集団では交絡している可能性が非常に高いのです。もし、政策集団で交絡していれば、 $P(O|X, T)$ は実験集団と政策集団で同じにはなりません（異なる因果構造のパラメータが偶然に等しくなる値を持っていない限り）。Kadane/Sedransk/Seidenfeldデザインに基づく $P(O|X, T)$ の予測や、ランダム化実験に基づく $P(O|T)$ の予測でも同じことが言えることに注意してください。これは、患者の好みが政策集団の治療に影響を与えるために使用される状況において、有用な予測ができないことを意味するものではない。ある治療が患者の選択なしに行われた場合、 $P(O|X, T)$ はどうなるかを患者に知らせることは可能である。そして、我々が提案したデザインでは、この（反実仮想）予測は、実験集団でPreferenceと $O$ が混同されない限り、政策集団でPreferenceが $O$ とどのように因果関係があるかにかかわらず、正確である。

では、単に全員が治療を受けている集団における $P(O|X, T)$ を予測しようとしているとします。私たちが提案したデザインは実用的だろうか？ 潜在的な問題の一つは、実験対象である患者に治療法に関するアドバイスや情報を与える義務があることである。もし患者が医師からアドバイスを受けることができれば、そのアドバイスは患者の $X$ プロファイルに基づいたものになると思われる。たとえ、被験者が受け取る情報が、専門家全員が $T_1$ という治療を選ぶべきではないという意見だけだったとして

も、被験者の $X$ プロファイルは、被験者の好みの原因である。このようなアドバイスや情報を与えることで、 $P(O|X, T)$ が $T$ の操作の下で不変である可能性は低くなるのでしょうか？  $X$ プロファイルの変数が、 $O$ の原因であると考えられる変数、または $O$ と共通の原因を持つ変数として選択されたことは事実である。

$O$ 。したがって、この種の助言は、実験集団にPreferenceと $O$ の共通原因を作り出す可能性が非常に高い。したがって、実験集団において、 $T$ と $O$ の間に、 $T$ に入り、Preferenceを含むトレッキングが存在する可能性が高い。しかし、そのようなトレッキングは、 $X$ のメンバーも非共役として含むため、 $X$ が与えられた $T$ と $O$ をd-connectすることはない（図17参照）。（さらに、 $p_{j-1}$ はPreference $_j$ を通してのみ $O_j$ と因果的につながっているという仮定のもと、実験が進むにつれてアドバイスを変えても問題はないだろう（図17参照）。

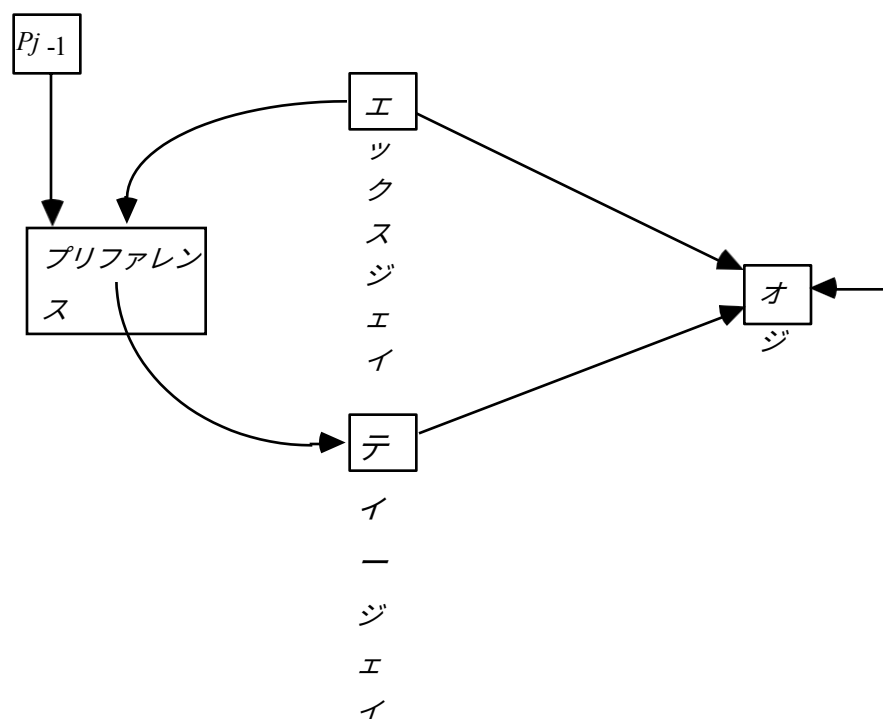


図17

患者に治療を選択させることができるのか、それとも単に治療の選択に影響を与えることができるのか？ 単に全員が治療を割り当てられた集団における $P(O|X, T)$ を予測しようとしている限り、患者に自分の治療を選択させることができます。その場合、 $P(O|X, T = T_I)$ は実験集団では未定義であり、その量が定義されている集団での $P(O|X, T = T_I)$ の予測に使うことはできない。

まとめると、全員が治療を割り当てられている集団で $P(O|X, T)$ を予測することが目的であり、患者の間で治療の選択に十分なバリエーションがあり、実験集団が因果構造の混合物でなく、Preferenceと $O$ が実験集団で交絡しない限り（この問題は経験的に決めなければならない）、情報を得た患者が自分で治療を選ぶ実験集団から正確な予測をすることは可能であるということです。実験において患者の嗜好が治療に影響を与えることが本当に重要であるならば、信頼できる予測と矛盾しないようにその条件を実現することが可能であれば、多少のコストを冒してでも実現する価値

値がある。その価値がどれほどのものかは、金銭的なものであれ、予測の信頼性の低下であれ、われわれが言うことではありません。しかし、Kadane/Sedransk/Seidenfeldデザインを単純に修正し、最初の試験では $X_j$ 、 $P_{j-1}$ 、 $z_j$ 、 $Preference_j$ に基づいて治療を割り当て、 $Preference_j$ と $O_j$ に根拠がないことがわかったら患者の自己割り当てを認めるようにすれば、研究者は自律性とインフォームドコンセントという倫理要件に沿った臨床試験を実施できる場合がある。

## 9.5 一例です：喫煙と肺がん

喫煙と肺がんをめぐる議論の魅力的な歴史は、政策研究からの因果関係の推論と予測の難しさを示し、また、よくある間違いも示している。おそらく、これほどまでに非実験的手法で徹底的に研究され、医学と統計学の専門家を対立する陣営にきれいに分けた仮説的な因果関係は他にないだろう。本章と前章の理論的結果は、この論争の論理と誤謬について、いくつかの洞察を与えてくれる。

サムネイルは以下の通りです：1950年代、DollとHill（1952）による後方視的研究により、タバコの喫煙と肺がんの間に強い相関関係があることが判明した。この最初の研究をきっかけに、アメリカ、イギリス、そしてその後すぐに他の国でも、回顧的、前向きの研究が数多く行われ、そのすべてがタバコの喫煙と肺がん、さらに一般的にはタバコの喫煙とがん、タバコの喫煙と死亡率の間に強い相関関係があることがわかった。この相関関係から、健康運動家や一部の医学雑誌は、タバコの煙が死や癌、特に肺癌を引き起こすと結論づけた。ロナルド・フィッシャー卿はこの推論に強い異論を唱え、喫煙行動と肺がんが遺伝によってのみ因果関係を持つという説を好んだ。フィッシャーは、統計的な依存関係から因果関係を推論することに反対し、手紙やエッセイを書き、ついには本を出版した。ネイマンは、遡及的研究からの証拠に対する批判を敢行した。このように、統計学の専門家の重鎮たちは、医学界の手法に対抗するために同盟を組んだのである。1959年、FisherとNeymanに対する反論を含む証拠のレビューがCornfield, Haenszel, Hammond, Lilienfeld, Shimkin, and Wynderによって発表された。コーンフィールドの論文は、1964年の「喫煙と健康に関する外科医総長報告」の青写真の一部となり、政治的事実として喫煙が肺がんの根拠のない原因として扱われることを事実上確定し、今なお続いている公衆衛



生キャンペーンを開始させた。ブラウンリー（1965）は、1964年の報告書をアメリカ統計学会誌で検討し、フィッシャーが挙げたであろう多くの理由で、統計的に根拠のないものとしてその論拠を否定しています。1979年、外科医総長は喫煙と健康に関する第2報告書を発表し、第1報告書の主張を繰り返しながら、より豊富なデータを用いて、ブラウンリーの批判に対する真剣な反論はしなかった。この報告書は、特にタバコの喫煙が米国における予防可能な最大の死因であることを、証拠に基づいて強く主張している。ジョセフ・カリファノによる報告書の序文は、まさに悪意に満ちたもので、報告書の結論に対する批判は、科学そのものに対する攻撃であると主張した。物理学者から理論生物学者に転身し、統計学者となったP. Burch (1983)は、この報告書に対する長大な批判を発表することを止めなかった。

しかし、喫煙介入の効果に関する最初のランダム化臨床試験の報告は、すべて無効か、介入プログラムが死亡率を増加させることを実際に示唆するものであった。

Burchの発言は、A. Lilienfeld (1983)の返答を招き、Burchへの攻撃で始まり、攻撃で終わるというものであった。

フィッシャーの批判は、喫煙と肺がんの間には1つ以上の共通の原因があるという対立仮説に対して、遡及的か前向きかにかかわらず、喫煙とがんの相関関係を無秩序に観察することが、喫煙が肺がんを引き起こすという証拠になるという主張に対して向けられたものだった。このようなフィッシャーの強い考え方は、彼の経歴の特徴から理解することができる。フィッシャーは、無作為化実験計画の導入に大きく貢献した。無作為化の目的の一つは、測定されていない共通の原因の作用では説明できない、仮説上の原因と結果の間の統計的依存性を得ることにあった。無作為化のもう一つのポイントは、仮説の検証のために明確に定義された分布を保証することであったが、フィッシャーは観察研究での利用を疑っていたかもしれない。フィッシャーは成人してからずっと遺伝に関心を持ち、優生学運動の強力な支持者であった。そのため、人間の行動や病気の非常に詳細な特徴について、遺伝的な原因を信じる傾向があった。フィッシャーは、肺がんと喫煙の相関関係を説明するには、人口のかなりの割合が、喫煙と肺がんの両方の遺伝的素因を持っていると考えた。

フィッシャー (1959, p. 8) のこうした疫学的な議論に対する基本的な批判のひとつは、相関が因果関係を過小評価するというものであった。8) は、こうした疫学的な議論に対する基本的な批判として、相関関係は因果関係を過小評価するものであるとしている：すなわち、(1)想定される効果が本当は原因であること、この場合、初期の癌、あるいは慢性炎症を伴う前癌状態がタバコの喫煙を誘発する要因であること

、(2)タバコの喫煙と肺癌は、相互に因果関係はないものの、共通の原因（この場合、個人の遺伝子型）によって影響を受けること、です。"フィッシャーでさえも、(1)を真剣に受け止めなかった。例えば、喫煙と肺がんには測定不能ないくつかの異なる共通原因がある、あるいは喫煙ががんを引き起こす一方で、測定不能な何かが喫煙とがんの両方を引き起こすというようなことである。

統計的関連性」を統計的依存性と解釈するならば、フィッシャーの言う通り、非対照の研究で喫煙と肺がんの間に統計的依存性があるという観察結果だけを見れば、喫煙が肺がんを引き起こさないという可能性を否定することはできない。しかし、彼は、この仮説がもし本当であったとしても、その可能性には言及していない。

喫煙に関連するが、がんとは独立した、あるいは条件付きで独立した（喫煙以外の変数に関連する）因子を見つけることによって、実験なしに確立された。1960年代までに、喫煙に関連する多くの個人的、社会的要因が特定され、喫煙とは独立した可能性のある肺がんの原因（主に職業上の危険や放射線に関連する）もいくつか特定されていたが、喫煙と肺がんの共通の原因に関する疑問に対するそれらの可能性は気づかれなかったようだ。区別が難しいのは、喫煙が肺がんの根拠のない原因であるという仮説と、喫煙ががんを引き起こすという仮説と、喫煙とがんの測定不能な共通の原因（または原因）が存在するという仮説の両方がある場合です。

遺伝子型が喫煙行動と癌の両方を引き起こすというフィッシャーの仮説は推測の域を出なかったが、それは遺言のようなものではなかった。フィッシャーは、一卵性双生児の喫煙行動が二卵性双生児の喫煙行動より似ているという証拠を得た。一卵性双生児は二卵性双生児に比べ、周囲から同じようなことをするように促されるという仮定でこの事実を説明することができるが、喫煙する遺伝的性質でも説明できるというフィッシャーの考えは確かに正しい。一方、フィッシャーは、ある種の癌が遺伝的な原因を持っているという証拠に言及することができた。

コーンフィールドら（リリエンフェルドを含む）の論文は、肺がんには他に原因があるかもしれないが、タバコが肺がんを引き起こすと主張した。この見解は、すでにアメリカやイギリスの公的な研究グループから発表されていたものである。コーンフィールドの論文は、5年後の外科医総監の報告書よりも科学的な関心が高いが、それは前者が主として政治的な文書でないためでもある。コーンフィールドらは、既存のデータからいくつかのことがわかると主張した：

1. 剖検で発見された肺がんは、研究によって増加率が異なるものの、1900年以降、

系統的に増加していた。肺がんはタバコの喫煙量に応じて単調に増加し、タバコを吸っていた人よりも現在吸っている人の方が高いことが判明している。大規模な前向き研究において、肺がんの診断には未知の誤差があるかもしれないが、総死亡率もタバコの喫煙量に比例して単調に増加する。

2. 肺がん死亡率は農村部よりも都市部の方が高く、農村部の人は都市部の人よりも喫煙量が少ないが、どちらの集団でも喫煙者は非喫煙者よりも肺がんによる死亡率が高い。

3. 男性は女性よりも肺がんによる死亡率が高く、特に55歳以上では顕著ですが、女性は男性よりも喫煙量が少なく、喫煙を始めた時期もかなり遅かったようです。

4. 肺がんの原因には、様々な産業汚染物質や社会経済階層に関連した未知の状況などがあり、貧しい人や裕福でない人は、裕福な人よりもこの病気にかかる可能性が高いが、喫煙する可能性は高くない。Cornfieldらは、「確立された産業発がん物質にさらされる人口は少なく、これらの物質が残りの人口における肺がんリスクの上昇を説明することはできない」と強調している。また、社会経済階級や関連する特性に関連する効果は、喫煙歴について指摘されたものよりも小さく、喫煙階級の差は、これらの他の効果の観点から説明することはできない。(p.179).この一節は、喫煙者と非喫煙者のがん発生率の差は、社会経済的な差では説明できないとしている。この主張は事実である可能性が非常に高いが、それを裏付ける分析はなされておらず、喫煙とがんの影響ではない既知の危険因子--居住地域、既知の発がん物質への曝露、社会経済階級など--のすべてのサブセットについて、喫煙と肺がんが独立かほぼ独立かを条件とする中心問題は検討されていない。その代わりに、Cornfieldらは、異なる研究では異なる変数を測定し、"重要な事実、他の変数を一定にした場合、すべての研究において、タバコの喫煙は肺がんとの高い関連を保持している"と指摘しています。

5. タバコは、上気道、口腔組織、手指のがんの増加とは関係ありません。例えば、気管の癌は稀である。しかし、Cornfield, et al.は、"人間に気管支がんを発生させる発がん物質が、咽頭や他の部位にも新生物性変化を生じさせるべきという先験的理由はない。"と指摘している。(p. 186).

6. タバコの煙が繊毛の働きを阻害することは、牛、ラット、ウサギの実験的な証拠

です。纖毛の阻害は、気管支の表面から異物を除去することを妨害する。纖毛細胞の損傷は、非喫煙者より喫煙者の方が多い。

7. タバコのタールを犬の気管支に直接塗布すると細胞に変化が生じ、マウスの皮膚にタバコのタールを塗布すると癌が発生する実験もあったが、他の実験では見られなかった。マウスをタバコの煙に200日以上さらすと、細胞に変化が生じるが、癌は発生しない。

8. タバコの煙からは多くの芳香族多環式化合物が分離されており、その中の一つであるベンゾピレンの $\alpha$ 形は発がん性があることが知られていた。

おそらく最も独創的な技術的部分は、喫煙が肺がんを引き起こすという仮説に対する一種の感度分析であった。Cornfieldらは、肺がんを引き起こし、喫煙行動に統計的に依存する単一の仮想的な二値潜在変数を検討した。彼らは、このような潜在的な原因は、観察された関連を説明するために、肺がんとはほぼ完全に関連し、喫煙と強く関連する必要があると主張した。しかし、この議論は、喫煙と肺がんの共通の原因が複数存在する合理的な可能性を無視しており、観察された喫煙と肺がんの関連は、直接的な影響と共通の原因の両方によるものであるという仮説とは、明確な関係がないものであった。

まとめると、コーンフィールドらは、喫煙が癌を引き起こすメカニズムを示すことができると考え、動物実験からの証拠を主張したが、その点での彼らの立場は、それ自体で躓く傾向があった（項目5と7を比較してください）。彼らは、統計的なケースを完全に明確にしたわけではないが、肺がんは、喫煙の影響と考えるのは妥当ではないが、喫煙の原因となりうる測定可能な多くの要因によっても引き起こされ、喫煙とがんは、これらの要因に条件付きで統計的に依存しているという立場であったようである。フィッシャーに対して、彼らは次のように主張した：

憲法仮説の難しさには、次のような考察がある：

(a)過去半世紀にわたる肺がん死亡率の変化、(b)実験動物に対するタバコのタールの発がん性、(c)パイプと葉巻タバコによる頬腔と喉頭のがんへの大きな影響の存在、しかし肺がんには影響しない、(d)タバコ喫煙をやめた人たちの肺がん死亡率の低減、。これらの考察は、それだけで体質仮説に対抗するに



は不十分であり、体質仮説をアドホックに修正することで、追加された証拠の断片に対応することができるだろう。しかし、継続的に修正された仮説が真剣に受け入れることが困難になるとき、ある時点に到達する。(p. 191)

論理的には、コーンフィールドらは地図のあらゆる部分を訪れました。喫煙と肺がんの共通の原因とは矛盾するはずの証拠が、矛盾しないとも言えるのである。ある研究が自己選択を含んでいるという異議--フィッシャーたちが(d)に異議を唱えるように--は、共通原因仮説の「アドホックな修正」としてカウントされたのである。時系列の議論では、肺がんの診断が劇的に改善されたこと、医師がヘビースモーカーに肺がんの診断を偏らせる傾向があり、そのような診断を見落とすことがあるという複合効果を無視しているという、明言されていないが本物の反論に対しても実質的に同じ回答がなされた。

また、都市化など肺がんに関与する他の要因の同時期における系統的な増加も、軽喫煙者にとっては重要である。コーンフィールドらのレトリックは、健全な研究デザインに対する合理的な要求を、*その場しのぎの*仮説に変換してしまった。実際には、提出された証拠のどれもが、"憲法仮説"と矛盾するものではなかった。

コーンフィールドの論文を読むと、遺伝的説明に対する彼らの真の反対意見は、遺伝子型の違いと喫煙行動の違いや様々な癌に対する責任との間に非常に密接な相関関係が必要であるということである。パイプや葉巻を吸う人はタバコを吸う人と遺伝子型が異なり、軽いタバコを吸う人は重いタバコを吸う人と遺伝子型が異なり、タバコをやめた人はやめなかった人と遺伝子型が異なるはずである。後に、モルモンと非モルモン、セブンスデー・アドベンチストと非セブンスデー・アドベンチストでは遺伝子型が異なるはずだと、外科医総長は付け加えました。医師たちは、それを信じようとしませんでした。彼らの懐疑心は、行動上の違いを遺伝的に説明することが政治的にも道徳的にも正しくないとみなされつつあった時代の精神に沿ったものであり、病的な優生学運動は、振り返れば恥ずかしい人種差別とみなされつつあった。

1964年、外科医総長の報告書は、コーンフィールドと同じ研究や議論の多くを検討したが、因果関係を立証するのに十分とされる「因果関係の疫学的基準」を追加し、喫煙とがんはその基準を満たすと主張した。その基準は弁解の余地のないものであり、科学的な正当な評価を促すものではありませんでした。その基準は、関連性の「一貫性」、関連性の「強さ」、関連性の「特異性」、関連性の時間的關係、関連性の「首尾一貫性」であった。

これらの基準はいずれも非常に曖昧なままであったが、因果的なものと共通の因果

的なものを確実に識別するためには、これらを正確にする方法では不十分であった。一貫性とは、別々の研究が「同じ」結果を出すことを意味するが、どのような点で同じであるべきかは規定されていない。喫煙の相対リスクに関する異なる研究では、被験者の性別、年齢、国籍によって乗数が大きく異なる。ほとんどの研究の結果は、すべて肯定的であるという点では同じであったが、リスクの深刻さにおいてはほとんど同じでなかった。なぜ、弱い相関関係よりも強い相関関係の方が原因を示す可能性が高いのか、報告書では明らかにされていない。特異性とは、推定される原因である喫煙が、推定される効果である肺がんとはほぼ一意に関連することを意味する。Cornfieldらは、原因に関するこの要件を正当な理由で否定していたが、Surgeon Generalの報告書が提示した喫煙データでは、この要件が明らかに違反されていた。報告書の専門用語で「首尾一貫性」とは、データについて他の説明が不可能であることを意味する。

は、この事件では満たされなかった。時間的な問題としては、タバコの喫煙量の増加と肺がんの増加の相関が、何年ものラグを伴っていることが問題となった。批判者は、時系列が都市化、診断の変化などと混同されていること、コーンフィールドらが診断の信頼性の低さの問題を回避するために用いた基準、すなわち総死亡率そのものが、年齢調整した場合、100年以上のタバコ消費量と無相関であることを指摘した。

Brownlee (1965)は、*Journal of the American Statistical Association*に掲載された報告書のレビューの中で、これらの点を多く指摘している。報告書の議論のレベルに対する彼の軽蔑は明白で、彼の結論は、フィッシャーの代替仮説は排除されておらず、非常に真剣に取り組まれてもいないというものであった。ブラウンリーの見解では、外科医総長の報告書には、遺伝的共通原因に対する2つの反論しかなかった。(a) 遺伝的仮説は、用量反応データを説明するために非常に複雑でなければならないと言われている。Brownleeは(a)には触れなかったが、(b)は診断法の変化、既知および未知の関連する他の要因の変化、成人すると肺がんになりやすいかもしれない弱い新生児の生存率の変化のため、証拠としては不十分であると強く主張した。

このレビューの中で特に興味深かったのは、ブラウンリーが「 $E_2$ が $E_1$ を引き起こす」という統計分析について、「 $E_1$ と $E_2$ は、システムの他のすべての変数について考えられるあらゆる値のベクトルに対して条件付きで依存する」という「非常に単純化された」提案をしたことである。ブラウンリーは、もちろん、自分の条件では「 $E_2$ が $E_1$ を引き起こす」と「 $E_1$ が $E_2$ を引き起こす」が分離されないことに気づいていたが、それは喫煙と癌については問題なかった。しかし、因果関係の方向を無視しても、ブラウンリーの条件--おそらく、同じ原理が回帰で誤って使われているという事実が彼に示唆したのだらう--は、まったく間違っている。例えば、ある測定変数 $E_j$ が

$E_1$ と $E_2$ の両方の直接効果であれば、 $E_1$ と $E_2$ が何の因果関係もないとしても、それは満たされるでしょう。

ブラウンリーは、自分の考え方が予測や介入に重要であると考えた：

不等式が、例えばある特定の部分集合 $E_j, \dots, E_k$ に対してのみ成立し、他のすべての部分集合に対しては等式が成立し、その部分集合 $E_j, \dots, E_k$ が低確率で集団に存在する場合、 $\Pr\{E_1|E_2\}$ は $\Pr\{E_1|E_2^c\}$ と厳密に等しくないが、数値的にそれに近くなり、 $E_1$ の原因としての $E_2$ は実用上あまり重要でないかもしれない。これらの検討は、本委員会の評価責任に関わるものである。

健康被害の大きさ（8ページ）。さらに複雑なのは、必要な副次的条件 $E_j, \dots, E_k$ の1つが、一方では、パースニップを食べることのように個人によって制御可能と推定される場合と、何らかの遺伝的特性の存在のように制御不可能な場合とを区別する場合である。後者の場合、その遺伝的性質が識別可能か識別不可能かの違いもある。例えば、重要な補助条件 $E_j$ である目が茶色であっても、茶色でない目の人にはタバコを吸っても安全だと言うことができるのである。（p. 725）

喫煙に対する公共政策の介入の効果をどのように予測するかという問題については、これ以上うまく考えた人はいないようである。ブラウンリーは、外科医総長の報告書が、禁煙や様々な経緯を経て禁煙した場合に期待される寿命の伸びを推定しようとする明確な試みをしなかったことを残念に思った。

15年後の1979年、第2回「喫煙と健康に関する外科医総長報告」は、1日に吸うタバコの本数、喫煙年数、吸い込むか吸い込まないか、低タールとニコチン、高タールとニコチン、習慣的に吸わずに放置するタバコの長さなど、肺の煙を増やす喫煙習慣のほぼすべての特徴で死亡率が単調増加することを示す研究を報告できたのです。喫煙による死亡率の単調増加は、イギリス、アメリカ本土、ハワイ、日本、スカンジナビアなどで、白人、黒人、男性、女性で示されていた。報告書は、一卵性双生児と二卵性双生児を対象としたスカンジナビアの研究（Cederlof, Friberg and Lundman, 1977）を引用して、フィッシャーの仮説を一段落で否定している：

二卵性ペアの喫煙者と非喫煙者を比較すると、死亡比は男性1.45、女性1.21であった。一卵性双生児の場合は、男性1.5、女性1.222であった。著者は、体質仮説と肺がんについて、「Fisherによって提唱され、現在でも少数が支持して

いる体質仮説が、今回、双生児研究で検証された」と述べている。スウェーデンの一卵性双生児シリーズから得られた結果は、体質仮説に強く反対するものである。

第2回外科医総長報告書では、タバコはがん死亡者数の30%を占め、タバコは肺がん死亡者数の85%を占めていると主張しました。

この報告書が発表される1年前、P. Burch (1978) は英国統計協会の論文で、喫煙と肺がんの例を用いて、実験なしに原因を共通原因から区別することの問題を説明している。1982年、彼は

第二次外科医総長報告書に対する本格的な攻撃である。報告書の論旨に対する批判は、1964年の報告書に対するブラウンリーの批判と同様であったが、バーチはより抑制的で、より鋭い反論をした。彼の最初の批判は、すべての研究がタバコの喫煙による死亡リスクの上昇を示したが、その程度は研究によって大きく異なるというものだった。いくつかの研究では、死亡率をタバコ、ビール、ワイン、酒類の消費量で年齢調整した重回帰を行ったところ、タバコの偏相関がビールの消費量よりも小さくなっていた。バーチは、なぜ回帰モデルが因果関係をほぼ正しく説明するものでなければならないかについて、何の説明もしていない。バーチは、文化的、地理的、民族的に異なるさまざまな集団の見かけの用量/反応曲線が非常に異なっていることから、たばこの影響は環境または遺伝的原因と著しく混同されていると考えた。彼は、肺がんの原因に関する統一理論を、関連するパラメータの推定値の信頼区間とともに発表するよう、軍医総監に求めた：85%という数字はどこから来たのですか」と彼は尋ねた。

バーチは、1901年から1925年の間に生まれたスカンジナビア研究の二卵性双生児1487人と一卵性双生児572人のコホートは、その研究の著者の発表にもかかわらず、喫煙と肺癌の関連についての体質的説明が否定されたという主張を全く支持しなかったことを正しく指摘している。その研究によると、二卵性のうち、非喫煙者や喫煙頻度の低い人がちょうど2人、ヘビースモーカーが10人肺がん死亡し、一卵性のうち、非喫煙頻度の低い人が2人、ヘビースモーカーが2人肺がん死亡していることがわかりました。この数字は役に立たないが、もしこの数字が何かを示唆しているとすれば、遺伝的変異をコントロールすれば、喫煙者と非喫煙者の間で肺がん発生率に差はないということである。スカンジナビア研究の結論に関する外科医総長の報告は正確であったが、その分、誤解を招きかねないものであった。



バーチはまた、時系列データについて斬新な議論を展開し、因果関係仮説を事実上否定するものであると主張した。サージョン・ジェネラルなどは、時系列データを直接的に利用していた。例えば英国では、一人当たりの男性のタバコ消費量が1890年から1960年の間に約100倍に増え、その後わずかに減少していた。また、肺がんによる年齢標準化死亡率は1920年頃から急上昇し、30年のタイムラグがあることが示唆された。これは、20代で喫煙を始め、50代で肺がんを発症する人が多いという事実と一致している。バーチのデータによると、女性の喫煙開始は男性より数年遅れており、1920年代になってからであった。外科医総長の報告書では、女性の肺がんによる死亡率も1920年から1980年の間に劇的に増加したことが指摘されている。バーチは、男性系列と女性系列の自己相関が噛み合っていないことを指摘した：女性の死亡率に遅れはない。を使って

Burchは、英国のデータから、肺による年齢標準化死亡率の**変化率**をプロットしました。

1900年から1980年までの男女のがんを比較した。その曲線は1960年まで完全に一致した。バーチの結論は、肺がんによる死亡率の増加の原因が何であれ、今世紀初頭から男女の両方に同時に影響を与えたが、それが何であれ、男性よりも女性への絶対的な影響は小さかったというものである。しかし、女性のタバコの消費量の増加は男性の増加より20～30年遅れていることから、その「何であれ」がタバコの喫煙であったとは考えられない。

バーチは容赦なかった。外科医総長の報告書は、モルモンの肺がん発生率が低いことを挙げていた。バーチは、ユタ州のモルモンは年齢調整後の癌の発生率が一般人口より低いだけでなく、ユタ州の非モルモンの非喫煙者より高いことを指摘したのです。明らかに、彼らの肺がん発生率の低さは、喫煙習慣に単純に起因するものではないと思われる。

その少し前に疫学の教科書を書き、20年以上も喫煙と癌の問題に携わってきたアブラハム・リリエンフェルドが、バーチへの返信を発表したのだが、これがなかなか興味深い。リリエンフェルドは、守旧的であると同時に軽蔑的な印象を与えている。彼の外科医総長の報告書に対する弁護は、バーチが流行遅れで変人であることを示唆するアドホミネーション攻撃で始まり、バーチが他人のデータからの推論を批判したければ、自分のデータを取ってこいと要求する、別のアドホミネーションで終わっています。リリエンフェルドが提示した最も本質的な反論は、肺癌と喫煙習慣の詳細な相関が次々と亜集団に見られることから、その関連性が共通の原因によるものであることは非常にあり得ないように思えるというものである。リリエンフェルドは、肺がん死亡の85%はタバコが原因であるという結論は、タバコを吸う人の相対リスクと人口におけるタバコの喫煙頻度に基づいており、事実上、タバコの

喫煙がなくなれば、肺がんによる死亡率はその割合だけ減少すると予測していると、自身の言葉を引き合いに出して語った。(この予測は、タバコが肺がんの原因として全く根拠のないものである場合のみ正しい、とバーチは反論した)。リリエンフェルドは、バーチが発表した世紀初頭の女性のタバコ消費量に関するデータの出典に異議を唱えたが、バーチはその後、推定値であることを認めた。

BurchとLilienfeldの両氏は、Roseら（1982）による10年間のランダム化喫煙介入研究に関する当時最新の報告書について議論した。Roseの研究と、ほぼ同時期に発表されたほぼ同じ結果の別の研究は、予測の危険性を示している。中年男性の喫煙者は、治療群と非治療群に無作為に割り付けられた。治療群には禁煙が奨励され、そのためのカウンセリングやサポートが行われた。自己申告により、治療群のかなりの割合がタバコをやめるか減らした。治療群と非治療群の自己申告による喫煙量の差は、以下の通りであった。

しかし、その差は10年間の研究の終わりに近づくにつれて小さくなっていった。しかし、全死亡率には差があり、禁煙を勧められ、部分的に禁煙したグループの方が死亡率が高かったのです。

Rose研究の著者たちは、自分たちの証拠を完全に無視して、それでも喫煙者に禁煙を勧めるべきであると結論づけたのである。リリエンフェルドは、このサンプルの肺がん死亡者数が少なすぎて信頼できないと主張したが、スカンジナビアのデータを使用した外科医総長の報告書を非難することはなく、単に報告書の結論を引用しており、ほとんど不誠実な印象を受けた。バーチが喜んでいたのは、リリエンフェルドが外科医総監を擁護したことで、喫煙者の行動に介入しても肺がん発生率には何の影響もないという新たな実験的証拠が現れたことである。Multiple Risk Factor Intervention Trial Research Group (1982)は、ローズ研究の約3倍の肺がん死亡をもたらした、はるかに大規模なランダム化実験介入研究の6年後の結果を報告した。しかし、介入群は通常のケア群より多くの肺がん死亡を示した！両研究とも絶対数は少なかったが、疫学界が期待したような結果が得られなかったことは間違いないだろう。

対照介入試験の結果は、実験が常に明確な結果をもたらし、予備知識の要件から解放されることがいかに素朴であるかを示している。例えば、肺がんに対する介入の効果が無効であったことの説明として考えられるのは、介入によって減少した喫煙が、肺の健康状態がすでに悪く、いずれにせよ肺がんになる可能性が最も高い人たちに集中したことである。(Roseらは、介入群内の喫煙行動と肺がんの相関を分析するための情報を十分に与えていない)。この可能性は、被験者の健康状態によってより細かく選択されたブロックを用いた実験によって検証することができた

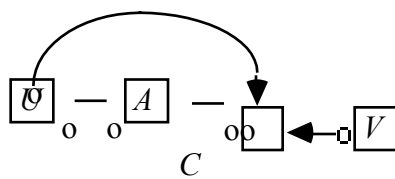
はずである。

振り返ってみると、この論争の大筋は極めて単純であった。統計界は、自分たちの仲間によって威信をかけられた仮説に対して正しい科学的議論が必要であることに注目し、医学界は、用量/反応データを説明するために必要な「憲法」仮説を、真剣に検討する価値がないほど低い事前評価で与えたベイズ派のように行動しました。両者とも、対照のない研究が因果関係や介入の効果について何を決定でき、何を決定できないかを理解していなかった。統計学者たちは、因果関係や相関関係を理解していないように見せかけ、疫学者たちは、次のような方法をとった。

非公式な、そしてしばしば無関係な基準、もっともらしいことへのアピール、そして最悪の場合、アドホミネーションに。

フィッシャーの名声と彼の主張は、統計学者たちに一線を画した。その一線とは、コントロールされていない観測では、喫煙が癌を引き起こす、何かが喫煙と癌を引き起こす、何かが喫煙と癌を引き起こす、喫煙が癌を引き起こす、という3つのケースを区別することはできない、というものだった。その "何か" の最有力候補が遺伝子型であった。フィッシャーはこの問題の論理を誤っていたが、ブラウンリーやバーチをはじめとする一部の統計学者が確率と因果関係の関係をより正確に特徴付けようと試みたが失敗し、この問題は満足に解明されることはなかった。統計学者たちが因果関係と確率の関係を正しく理解できなかった一方で、外科医総長の「因果関係の疫学的基準」は知的汚点であり、外科医総長報告書の結論を擁護する議論のレベルは、時に科学者というよりも文芸評論家にふさわしいものであった。遺伝子型が喫煙量、喫煙の有無、葉巻やパイプではなくタバコを吸うかどうか、モルモン教徒かセブンスデー・アドベンチストか、禁煙するかしないかに強く影響するというのは、あまりにもあり得ないというのが医学界の本当の見解だったようです。コーンフィールドの調査後、医学界や公衆衛生界では、共通原因仮説は真剣に検討されるよりも、非難されることが多くなった。そして最後に、アウトサイダーで破天荒だったバーチとは対照的に、リリエンフェルドのような主要な疫学者は、喫煙とがんの関係が1つ以上の共通原因によって混同されている場合、喫煙廃止の効果は「リスク比」、すなわちサンプルの条件付き確率からは予測できないことを理解していなかったようだ。その後の管理された喫煙介入研究は、禁煙した人としなかった人の肺がんの相対リスクについて、管理されていない観察に基づく予想がいかにひどいものであったかを証明するものとなった。

## 9.6 付録



(io\*) 図18

図18の部分配向誘導パスグラフ ( $io^*$ ) と、 $U$ が $A$ を引き起こすこと、 $U$ と $C$ の共通原因が存在しないこと、 $U$ から $C$ へのすべての有向パスが $A$ を含むという仮定とともに、 $A$ が $C$ を引き起こすこと、 $A$ と $C$ の共通原因が潜在的に存在することをエンタテインメントとして証明する。

$O = \{A, C, U, V\}$ 、 $G$ を( $io^*$ )を生成した有向無サイクルグラフとする。 $(io^*)$ の $U \rightarrow C$ エッジは、 $G$ の誘導パスグラフにおいて、 $U \rightarrow C$ または $U \leftrightarrow C$ のいずれかを伴う。 $U \leftrightarrow C$ エッジがある場合、我々の仮定とは逆に、 $U$ と $C$ の共通の原因が潜在的に存在することになる。したがって、誘導パスグラフは $U \rightarrow C$ のエッジを含む。 $U$ から $C$ への有向パスはすべて $A$ を含むので、 $G$ には $A$ から $C$ への有向パスが存在し、 $A$ は $C$ を引き起こす。

もし $Z$ がコライダーを含まないなら、 $Z$ は $U$ から $C$ への有向パスであり、 $A$ を含む。しかし、 $A$ は $Z$ 上の非コライダーであり、 $Z$ は $O$ に対する誘導パスではない ( $Z$ には $O$ のメンバー、すなわち $Z$ 上の非コライダーである $A$ を含むため)。したがって、 $Z$ にはコライダーが含まれる。

$Z$ 上のコライダーで $U$ の祖先となるものがないことを示す。

まず、 $M$ と $C$ の間にコライダーが存在しないとする。そして、 $Z$ 上に変数 $Q$ が存在し、 $Z(Q, C)$ が $Q$ から $C$ への有向パス、 $Z(Q, M)$ が $Q$ から $M$ への有向パスである(13章の証明と同様に、 $Q$ と $C$ を含む非周期パス $Z$ 上で、 $Z(Q, C)$ は $Q$ と $C$ 間の $Z$ のサブパスのことを示す、という慣習が採用されています。) $M$ は $Z$ 上のコライダーであり、 $U$ はコライダーではないので、 $U \neq M$ である。 $Z$ は非周期的であるため、 $U$ は $Z(Q, C)$ や $Z(Q, M)$ 上に存在しない。 $Z(Q, M)$ と $M$ から $U$ への有向パスの連結は、 $Q$ から $U$ への有向パスのうち $C$ を含



まないものを含む。

次に、 $M$ と $C$ の間にコライダーがあり、 $N$ は $M$ に最も近く、 $M$ と $C$ の間にある $Z$ 上のコライダーであるとする。 $Z$ 上には変数 $Q$ があり、 $Z(Q, N)$ は $Q$ から $N$ への有向パス、 $Z(Q, M)$ は $Q$ から $M$ への有向パスであるとする。 $Z$ は非周期的であるため、 $U$ は $Z(Q, N)$ や $Z(Q, M)$ 上に横たわることはない。 $Z(Q, M)$ の接続は

$Z(Q,N)$ と $N$ から $C$ への有向パスの連結は、 $Q$ から $C$ への有向パスのうち $U$ を含まないものを含む。

$Z$ 上のコライダーが $U$ の祖先であることはないことがわかる。

$Z(U,X)$ は $U$ から $X$ への有向パスである。 $Z(U,X)$ と $X$ から $C$ への有向パスの連結は、 $U$ から $C$ への有向パスを含む。仮定により、このようなパスは $A$ を含む。したがって、 $A$ を含む $C$ への有向パスの発生源となる $Z$ 上のコライダーが存在する。

$Z$ 上に $R$ と $C$ の間にコライダーが存在しない場合、 $Z(Q,C)$ を $Q$ から $C$ への有向パス、 $Z(Q,R)$ を $Q$ から $R$ への有向パスとする頂点 $Q$ が $Z$ 上に存在する。 $Z(Q,C)$ に $Z$ 上のコライダーとなる頂点を持たないため、 $A$ は $Z(Q,C)$ に存在しない。有向グラフは非周期的であるため、 $C$ は $D(R,A)$ 上に存在しない。 $C \neq Q$ は、 $Z$ が $C$ に入る辺を持つが $Q$ には入らないから。 $C \neq R$ は、 $R$ が $Z$ 上のコライダーであり、 $C$ がコライダーでないから。したがって、 $Z$ は非周期的であるため、 $C$ は $Z(Q,R)$ 上に存在しない。 $Z(Q,R)$ と $D(R,A)$ の連結は $Q$ から $A$ への有向パスを含み、 $C$ を含まない。 $Q$ は $Z$ 上のコライダーではないので $O$ には入らない。したがって $Q$ は $A$ と $C$ の潜伏共通因である。

次に、 $Z$ 上に $R$ と $C$ の間にコライダーがあり、 $N$ が $Z$ 上の $R$ に最も近いコライダーであるとする。 $Z$ 上には、 $Z(Q,N)$ が $Q$ から $N$ への有向パス、 $Z(Q,R)$ が $Q$ から $R$ への有向パスとなる頂点 $Q$ が存在する。 $Q \neq N$ は、仮説により、 $N$ から $C$ へ $A$ を含まない経路が存在するからである。 $Z(Q,N)$ 上の $N$ 以外の頂点は $Z$ 上のコライダーでないから、 $A$ は $Z(Q,N)$ に存在しない。したがって、 $Z(Q,N)$ と $N$ から $C$ への有向パスの連結は、 $A$ を含まない有向パスを含む。 $C \neq Q$ は、 $Z$ が $C$ に入る辺を持ち、 $Q$ に入らないからである。 $C \neq R$ は、 $R$ が $Z$ 上のコライダーであり、 $C$ がコライダーでないからである。したがって、 $Z$ は非周期的であるため、 $C$ は $Z(Q,R)$ 上に存在しない。 $Z(Q,R)$ と $D(R,A)$ の連結は、 $Q$ から $A$

への有向パスが含まれており、 $C$ を含まない。

**O.**したがって、 $Q$ は $A$ と $C$ の潜在的な共通原因である。

したがって、いずれの場合も、 $A$ と $C$ は $G$ に共通の原因を潜在的に有している。

## 第10章

### 観察されないものの構造

#### 10.1 はじめに

多くの理論では、測定されていないが、測定された変数に影響を与える変数が存在すると考えられている。計量経済学、心理測定学、社会学などの研究では、このような「潜在的な」変数の間の因果関係を明らかにすることが主な目的であることがある。このような場合、通常、測定された変数（例えば、アンケート項目に対する回答）自体が、測定されていない関心変数（例えば、態度）の原因ではないことを知っていることが前提となり、どの測定項目がどの測定されていない変数によって引き起こされるかについて、かなり明確な考えをもって測定器が設計されていることが多い。調査票には数百の項目が含まれることがあり、通常、変数の数は構造に関する有用な結論を導き出す妨げとなる。このような問題に対して、一般的に用いられる手順がいくつかあるが、その信頼性には疑問が残る。例えば、同じ未測定変数の代用とされる変数の測定値を平均化することによって集約された尺度を形成し、その尺度の相関を調べるというのが一般的なやり方である。このようにして得られた相関は、測定不能な変数の間の因果関係とは単純な系統的关系をもたない。

測定された指標に関する実体的な知識と、それらの指標の統計的な観察の混合は、観察されていない変数の因果構造について何を明らかにすることができるのか？ ま

た、分布や線形性などについてはどのような仮定のもとで？本章では、これらの疑問の解決に着手する。本章で説明する尺度、つまり「純粋な測定モデル」を形成するための手順は、大規模な心理測定データセットの研究において経験的に適用されてきた（Callahan and Sorensen 1992）。



## 10.2 アルゴリズムの概要

"潜在変数を持つ構造方程式モデル"と一般的に呼ばれる線形擬似不確定性モデルにおいて、測定されていない注目変数の集合の間の因果構造を決定する問題を考える。分布は線形に忠実であると仮定する。潜在変数を持つ構造方程式モデルは、「測定モデル」と「構造モデル」の2つに分けて表現されることがあります（図1参照）。構造モデルは、潜在変数間の因果関係のみを含み、残りは測定モデルである。数学的には、この区別は研究者の関心やアクセス方法の違いに過ぎず、形式的な性質の違いではない。グラフ、確率、原因をつなぐ原理は、構造モデルと同じように測定モデルにも適用される。図1では、測定変数( $Q1-Q12$ )が調査質問に対する回答である潜在変数モデルの例を挙げている。

$T$ を潜在変数の集合、 $V$ を測定変数の集合とする。我々は、 $T$ が因果的に十分であると仮定するが、それは明らかに一般的なケースではない。 $T$ のメンバー間の辺を除く  $G$ のすべての辺を含む  $G$ の部分グラフを  $G$ の**測定モデル**と呼ぶ。

実際の研究では、 $T$ の各  $T_i$  に対して、 $V$ の部分集合が  $T_i$  を測定することを意図するように、集合  $V$  が選ばれることが多い。例えば、Kohn (1969) のアメリカにおける階級と態度に関する研究では、同じ態度を測定することを意図して様々なアンケート項目が選ばれた。データの因子分析では、直感的な理由で予想されるクラスタリングとほぼ一致した。そこで、調査者が  $V$  を  $V(T_i)$  に分割し、各  $i$  について  $V(T_i)$  の変数が  $T_i$  の直接効果であると仮定する。そして、 $V(T_i)$  のメンバーのうち、 $T_i$  の不純な測定であるものを排除しようとする。それは、 $T$  の他の未測定変数の効果でもあるため、他の測定変数の原因または効果でもあるため、または他の測定変数と  $C$  で未測定の共通原因を共有しているためである。



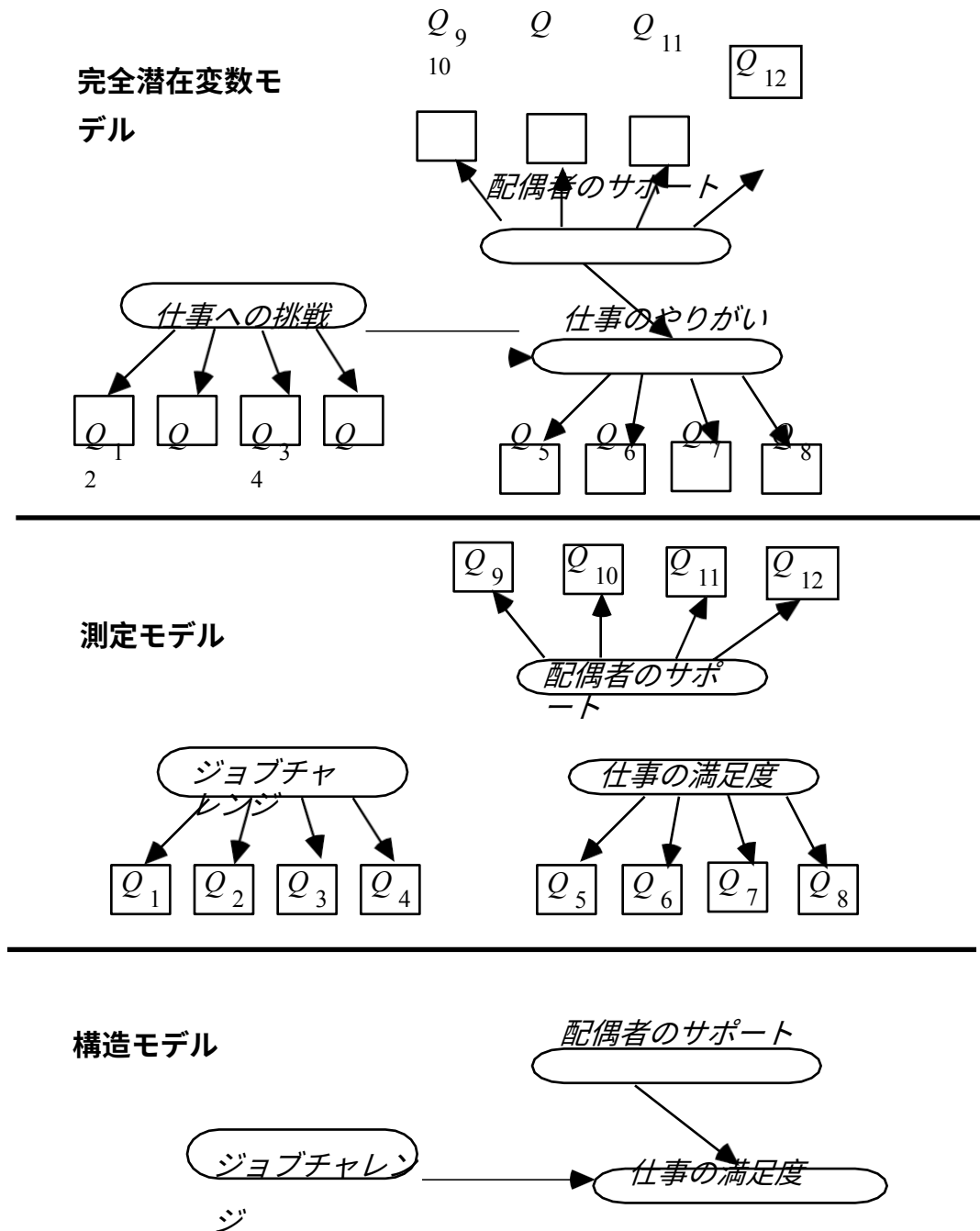


図1

私たちが考えているモデルのクラスでは、測定された変数が不純な測定になりうるのは、4つの理由があるからである：

- (i)  $T$ のある $T_i$ から $V(T_i)$ のある $V$ への有向辺があるが、 $V$ と $T_j$ の間に $T_i$ や $V$ 以外の $V$ のメンバーを含まないトレックがある場合、 $V$ は潜在的な不純物であると言えるでしょう。

観察されないものの構造

- (ii) **T**のメンバーを含まない同じクラスタ $V(T_i)$ からの測定変数のペア $v_1$ 、 $v_2$ の間にトレックがある場合、 $v_1$ 、 $v_2$ は**イントラコンストラクトインピュア**である。

(iii) もし、異なるクラスタ $V(T_i)$ と $V(T_j)$ からの測定変数 $v_1$ 、 $v_2$ のペアの間に、**Tのメンバーを含まないトレックがある場合、 $v_1$ と $v_2$ はクロス構造不純物であると言う。**

(iv)  $T_i$ とあるメンバー $v$ との間のトレックの元となる変数が**C**に存在する場合の $V(T_i)$ を、 $V$ は**共通原因不純物である**と言います。

図2において、例えば、 $V(T_1)=\{X_1, X_2, X_3\}$ ,  $V(T_2)=\{X_4, X_5, X_6\}$ とすると、 $X_4$ は潜在測定不純物、 $X_1$ と $X_2$ は構造内不純物、 $X_2$ と $X_5$ は構造間不純物、 $X_6$ は共通原因不純物となります。 $X_3$ だけが $T_1$ の純粋な測定値である。

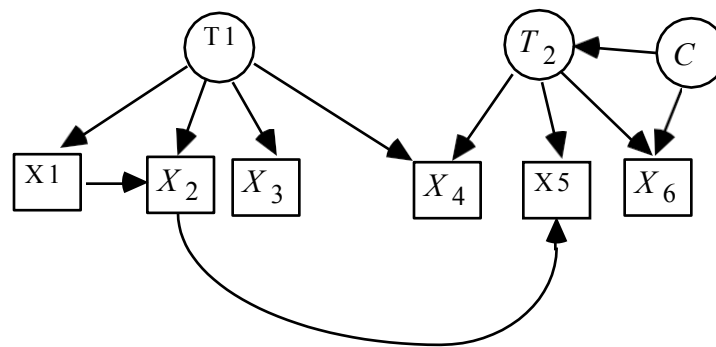


図2

測定変数のうち不純物の種類が共通原因不純物だけである場合、測定モデルは**ほぼ純粋である**と言う。**ほぼ純粋な潜在変数グラフは、ほぼ純粋な測定モデルを持つ有向無サイクルグラフである。**ほぼ純粋な潜在変数グラフでは、この章の残りの部分を通して、測定された変数の集合を $V$ ，潜在変数のサブセットを $T$ ， $T$ と $V$ のメンバーの共通の原因である「厄介な」潜在変数を**C**として参照し続ける。

私たちが採用する戦略は、3つのステップからなります：

(i) 残った変数が、各潜在変数に対して少なくとも2つの指標を持つ最大の**ほぼ純粋な測定モデル**を形成するまで、測定された変数を排除する。

(ii) (i)の測定モデルの変数間の消失性四分子差を利用して、**T**の変数間の0次および1次独立関係を決定する。

(iii) PCアルゴリズムを使って、**T**の変数間の0次と1次の独立関係からパターンを構築する。

次のセクションでは、適切な測定変数を特定するための手順について説明する。詳細はかなり複雑である。読者は、この手順がすべて、以下のようなものであることを心に留めておくべきである。

を自動化したもので、シミュレーションテストでは非常にうまく機能し、いずれも基本的な構造原理から導かれるものです。母集団の相関を考慮すれば、四元代表制の定理が成り立つような条件であれば、推論技術は（大きなサンプルで）信頼できるだろう。統計的な判断は、相当数の共同検定を含んでおり、間違いなく改善されるであろう。各潜在変数が多数の測定指標を持つような場合、ヒューリスティックに頼ることもあります。

### 10.3 ほぼ純粋な測定モデルの発見

$G$ が測定モデル $GM$ を持つ $V$   $TC$ 上の真のモデルである場合、このセクションの課題は、頂点セット $PTC$ 上の $GM$ のサブモデルがほぼ純粋な測定モデルであるような $V$ のサブセット $P$ （大きければ大きいほど良い）を見つけることである（少なくとも2つの指標を持って存在する場合）。

潜在変数ごとに我々の戦略は、異なるタイプの四つ組の変数を用いて、不純な測定値を順次排除することである。

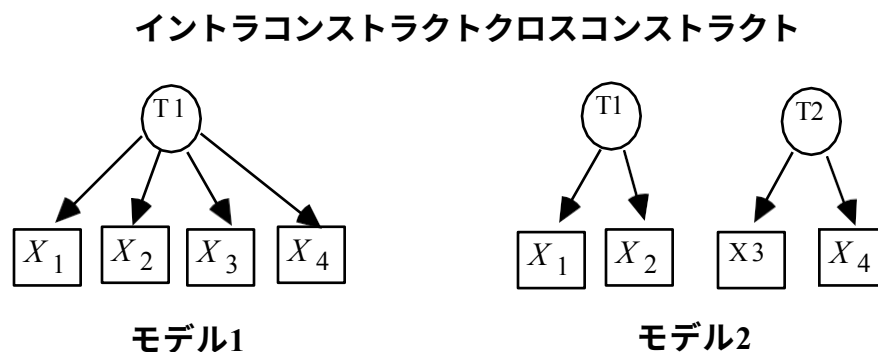


図3

図3のように、4つの測定変数が $T$ のある $T_i$ に対して $V(T_i)$ に含まれる場合は、**構成内4変**

観察されないものの構造  
数と呼び、そうでない場合は構成外4変数と呼ぶ:

### 10.3.1 イントラコンストラクションフォーサム

このセクションでは、 $V(T_i)$ のみから $T_i$ の測定モデルについて何がわかるかについて議論する。四分木表現定理の帰結である以下の原理を利用する。

(P-1) 有向非周期グラフが、 $V(T_i)$ の変数間のすべてのテトラッド差が消失することを線形に暗示する場合、 $V(T_i)$ の変数の組が構造内不純であることはありません。

そこで、 $T_i$ を測定する変数の集合 $V(T_i)$ が与えられたとき、 $P(T_i)$ の中ですべてのテトラッド差が消失すると判定されるような $V(T_i)$ の最大部分集合 $P(T_i)$ を求める。 $V(T_i)$ の部分集合の数は $2^{V(T_i)}$ であり、それぞれを調べることは一般に実行不可能である。さらに、現実的なサンプルでは、すべてのテトラッド差が消失すると判断されるようなかなりの部分集合を見つけることはできないだろう。より現実的な方法としては、P-1原理から導かれる計算しやすいヒューリスティックな基準で、残りの集合 $P(T_i)$ の性能を向上させる変数を各段階で取り除き、繰り返し集合を刈り込むことである。実際には、集合 $V(T_i)$ が大きい場合、 $V(T_i)$ の小さな部分集合が偶然にもこれら2つの基準でうまくいくことがある。例えば、 $V(T_i)$ が12個の変数を持つ場合、サイズ4の部分集合は495個あり、それぞれの部分集合は3個の消失性四分子差を持つ可能性があるだけです。 $P(T_i)$ のサイズが大きければ大きいほど、偶然に $P(T_i)$ の四分子差がすべて消失すると判断される可能性は低くなり、また、後で $P(T_i)$ から変数を取り除く可能性もあるので、できるだけ $P(T_i)$ を大きくしたいのです。一方、 $P(T_i)$ の集合が上記の最初の基準でどれだけ優れていても、その中のいくつかの部分集合は少なくとも同等かそれ以上の結果を出す。したがって、常に可能な限り小さな部分集合を選択することを避けるために、より小さな集合にペナルティを与える必要がある。

以下の簡単なアルゴリズムを使用する。 $P(T_i)$ を $V(T_i)$ に初期化する。 $P(T_i)$ の変数間の四分子差の集合が統計的検定に合格した場合、我々は終了する。(個々の四分子差が有意水準 $Sig/n$ の統計的検定に合格した場合、 $n$ 個の四分子差の集合を与えられた有意水準 $Sig$ での統計的検定に合格したと数える。個々のテトラッド差について採用する統計検定の詳細は第11章に記述されている)統計的検定に合格しない場合は、 $P(T_i)$ から除外する変数を探す。測定された各変数 $X$ を以下の方法で得点化する。 $X$ が現れる $P(T_i)$ の各変数の四分木差 $t$ について、 $t$ が統計的検定に合格すれば $X$ を評価し、不合格なら評価しない。そして、 $P(T_i)$ から最もスコアが低い変数を除外する。このプロセスを、統計的検定に合格する集合 $P(T_i)$ に到達するか、変数がなくなるまで繰り返す。

### 10.3.2 クロスコンストラクトフォーサム

各潜在変数 $T_i$ について、どの変数も構造内不純物でない $V(T_i)$ の部分集合 $P(T_i)$ を見つけたので、次のような $V$ の部分集合 $P$ を形成する。



$$P = \bigcup_{T_i \sqsubseteq T} P(T_i).$$

次に、 $P$ のメンバーのうち、クロスコンストラクトの不純物を排除する。

**2x2 foursome**は、 $P(T_i)$ の2つの測定変数と $P(T_j)$ の2つの測定変数を含み、 $i$ と $j$ は異なる。純粋な潜在変数モデルの2x2四分木は、構造モデルの $T_i$ と $T_j$ の間の因果関係の性質にかかわらず、ちょうど1つの四分木方程式を線形に含意する。例えば、図4のグラフは、四則演算の差 $XY WZ - XW YZ = 0$ を線形に含意する。 $T_j$ が $T_i$ を引き起こすグラフ、 $T_i$ と $T_j$ が因果的につながっていない（つまり、両者の間にトレックがない）グラフも線形に

$XY WZ - XW YZ$ を含

意する。

$= 0$ .

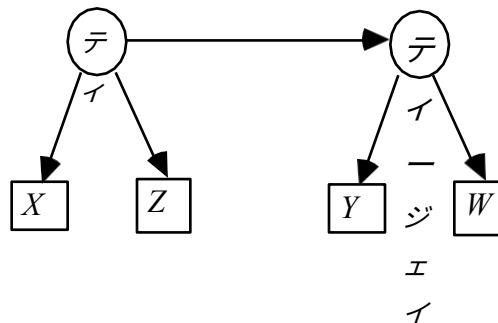


図4

$V(T_i)$ の1つの変数が $T_j$ を含むトレックのために潜在不純物であり、 $V(T_j)$ の1つの変数が $T_i$ を含むトレックのために潜在不純物である場合、4人の間のテトラッド差は、グラフによって消滅することが線形に暗示されることはない。 $T_i$ と $T_j$ が何らかのトレックで結ばれており、 $V(T_i)$ と $V(T_j)$ の変数のペアがそれぞれクロスコンストラクション・インピュアである場合、再びテトラッド差はグラフによって消滅することを線形に暗示されることはない。

( $T_i$ と $T_j$ が何らかのtrekで接続されていない場合については後述する。)例えば図5では

$\rho \quad \rho \quad \rho \quad \rho$

観察されないものの構造

、モデル(i)は四則演算  $XY \cdot WZ = XW \cdot YZ$  を意味するが、モデル(ii)と(iii)はそうでない。

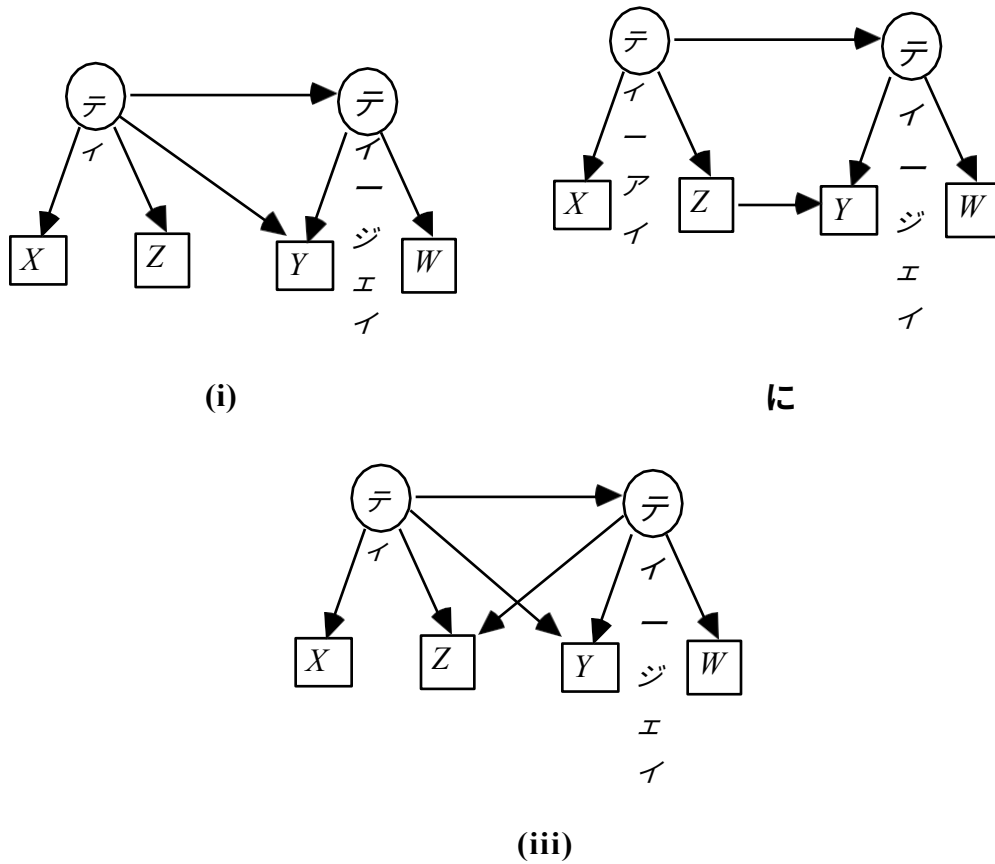
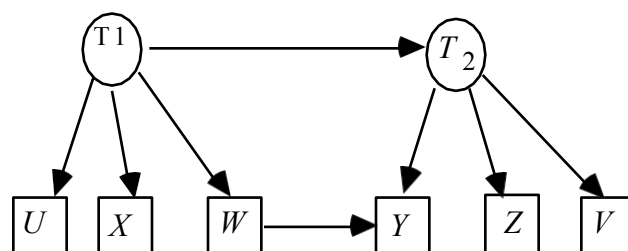


図5

つまり、 $2 \times 2$ の4人組の $F1$ をテストして、適切な4分割の差が消えるという仮説が棄却されれば、それぞれの構成要素の測定変数が存在する4組のうち少なくとも1組は、その組のメンバーがともに不純であることがわかるのである。どのペアかはまだわからない。 $F1$ と変数を共有する他の $2 \times 2$  4人組をテストすることで知ることができる。 $P(T1)$ と $P(T2)$ を含む真のモデルの最大の部分グラフが図6のグラフであるとしす。

。



## 図6

ペア $\langle W, Y \rangle$ を含む $2 \times 2$ の4人組だけが不純物と認識されることになる。 $F_1 = \langle X, W, Y, Z \rangle$ の四つ組で消失性四分子差をテストすると、 $\langle W, Z \rangle, \langle X, Y \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle W, Y \rangle$ のペアのうちどれが不純であるかは分からない。4人組の $F_2 =$ をテストすると $\langle X, W, Z, V \rangle$ となるが、 $\langle X, Z \rangle, \langle X, V \rangle, \langle W, Z \rangle, \langle W, V \rangle$ のいずれのペアもを不純物とする。したがって、 $F_1$ では $\langle X, Z \rangle$ と $\langle W, Z \rangle$ のペアは不純物でないことがわかる。テストすることで

の場合、 $F_3 = \langle U, X, Y, Z \rangle$  は不純物ではなく、 $\langle X, Y \rangle$  は  $F_1$  において不純物であることを意味することがわかります。各構成の中に少なくとも2つの純粋な指標があれば、このようにして他の指標のどれが不純物であるかを正確に検出することができる。

**P**の2x2 foursomをすべてテストすることで、クロスコンストラクトの不純な変数を原理的にすべて排除することができます。もしそのような変数が1つしかなければ、2x2 foursomesからは検出できないので、潜在的な不純物である変数をすべて排除することはまだできない。

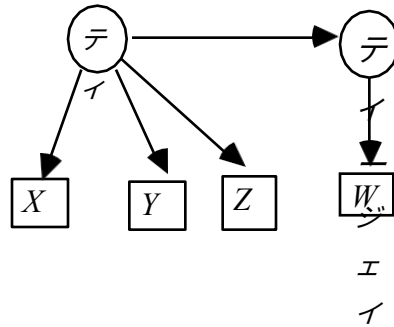
$P(T_i)$ からの3つの測定変数と $P(T_j)$ からの1つの測定変数（ $i$ と $j$ は異なる）を含むフォーサムは、**3x1フォーサム**と呼ばれます。純粋な測定モデルにおけるすべての3x1 foursomesは、 $T_i$ と $T_j$ の間の因果関係がどうであれ、3つの可能な消失性四分子差をすべて線形に意味する（例として図7のモデル（i）参照）。3x1の4人組の $P(T_j)$ からの変数が、両方の潜在を測定するため不純である場合（図7のモデル(ii））、 $T_i$ はまだチョークポイントであり、3つの方程式はすべて線形に暗示される。しかし、 $P(T_i)$ の変数 $Z$ が両潜在子を測定するために不純である場合（図7のモデル(iii)）、潜伏変数モデルは、ペア $\langle Z, W \rangle$ を含むテトラッド差が消失することを線形に含意しない。このことは、3x1四つ組の変数間の四分子差が消失しないことで、固有の測定変数を潜在測定不純物として特定できることを意味している。

また、 $T_i$ と $T_j$ がトレック接続されておらず、 $P(T_i)$ と $P(T_j)$ の変数 $v_1$ 、 $v_2$ の組がそれぞれクロス構造不純物である場合、 $v_1$ と $v_2$ の相関は消滅せず、 $v_1$ と $v_2$ を含む3x1の4人組のテトラッド差は線形的に消滅することが暗示されず、 $P(T_j)$ の不純物が認識されることになります。

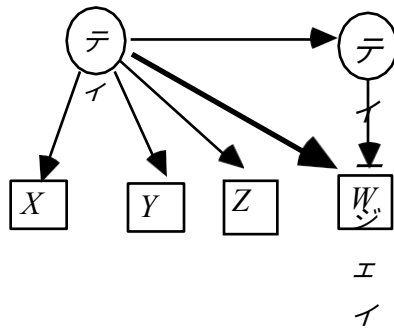
各 $i$ について $P(T_i)$ に少なくとも3つの変数があれば、すべての3x1フォーサムを調べ終

観察されないものの構造

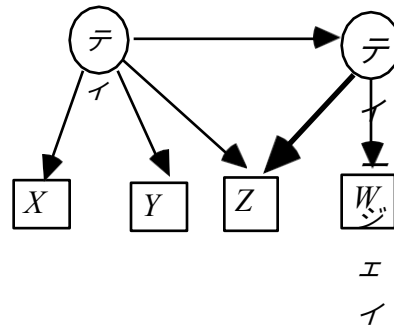
わったとき、 $\mathbf{P}$ 上の真の測定モデルのサブモデル ( $GP$ と呼ぶ) がほぼ純粋な測定モデルであるような $\mathbf{V}$ の部分集合 $\mathbf{P}$ を持つことになります。



(i)



(二)



三

図7

## 10.4 観察されないものに関する事実は、観察されるものによって決定される

ほぼ純粋な潜在変数モデルにおいて、潜在変数間の相関行列に対する制約がある。

はかる変数で決まる

- (i) 潜在変数の各対 $A, B$ について、 $A, B$ が無相関であるかどうか、
- (ii) 潜在変数の各トリプル $A, B, C$ について、 $\{C\}$ が与えられたときに $A$ と $B$ が $d$ 個に分離されているかどうか。

観察されないものの構造

パート(i)は明白です：2つの測定された変数は、トレック接続されていない（つまり、それらの間にトレックがない）異なる非測定変数の効果であり、したがって、変数の空集合を与えられたd-分離である場合にのみ、ほぼ純粋な潜在変数モデルで無相関です。(ii)の部分はあまり明らかではありませんが、実際には、ある種のd-separationの事実は、測定された変数の間でテトラッドの差が消失することによって決定されます。

定理10.1は、四元代表の定理の帰結である：



**定理10.1:**  $G$ が $V \supseteq T \supseteq C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に十分であり、 $T$ の各潜在変数が少なくとも二つの測定指標を持つ場合、測定指標が $J$ と $L$ をそれぞれ含む潜在変数 $T_1$ および $T_3$ は、測定指標が $I$ と $K$ を含む潜在変数 $T_2$ が与えられたとき、次のようにd分離される。

であり、 $G$ が線形に $J \perp\!\!\!\perp L \mid K = J \perp\!\!\!\perp L \mid K$ を意味するときのみである。

例えば、図8のモデルでは、 $T_2$ が与えられて $T_1$ と $T_3$ がd分割されるという事実は、1から3までのすべての $m$ 、 $n$ 、 $o$ 、 $p$ について、 $o$ と $p$ が異なるという事実によって包含される：

$$\rho_{AmBnBoBp} \neq \rho_{AmBoDnBp} = \rho_{AmBpDnBo}$$

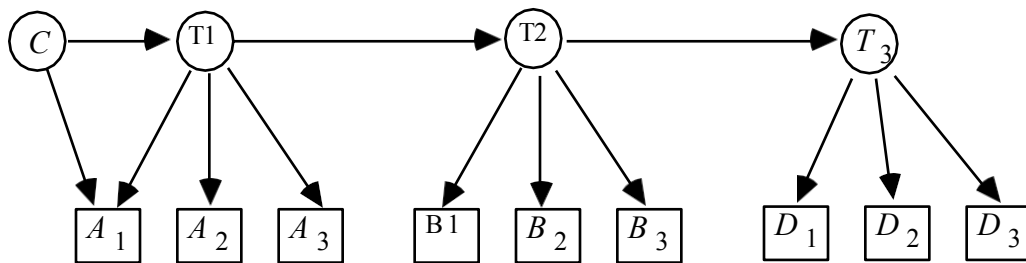


図8

このような四分子差の消滅を検定することで、ほぼ純粋な潜在変数モデルにおける未測定変数間の一次d-分離可能性関係を検定することができる。(AとBがDでd-separationされる場合、Dにおける変数の数をd-separability関係の**次数**と呼ぶ)。これらの0次と1次のd-分離関係は、PCアルゴリズムや他の手順の入力として使用され、潜在変数間の因果構造に関する情報を得ることができる。理想的には、出力される潜在変数間のパターンは、PCアルゴリズムを潜在変数間のd-separation factに直接適用した結果のパターンを常に含まれますが、余分なエッジや少ない方向性を含むことがあります。

## 10.5 ピースを統一する

真であるが未知のグラフが図9に示されているとする。

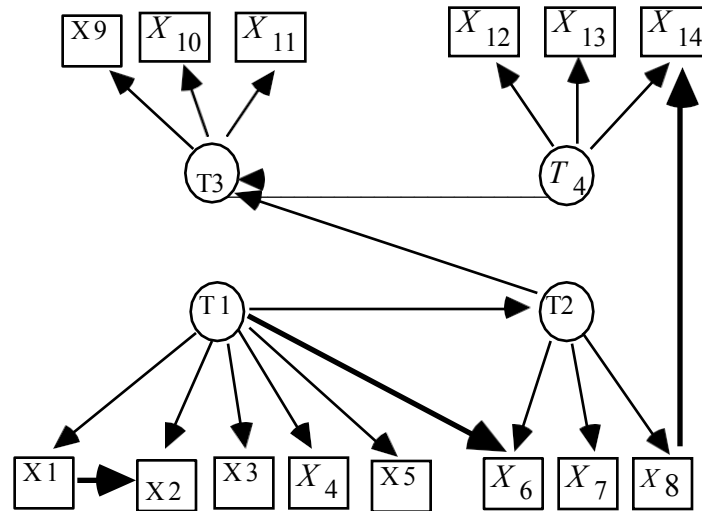


図9: 真の因果関係構造

研究者が、指定された測定モデル（例えば図10）の変数を正確にクラスタリングできることを想定している。

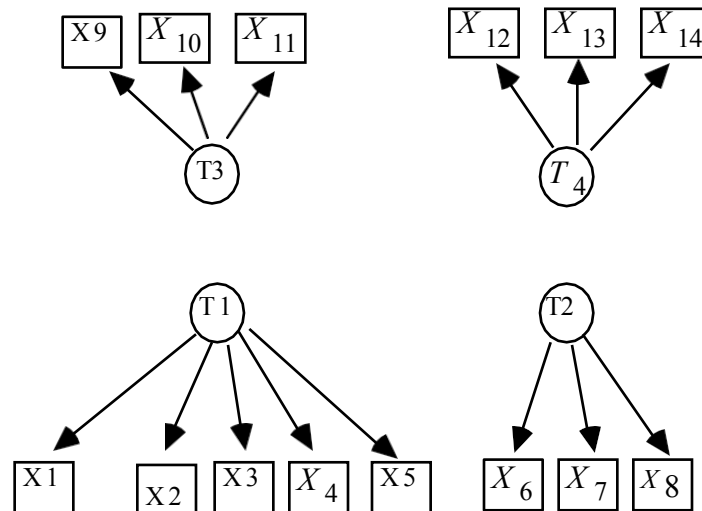


図10: 指定された測定モデル

そして、実際の測定モデルは、図11のグラフのようになります：

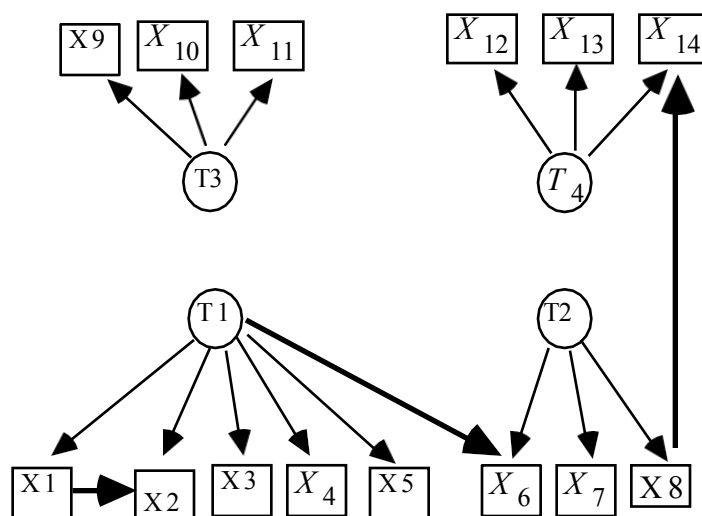


図11: 実測モデル

図12は、 $G$ の変数のサブセット ( $X_1$ 、 $X_6$ 、 $X_{14}$ を除いたもの) が、ほぼ純粋な測定モデルを形成していることを示す。

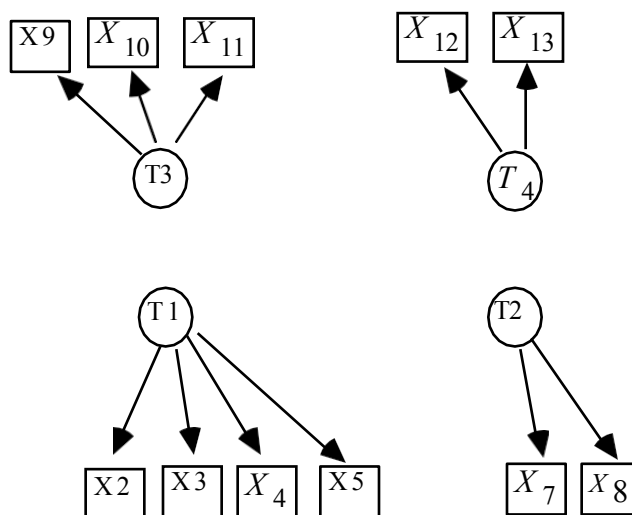


図12: ほぼ純粋な測定モデル

消失性四分子差検定がこのようなほぼ純粋な測定モデルを発見したと仮定すると、 $1 \times 2 \times 1$ 消失性四分子差検定の一連の検定は、定理10.1によりPCまたは他のアルゴリズムに対するいくつかのd分離性事実を決定する。図12では、 $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$ のクラスタからそれぞれ抽出された測定変数による多くの $1 \times 2 \times 1$ テトラッド検定があるので、検定

の結果は何らかの形で集約されなければならない。 $V(T1)$ 、 $V(T2)$ 、 $V(T3)$ の各変数の

1x2x1テトラッドの差について、テトラッド

の差が有意性検定に合格した場合はdiscredit、有意性検定に失敗した場合はdiscreditとし、最終スコアが0より大きい場合は $T_1$ と $T_3$ が $T_2$ によってd分離されていると判断します。

2つのわずかな修正により、PCアルゴリズムは、消失するテトラッド差によって決定される0次および1次のd-分離関係に適用することができます。最初の修正は、もちろん、アルゴリズムが1以上の次数のd-分離関係をテストしようとししないことである（すなわち、PCアルゴリズムのステップB）のループにおいて、 $n$ の最大値は1である）。第2は、PCアルゴリズムのステップD）において、サイクルを避けるためにエッジを方向付けることはしない。

d-separabilityの事実をすべて利用できなければ、PCアルゴリズムはグラフの正しいパターンを見つけることができないかもしれません。余分な辺を含んでしまったり、一部の辺の方向付けに失敗したりする可能性があります。しかし、パターンから、ある辺はそのパターンを生成したグラフに確実に存在し、他の辺は存在しないかもしれないことを認識することは可能である。そこで、PCアルゴリズムに以下のステップを追加し、グラフに存在するかしないかわからない辺に"? "を付ける。 $Y$ は、 $X \rightarrow Y$ 、または $X \leftarrow Y$ 、または $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 、または $X \leftarrow Y \leftarrow Z$ が $U$ のサブパスであるか、または $X$ と $Z$ が隣接せず、 $U$ 上で $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ でない場合にのみ、パターン中の無向パス $U$ 上の**確定無衝突**となる。

E.) のすべての無向きのパスの集合を $P$ とする。  $X$ と $Y$ の間の長さ $\geq 2$ のすべての無向パス集合であるとする。もし、 $X$ と $Y$ が隣接している場合、 $X$ と $Y$ の間のエッジに"? "を付ける。

(i)  $P$ にパスがない、または

(ii)  $P$ のすべてのパスがコライダを含む、または

- (iii)  $\mathbf{P}$ のすべての経路において、 $Z$ が確定的に非共闘であるような頂点 $Z$ が存在する、または
- (iv)  $\mathbf{P}$ のすべてのパスは、同じサブパス $\langle A, B, C \rangle$ を含んでいます。

このような手順を組み合わせて、MIMBuild (Multiple Indicator Model Building) アルゴリズムと呼ぶことにする。

**定理10.2:**  $G$ が $\mathbf{V} \boxtimes \mathbf{T} \boxtimes \mathbf{C}$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $\mathbf{T}$ が因果的に十分であり、 $\mathbf{T}$ の各変数が少なくとも2つの測定指標を持ち、MIMBuildへの入力 $\Pi$ が、 $G$ によって線形に暗示される潜在変数間のすべての消失するゼロおよび1次相関のリストであり、次にMIMBuild Algorithmの出力であるとする、:

A-1)  $X$ と $Y$ が $\mathbf{in}$ で隣接していない $\Pi$ 場合、 $G$ で隣接していないことになります。

A-2)  $X$ と $Y$ が隣接し $\Pi$ 、エッジに"? "が付いていない場合、 $X$ と $Y$ は隣接していることになります。

$Y$ は $G$ で隣接している。

O-1)  $X \rightarrow Y$ が $\mathbf{in}$ であれば、 $X$ と $Y$ の間の $G$ のトレックはすべて $Y$ に $\mathbf{in}$ する。

O-2)  $X \rightarrow Y$ が $\mathbf{in}$ で $\Pi$ 、 $X$ と $Y$ の間のエッジに"? "がついていない場合。

$X \rightarrow Y$ は $G$ にある。

このアルゴリズムの複雑さは、テストしなければならないテトラッドの差の数によって制限され、それは測定変数のfoursomesの数によって制限される。測定変数が $n$ 個の場合、foursomesの数は $O(n^4)$ である。しかし、我々は、可能性のある四つ組をそれぞれテストするわけではなく、実際の複雑さは、潜在変数の数と、各潜在変数を測定する変数の数に依存します。潜伏変数が $m$ 個、それぞれの測定変数が $s$ 個ある場合、foursomesの数は $O(m^3 s^4)$ になります。 $m s = n$ なので、これは $O(n^3 s)$ となる。

## 10.6 シミュレーションテスト

この手順は、TETRAD IIプログラムにおいて完全に自動化されており、必要な部分には、感覚的ではあるが、かなり恣意的な重み付け原則が用いられている。この手順の動作をテストするために、図13の因果関係グラフからデータを生成した。このグラフには11の不純物指標がある。

外生変数の分布は標準正規分布である。各サンプルについて、線形係数は0.5から1.5の間でランダムに選ばれた。

サンプルサイズ100、500、2000で各20回の試行を行った。無相関潜在（0次d-separation）の検出と1次d-separationの検出について、委託のエラーと不作為のエラーを数えた。それぞれのケースで、手順が犯す可能性のあるエラーと実際に犯すエラーの数を数えた。また、アルゴリズムがd-separationを完全に識別したサンプルの数も示した。結果は表1に示すとおりで、各ケースの比率は、全サンプルにおけるある種類のエラーの数を、全サンプルにおけるその種類のエラーの可能性の数で割った



ものを示しています。

6つの潜在変数と60の正規分布の測定変数について、様々な潜在トポロジーを用いた広範なシミュレーションテストを行った結果、与えられたサンプルサイズにおいて、本手法の信頼性は、各潜在の指標の数と交絡した指標の割合によって決まることが示された。ほぼ純粋な指標の数が増えれば、d-separabilityの決定がより信頼できるものになるが、交絡した変数の割合が増えれば、ほぼ純粋な指標を識別することが難しくなる。潜在能力あたり10個の指標を持つ大規模なサンプルでは、指標の半分以上が交絡されるまでは、この手順は良い結果をもたらします。

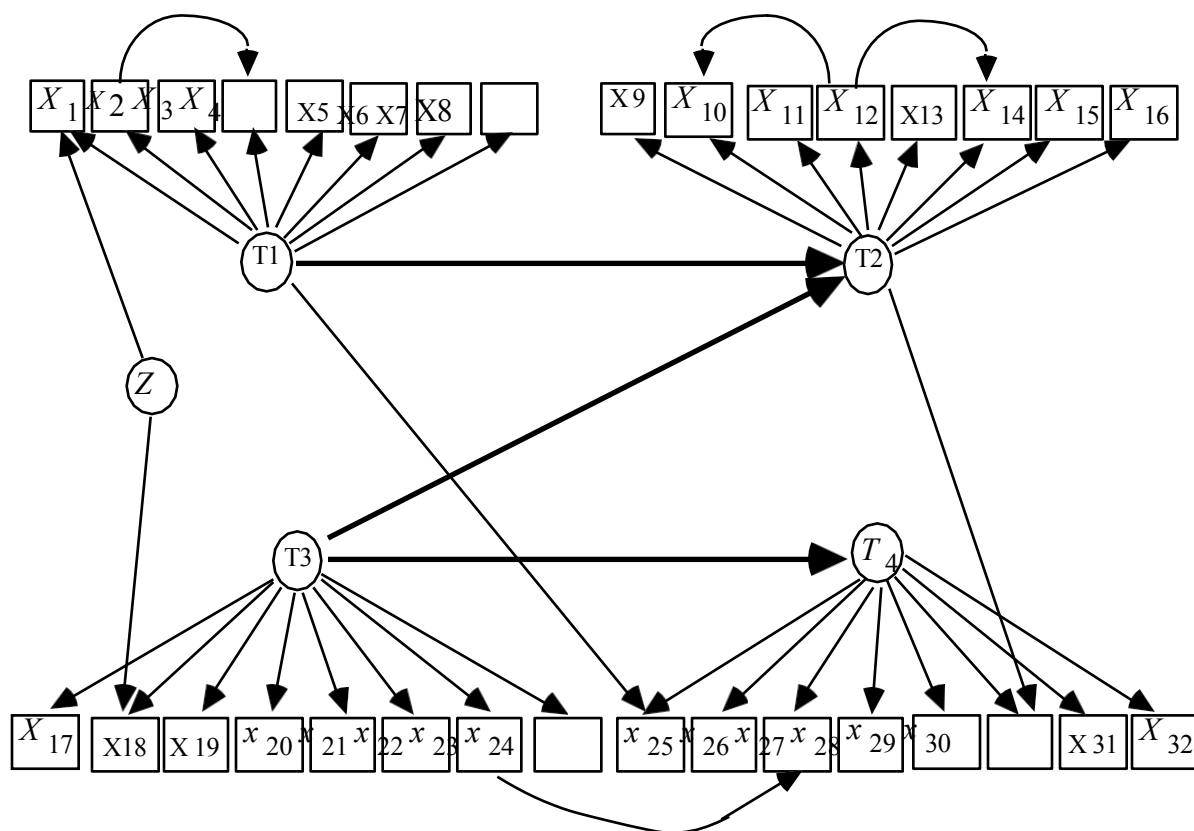


図13 不純な指標 =  $\{X_1, X_2, X_4, X_{10}, X_{12}, X_{14}, X_{18}, X_{23}, X_{25}, X_{27}, X_{30}\}$ .

表1

サンプルサイズ	0-order Commission (0-オーダー・コミッション)	0オーダー省略	先着順の手数料	1次受注漏れ	パーフェクト
100	2.50%	0.00%	3.20%	5.00%	65.00%
500	1.25%	0.00%	0.90%	0.00%	95.00%
2000	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

## 10.7 結論

別の戦略も可能である。たとえば、測定セットを純化し、潜在変数の各ペアが直接相関している「理論モデル」を指定することができる。この構造の最尤推定は、潜在の相関行列の推定を与える。そして、この相関行列は、PCまたはFCIアルゴリズムの入力として使用することができる。この戦略には、2つの明らかな欠点がある。1つは、これらの推定は通常、正規性の仮定に依存することである。もう1つは、正規変量でLISRELを使って潜在相関を推定する予備的なシミュレーション研究では、この戦略は本章で説明した手順よりも信頼性が低いことがわかったことである。潜在変数間のd-separationの事実に関する決定は、推定相関に基づく消失する部分相関に関する決定よりも、測定された相関に基づく消失する四分子差に関する多数の決定の加重平均に基づく方が、より信頼できるようである。

MIMBuildアルゴリズムは**T**が因果的に十分であると仮定している。興味深い未解決の問題は、この仮定をしない信頼できるアルゴリズムが存在するかどうかである。さらに、このアルゴリズムは正しいが、いくつかの明確な方法で不完全である。ゼロと一次の消失部分相関によって線形に暗示される方向情報がさらに存在する。さらに、ゼロと一次の消失部分相関が線形に暗示する、どの辺が確実に存在するか（つまり、"? "をつけてはいけないか）についてのさらなる情報があるかどうかはわからない。さらに、MIMBuildの出力において"? "マークが付けられた各辺に対して、その辺を含まない消失ゼロおよび1次部分相関に適合するパターンが存在するが、そのようにラベル付けされた辺のうち2つ以上を含まない消失ゼロおよび1次部分相関に適合するパターンが存在しないことがある。

観察されないものの構造

最後に、最も重要なことですが、私たちが説明した戦略は、変数間に複数の因果経路がある潜在構造についてはあまり情報がありません。この方法を拡張することで、より有益な情報を得ることができるかもしれない。テトラッドの違いに加えて、測定された相関関係に対する高次の制約（例えば、5つ以上の相関関係の代数的組み合わせ）をテストし、その結果得られた決定を用いて、潜在変数間の高次のd-分離関係を決定することができるだろう。必要な理論は開発されていない。

## 第11章

### 未測定変数を用いた線形理論の精緻化<sup>1</sup>

#### 11.1 はじめに

多くの場合、調査者はある程度信頼できる因果理論を持っているが、そのモデルに重要な因果関係がすべて含まれているかどうか分からない、あるいは不完全だと思うが、どの依存関係が欠けているのか分からない、ということがある。どのようにすれば、さらに未知の因果関係を発見することができるのだろうか？例えば、相関のある2つの変数がパターン上で切断されている場合、PCやFCIアルゴリズムの出力にも同じような疑問が生じます。この場合、パターンに表現されていない何らかのメカニズムが依存関係を説明していると考えることができ、パターンを精緻化する必要があります。この章では、測定されていない共通原因を持つ線形理論が、それぞれ1つ以上の測定された指標を持つ場合に限定して、「精緻化問題」の特殊なケースを検討する。精緻化問題に対処するために開発した一般的な戦略は、潜在変数のないモデルにも、また離散変数のモデルにも適応することができる。特に、CooperとHerskovitsのベイズ法は、エラボレーション問題に適応することができる。

不完全な「構造方程式モデル」を精緻化する問題は、LISRELプログラム（Joreskog and Sorbom 1984）とEQSプログラム（Bentler 1985）という少なくとも2つの商用コン

ピュータパッケージで対処されている。これらのパッケージの自動検索手順の信頼性についての詳細なテストについて説明する。他の方法が成功するのになぜ失敗するのかという分析は、統計学におけるコンピュータによる検索に関する重要な一般的教訓を示唆している。明細書検索では計算が重要であり、大きな検索空間では、計算が不要であれば最適となるようなテストを使うよりもはるかに重要である。

---

<sup>1</sup>本章は、Spirtes, Scheines and Glymour (1990)を省略したもので、Sage Publicationsの許可を得て転載している。

EQS検索とLISREL検索を、テトラッド差の消失の検定に基づく検索手順と比較する予定である。原理的には、テトラッド検定のコレクションは、LISRELやEQSの検索で用いられるモデル全体の最大尤度検定よりも情報量が少ない。実際には、この欠点はテトラッド検定の計算上の利点に打ち勝つ。いくつかの一般的な仮定の下で、母集団における四分木の差が消失することについて正しい判断がなされれば、我々が説明する手順は正しい答え（しかし必ずしも完全に情報が得られるとは限らない）を与える。我々は、多くの問題に対して、この手順が現実的な大きさのサンプルから非常に信頼できる結論を得ることを実証する。

## 11.2. 手続きについて

これから説明する手順は、TETRAD II プログラムで実装されています。入力として受け取る：

- (i) をサンプルサイズとする、
- (ii) 相関行列または共分散行列と
- (iii) 最初の線形構造方程式モデルの有向非循環グラフ。

また、内部パラメータの指定も多数入力可能である。グラフは、対になる原因と結果のリストを指定するだけで、プログラムに与えられます。アルゴリズムは、スコアリング手順とサーチ手順の2つに分けることができる。

### 11.2.1 スコアリング

この手順では、次のような方法論が用いられています。

*Falsification Principle* (改竄の原理)：他の条件が同じであれば、母集団で成立しないと判断される制約を線形に暗示しないモデルを優先する。

*説明の原則*：他の条件が同じであれば、母集団で成立すると判断される制約を線形に暗示するモデルを優先する。

*単純化の原則*：他の条件が同じであれば、よりシンプルなモデルを好む。



説明原理の背後にある直感は、モデルの因果構造に基づく制約の説明は、モデルの自由パラメーターの特別な値に依存する説明よりも優れているというものである。この直観は自然科学の分野で広く共有されており、太陽系コペルニクス説、一般相対性理論、原子仮説の論拠となった。説明原理については、Glymour et.al. (1987), Scheines (1988), and Glymour (1983)に詳しい説明がある。消失する部分相関と同様に、グラフが線形に含意しない消失する四分子差を生成するグラフの辺に関連する線形係数の値の集合は、ルベーク測度0である。

残念ながら、この原則は矛盾することがあります。例えば、モデル $M'$ がモデル $M$ の修正で、 $M$ に余分なエッジを追加することで形成されているとします。さらに、 $M'$ が母集団で成立すると判断される制約を線形に少なく含意し、母集団で成立しないと判断される制約も線形に少なく含意するとします。すると、 $M'$ は、改竄防止原則に関しては $M$ より優れているが、単純化原則と説明原則に関しては $M$ より劣っている。私たちが用いる手続きは、これらの次元のバランスをとる発見的なスコアリング関数を導入するものである<sup>2</sup>。

これは、四分子差が母集団で消失するという仮定の下で、標本で実際に観測された四分子差と同じかそれ以上の四分子差を得る確率である。正規変数を仮定すると、Wishart (1928) は消失性四分子差  $IJ_{KL} - IL_{JK}$  の標本分布の分散が次のようになることを示した。

$$\frac{d_{12} d_{34}}{(-1)^{d-2}} \frac{(d+1)}{d} \quad (1)$$

ここで、 $D$ は4つの変数 $I, J, K, L$ の母集団相関行列の行列式、 $D_{12}$ は2次元の左上隅の部分行列の行列式、 $D_{34}$ は右下隅の部分行列の行列式、 $I, J, K, L$ は共同正規分布

未測定変数による理論の精緻化

となる。 $P(t)$ の計算では、サンプルの共分散を対応する母集団の共分散に置き換えて計算します。 $P(t)$ は標準正規分布のグラフで調べることにより決定されます。漸近的に分布のない検定がBollen (1990)によって説明されている。

---

<sup>2</sup> オリジナルのTETRADプログラム (Glymour, Scheines, Spirtes and Kelly, 1987) には、このようなスコアリング機能がありませんでした。説明の原則と改竄の原則のバランスを取るのはユーザーに任されていた。

I、J、K、Lの4つの測定変数のうち、3つのテトラッド差を計算する：

$$\begin{aligned} t1 &= IJ \cdot KL - IP \cdot JQ \cdot t2 \\ &= IL \cdot JK \cdot P - IK \cdot JP \cdot t3 \\ &= IK \cdot QL \cdot P - IJ \cdot QL \cdot P \end{aligned}$$

と、テトラッド差が消失するという仮説に対する関連確率 $P(t_i)$ を求める。 $P(t_i)$ が与えられた有意水準より大きい場合、この手続きは母集団において四分子差を消失させるものとする。もし $P(t_i)$ が有意水準より小さくても、他の2つの四分子差が有意水準より高い関連確率を持つ場合、 $t_i$ は無視される。それ以外の場合、 $P(t_i)$ が有意水準より小さければ、その四分子差は母集団で消滅しないと判断される。

モデル $M$ が線形に含意する消失性四座のうち、母集団で成立すると判断されるものを**ImpliedH**、 $M$ が線形に含意する消失性四座のうち、母集団で成立しないと判断されるものを**Implied~H**とする。アルゴリズムによって与えられた有意水準に対するモデル $M$ のスコアを**Tetrad-score**とし、パラメータをweightとする（その意義は後述する）。そして、以下のように定義する。

$$T = \sum P(t) - \sum_{t \in \text{ImpliedH (インブライドエイチ)}} \text{重量}(t) (-P(t))$$

第1項は説明原理を、第2項は改竄原理を実現するものである。単純化原則は、同じテトラッドスコアを持つモデルの中で、自由パラメーターの少ないものを優先することで実行される。これは、エッジの少ないグラフを優先することに相当する。ウェイトは、説明の重要性と残差の減少の相対的な重要性を決定することにより、説明原則と偽証原則の間の矛盾をどのように解決するかを決定する。

## 未測定変数による理論の精緻化

スコアリング関数は2つのパラメータで制御される。*有意水準*は、与えられたテトラッドの差が母集団においてゼロである場合を判定するために使用される。*重み付け*は、説明原理と改竄原理の相対的な重要性を判断するために使用される。スコアリング関数はいくつかの望ましい漸近特性を持つが、使用する*重み*の特定の値が最適かどうかはわからない。

### 11.2.2 検索

TETRAD II 手法は、初期モデルを精緻化したツリーを検索する。この検索が比較的速いのは、グラフが線形に含意する消失性四分子差を決定する簡単なアルゴリズム（四分子表現定理を使用）があること、モデルの評価に必要な計算作業の大部分を保存し、推敲の評価に再利用できること、スコアが低いために検討から除外できるモデルがあれば、そのモデルの推敲も可能という得点関数であるためである。

この検索では、初期モデルに対して1辺の精緻化が可能なモデルを生成し、テトラッドスコアによって順序付けし、スコアが低いものを排除する。そして、生成された各モデルに対してこのプロセスを再帰的に繰り返し、モデルの改良ができなくなるまで続けます。

***T*-maxscore**は、与えられたモデル*M*に対して、*M*を精緻化することによって得られる可能性のある最大のテトラッドスコアを表す:

$$T\text{-maxscore} = \sum_t P(t) \quad \text{「ImpliedH」}。$$

この量の使用は、次の定理によって正当化される。

**定理11.1.** *G*が有向無サイクルグラフ*G'*の部分グラフである場合、*G'*が線形に含意する*G*の変数間の四則演算の集合は、*G*が線形に含意するものの部分集合となる。

以下の例を小さくするために、初期モデルに追加可能な辺が $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$ 、 $e_4$ の4つだけあるとする。この例では、初期モデルに対して可能な限り精緻化したものを検討

## 未測定変数による理論の精緻化

する場合の探索手順を説明する。図1のノード1が初期モデルを表す。グラフの各ノードは、そのノードの隣のエッジを親に追加して生成したモデルを表している。例えば、ノード2は初期モデル+ $e_1$ を表し、ノード7はノード2+ $e_4$ を表している。プログラムがノードを訪問するのは、そのノードに対応するモデル $M$ を作成し、 $M$ を精緻化したものが $M$ よりも高いテトラッドスコアを持つかどうかを判断するときとする（なお、アルゴリズムは $M$ を生成しても、 $M$ を訪問せずにモデル $M$ を生成できる。

$M$ の精緻化は  $M$  よりも高い *Tetrad-score* を持つ)。各ノード内の数字は、モデルが訪問される順序を示す。したがって、例えば、アルゴリズムがノード2にアクセスする場合、まず、初期モデル+ $e_1$ の1辺追加を可能な限り生成し、*T-maxscore*にしたがって順序付けます。そして、*T-maxscore*が最も高いもの（この場合、初期モデル+ $e_1+e_2$ を表すノード3）を最初に訪問する。なお、このプログラムは、初期モデル+ $e_1$ のすべてのエラボレーションを訪問した後でないと、初期モデル+ $e_2$ （ノード10）を訪問しない。

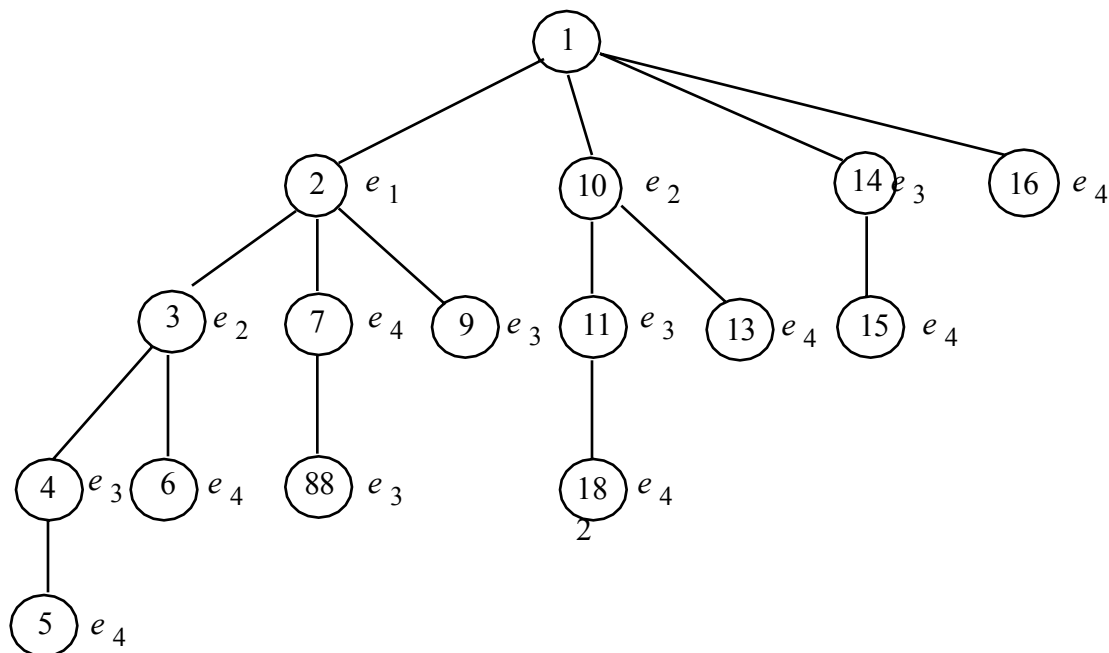


図1

実際には、このような完全な検索を合理的な時間内に行うことは不可能である。幸いなことに、私たちは多くのモデルを実際に訪問することなく、検討対象から外することができる。グラフに辺を追加すると、四則演算の線形含意が失われることがあるが、定理11.1を考慮すると、結果的にグラフに線形含意される四則演算が増加することはない。あるモデル $M$ の*T-maxscore*が、すでに訪れたモデル $M'$ の*Tetrad-score*より小さい場合、 $M$ も $M$ の改良版も、 $M'$ と同程度の*Tetrad-score*を持たないことがわかる

未測定変数による理論の精緻化

。従って、Mやその精巧なモデルを訪問する必要はない。これを図2に示す。もし、初期モデル+ $e_4$ の*T-maxscore*が初期モデル+ $e_1$ の*Tetrad-score*より低いことがわかれば、エッジ $e_4$ を含むすべてのモデルを探索から除外することができる。



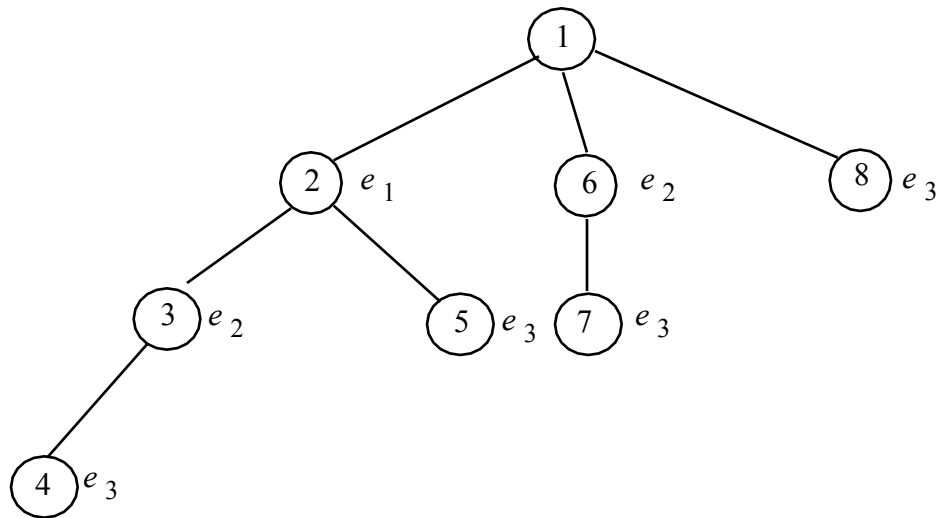


図2

後述のシミュレーション調査では、ここで説明した手順では遅すぎて実用にならないケースもある。そのような場合には、探索の深さを制限することによって、探索にかかる時間を制限する。(どのような場合でも、深さの制限は、プログラムがオーバーフィッティングによって誤る可能性があるほど十分に大きいことを確認しました)。モンテカルロ・シミュレーションの多くのケースでは、深さに関する制限は必要ありませんでした<sup>3</sup>。

### 11.3. LISRELとEQSの手順について

LISREL VIとEQSは、構造方程式モデルの自由パラメータの最尤推定を行うなど、様々な機能を持つコンピュータプログラムである。今回紹介するのは、仕様が明確でないモデルに対して自動的に修正を提案する機能である。

#### 11.3.1 入力と出力

どちらのプログラムも入力として受け取ります：

(i) をサンプルサイズとする、

---

<sup>3</sup> また、理論的には信頼性が劣るが、より高速で、実際にはほぼ同等の信頼性を持つヒューリスティックな検索手順も実装している。

- (ii) サンプルの共分散行列である、
- (iii) 独立変数の分散の初期推定値、
- (iv) 線形係数の初期推定値、
- (v) 初期因果モデル ( $A$  が  $B$  の直接的な原因でない場合に限り、 $B$  の方程式における  $A$  の線形係数をゼロに固定することによって特定される)、方程式 (EQS) または行列のシステム (LISREL VI) の形式で。
- (vi) 検索中に解放してはいけないパラメータのリスト、
- (vii) 有意水準であり
- (viii) パラメータを推定する際の反復回数の上限を設定するものである。

両プログラムの出力には、最初の因果モデルを精緻化した単一の推定モデル、様々な診断情報、および修正提案の $\chi^2$ 値、および $\chi^2$ 措置の関連確率が含まれます。

### 11.3.2 スコアリング

LISREL VI と EQS は、構造方程式モデルの自由パラメーターの最尤推定値を提供する。より正確には、推定値はフィット関数である

$$F = -\frac{1}{2} \log |S - tr(\Sigma)| - \frac{1}{2} \log |S| - \frac{1}{2} tr(\Sigma^{-1} S)$$

ここで、 $S$  は標本共分散行列、 $\Sigma$  は予測共分散行列、 $t$  は指標の総数、 $A$  が正方行列の場合  $|A|$  は  $A$  の行列式、 $tr(A)$  は  $A$  のトレースである。極限では、適合関数  $F$  を最小化するパラメータは、与えられた因果構造に対する共分散行列の尤度も最大化する。

LISREL VI と EQS は、モデルのパラメータを推定した後、 $\Sigma$  がモデルで暗示される形であるという帰無仮説と、 $\Sigma$  が制約を受けないという仮説を検定します。確率が有意

未測定変数による理論の精緻化

水準より大きければ、帰無仮説は受け入れられ、不一致はサンプルエラーとなり、

確率が有意水準より小さければ、帰無仮説は棄却され、不一致は $M$ の虚偽に帰着する

。

2つの入れ子モデルの $\chi^2$ 値の間でも $\chi^2$ 分布となり、自由度

は、2つの入れ子モデルの自由度の差に等しい。

### 11.3.3 LISREL VIサーチ<sup>4</sup>

LISREL VIの探索は、固定パラメータの「修正指数」によって導かれる。各修正指数は、与えられた固定パラメータに関するフィット関数の導関数の関数である。より正確には、ある固定パラメータの修正指数は、1階微分と2階微分の2乗の比の $N/2$ 倍と定義される。

(ここで、 $N$ はサンプルサイズである)。各修正指標は、そのパラメータを解放し、 $\chi^2$ 以前に推定したパラメータをすべてそのままにした場合に得られる $\chi^2$ の減少の下限を示す。

( $B$ の線形方程式における変数 $A$ の係数がゼロに固定されている場合、その係数を解放することは、モデルのグラフに $A$ から $B$ へのエッジを追加することになることに注意してください)。LISREL VIはまず、開始モデルを現在のベストモデルにするを検索する。そして、開始モデルの固定パラメータ<sup>6</sup>すべてについて修正指数を算出する。もし、LISREL VIが、 $M$ の $\chi^2$ の統計量の差は、2つの統計量の差であると推定した場合

現在の最良モデルと、 $M$ から最大の修正指数を持つパラメータを解放して得られるモデル $M$ が有意でない場合、探索を終了し、LISREL VIはモデル $M$ を提案する。

### 11.3.4 EQSサーチ

EQSは、漸近的に $\chi^2$ として分布するラグランジュ乗数統計量を計算します<sup>7</sup>EQSは、ユーザが指定したセット内の各固定パラメータを解放した場合の $\chi^2$ 統計量に対する近似的な個別効果を決定するために一変量ラグランジュ乗数検定を行います。その結果、 $\chi^2$ 値の減少が最も大きいと推定されるパラメータを解放する。このプログラムは

を大幅に減少させるパラメータが存在しないと推定されるまで、この手順を実行します。

$\chi^2$ . LISREL VIとは異なり、EQSがパラメータを解放した場合、モデルの再推定は行われません<sup>8</sup>。

---

<sup>4</sup> LISREL VIIは、アーキテクチャはそのままに、修正指数を変更したものである。

<sup>5</sup> LISREL VIは、開始モデルの修正を示唆するために使用できる他の多くの尺度を出力するが、これらは自動検索では使用されない。Costner and Herting (1985)を参照。

<sup>6</sup> 解放してはいけないパラメータのリストにない限りは。

<sup>7</sup> ラグランジュ乗数統計量は、LISREL VIの修正指数と同様に、パラメータを解放した場合の $\chi^2$ への影響を推定するものなので、以降の節では、これらの統計量のいずれかを指して「修正指数」という用語を用いることにする。

<sup>8</sup> EQSは、ユーザーがいくつかの異なるタイプの検索を指定することができます。ここでは、モンテカルロシミュレーションテストで使用されたものだけを説明しました。

LISREL VIもEQSも非常に複雑なプログラムであることに留意する必要がある。その柔軟性と限界を理解するには、プログラムを使って実験してみるしかない。

## 11.4. プライマリスタディ

潜在変数を用いた9種類の構造方程式モデルから、モンテカルロ法によりサンプルサイズ200の40個と2000の40個の80個のデータセットを作成した。これらのモデルは、社会的・心理的な科学的作業においてしばしば生じると考えられる種類の因果構造を含んでいるため、選ばれたものである。各ケースにおいて、データを生成するために使用されたモデルの一部が省略され、残りの部分とそのモデルの各データセットがLISREL VI、EQS、およびTETRAD IIプログラムに順番に与えられた。9つのケースには、さまざまな仕様の誤りがあることがわかる。真のモデルで使用される線形係数の値は、試験の結果がどちらかの手続きに偏らないように、ランダムに生成された。さらに、主要な研究によって示唆された、3つのプログラムの信頼性に関わる多くの補助的な研究がある。

### 11.4.1 比較シミュレーション研究の設計について

一般的な構造方程式モデリングの仮定を満たす条件下で、自動再宣言手順の信頼性を検討するためには、以下の要因を独立に変化させる必要がある。

- (i) 真のモデルの因果構造
- (ii) 真のモデルのパラメータの大きさと符号を示す；
- (iii) 開始モデルがどのように誤仕様化されるのか

さらに、理想的な研究であるべきです：

- (i) ユーザー側の判断を必要とする手順ではなく、完全にアルゴリズム化された手順を比較する。判断を必要とする手順は、真のモデルについて慎重に盲検化することによってのみ適切にテストすることができます。さらに、あるユーザーが得た結果は、他のユーザーには伝わらないかもしれません。完全にアルゴリズム化された手順では、これらの問題は発生しない。



- (ii) 実証研究で仮定された種類の因果構造、あるいは現実の領域で発生すると考えられる実質的な理由がある因果構造を調べる。
- (iii) モデル内の係数をランダムに生成する。CostnerとHertingは、パラメータの大きさがLISRELの性能に影響を与えることを示した。さらに、TETRAD IIの信頼性は、因果構造のためではなく、係数の特定の数値のために、消失性テトラッド差がサンプルで成立するかどうか依存しており、この可能性に対して、研究の賛否を偏らせないことが重要である。
- (iv) 比較するすべてのプログラムが、代替モデルの同じ空間を探索しなければならないことを可能な限り保証する。

## 11.4.2 研究デザイン

### 11.4.2.1 因果構造の選択

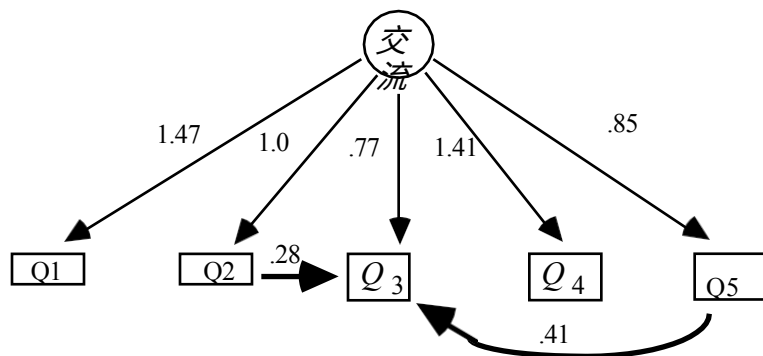
調査した9つの因果構造を図3、図4、図5に示します。図では簡略化のため無相関の誤差項を省略しているが、線形モデルにはこのような項が含まれている。各図中の重い有向線または無向線は、シミュレーションデータを生成するためのモデルには含まれていたが、3つのプログラムに与えられたモデルでは省略された関係、すなわち、プログラムが回復を試みるべき依存関係を表している。開始時のモデルを図6に示す。このモデルには、5つの測定変数を持つ1因子モデル、8つの測定変数と2つの潜在変数を持つ7つの多重指標モデル、3つの潜在変数と8つの測定変数を持つ1つの多重指標モデルがある。

1因子モデルは、心理測定やパーソナリティ研究でよく使われる（Kohn 1969参照）

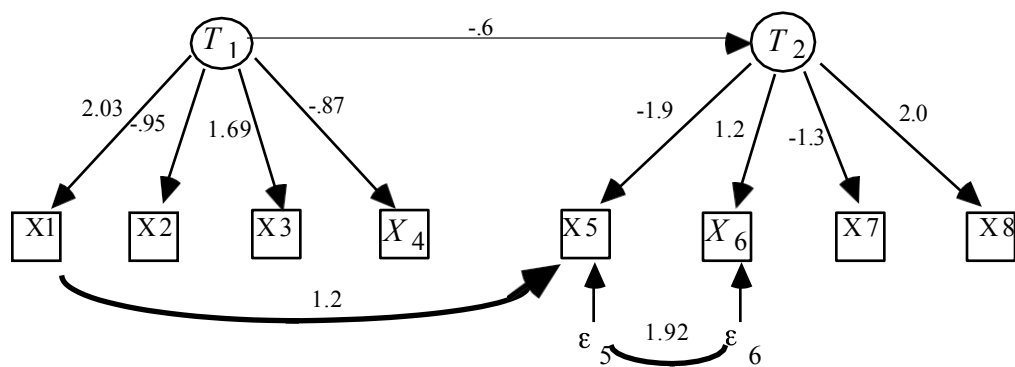
。2 因子モデルは、異なる時期に同じ測定を行う縦断的研究でよく使われ（McPherson et.al. 1977参照）、心理測定研究でも使われる。潜在変数の三角形の配置は典型的な形状である（Wheaton et.al. 1977参照）。

代替構造の集合が探索空間を決定する。各プログラムは、初期モデルの代替精巧化について同じ空間を探索することを強制され、代替構造のセットは、その要件と一致するようにできるだけ大きくなるように選択されました。

モデル1



モデル2



モデル3

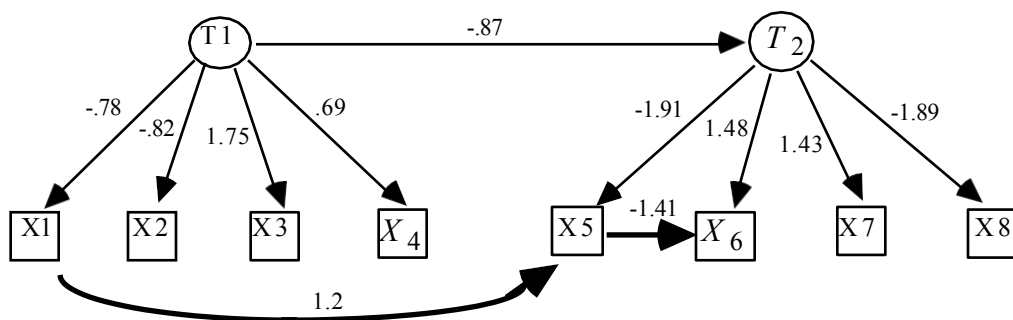
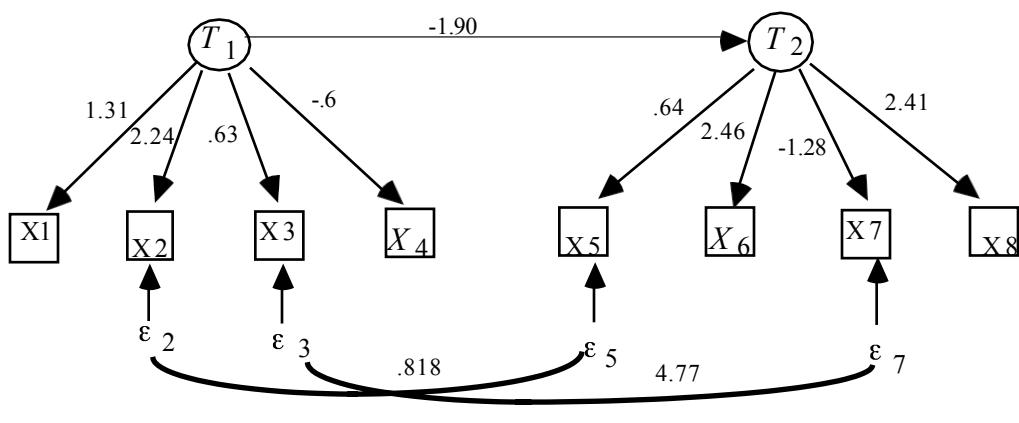
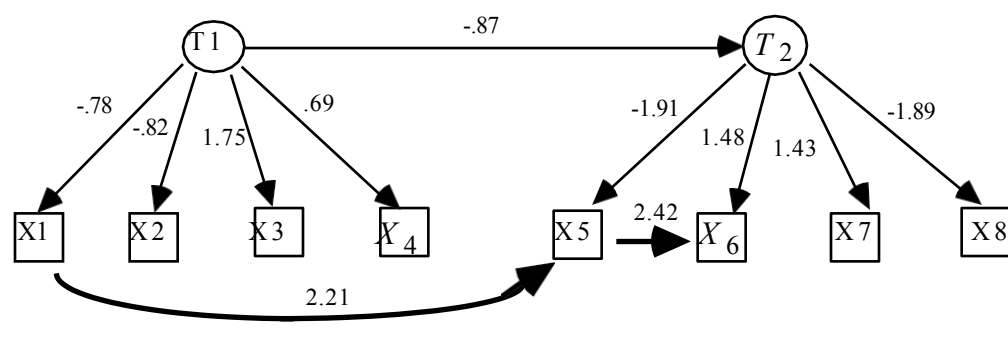


図3

モデル4



モデル5



モデル6

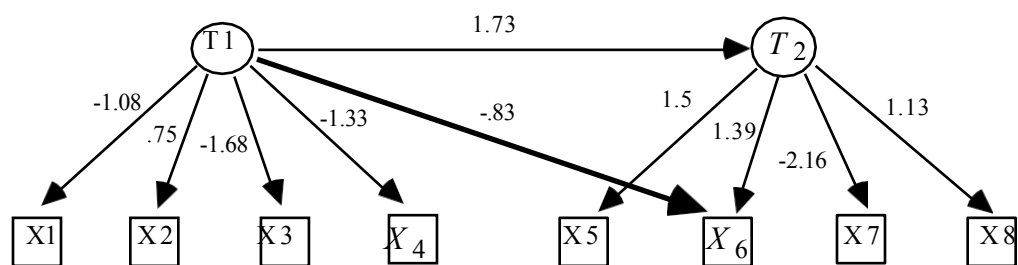
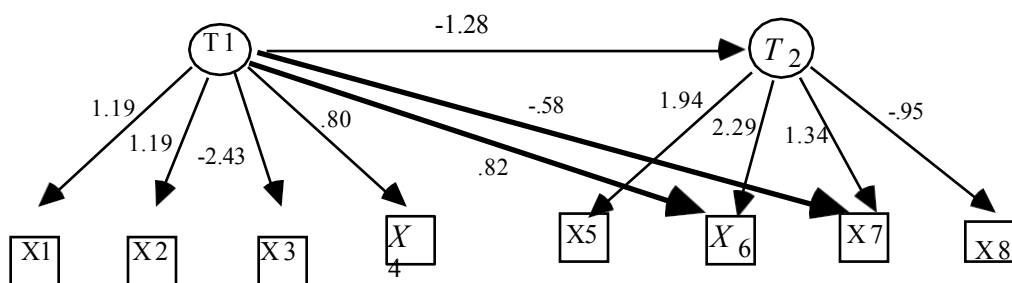
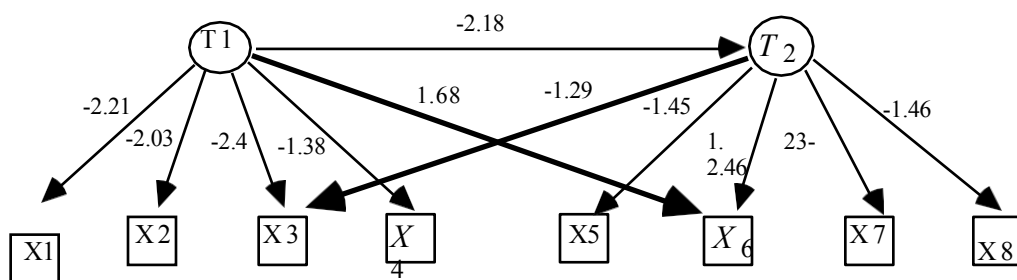


図4

モデル7



モデル8



モデル9

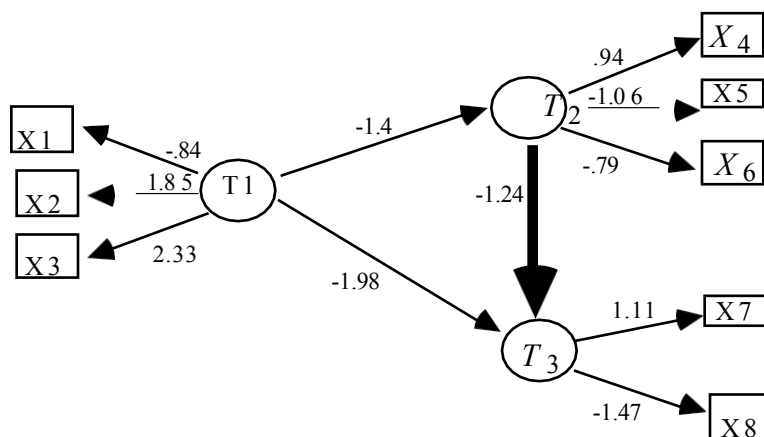
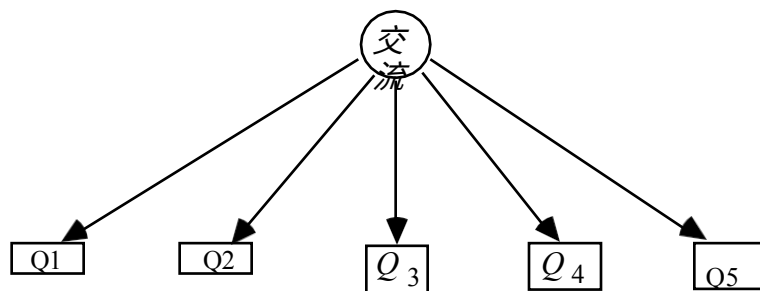
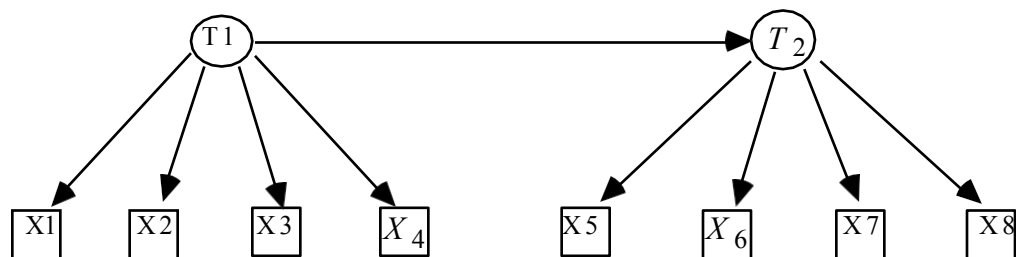


図5

## モデル1のスタート



## モデル2～8用スタート



## 9型用スタート

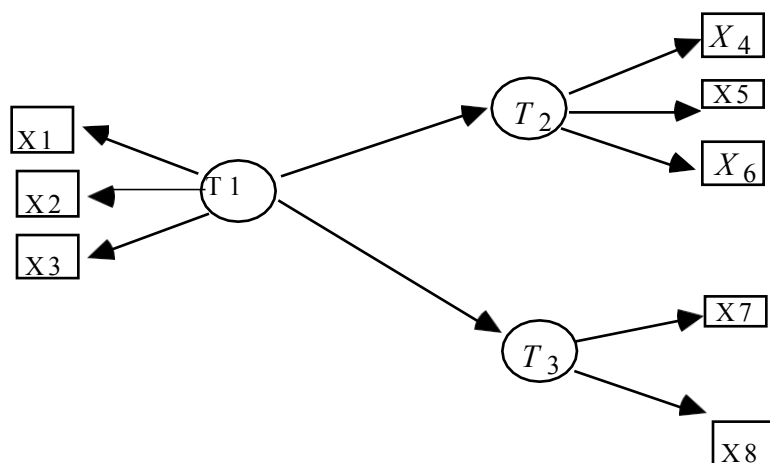


図6

#### 11.4.2.2 回収するコネクションの選定

回復する接続は以下の通りです：

- (i) 潜在変数から潜在変数への指示辺。この種の関係は、しばしば実証研究の主要なポイントである。例として、Maruyama and McGarvey (1980)を参照。
- (ii) 潜在変数から測定変数へのエッジ。この種の接続は、測定が不純である場合、および他の文脈で生じることがある。例として、Costner and Schoenberg (1973)を参照。
- (iii) 測定された変数間の相関誤差。この種の関係は、おそらく最も頻繁に再定義される形式である。
- (iv) 測定された変数から測定された変数への指示されたエッジ。このような関係は、例えば、社会的指標間では得られないが、調査や心理測定機器の回答間では大いにあり得るし（Campbell et.al. 1966参照）、もちろん、金利や住宅販売などの測定変数間でもあり得る。

また、いずれかのプログラムでは回復できないことが事前に分かっているケースは含まれていません。詳細は後述する。

#### 11.4.2.3 スターティングモデルの選定

9つのケースで使用された出発モデルは3つだけであった。開始モデルは、因果関係モデリングの用語で言えば、純粋な因子モデルや純粋な複数指標モデルである。グラフ理論的に言えば、それらは木である。

#### 11.4.2.4 パラメーターの選択

真のモデルを示す図において、有向辺の横の数字は、関連する線形係数に与えられた値を表しています。無向きの線の横の数字は、指定された共分散の値を表しています。モデル1と5を除くすべてのケースで、係数は0.5から2.5の間の一様分布から無作為に選択されたものである。得られた値には、正または負の符号がランダムに付けられた。



モデル1では、線形係数をすべて正にした。指標間の因果関係の値は、非ランダムに指定された。このケースは、潜在因子への負荷量が正であることが知られており、測定された変数間の直接的な相互作用が比較的小さい、心理測定などの研究をシミュレートするために構築された。

モデル5は、モデル3との比較のために、測定-測定エッジの係数がモデル3に対して意図的に大きくなるように選択されたものである。

#### 11.4.2.5 データの生成

9つのケースについて、サンプルサイズ200のデータセットを20個、サンプル2,000のデータセットを20個、モンテカルロシミュレーション法で作成した。

擬似ランダムサンプルは、5章に記載した方法で作成した。各プログラムの性能を最適化するために、すべての外因性変数が標準正規分布を持つと仮定した。この仮定により、標準正規分布からの擬似ランダムサンプリングによって、母集団の各ユニットに対して各外生変数の値を固定することが可能になった。相関誤差は、誤差項に関連する変数の新たな外生的共通原因を導入することにより、シミュレーションで得られた。

#### 11.4.2.6 データコンディショニング

ここで取り上げる研究は、すべて2回行われました。最初の研究では、LISREL VIとEQSに、すべてのパラメータに正の開始値を与えた。どちらのプログラムでも開始モデルの推定が困難な場合は、初期値を正しい符号に設定してケースを再実行しま

LISREL と EQS は、モデルの自由パラメータを推定するために反復処理を採用しています。これらの手続きは「条件の悪い」変数に敏感で、データが変換されない限り、最適なパフォーマンスを発揮することはできません。例えば、これらの手続きでは、測定された変数において、2つの分散が1桁以上異なることがないようにすることが経験則となっています。上記の方法でデータを作成したところ、共分散マトリックスのうち、わずかではありますが、かなりの割合でこのような条件不一致が見られました。

LISREL VIとEQSの信頼性が低いのは、データのコンディションが悪いからではないかとの仮説のもと、全試験を繰り返しました。サンプル

共分散行列の各セル  $[I, J]$  を  $s_{IJ}$  で割ることによって標本相関に変換した ( $s_I$  は  $I$  の標本標準偏差)。大きく変化する標本分散を避けるために、標本共分散行列の各セル  $[I, J]$  を  $\sigma_I \sigma_J$  で割ることによって変換した ( $\sigma_I$  は  $I$  の集団標準偏差)<sup>9</sup> この変換結果を疑似相関行列と呼ぶ。この変換により、データ依存の変換を使わなくても、測定された変数の分散がすべてほぼ等しくなる。もちろん実証研究においては、母集団のパラメータがわからないため、この変換を行うことはできない。

実際には、データを条件付けして母集団パラメータを開始値として与えても、LISREL VIやEQSの性能はほとんど変化しないことがわかりました。TETRAD II 手法の性能は、どちらの場合も基本的に同じであった。データの条件付けは、小サンプルではLISREL VIの信頼性をごくわずかに改善し、大サンプルでは信頼性をわずかに低下させた。

#### 11.4.2.7 パラメータの開始値

モデルの線形係数をランダムに選択し、あるものはマイナスに、あるものはプラスになるようにしました。負のパラメータを持つモデルは、実はTETRADの手順にとって難しいケースである。もし、あるモデルがテトラッドの差の消滅を意味するのであれば、パラメータの符号に違いはない。しかし、モデルがテトラッド差の消滅を意味するのではなく、テトラッド差が2つ以上の項の和に等しいことを意味する場合、モデルのパラメータのすべてが正でなくても、これらの項の和がゼロになる可能性があります。したがって、負のパラメータを持つモデルによって生成されたデータでは、モデルによって線形に暗示されないテトラッド差の消失が観察される可能性が高くなる。

LISRELとEQSの反復推定手続きは、パラメータ・ベクトルを用いて開始される。<sup>9</sup>

して、尤度関数が局所最大値に収束するまで、このベクトルを更新する。必然的に

、反復推定手続きは開始値に対して敏感である。同じモデル、同じデータで、2つの

異なる開始ベクトル  $i$  と  $j$  では、一方の手続きは収束するが、他方の手続きは収束しないかもしれない。

などがある。これは、パラメータの符号が混在している場合に特に顕著である。第2

回目の研究でLISRELとEQSに可能な限りのチャンスを与えるため、各パラメータの

開始値を可能な限り実際の値に設定しました。のエッジに対応する線形係数につい

ては、実際の値を設定した。

---

<sup>9</sup> この変換を提案してくれたPeter Bentlerに感謝する。

ただし、それ以外のパラメータについては、*母集団の正確な値*で LISREL と EQS を起動した。<sup>10</sup>

#### 11.4.2.8 有意水準

EQSとLISREL VIは、<sup>2</sup>の減少の関連確率がユーザー指定の有意水準を超える限り、パラメータの自由化を継続する。LISRELとEQSの両方について、以下のように設定する。

有意水準は.01に設定する。(これはLISRELのデフォルト値であり、EQSのデフォルト値は

.05.)有意水準が低いほど、各プログラムが自由に設定するパラメータは少なくなる傾向がある。LISRELとEQSは0.01でもオーバーフィットする傾向があるため、有意水準はそれ以上高く設定することはしませんでした。(LISREL VIとEQSは、オーバーフィットよりもアンダーフィットの方が多いように見えるかもしれないが、「アンダーフィット」のほとんどは、通常の停止基準を採用しない検索が中止されたためである)。

#### 11.4.2.9 イテレーション数

パーソナルコンピュータ上のLISREL VIのパラメータ推定における最大反復回数は、デフォルトで250回である。LISREL VIとEQSのテストでは、最大反復回数を250回に設定した。

#### 11.4.2.10 LISREL VIで開始モデルを指定する。

LISREL VIでは、以前のバージョンと同様に、外生変数、内生変数だが未測定変数、測定変数だが外生潜像に依存する変数、測定変数だが内生潜像に依存する変数、といった具合に、それぞれ異なるマトリックスに分類することが要求されます。これらのカテゴリのある変数は、他のカテゴリの変数に影響を与えることはできない。LISREL マニュアルで推奨されているように定式化すると、LISREL VI は原理的にこの研究で考慮された効果の多くを検出することができない。しかし、これらの制限は、ほとんどの場合、LISREL VIにおける幻の変数の置換システムによって克服することができる。

---

<sup>10</sup> LISRELとEQSの入力は共分散行列ではなく擬似相関行列であったため、共分散行列を生成した元のモデルのパラメータの値をLISRELとEQSに提供しませんでした。そこで、擬似相関行列を生成する変換モデルの母集団パラメータをプログラムに提供しました。詳細な変換はSpirtes (1990)に記載されている。

本研究では、LISREL VIに、外生的かつ潜在的な変数である $\xi$ を、内生的かつ潜在的な変数に変更すること $\eta$ を認めさせることができなかった。これは、LISRELが $T_1$  ( $\xi$ 変数で表される) にエッジを追加することを考慮しないという不幸な効果をもたらした。同等の検索問題を確保するために、TETRAD IIとEQSを同じように制限した。

#### 11.4.2.11 インプリメンテーション

LISREL VIの実行は、Compaq 386コンピュータ（数学コプロセッサ付き）で実行されたパーソナルコンピュータ版のプログラムで行われた。EQSの実行は、IBM XTクローン（数学コプロセッサ付き）で行われた。TETRAD IIの実行はすべてSun 3/50ワークステーションで行われた。IBMクローンでも実行されるTETRAD IIでは、Compaq 386とSun 3/50の処理時間はほぼ同じである。

#### 11.4.2.12 TETRAD II パラメーターの仕様

TETRAD IIでは、weightパラメータの値、テトラッド差の消失の検定で使用する有意水準、および検索を制限するパーセンテージパラメータの値をユーザーが設定する必要があります。すべての場合、有意水準は0.05に設定した。サンプルサイズ2000の場合、重みを0.1、パーセンテージを0.95に設定した。

サンプルサイズが小さいと、母集団の共分散の推定値の信頼性が低くなり、より多くのテトラッド差が母集団で消失すると誤って判断される。このため、「説明原理」に関する判断の信頼性が低くなる。このため、サンプルサイズ200では、Falsification Principleをより重視するために、ウェイトを1に設定した。また、「説明の原則」の判断の信頼性が低いため、サンプルサイズが小さい場合は割合を低くす

未測定変数による理論の精緻化

ることが有効です。サンプルサイズ200の場合、0.90に設定した。これらのパラメー

タ設定が最適かどうかはわからない。

---

<sup>11</sup> LISREL IVについては、この手順の詳細は*Discovering Causal Structure*に記載されている。LISREL VI については、ベータ行列を除いて同じ手順が使える。Joreskog and Sorbom (1984)を参照。



## 11.5 結果

TETRAD II は、各データセットと初期モデルに対して、最適な代替精緻化案を作成します。このセットは、場合によっては1つのモデルで構成されますが、通常は2つか3つの代替案で構成されます。EQS と LISREL VI は、自動検索モードで実行すると、初期モデルを精緻化した単一のモデルを出力として生成する。各プログラムが提供する情報は、出力に真のモデルが含まれていれば「正しい」と評価される。しかし、出力が正しくない場合、各プログラムがどのようにエラーになるかが重要であり、私たちは様々な種類のエラーをより詳細に分類しました。TETRAD IIの出力を以下のように分類した（ここで、あるモデルがTETRADのトップグループに入るのは、それが最高の *Tetradscore* と同点であり、同じ *Tetrad-score* でより少ないエッジを持つモデルがない場合に限られる）：

**正解**--真のモデルはTETRADのトップ集団にいる。

**幅**--TETRADのトップグループに含まれる選択肢の平均数。

**エラーです:**

**オーバーフィット**--TETRADのトップグループには真のモデルが含まれておらず、真のモデルを精緻化したモデルが含まれている。

**Underfit**--TETRADのトップグループには真のモデルは含まれていないが、真のモデルが精緻化されたモデルは含まれている。

その他...これまでのカテゴリのいずれにも該当しないものを出力します。

LISREL VIとEQSプログラムの出力を以下のように採点した：

*正解*--真のモデルは、番組が推奨している。

*エラー*です:

TETRADのトップグループ--推奨モデルは正しくないが、同じデータに対して

TETRAD IIプログラムが提案する最良の代替案の一つである。

Overfit（オーバーフィット）：推奨モデルが真のモデルを精

緻化したものである。Underfit--真のモデルは、推奨モデルの

精緻化である。

正しい変数ペア...推奨モデルは、前のどのカテゴリーにも属さないが、真のモデ

ルの省略された部分で接続されていたのと同じ変数のペアを接続している。

その他...これまでのカテゴリーのいずれにも該当しないものを出力します。

ほとんどの場合、LISREL VIとEQSのいずれでも推定に問題は生じなかった。しかし、ケース3とケース5の多くのデータセットで、LISREL VIとEQSは推定問題についての警告を出すか、計算上の問題で検索を中止している。入力ファイルは収束の問題を最小限に抑えるように作成されているので、結果の集計ではこのような警告を無視した。また、いずれかのプログラムがパラメータの解放を推奨した場合、解放の前後でどのような警告や推定問題が発生しても、そのパラメータは解放されたとみなした。どちらのプログラムも、開始モデルの推定に問題があり、パラメーターの解放を推奨しなかった場合は、アンダーフィットとカウントした。その結果を次の表と図に示す。

表1: ケースバイケース セット提案の幅

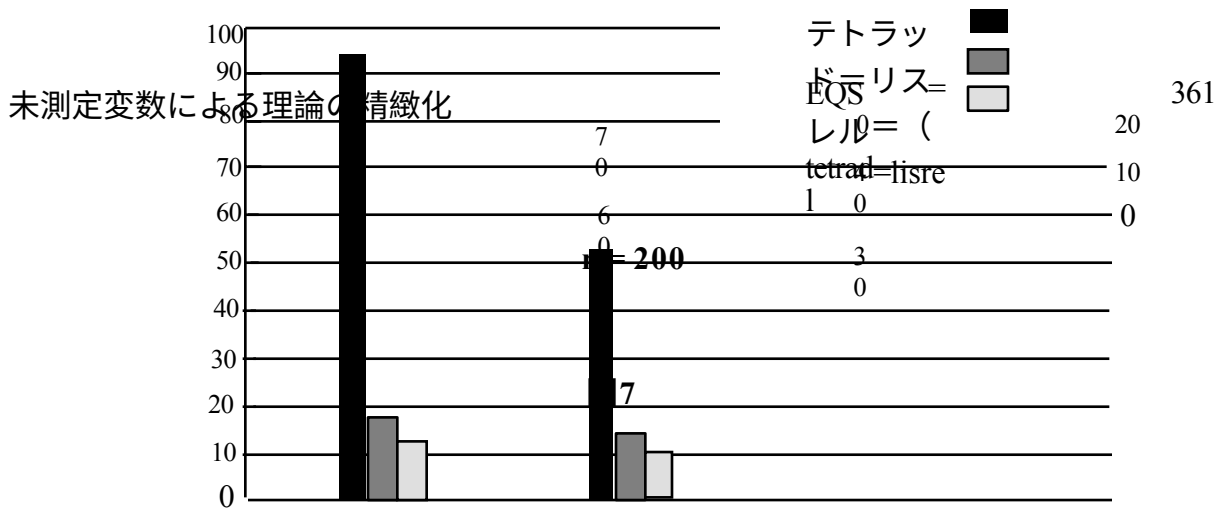
幅、n=2000									
ケース	1	2	3	4	5	6	7	8	9
LISREL VI	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EQS	1	1	1	1	1	1	1	1	1
テトラッド	4	2.1	2	1	1.1	3	7.1	11.3	2.9

幅、n=200									
ケース	1	2	3	4	5	6	7	8	9
LISREL VI	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EQS	1	1	1	1	1	1	1	1	1
テトラッド	1.9	3.5	1.5	1	1	3.2	5.9	8.4	3

%

正しい

n = 2000



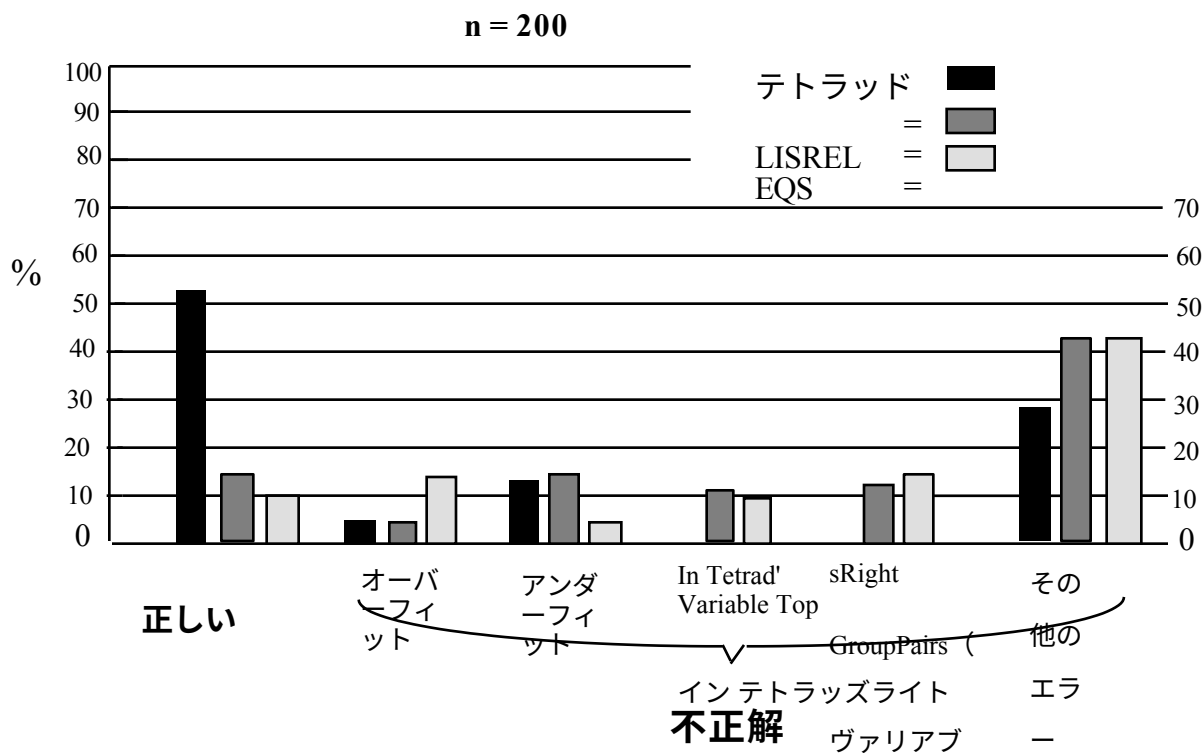
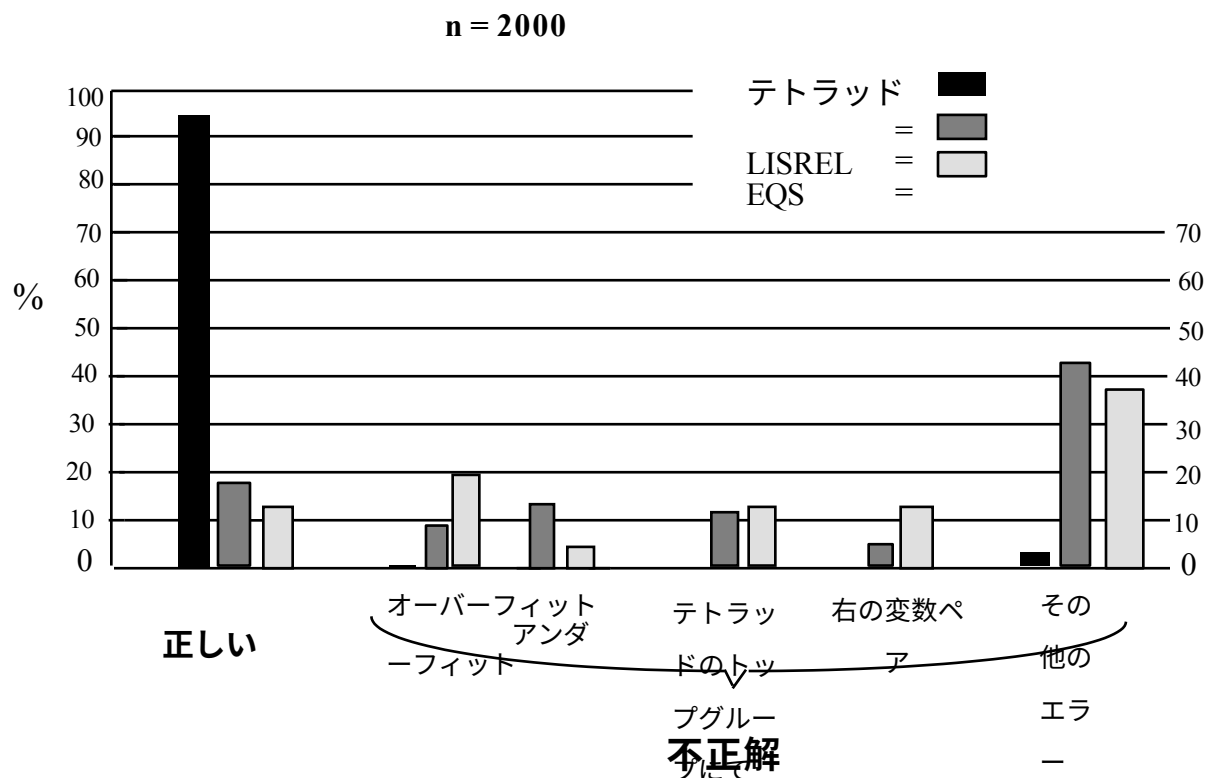


図8 ルトップグループペア

サンプルサイズ2000の場合、TETRAD IIのセットには95%のケースで正しい再定義が含まれていました。LISREL VIは18.8%、EQSは13.3%の確率で正しいモデルを発見しました。サンプルサイズ200の場合、TETRAD IIのセットには52.2%の確率で正しい再定義が含まれており、LISREL VIは15.0%、EQSは誤定義を修正した。

10.0%の確率で発生します。図8には、より詳細な誤差の特徴を示しています。

## 11.6 信頼性・情報性

それぞれのプログラムの提案を判断する基準は2つあります。1つ目は信頼性である。プログラムの**信頼性**を、提案されたモデルの集合に正しいものが含まれる確率と定義しよう。このような場合、TETRADの検索手順は、LISREL VIやEQSよりも明らかに信頼性が高い。推測の回数を増やすだけで、より高い信頼性を得ることができる。上位100万個のモデルを出力するプログラムは非常に信頼性が高いかもしれないが、その提案は有益ではないだろう。そこで、2つ目の基準を「大胆さ」と呼ぶことにする。プログラムの提案の**大胆さ**を、提案されたモデルの数の逆数とする。この基準では、9つのケースのうち7つで、LISREL VIやEQSより悪い結果となっている。

これらの基準では、我々の手順も修正指数手順も優位に立つことはないので、前者の信頼性が高いのは、単に大胆さを減らしたからなのか、と問うのは自然なことである。この疑問は少なくとも2つの方法で解釈することができる：

- (i) TETRAD IIがLISREL VIやEQSに合わせて大胆さを増した場合、つまり単一のモデルを出力した場合、LISREL VIやEQSよりも信頼性が高いか低い。
- (ii) LISREL VIやEQSがTETRAD IIに合わせて大胆さを減らした場合、つまりTETRAD IIと同程度のモデルセットを出力した場合、TETRAD IIよりも信頼性

が高いか低いか。

TETRAD II の出力に含まれるどのモデルも、他のどのモデルよりも正しい可能性が高いと信じる理由がない場合、単にランダムにモデルを選択することができます。本手順で**期待される単一モデルの信頼性**は、以下の方法で計算することができる。TETRAD II が与えられた共分散行列に対して  $n$  個のモデルのリストを出力するとき、その中から特定の1つのモデルを最良の推測として選択する確率は  $1/n$  であると仮定します。したがって、正しいモデルを含む長さ  $n$  のリストを1つの正解として数えるのではなく、 $1/n$  として数えることになる。

そして、期待される正解数を試行回数で割ればよい<sup>12</sup>。

TETRAD IIがLISREL VIやEQSのように大胆になった場合、サンプルサイズ2000での単一モデルの信頼性は95%から約42.3%に低下する。我々のデータでは、LISREL VIの信頼性は18.8%、EQSの信頼性は13.3%である。サンプルサイズ200の場合、TETRAD IIの単一モデルの信頼性は30.2% LISRELの信頼性はサンプルサイズ200で15.0%、EQSは10.0%となっています。より現実的な設定では、あるモデルを他のモデルより好む実質的な理由があるかもしれない。もし実体的な知識に価値があり、それを使って一つのモデル*M*を選ぶとしたら、*M*はTETRAD IIの提案モデル群から無作為に選んだモデルよりも真である可能性が高い。したがって、ある意味で、上の段落で示された数字は最悪のケースである。

別の戦略として、モデルを選択する前にセットのサイズを小さくすることがあります。TETRAD IIの候補をEQSやLISREL VIにかけ、関連する確率が最も高いものと同数でなかったものを捨てることで、いくつかの候補を除外できることがよくあります。効果はほとんどありません。サンプルサイズ2000のTETRAD IIの（最悪の場合の）単一モデルの信頼性を42.3%から約46%に、サンプルサイズ200の信頼性を30.2%から約32%に引き上げます。

1つの推測ではなく、同じように良い提案のリストが欲しいという良い理由がいくつもあります。これらはすべて、アウトプットの信頼性と情報性に関係している。

まず、プログラムの利用者にとって、プログラムの出力がどの程度信頼できるかを知ることは重要である。サンプルサイズ2000の場合、我々が検討した範囲のケースでは、TETRAD IIの出力の信頼性は非常に安定しており、低い方から90%、高い方



から100%の範囲にあった。以下に説明する理由により、LISREL VIとEQSによる単一モデルの出力は、せいぜい、関連確率が真のモデルの確率と等しいすべてのモデル（および関連確率がより低い他のモデルも含む）を含むモデルのリストからのランダムな選択であるにすぎない。残念ながら、提案されたモデルがランダムに選択されるリストのサイズは、モデルの構造によって大きく変化し、ユーザにはわからない。このように、LISREL VIが実質的に計算困難なケースを無視しても、サンプルサイズ2000におけるLISREL VIの出力の信頼性は、20人中0人から20人中11人までであった。したがって、LISREL VIやEQSの利用者が、提案されたモデルに対してどの程度の信頼性を持つべきかを知ることは、かなり困難である。

---

<sup>12</sup> 計算を簡単にするために、1つのモデルで生成されたすべての共分散行列に対してTETRAD IIが出力したリストの長さは、それぞれのケースでリストの平均長さに等しいと仮定しました。これは、ほとんどの場合においてかなり良い近似値である。

第二に、提案されたセットの中の複数のモデルが、同じ結論を導くかもしれない。例えば、TETRAD IIが提案するモデルの多くは重複している、つまり、因果関係の相当数で一致している可能性がある。もし、自分の研究目的が、これらのモデルのうち、一致する部分にあるのであれば、単一のモデルを選択する必要はない。この場合、すべての競合他社が同意しているので、大胆さを増すことによって信頼性を犠牲にする必要はない。

最後に、もっともらしい選択肢を明確にリストアップしておくことは、信頼性の低い1つの提案よりも、さらなる研究の指針として有用である。実験やデータ収集において、決定的な結果を得るためには、どのような競合モデルを排除しなければならないかを正確に把握することは有用である。例えば、ケース3を考えてみよう。TETRAD IIは、 $X_1$ から $X_5$ までと $X_1$ から $X_6$ までのエッジを含むモデルだけでなく、正しいモデルも示唆している。 $X_1$ を変化させ、 $X_6$ への影響を調べる実験では、この2つの選択肢を区別することはできない（どちらも $X_1$ を変化させると $X_6$ が変化すると予測するため）。もっともらしい選択肢を知ることによってのみ、どちらの実験がより有用かを判断することができる。

もしLISREL VIやEQSが我々の手順と同じ大きさのモデル群を出力したら、同じように信頼できるのだろうか？ その答えは、セット内の残りのモデルがどのように選択されたかによります。多くの場合、LISREL VIとEQSは、最高修正指数と同値、あるいはほぼ同値の複数のパラメータを見つけます。現在、両プログラムは、パラメータの任意の順序に基づいて、これらのパラメータのうち1つだけを選択して解放しています。例えば、最初のモデルを評価した結果、 $X_3 \rightarrow X_5$ と $X_3 \text{ C } X_5$ が最高修正指数で並んでいた場合、LISREL VIまたはEQSはそのうちの1つを選択し（例えば $X_3 \rightarrow X_5$ ）、検索によって解放すべきパラメータがなくなるまで続けます。そして、最も高

い関連確率を持つ単一のモデルを提案する。もし、LISREL VIやEQSが、任意に1つを選ぶのではなく、結びついた修正指標に対応するすべての枝を検索した場合、その信頼性は間違いなく大幅に向上するだろう。例えば、 $X_3 \rightarrow X_5$ を解放した後、解放すべきパラメータがなくなるまで解放した後、LISREL VIまたはEQSは最初のモデルに戻り、 $X_3 \text{ C } X_5$ を解放し、解放すべきパラメータがなくなるまで再び解放を続けることができる。そして、最も高い関連確率で結ばれているすべてのモデルを提案することができる。これは、基本的に TETRAD II プログラムが採用している検索方法です。

サンプルサイズ2000のケース1でLISREL VIの検索をこのように拡張した場合、正しい出力の数は3から20のうち16に増加する。他のケースでも、この戦略

---

<sup>13</sup>  $X \text{ C } Y$ " という表現は、 $X$ と $Y$ の誤差項が相関していること、あるいは等価的に、 $X$ と $Y$ の追加的で共通の原因が存在することを意味する

は、LISREL VIやEQSの性能を全くと言っていいほど向上させません。例えば、サンプルサイズ2000のケース5では、LISREL VIは収束や計算上の様々な問題により、全てのサンプルで不正解となったが、TETRAD IIは全てのケースで正解となった。サンプルサイズ2000のケース4では、LISREL VIは9サンプルで正解を逃し（TETRAD IIは2サンプルで正解を逃しただけ）、同値解消の方法とは無関係な理由であった。

LISREL VIとEQSは、検索を拡大することによって、処理時間が大幅に増加することになる。一般に、分岐探索に要する時間は、各段階で考慮する選択肢の数に応じて指数関数的に増加するものであるため、各段階で3つの選択肢を保持し、初期モデルの2つのパラメータを解放した後すべての分岐で停止すると、所要時間は約7倍に増加する。このような検索を合理的な時間で実行できるのだろうか？ Compaq 386でLISREL VIを実行した場合、数学コプロセッサを使用しない場合は約20分、数学コプロセッサを使用した場合は約4分かかりました。LEADING EDGE（IBM XTのクローンで、COMPAQ 386よりかなり遅い）でEQSを実行したところ、平均EQS実行時間は約5分だった。このことから、LISREL VIでは、比較的高速なマシンでのみ中型モデルでも分岐探索が可能であり、低速なマシンでは、高速だが信頼性の低いEQS探索のために分岐探索が実用的であることがわかる。

## 11.7 LISRELとEQSを検索の補助として使用する。

TETRAD IIが示すような検索をLISREL VIやEQSと併用することで、有益に利用できる方法が2つあります。私たちのような手順を用いて、初期モデルの修正案のリストを作成し、LISRELやEQSで推定を行い、関連確率が非常に低い、あるいは比較

的に低い代替案を破棄することができる<sup>14</sup>。私たちは、関連確率がTETRAD IIの提案するモデルを区別することができたのは、わずか3ケースであることを発見した。ケース6では、TETRAD IIが提案した3つのモデルのうち1つが、他の2つよりも低い関連確率を有していた。ケース7では、TETRAD IIが提案した6つのモデルのうち1つが、他の5つのモデルよりも低い確率で関連付けられていた。ケース8では、TETRAD IIが提案した12モデルのうち8モデルが、上位4モデルよりも低い確率で関連づけられたのである。これらの結果

---

<sup>14</sup> TETRAD IIは、リクエストに応じて、提案するすべてのモデルに対してEQS入力ファイルを自動生成します。

は、LISREL VIに真のモデルのすべてのエッジについて正しい開始値を与え、真のモデルにないエッジについては開始値をゼロにした場合に得られたものです。以前のテストでは、LISREL VIに真のパラメータを初期値として与えなかった場合、しばしば収束の問題が発生しました。

また、TETRAD IIとLISREL VIまたはEQSの自動検索を一緒に実行することも有益である。LISREL VIとTETRAD IIが一致する場合（LISREL VIが提案するモデルがTETRAD IIのトップグループにある場合）、両プログラムはそれぞれの平均よりも高い割合で正しく、逆に一致しない場合は両プログラムはその平均よりも高い割合で間違っている。EQSはTETRAD IIと併用した場合も同様である。実際、サンプルサイズ2000では、EQSもLISREL VIも、TETRAD IIと食い違ったときに正解したことはない。一方、サンプルサイズ2000では、LISREL VIはTETRAD IIと一致した場合61.8%、EQSはTETRAD IIと一致した場合53.3%の確率で正しかった。サンプルサイズ2000の場合も、TETRAD IIはLISREL VIまたはEQSと一致した場合、常に正しい結果となった。サンプルサイズ200の場合、TETRAD IIは平均52.2%の確率で正しかったが、LISREL VIと一致した場合は75.7%、EQSと一致した場合は75.0%の確率で正しかった。これらの結果をまとめると、以下のようになる：

サンプルサイズ2000：

$P(\text{TETRAD correct})$	95.0
$P(\text{LISREL VI正解})$	18.8
$P(\text{EQS正解})$	13.3
$P(\text{TETRAD正しい} \mid \text{LISREL VI同意})$	100.0
$P(\text{TETRADが正しい} \mid \text{LISREL VIがそうでない})$	92.1

$P$ (TETRAD正しい   EQS同意)。	100.0
$P$ (TETRADが正しい   EQSがそうでない)	92.6
。	
$P$ (LISREL VI正解   TETRAD II同意)	61.8
$P$ (LISREL VIが正しい   TETRAD IIがそうでない)	0.0
$P$ (EQS正解   TETRAD II同意)	53.3
$P$ (EQSの正答率   TETRAD IIの不一致率)	0.0
。	

サンプルサイズ200:

$P(\text{TETRAD correct})$	52.2
$P(\text{LISREL VI正解})$	15.0
$P(\text{EQS正解})$	10.0
$P(\text{TETRAD正しい} \mid \text{LISREL VI同意})$	75.7
$P(\text{TETRADが正しい} \mid \text{LISREL VIがそうでない})$	46.9
$P(\text{TETRAD正しい} \mid \text{EQS同意})$	75.0
$P(\text{TETRADが正しい} \mid \text{EQSがそうでない})$	47.2
。	
$P(\text{LISREL VI正解} \mid \text{TETRAD II同意})$	39.4
$P(\text{LISREL VIが正しい} \mid \text{TETRAD IIがそうでない})$	9.5
$P(\text{EQS正解} \mid \text{TETRAD II同意})$	43.7
$P(\text{EQSの正答率} \mid \text{TETRAD IIの不一致率})$	2.7
。	

## 11.8 TETRAD II エラボレーションサーチの限界点

TETRADIIは、真のモデルによって線形に暗示されるのではなく、自由パラメータの偶然の値によって成立する消失性TETRAD差が大量に存在する場合、正しいモデルを見つけることができません。我々の研究では、少なくとも、データを生成したモデルの線形係数を一様に分布させた場合、このような現象は珍しいと言えますが、確かに発生することはあります。他の「自然な」パラメータ分布でも同じ結果が予想される。さらに、この検索は、*Tetrad-score*が最も高いモデルをすべてを見つけること



を保証するものではありません。しかし、多くの場合、モデルの大きさ、背景知識の量、モデルの構造、およびサンプルサイズに応じて、探索空間は非常に大きく、*Tetrad-score*が最も高いモデルを見つけることを保証する探索は実用的ではありません。探索を制限する方法の1つに、単純化原則の適用がある。これは実質的な仮定であり、間違っている場合もある。小さなモデルであれば単純性の仮定は必要ないが、変数の多い問題では、スコアが最大でもスコアに寄与しない冗長な辺を多く含むモデルが大量に存在する可能性がある。単純性の仮定を用いない場合、このようなモデル空間を探索することは困難であることが多く、また探索しても、最高得点に並ぶモデルが非常に多く、出力が有益でない場合がある。もし、あるモデルが

冗長な "エッジ "が正しい場合、この手順では見つけることができません。通常、このような構造は識別が不十分であるため、LISREL VIでもEQSでも見つけることができなかった。

ここで説明した検索方法は、数十個以下の変数であれば実用的である。しかし、それ以上の数の変数に対しては、第10章で説明するMIMBuildアルゴリズムが適用できるかもしれない。

最後に、潜在変数モデルの中には、テトラッド差の消失によって区別することはできないが、原理的には統計的に区別可能なものが多く存在する。LISRELやEQSの信頼性の高いバージョンであれば、TETRADが失敗してもこのような構造を発見することができるかもしれない。

## 11.9 統計的探索のためのいくつかのモラル

今回検討した問題に対して、TETRAD II手順が他の検索手順よりも信頼性が高いことが証明された理由は3つある。

- (i) TETRAD IIは、LISREL VIやEQSとは異なり、探索を行うためにパラメータを推定する必要がない。LISREL VIやEQSは、誤った初期モデルに対してパラメータ推定を行うため、収束しなかったり、不正確なパラメータ推定値を算出することが多かった。その結果、それぞれの検索に支障をきたすことになった。
- (ii) TETRAD II の検索では、複数の異なるモデルのスコアが同点である場合、プ

プログラムは各モデルのエラボレーションを検討する。これに対し、LISREL VIとEQSは、任意に1つのモデルを選んで精緻化する。

- (iii) LISREL VIとEQSは、TETRAD IIと比較して、エッジの追加を停止するタイミングを決定する際の信頼性が低くなっています。

可能な限り反復的な数値処理を避けること、代替手段が等しく良いと思われる場合に分岐が可能なように検索を構成すること、検索ツリーを確実に刈り込める構造特性を見つけること、計算効率のために可能な限り局所特性を使うこと、その役割において信頼できるという良い証拠なしに停止基準として統計検定に依存しないことなどが、統計検索のモラルとして明らかです。

統計的検索は、検索の目標が明確でなければ、十分な評価ができません。私たちは、社会的、医学的、心理学的な統計の利用において、その目標はしばしば因果関係の影響を発見し推定することだと考えています。検索に対する最終的なモラルは単純である。目標が明確かつ率直に示されれば、信頼性の理論的正当化が短期的にも長期的にも不可能な場合、コンピュータは制御された条件下で信頼性を実験的に検証する機会を与えてくれる。

## 第12章

### オープンな問題

この本の中で、多くの疑問が提起され、答えが出されていない。その最たるものが、探索アルゴリズムの信頼性と情報性の拡張に関する問題である。その他、重要と思われる多くの問題をここに記録する。問題や疑問の中には、非常に簡単なもの、あるいは、既に得られているけれども私たちには知られていない結果から導かれるものもあるかもしれない。また、私たちや他の人が以前から取り組んでいて、かなり難しいと思われるものもあります。また、特に難しいわけではないが、私たちが行っていない作業を必要とするものもある。どの問題も、因果構造と確率の関係、因果関係の推論と予測の可能性についての理解を深める上で重要であると思われる。

#### 12.1 フィードバック、互恵的因果関係、環状グラフ

$A$ 事象が $B$ 事象を引き起こし、 $B$ 事象が $A$ 事象を引き起こす集団において、 $A$ と $B$ を変数として扱うことで、「逆因果」が発生することがある。例えば、体積を一定に保ったまま温度を操作してその状態を得たものと、温度を一定に保ったまま体積を操作してその状態を得たものがある理想気体のサンプルの集団があるとする。このよう

な場合、研究対象の集団は、本書で使用されている意味での混合物である。このようにすべての因果関係が「相互」である場合、このような集団にPCアルゴリズムを適用すると、一般に完全グラフが得られ、FCI手順を適用すると、一般に各辺の両端に「 $\circ$ 」が付いた完全グラフが得られる。興味深いのは、サイクルを持つグラフが、すべての変数ではなく、いくつかの変数が互いを引き起こす因果系を有用に表現できるかということである。

多くのアプリケーションにおいて、統計モデルは、ある変数 $X$ が $Y$ と他の変数の関数として指定され、逆に $Y$ が $X$ と他の変数の関数として指定される連立方程式、通常は線形で作成されます。このようなモデルは



題  
標準的には "non-recursive "と呼ばれる。これは、関連する数学的構造が代数と確率だけでは与えられず、有向グラフ関係、この場合はサイクルを持つグラフを含むことを明確に示すものである。周期的なグラフは明示的に与えられることもある。現代の認知科学では、人間がどのように計算を行うかについてのあるモデルが、関連した構造を持っている。これらの理論では、計算が、ランダム変数（場合によっては離散値のみをとる変数）をノードとする環状有向グラフによって行われる。

これらの数学的構造は、フィードバックを持つシステム間の因果関係と、そのようなシステムの変数間の「平衡」確率関係の両方を表すことを何らかの形で意図しています。それが何を意味するかは不明であるが、本節の目的の一つは、この問題を少し明らかにすることである。因果過程と確率分布の非周期的表現について先に述べた表現、区別不能、推論に関する分析を、周期的な場合にも拡張する必要がある。

### 12.1.1 メイソンの定理

各式が他の誤差項とは独立であると仮定された「誤差項」を伴う線形連立方程式系では、各変数 $X$ は様々な誤差項のみの関数であることを代数は内包している。このような方程式において、ある変数 $X$ に対して生じる誤差項と線形係数の組み合わせは、 $X$ が発生するサイクル、 $X$ を含むサイクルの変数が発生するサイクル、これらの隣接するサイクルの変数が発生するサイクル等に依存する。約40年前、Samuel Masonは、環状グラフの各変数がエラー変数と線形係数にどのように依存するかについて、完全にグラフの特性という観点から一般的な分析を行った。サイクリックグラフに関連する任意の線形システムに対して、変数に対するメイソンの公式を用いて適切



な期待値を取ると、連立方程式系に含まれる相関が得られます。つまり、一次方程式の場合、環状グラフがどのような場合に消失相関や部分相関を線形に含意するかについて、いくつかの情報を与えてくれる理論が開発されているのです。有用なレビューと参考文献はHeise (1975)を参照されたい。

Masonの結果によって、線形ケースを利用して、環状グラフが時系列の「均衡」や「限界」の結果の表現としてどのように解釈できるか、マルコフ条件、因数分解、忠実性、d分離可能性が環状グラフにとって賢明な条件か情報量の多い条件かどうかを調べることができる。

## 12.1.2 時系列グラフと周期的グラフ

循環型グラフィカルモデルは、フィードバックプロセスから生じる均衡を表現するものであるため、そのようなモデルはそれぞれ、あるクラスの時系列モデルの限界分布に対応していなければならない。その対応とは何だろうか？ 簡単なケースを考えてみよう：

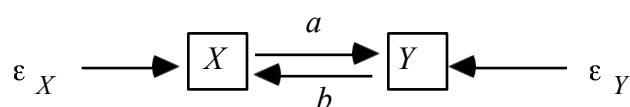


図1

という方程式があります。

$$Y = aX + \varepsilon_Y$$

$$X = bY + \varepsilon_X$$

となり、Masonの法則によ

り

$$\gamma_{XY} = \frac{a\sigma_{\varepsilon_X}^2 + b\sigma_{\varepsilon_Y}^2}{(1-ab)^2}.$$

時系列を考える

$$X_t = bY_{t-k} + \varepsilon_{Xt-m}$$

$$Y_t = aX_{t-j} + \varepsilon_{Yt-n}$$

ここで、すべての $t$ について $\varepsilon_{Xt-m}$ はi.i.d.であり、すべての $t$ について

$\varepsilon_{Yt-n}$ はi.i.d.である。簡単のため、 $k = m = j = n$ とする。

= 1.対応する有向グラフの有限セグメントを

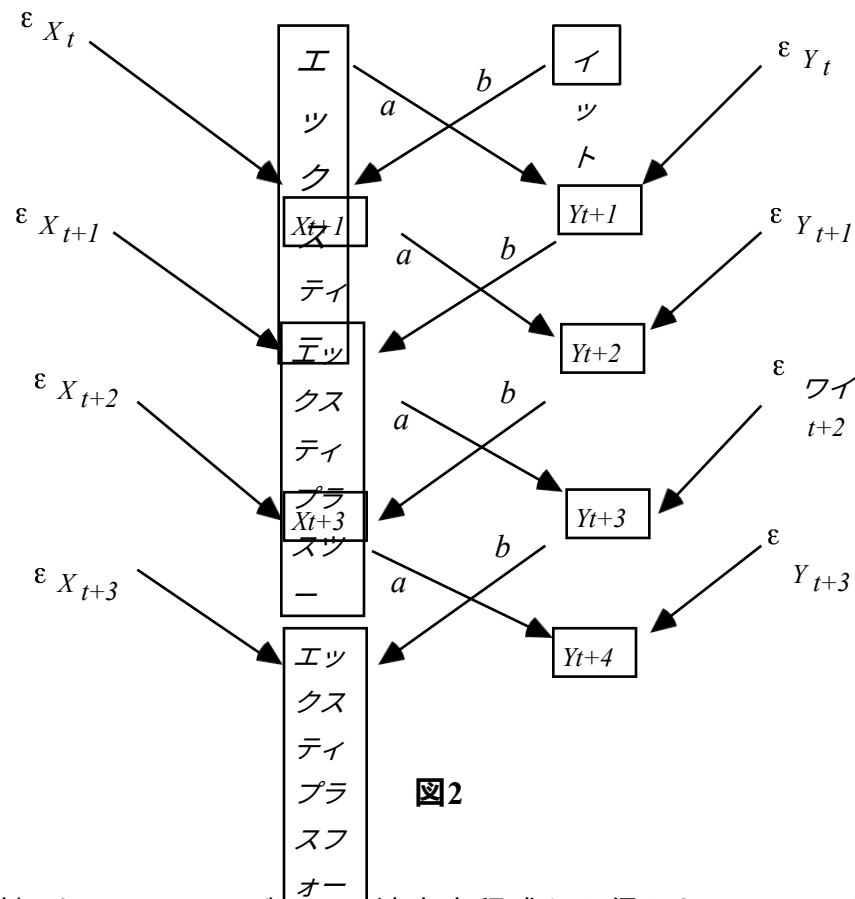


図2

$t$ が無限に増加すると、このグラフは連立方程式から得られる $X$ と $Y$ の相関に関するMasonの公式を与える。 $X$ と $Y$ の変数が一定であれば、 $X$ と $Y$ の分布に関するMasonの式も得られる。もちろん、ある有限の時間に $X$ と $Y$ の変数の値（または分布）が変化しても、その後は同じであれば、同じ限界が生じます。

また、 $X$ と $Y$ が平衡状態にあるシステムに対する変化を表す「ショック」モデルもある。このモデルによれば、各個人について $X_0$ と $Y_0$ はある任意の初期値を持ち、 $X$ と $Y$ は時間 $t$ に導入されたシステムに対する変化を（ $X_0$ 、 $Y_0$ 、および互いに独立して）表す。

$$X_1 = X_0 + \varepsilon_X$$

$$Y_1 = Y_0 + \varepsilon_Y$$

$$X_t - X_{t-1} = b(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

$$Y_t - Y_{t-1} = a(X_{t-1} - X_{t-2})$$

オープンな問

後者の2つの式は、循環型に書くことができます：  
題

$$\Delta Y = a \Delta X$$

$$\Delta X = b \Delta Y$$

Masonの公式は、 $X$ と $Y$ の新しい均衡値、 $X_e$ と $Y_e$ をそれぞれ次のようにすることを意味している：

$$\begin{aligned} X_e &= X_0 + \frac{aX + b\epsilon_Y}{1-ab} \\ Y_e &= Y_0 + \frac{bY + a\epsilon_X}{1-ab} \end{aligned}$$

$X$ と $Y$ の共分散がゼロであれば、 $X$ の共分散の変化 $\Delta_{XY}$ は、次のようになります。

$Y$ 、「ショック」の結果、次のような形になる：

$$\Delta_{XY} = \frac{a\sigma_{\epsilon_X}^2 + b\sigma_{\epsilon_Y}^2}{(1-ab)^2}$$

図3は、対応する有向グラフの有限セグメントを描いたものである。

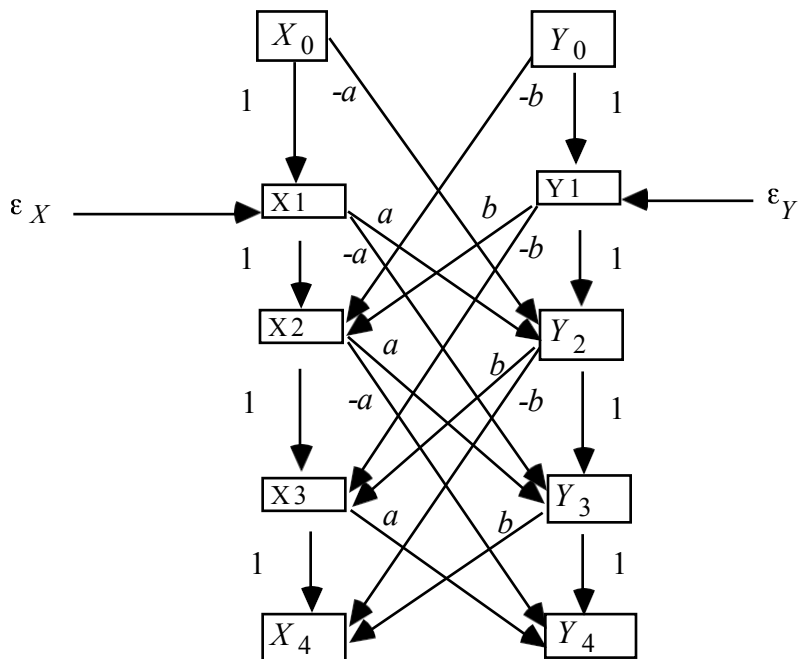


図3

その他の表現も可能です。

### 12.1.3 マルコフ条件、因数分解可能性、忠実性

マルコフ条件は、環状グラフでは理にかなっているが、情報量が少ないかもしれない。グラフを考えてみましょう：

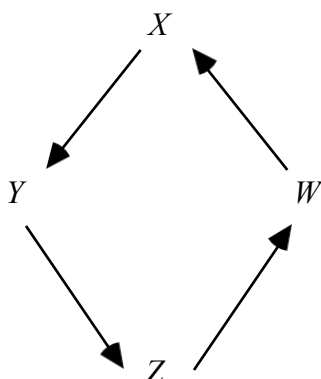


図4

マルコフ条件は、各変数が他の変数の子孫であるため、4つの変数の間に独立性や条件付き独立性の関係を伴わない。しかし、関連する無向独立グラフは、2つの条件付き独立の主張を表している： $X \perp\!\!\!\perp Z \mid \{Y, W\}$ と $Y \perp\!\!\!\perp W \mid \{X, Z\}$ である。さらに、 $X, Y, Z, W$ のそれぞれに隣接する誤差変数を導入し、誤差を独立に扱い、各変数をその誤差項と親の一次関数として書くと、 $Y, W$ を制御する $X, Z$ の偏相関は消え、 $X, Z$ を制御する $Y, W$ の偏相関も消えます。

非周期的な場合、マルコフ条件は、d-分離が条件付き独立を意味するという条件と本質的に等価である。先ほどの例は、d-分離可能条件がより有益である環状グラフでは、この等価性が得られないことを示している。図4から得られる消失部分相関は、まさにd-分離が条件付き独立を意味すると仮定した場合に得られるものであり、線形の場合には消失部分相関となる。さらに

**定理12.1:** 有向グラフ（環状または非環状）において、 $A$ と $B$ が $C$ によって $d$ 個に区切られる場合

$G$ は、 $C$ を制御する $A, B$ の偏相関が消滅することを線形に含意している。

これらの結果は、次のような推測を示唆するものである。

**題 仮説1:** 有向グラフ（環状または非環状）において、AとBが集合Cによってd個に区切られる場合

$G$ は、Cを制御するA,Bの偏相関が消滅することを線形に含意している。

この推測は、前節の環状グラフの時系列モデルへの変換がd-separationの形式を保存しているという考察から支持される。有限の環状グラフにおいて、AとBがCによってd-separationされているとすれば、無限の非環状時系列グラフにおいて、すべての $A_t$ と $B_{t+k}$ はCの変数の出現によってd-separationされており、対応する偏相関は極限において消滅すると予想されます。この予想が正しいとすれば、離散変数のグラフにおいて、d-separationは条件付き独立を伴うという慣例を採用する強い根拠となる。

非周期的な場合とは異なり、正分布の場合、 $G$ で表される分布が、 $G$ における親を与えられた各変数の条件分布の積として書けることは、このことから導かれない。 $G$ は $X$ と $Y$ に対する任意の分布を表している。しかし、密度 $f$ が以下を満たす場合

$$f(XY) = f(X|Y)f(Y|X)$$

とすれば、右辺の条件密度の定義を書き出すだけで、 $X$ と $Y$ は独立であることがわかる。(線形モデルにおいて、 $X$ と $Y$ を含むサイクルは、 $X$ が $Y$ の線形関数であり、 $Y$ が $X$ の線形関数であるという慣例を採用する場合、 $X$ と $Y$ が無相関であることを含意しないことに注意)。

#### 12.1.4 ディスカバリー・プロシージャ

**公開課題1:** 測定された変数セットが因果的に不十分で、フィードバックがある可能性がある場合に、グラフ構造を推論するための計算上実現可能なアルゴリズムを見つけること。



## 12.2 識別可能な関係

d-separationは条件付き独立を意味する、という慣例をとりあえず仮定しておく。非周期グラフの場合、忠実性の条件は逆と等価である：もし $A$ と $B$ が $C$ 上で条件付き独立であれば（あるいは、線形の場合は消える偏相関を持つ）、 **$C$ は $A$ 、 $B$ をd-separateする**。同様に、私たちは「忠実性」を、分布における条件付き独立の事実とグラフにおけるd-分離の事実を結びつける原理として理解しています。

これらの仮定と慣例により、忠実条件は非循環グラフだけでなく循環グラフでも理解できるようになり、第4章の忠実区別不能（f.i.）の定義が循環グラフにも及ぶ。有向グラフの循環経路が**コードレス**であるのは、循環経路の各変数 $V$ に対して、 $V$ から外へ出て循環経路の別の変数に入る有向辺が多くても1つである場合に限られるとする。

**仮説2：**長さ4以上のコードレス有向サイクルを持つ有向環状グラフが、同じ頂点セット上の有向無向グラフと忠実に区別できないことはない。

サイクリックグラフを持つ連立方程式があると、Masonの定理により、各変数が外因性変数の関数であり、対応するグラフが非サイクリックである「等価」方程式系を書くことができます。しかし、外生変数には誤差項が含まれるため、非周期的なモデルには測定不能な共通原因が存在することになる。第4章では、因果的に十分な変数集合に対してのみ、区別不能関係を定義した。したがって、最初の問題は、「等価」が何を意味するのかを正確に言うことである。

定義 $G$ と $H$ を有向グラフとし、 **$O$** を両グラフの頂点集合の部分集合とする。 $G$ と $H$

オープンな問

題 **が $\mathcal{O}$ 上で忠実に区別できないのは、 $G$ に忠実なすべての分布に対して、同じ $\mathcal{O}$ マ**

ージンを持つ $H$ に忠実な分布が存在する場合のみであり、その逆も同様である。

**$\mathcal{O}$ 上の線形忠実区別不能の並列定義**は明らかである。さて、Masonの定理を環状グラフに適用して得られる非環状モデルは、一般に環状モデルと線形に忠実な区別がつかないだろう。したがって、図4において、各変数に外乱項を与えると、Masonの法則を適用して、各測定変数が各測定外乱の関数であるモデルが得られ、それに対応するグラフが得られる：

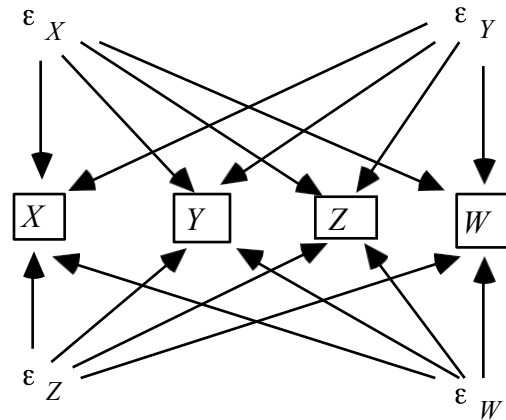


図5

図5のグラフは、図4のグラフが必要とする条件付き独立性を内包しておらず、したがって2つのグラフは $\mathbf{O} =$

$\{X, Y, Z, W\}$  とする。図5のグラフは、図4の誤差変数の線形係数と分布の任意の選択に対して、図5の変数の線形係数と分布の選択が存在し、 $\mathbf{O}$ 上で同じ分布を生成する $\varepsilon$ という弱い意味においてのみ、図4のグラフと $\mathbf{O}$ 上で区別がつかない。しかし、 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 、 $W$ 間の条件付き独立関係は、図4のモデルでは線形係数の小さな変動で安定するが、図5のモデルで安定することはない。

There are cases in which acyclic graphs are faithfully indistinguishable from cyclic graphs. For example graphs 1 and 2 in figure 6 are faithfully indistinguishable.

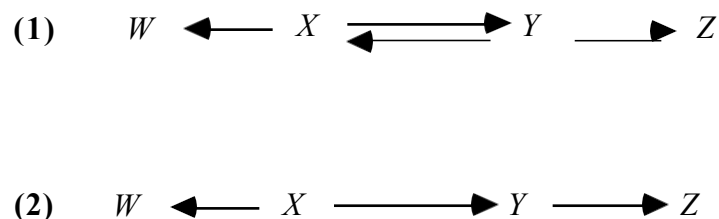


図6

一方、図7のグラフは、同じ頂点セット上のどの非周期グラフとも忠実に区別がつかない。しかし、未測定の共通原因を持つ非周期的グラフとは忠実に区別がつかない



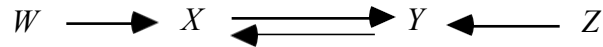


図7

**仮説3:** 長さ2以上の有向サイクルを持たない有向グラフは、場合によっては余分な頂点を持つ無向グラフと忠実に見分けがつかない。

**公開課題2:** 頂点の部分集合 $O$ を共有する2つの有向無サイクルグラフが、 $O$ 上で忠実に区別できないための必要十分条件を与える。

**公開課題3:** 頂点の部分集合 $O$ を共有する2つの有向グラフ（環状または非環状）が $O$ 上で忠実に区別できないための必要・十分条件を与える。

**公開問題4:** 頂点の部分集合 $O$ を共有する2つの有向無サイクルグラフが、 $O$ 上で線形忠実区別不能であるための必要十分条件を与える。

**公開問題5:** 頂点の部分集合 $O$ を共有する2つの有向グラフ（環状または非環状）が、 $O$ 上で線形に忠実に区別できないための必要十分条件を与える。

### 12.3 時系列とグレンジャー因果関係

計量経済学者は、同じ変数を不連続に測定したデータを扱うことが多い。このようなデータからの推論を線形回帰の問題に還元するために、さまざまな手法が開発されてきた。各系列を差分して定常性の近似を作り、異なる時刻に得られた値を同じ集団からのサンプルとみなすことができる。(確率過程は、すべての時点 $t$ とすべての時間ラグ $k$ について、 $z_t$ の結合分布が $z_{t-k}$ の結合分布と同じであれば、**厳密に定常**であ

オープンな問

ると言われる)。線形性を近似し、自己相関を減らすために、変数を変換したり、  
題

データを「フィルタリング」することがあります。

このようなサンプルのユニット  $t$  に関連する特性は、 $t$  における変数  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  の値  $x_t$ 、 $y_t$ 、 $z_t$  だけでなく、これらの変数が各  $k$  について時刻  $t-k$  で持っていた値、つまり  $X_{t-k}$ 、 $Y_{t-k}$ 、 $Z_{t-k}$  である。そして、関心のある結果変数、例えば  $Y$  を  $Y_{t-k}$ 、 $X_{t-k}$ 、 $Z_{t-k}$  に回帰する、

ただし、ラグの選択は原則的に各系列で異なってもよい。このような回帰モデルの因果関係を図8に示すが、誤差項は省略されている：

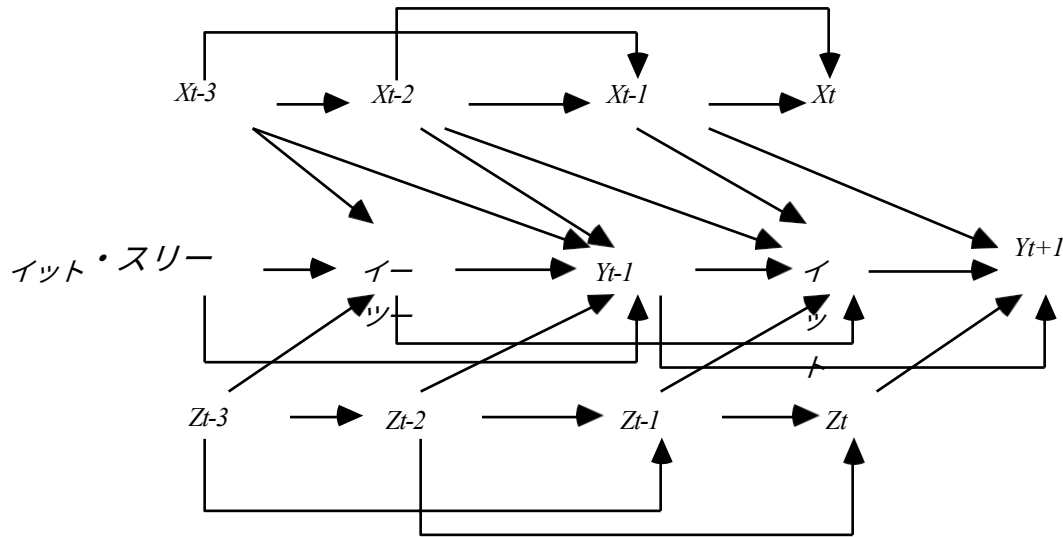


図8

この場合の回帰式は、 $Y_t$ をラグ  $Y_{t-1}$ ,  $Y_{t-2}$ ,  $X_{t-1}$ ,  $X_{t-2}$ ,  $Z_{t-1}$ と誤差項の関数として指定する。 $X$ の $Y$ への影響は、例えば、 $Y$ ラグと $X$ ラグの部分相関の消失の検定、 $Y$ ラグと $Z$ ラグの制御、または $X$ ラグに関連する線形係数の消失の同時検定によって推定される（Geweke, Meese and Dent, 1983）。複数の系列がある場合、系列変数間の影響を選択するために、ステップワイズ回帰が推奨され、使用されている（Hsiao, 1981）。

時系列間の因果関係の概念に関するGranger（1969）の説明は、計量経済学において、回帰手順が因果関係の妥当な推定値をもたらすという見解を正当化するために用いられることがある。Grangerは、時系列が定常であると仮定し、 $P_t(A|B)$ で表す。

"値 $B_t$ の集合を用いた $A$ の最適、不偏、最小二乗予測器"とし、予測誤差を $\varepsilon_t(A|B) = A_t - P_t(A|B)$ , 分散 $\sigma^2(A|B)$ で表しています。"時間 $t-1$ 以降に蓄積された宇宙のすべての情報を $U_t$ とし、特定系列 $Y_t$ を除いたこのすべての情報を $U_{t-Y}$ とする。"(p. 428) 彼の定義は、 $\sigma^2(X|U) < \sigma^2(X|U-Y)$  ならば $Y$ は $X$ を引き起こすというもので、 $U-Y$ は $Y$ 系列の情報がない以前の $U$ 情報であり

オープンな問

また、Grangerは、虚数集合 $U$ の代わりに、すべての「関連」情報の集合を使用する  
題

ことを提案している。

経済学的時系列における因果関係を推定するための回帰手続きは、通常、線形最小二乗推定量を最適とし、Grangerの提言を実現するものである。



関連する」変数が先験的に知られているか、ステップワイズ回帰によって決定されること。Grangerの定義には異論があるかもしれないが、時系列データから因果関係を推論する一般的な方法に関する根本的な問題は、これらのさらなる仮定にあるようだ。因果関係の影響を判断する手段としての回帰の問題は、時系列研究においても、他の場所と本質的に同じであるように思われる。まず、回帰パラメータの検定は、自由度を浪費するが、小さなサンプルでは代替案に対する検出力が犠牲になる。多くの場合、オブザベーションの数はパラメータの数と同程度であるため、信頼性を高めるためにできることは何でもする必要がある。第二に、時系列の設定は、依存性の方向やエッジに関する曖昧さを取り除くが、結果と回帰因子の測定されていない共通の原因に関する問題を改善しないので、漸近的に回帰しても、結果の直接原因でも間接原因でもない変数について有意な係数をもたらすことがあるようだ。しかし、これらの指摘は完全に非公式なものであり、それゆえ次のような未解決の問題がある：

**公開問題6：**本書の手法は、定常時系列間の因果関係にも及ぶか？

## 12.4 同一データベースからのモデル指定とパラメータ推定

仕様探索に対する日常的な反論の一つは、そのようなモデルにおけるパラメータ推定値の誤差確率が、もはや従来の公式では与えられないということである。

Freedman, Navidi and Peters (1986)は、シミュレーションによって、サンプルデータの関数として指定されたモデルにおけるブートストラップ、ジャックナイフ、クロスバリデーション推定量の平均二乗誤差、平均二乗予測誤差、 $R^2$ の推定値を調べた。

オープンな問

全体として、彼らはクロスバリデーションが最もよく機能するが、特に優れている  
題

わけではないことを発見した。彼らのケースは極端で、各試験で75の変数と100のデータポイントを使用する。変数のサブセットは、有意水準.25の重回帰で有意な回帰因子を選択することによって選択される。

しかし、このシミュレーションは、興味深い問題を提起している。Freedmanらは、シミュレーションで成功基準と推定方法を変えているが、モデル指定の方法は変えていない。(実際、彼らは因果構造に関する事前の仮定がない限り、因果推論には正しくない方法を用いている)。

が作られ、応用では正当化されないことが多い)。パラメータ仮説の検定の誤差確率は、データ点の数とモデルの自由パラメータの数で表されるデータの情報の関数であり、直感的には、モデルの仕様がその情報の一部を使い切ることになる。しかし、すべての仕様探索が同じ方法、同じ程度にデータを使わなければならないわけではない。例えば、真のグラフが疎である場合、これまで説明した方法の多くは、条件付き独立性の低次の検定や、部分相関の消失やテトラドの差の消失の検定しか用いないだろう。

**公開課題7:** PCや他のアルゴリズムで指定されたモデルのパラメータについて、推定値の誤差確率は、サンプルサイズや真のグラフの疎密の関数として、どのように変化するか？

同様の疑問は、消失性四分子差の検定を用いた複数指標モデルの探索手順にも当てはまる。

## 12.5 条件付き独立性検定 (Conditional Independence Tests)

本書の例では、線形関係にあると仮定したほぼ連続的な変数か、離散的な変数のいずれかを使用しているが、両方を使用することではなく、非線形関数形式も使用しない。このような制限の理由は、条件付き独立性の関連する検定が利用できるという、完全に統計的なものである。多くの実証研究は、離散変数と連続変数の両方を測定しており、連続変数は、離散変数の原因とみなされることもあれば、影響とみなされることもある。連続変数が離散変数を引き起こすことがない特別な場合、「条

オープンな問

件付きガウス分布」、つまり連続変数が離散変数の親の値の各ベクトルに条件付き  
題

で正規分布するような共同分布が指示されたグラフ処理が行われてきた。しかし、ロジスティック回帰が適用される多くの例や、多くの心理測定モデルでは、原因は連続的であり、効果は離散的である。条件付き独立性についての信頼できる判断を可能にするために、条件付き独立性の検定のポートフォリオを拡大することは、同様に、因果関係の推論を確実に行うことができるアプリケーションの範囲を拡大することになります。

## 第13章

### 定理の証明

以下、表記上の慣例を採用する。「w.l.g.」は「without loss of generality」、「r.h.s.」は「right hand side」、「l.h.s.」は「left hand side」を略記する。 $R(I, J)$ は $I$ から $J$ への有向パスを表し、 $U$ が $A$ から $B$ への無向パスで、 $U$ 上に $X$ と $Y$ が出現する場合、 $X$ から $Y$ までの $U$ のサブパスを $U(X, Y)$ と表記する。 $T(I, J)$ は、 $\mathbf{T}(I, J)$ のトレックを表す。本章に登場する専門用語のうち、第2章または第3章で定義されていないものの定義は、章に続く用語集に掲載した。

#### 13.1 定理2.1

**定理2.1**  $P(\mathbf{V})$ が正分布であるとき、 $\mathbf{V}$ の変数の任意の順序に対して、 $P$ はその順序に対する $P(\mathbf{V})$ の有向独立グラフのマルコフ条件と最小性条件を満たす。

**証明する。** Pearl (1988)を参照。

#### 13.2 定理3.1

**定理3.1:**  $S$ がLCTであり、 $S'$ が同じ有向無サイクルグラフ、同じ非効率確率変数の集合、各非効率外生変数の同じ分散、 $S'$ の各ランダム係数 $a'_{IJ}$ について、 $E(a'_{IJ}) = S$ における $a_{IJ}$ を持つランダム係数LCTであるとする、偏相関は $S$ において0に等しいのは、それが $S'$ において0となる場合に限る。

線形因果理論 (LCT) を  $\langle R, M, E \rangle, (f, P), EQ, L, Err^{\Omega}$  とする。

- i.  $(f, P)$  は確率空間であり、ここで  $\Omega$  はサンプル空間、 $f$  は  $\Omega$  上のシグマフィールド、 $P$  は  $f$  上の確率分布である。
- ii.  $\langle R, M, E \rangle$  は有向無周期グラフである。  $R$  は  $(f, P)$  上の乱数変数の集合である。
- iii.  $R$  の変数は、共同分布を持っている。  $R$  の各変数は、0でない分散を持つ。  $E$  は  $R$  の変数間の有向辺の集合である ( $M$  は有向グラフで発生するマークの集合、すなわち  $\{EM, >\}$  である)。
- iv.  $EQ$  は  $R$  の確率変数の独立同質一次方程式の一貫した集合であり、  $R$  の各  $X_i$  の正の次数に対して、  $EQ$  には次のような形式の方程式が存在する。

$$X_i = \left( \text{エックスアイ} \sum_{X_j \in \text{Parents}(X_i)} a_{ij} X_j \right)$$

ここで、各  $a_{ij}$  はゼロでない実数であり、各  $X_i$  は  $R$  内にある。これは、  $R$  内の正の次数の各頂点  $X_i$  が、その親のすべて、および唯一の線形関数として表現できることを意味する。  $EQ$  には他の方程式は存在しない。  $a_{ij}$  の非ゼロ値は  $X_i$  の方程式における  $X_j$  の方程式係数である。

- v. 頂点 (確率変数)  $X_i$  と  $X_j$  が外生的である場合、  $X_i$  と  $X_j$  は一対一で統計的に独立している。
- vi.  $L$  は、  $E$  中の各  $e$  に対して、  $\text{head}(e) = X_i$  and  $\text{tail}(e) = X_j$  ならば、  $L(e) = a_{ij}$  となるような領域  $E$  を持つ関数である。  $L(e)$  を  $e$  のラベルと呼ぶことにする。拡張すれば、任意の非循環無向パス  $U$  の辺のラベルの積を  $L(U)$  と表し、  $L(U)$  は  $U$  のラベルと呼ぶ。
- vii.  $R$  の  $S$  にはエラー変数と呼ばれる部分集合があり、それぞれ次数0、外延度1である。ここでは、非エラー変数のみを含むすべてのオーダーの部分相関が定義されていると仮定する。

なお、 $I$ の誤差変数を含まない任意の変数集合を条件とする内生変数 $I$ の分散は、0に等しくない。

**ランダム係数線形因果理論**の定義は、各線形係数がモデル内の他のすべてのランダム変数の集合から独立したランダム変数であることを除いて、線形因果理論の定義と同じである。





ブル

$S = \langle \langle R', M', E \rangle, (, f, P), EQ', L', Err' \rangle$  において、 $S$ の線形係数を $C$ の対応する変数の値として代入し、 $S$ の外因性変数の分散を $V$ の対応する変数の値とした結果 $X$ に等しい、 $C$ と $V$ における変数に対する多項式が存在します。

LCTまたはLCF  $S$ において、変数 $X_i$ が**独立**であるのは、 $X_i$ の次数がゼロである場合（すなわち、その変数に向けられた辺がない場合）であり、そうでない場合は**依存**である。独立の性質は、統計的独立の関係とは全く別物であることに注意してください。どちらの意味で使われているかは、文脈を見れば明らかである。有向無サイクルグラフ $G$ の場合、Indは以下の集合である。

有向無サイクルグラフ  $G$  が与えられたとき、 $D(X_i, X_j)$  は  $X_i$  から  $X_j$  へのすべての有向パスの集合である。LCF  $\langle \langle R, M, E \rangle, C, V, EQ, L, S \rangle$  において、方程式が**従属変数**  $X_j$  の**独立方程式となるのは**、それが  $EQ$  によって暗示されており、 $R$  の変数が独立で RHS 上に現れるのが最大一度である場合に限る。IndaIJ は  $I$  の独立方程式における  $J$  の係数である。

**Lemma 3.1.1:** LCF  $S$  において、 $J$  が独立変数である場合、次のようになる。

$$IndaIJ = \sum_{U \sqsubseteq D(J, I)} L(U)$$

**証明する。** これは、変数  $J$  が変数  $I$  に及ぼす「総効果」を計算するための Mason のルールの特殊なケースである。Glymour et.al. (1987) を参照。

次の2つのレンマは、確率変数の分散と確率変数間の共分散を、他の確率変数間の共分散の観点から計算する方法を示している。これらのレンマの証明は、Freund and Walpole (1980) にある。ここで、以下のように表す。

$I$  と  $J$  の共分散を  $IJ$  とし、 $I$  の分散を  $II$  とする。 $\sigma_I^2$ 、 $I$  と  $J$  の相関を  $\rho_{IJ}$  は、その

$X_i$  と  $X_j$  のような2つの添え字付き変数の相関は、読みやすくするために  $ij$  と書き、偏相関などについても同様に書くことにする。

**レムマ3.1.2:**  $Q$  を共同確率分布を持つ確率変数の集合とすると

$$Y = \sum_{I \sqsubseteq Q} a_{YI} I$$

と

$$Z = \sum_{J \sqsubseteq Q} a_{ZJ} J$$

で

は

$$Y_{YZ} = \sum_{I \sqsubseteq Q} a_{YI} \sum_{J \sqsubseteq Q} a_{ZJ} IJ$$

ーフ

定理3.1.3, 3.1.5, 3.1.7 は定理3.1の証明では使われていないが、後の定理で使われており、本節の他のレンマから容易に導かれるのでここに記載した。

**Lemma 3.1.3:**  $Q$ を共同確率分布を持つ確率変数の集合とすると

$$Y = \sum_{I \in Q} a_I Y_I$$

で  
は

$$\sigma^2 = \sum_{I \in Q} \sum_{J \in Q} a_I a_J \gamma_{IJ}$$

LCF  $S$ において、 $U_X$ は $X$ への有向パスの元となるすべての独立変数の集合である（ $X$ が独立である場合、すべての頂点からそれ自身への空パスが存在するため、 $X \in U_X$ であることに注意する）。LCF  $S$ において、 $U_{XY}$ は $U_X \cap U_Y$ である。

**レマ 3.1.4:**  $S$ がLCFであ

る場合、

$$Y = \sum_{I \in \text{インド}} \text{Ind}_I Y_I$$

と

$$Z = \sum_{I \in \text{インド}} \text{Ind}_I Z_I$$

で

は

$$\gamma_{YZ} = \sum_{I \in \text{インド}} \text{Ind}_I Y_I \text{Ind}_I Z_I^2 \sigma_I$$

**証明する。**  $\text{Ind}$  は独立変数の集合である。 $\gamma_{IJ}$ の場合、 $I, J$ は  
0に等しいことがわかるが、 $I, J$ は

どうよ  $\gamma_{IJ}$ の値を $YZ$ の式のr.h.s.に代入すると、次のようになります。

う

lemma3.1.2から次のことがわかります。

$$(1) \quad \gamma_{YZ} = \sum_{I \in \text{インド}} \text{Ind}_I Y_I \text{Ind}_I Z_I^2 \sigma_I$$

ブル

ーフ

$I$ が $\text{Ind}$ にあるが、 $I$ が $U_{YZ}$ にない場合、 $I$ から $Y$ への有向非循環パスの組は存在しないし  
 $Z$ .レンマ3.1.1により、 $I$ から $Y$ と $Z$ への有向非周期パスの組が存在しない場合、 $Y$ か $Z$   
 のどちらかの独立方程式における $I$ の係数はゼロとなる。つまり、式1のゼロでない  
 項は、 $I \in U_{YZ}$ の場合のみである。

**Lemma 3.1.5:**  $S$ がLCFであ

る場合、

$$Y = \sum_{I \in \text{Ind}} \text{Inda}_{YI} I$$

で

$$\sigma_Y^2 = \sum_{I \in \text{Ind}} \text{Inda}_{YI}^2 \sigma_I^2$$

は

$$\sigma_Y^2 = \sum_{I \in \text{Ind}} \text{Inda}_{YI}^2 \sigma_I^2$$

**証明する。**  $\text{Ind}$ は独立な確率変数の集合である。 $I$ が0に等しいのは、 $I \neq J$ ,  
と $I$ は等しい。 $\sigma_I^2$ の式のr.h.s.にこれらの $I$ の値を代入すると、 $I=J$ となる。

$\sigma_Y^2$ を証明するものである。

$$(2) \quad \sigma_Y^2 = \sum_{I \in \text{Ind}} \text{Inda}_{YI}^2 \sigma_I^2$$

$I$ が $\text{Ind}$ にあり、 $I$ が $U_Y$ にない場合、 $I$ から $Y$ への有向パスは存在しない。レンマ3.1.1より、 $\text{Inda}_{YI}$ は0であることがわかる。したがって、式2のゼロでない項は、 $I \in U_Y$ から来るものだけである。

**Lemma 3.1.6:**  $S$ がLCFである場合、

$$\gamma_{IJ} = \sum_{k \in U_{ij}} \sum_{r \in d(k, i)} \sum_{r' \in d(k, j)} \sum_{K} L(R) L(R')^2 \sigma_K$$

**証明する。** これは、レンマ3.1.2と3.1.4から直ちに得られる。

**Lemma 3.1.7:**  $S$ がLCFであ

る場合、

$$\sigma_I^2 = \sum_{k \in U_i} \sum_{l \in d(k, l)} \sum_{K} L(R)^2 \sigma_K^2$$

$\sigma$

$$k \in U_i \quad l \in d(k, l) \quad K$$

**証明する。**これは、レンマ3.1.1と3.1.5から直ちに得られる。

**定理3.1:**  $S$ がLCTであり、 $S'$ が同じ有向無サイクルグラフ、同じ非係数のランダム変数の集合、各外生変数の同じ分散を持つランダム係数LCTであり、 $S'$ の各ランダム係数 $a'_{IJ}$ に対して、 $S$ では $E(a'_{IJ}) = a_{IJ}$ であるとする、偏相関は $S$ では0と同じで、 $S$ では0となるのは唯一その場合のみである。





ブル  
同じになる。  
ニフ

### 13.3 定理3.2

**定理3.2:**  $M$  を  $n$  個の自由線形係数  $a_1, \dots, a_n$  と  $k$  個の正分散  $v_1, \dots, v_k$  を持つ LCF とする。  
 $a_1, \dots, a_n$  と  $v_1, \dots, v_k$  に値  $\langle u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k} \rangle$  を指定することに矛盾しない分布を  $M$  ( $\langle u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k} \rangle$ ) とする。 $M$  のパラメータの値の空間  $\mathfrak{R}_{n+k}$  上の確率測度  $P$  の集合で、ルベーグ測度  $0$  を持つ  $\mathfrak{R}_{n+k}$  のすべての部分集合  $V$  について、 $P(V) = 0$  であるものとする。

のすべての  $P$  について、 $M(q)$  は  $M$  によって線形に暗示されない消失する偏相関を持つ。  
 $\Pi P(Q) = 0$  である。

**Lemma 3.2.1:** LCF  $S$  において、 $_{ij}X = 0$  は、独立変数の線形係数と分散の多項式方程式と等価である。

**証明する。** 部分共分散の多項式は、独立変数の線形係数と分散の多項式と等価であることを、より一般的に証明する。 $X$  が  $n$  個の異なる変数を含むとき、 $_{ij}X$  は次数  $n$  の偏相関であるとする。偏共分散の多項式の  $pc$  次（偏共分散次数）を、その多項式に現れるあらゆる偏共分散の最高次数とする。証明は、多項式の  $pc$ -order に対する帰納法である。

基本ケースです。多項式  $Q$  が  $pc$  次数  $0$  の場合、レンマ 3.1.2 により、 $Q$  は独立変数の線形係数と分散の多項式方程式と等価であることがわかる。

帰納法の場合。 $pc$  次  $n-1$  の多項式に対してレンマが成立するとし、 $Q$  を  $pc$  次  $n$  の多項式とすると、部分共分散に対する再帰式は

$$\gamma_{ij.Y \square r} = \gamma_{ij.Y} - \frac{\gamma_{ir.Y} \gamma_{jr.Y}}{\gamma_{rr.Y}}$$

この再帰式を用いて、 $Q$ に現れる $pc$ 次 $n$ の各共分散を $pc$ 次 $n-1$ の共分散の代数的結合で置き換えることにより、 $Q'$ を形成する。 $Q'$ に $Q'$ のすべての項の最小公倍数を掛けて、 $pc$ -order  $n-1$ の多項式を生成して $Q''$ を形成する。帰納仮説により、 $Q''$ は独立変数の線形係数と分散の多項式方程式と等価である。したがって、部分共分散の多項式は、独立変数の線形係数と分散の多項式と等価である。

### 13.3 定理3.2

定義によると

$$\rho_{ij.X} = \frac{\gamma_{ij.X}}{\sqrt{\gamma_{ii.X}} \sqrt{\gamma_{jj.X}}}$$

後者は部分共分散の多項式であるから、独立変数の線形係数と分散の多項式と等価である。前者も独立変数の線形係数と分散の多項式方程式と等価であることがわかる。

**定理3.2:**  $M$  を  $n$  個の自由線形係数  $a_1, \dots, a_n$  と  $k$  個の正分散  $v_1, \dots, v_k$  を持つ LCF とする。

$a_1, \dots, a_n$  と  $v_1, \dots, v_k$  に値  $\langle u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k} \rangle$  を指定することに矛盾しない分布を  $M(\langle u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k} \rangle)$  とする。  $M$  のパラメータの値の空間  $\mathfrak{R}_{n+k}$  上の確率測度  $P$  の集合で、ルベーグ測度 0 を持つ  $\mathfrak{R}_{n+k}$  のすべての部分集合  $V$  について、  $P(V) = 0$  であるものとする。

のすべての  $P$  について、  $M(q)$  は  $M$  によって線形に暗示されない消失する偏相関を持つ。

$\prod P(Q) = 0$  である。

**証明する。** 任意の LCF について、各偏相関は、線形係数と外生変数の分散の多項式と等価である：分布の残りの特徴は、偏相関に関係しない。したがって、消失性偏相関が理論の有向非周期グラフによって線形に暗示されるためには、線形係数と分散パラメータの対応する多項式が同一に消失することが必要かつ十分である。したがって、LCF によって線形に暗示されない消失性偏相関は、その理論の線形係数と分散からなる変数の多項式  $P$  を表し、その多項式は同値的に消失しない。つまり、  $P$  を満たす線形係数と分散の値の集合は  $\mathfrak{R}_{n+k}$  の代数的多様体である。このような多様体の任意の連結成分はルベーグ測度 0 を持つ。しかし、代数多様体は最大でも有限個の連結成分を持つ (Whitney, 1957)。

**定理3.3**  $P(V)$ は、頂点集合 $V$ を持つ有向非循環グラフ $G$ に対して、頂点 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ のすべての不連続集合に対して、 $X$ と $Y$ が $Z$ を与えられたときに $d$ 分離する場合に限り、 $Z$ を条件として独立である場合にのみ忠実である。

この定理の「もし」の部分はVerma (1986)で、「もし」のみの部分はGeiger and Pearl (1989a)で初めて証明された。ここで作られた証明はかなり異なるが、その大部分は他の定理の証明にも必要な一連のレンマであるため、ここでそれを述べる。

$G'$ は、 $O$ が $G$ の頂点の部分集合であり、 $A$ と $B$ が $O$ にある場合に限り、変数 $A$ と $B$ の間に $A$ に矢尻を持つ辺が存在し、 $O$ に対して $A$ と $B$ の間に $A$ に入る誘導経路が $G$ に存在する場合に限り、**有向無サイクルグラフ $G$ の $O$ 上の誘導経路グラフ**です（第2章の記法を用いて、誘導経路グラフのマークの集合は $\{>, EM\}$ です）。 $O$ の変数を**観測変数**と呼ぶことにする。誘導経路グラフは有向無サイクルグラフと異なり、両頭の矢印を含むことができる。ただし、矢尻のない辺は含まれない。 $G$ 中の $A$ と $B$ の間に $A$ への誘導経路があれば、 $G'$ 中の $A$ と $B$ の間の辺は $A$ に入る。しかし、 $G$ 中の $A$ と $B$ の間に $A$ から外れる誘導経路があれば、 $G'$ 中の $A$ と $B$ の間の辺は $A$ から外れるとは限らない。 $G$ 中の $A$ と $B$ の間に $A$ への誘導経路がない場合のみ、 $G'$ の $A$ - $B$ 間の辺は $A$ から外になる。有向パス、 $d$ -separability、誘導パス、コライダー、祖先、子孫の定義は有向グラフの定義と同じである。すなわち、誘導パスグラフの有向パスは、非循環有向グラフと同様に有向辺（例： $A \rightarrow B$ ）だけを含む。しかし、誘導経路グラフの無向きの経路は、有向の辺か、二向きの辺（例えば、 $C \leftrightarrow D$ ）を含むことができる。また、誘導経路グラフの $A \leftrightarrow B$ の場合、 $A$ は

**13.4 定理3.3**

B. なお、 $G$ を有向無サイクルグラフとし、 $G'$ を $\mathbf{O}$ 上の $G$ の誘導パスグラフとすると、 $G'$ には有向サイクルが存在しない。

レンマ3.3.1では、 $X$ と $Y$ をd-connectする $X$ - $Y$ 間の経路を構成する方法を述べている一連のパスのうち、 $\mathbf{Z}$ を与える。

**Lemma 3.3.1:**  $V$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ （または誘導パスグラフ $G$ ）において、 $X$ と $Y$ が $\mathbf{Z}$ にない場合、 $V$ 中の $X$ から $Y$ への異なる頂点の列 $S$ があり、以下のような無向パスの集合 $T$ が存在する。

7 (i).  $S$ において隣接する頂点 $V$ と $W$ の各ペアに対して、 $Z\{V, W\}$ を与えられた $V$ と $W$ を

d-connectするユニークな無向きのパスが $T$ に存在し、かつ

(ii).  $S$ 中の頂点 $Q$ が $Z$ 中にある場合、 $Q$ を終点とする $T$ 中の経路は $Q$ で衝突し、かつ

(iii).  $S$ にこの順で現れる3つの頂点 $V, W, Q$ に対して、 $T$ のd-connecting pathがある場合

$V$ と $W$ の間で、 $W$ と $Q$ が $W$ で衝突した場合、 $W$ は $Z$ に子孫を持つ、

また、 $X$ を含む $T$ のすべてのパスのエッジが $X$ に入る（入らない）場合、 $U$ は $X$ に入る（入らない）ことになり、 $Y$ についても同様である。

**証明する。** $U$ は、いくつかの頂点を複数回含む可能性があるため、非循環無向パスでない可能性がある。 $U$ からすべてのサイクルを取り除いた結果を $U$ とする。 $U$ の $X$ を含む各辺が $X$ に入る（入らない）場合、 $U$ の各辺は $U$ の辺であるため、 $U$ は $X$ に入る（入らない）ことになる。同様に、 $U$ 内の $Y$ を含む各辺が $Y$ に入る（入らない）場合、 $U$ の各辺は $U$ の辺であるため、 $U$ は $Y$ に入る（入らない）。以下、 $Z$ が与えられたときに $U$ が $X$ と $Y$ をd-connectすることを証明する。

$V$ が配列 $S$ にあり、 $V$ を含む辺が $T$ において $V$ と $S$ における前任者または後任者との間の経路上に存在する場合、与えられた頂点 $V$ を含む $U$ の辺を終点辺と呼び、それ以外の辺を内部辺と呼ぶことにする。

まず、 $U$ 上にある $Z$ のメンバー $R$ はすべて $U$ 上のコライダーであることを証明する。 $U$ 上に $R$ を含む終点辺がある場合、仮定により $R$ を含む $T$ のパスは $R$ で衝突するので $R$ に入る。 $U$ 上の辺が終点 $R$ の内部辺である場合、それは $R$ と等しくない二つの変数 $A, B$ を $Z\{A, B\}$ とするとd接続するパス上の辺なので $R$ には入るが、 $R$ が入るのは

$Z.T$ のパス上のエッジはすべて $R$ に入るので、 $T$ のパス上のエッジのうち

$U$ は $R$ に入る。



次に、 $U$ 上のすべてのコライダー $R$ が $Z$ に子孫を持つことを示す。 $R$ は終点 $X$ または $Y$

### 13.4 定理3.3

のいずれにも等しくないが、これはパスの終点がパスに沿ったコライダーでないためである。 $R$ が $T$ のいずれかの経路上のコライダーである場合、 $Z \setminus \{A, B\}$ を与えられた $R$ と等しくない2つの変数 $A, B$ をd-connectする経路上の辺であるため、 $R$ は $Z$ に子孫を持つ。もし $R$ が2つの端点エッジのコライダーであるならば、仮説により $Z$ に子孫を持つ。このとき、 $U$ は $R$ を含む無向きのサイクルを含む。 $G$ は無周期なので、無向きのサイクルはコライダーを含む。したがって、 $R$ は $U$ 上のコライダーである子孫を持つ。 $U$ 上の各コライダーは $Z$ に子孫を持ち、したがって $R$ は $Z$ に子孫を持つ。



**Lemma 3.3.2:**  $G$ が有向無サイクルグラフ（または誘導パスグラフ）、 $R$ が無向パス  $U$ によって $Z$ を与えられた $Y$ にd-connected、 $W$ と $X$ が $Z$ にない $U$ 上の異なる頂点であるとき、 $U(W, X)$ は $Z = Z \setminus \{W, X\}$ を与えられた $W$ と $X$ をd-connectする。

**証明する。** $G$ を有向無サイクルグラフとし、 $R$ は無向パス $U$ によって $Z$ を与えられた $Y$ にd接続され、 $W$ と $X$ は $Z$ にない $U$ 上の異なる頂点である。 $U(W, X)$ 上の各コライダーは $Z$ に子孫を持つが、これは $U(W, X)$ 上の各コライダーが、 $Z$ を与えられた $R$ と $Y$ をd-connectする $U$ 上のコライダーであるためであり、 $Z = Z \setminus \{W, X\}$ を与えられた $U(W, X)$ は $W$ と $X$ をd-connectすることがわかる。

**Lemma 3.3.3:**  $G$ が有向無サイクルグラフ（または誘導パスグラフ）であり、 $R$ が無向パス $U$ によって $Z$ を与えられた $Y$ にd-connectedであり、 $R$ から $X$ に $Z$ のメンバーを含まない有向パス $D$ があり、 $X$ が $U$ 上にないとき、 $X$ は $X$ に入るパス $U$ によって $Z$ を与えられた $Y$ にd-connectedである。 $D$ が $Y$ を含まない場合、 $U$ が $Y$ に入るのは $U$ が入るときだけである。

**証明する。** $R$ から $X$ への有向パスで $Z$ のメンバーを含まないものを $D$ とし、 $R$ と $Y$ を $Z$ でd結んで $X$ を含まない無向パスを $U$ とする。 $D$ と $U$ の交点で、 $U$ 上で $Y$ に最も近い点を $Q$ とする。 $Q$ は $D$ 上にあるので $Z$ にはない。

$D$ が $Y$ を含む場合、 $Y = Q$ となり、 $D(Y, X)$ は $Z$ が与えられた $X$ と $Y$ をdで結ぶ $X$ へのパスとなります。

は、コライダーも $Z$ のメンバーも含んでいないからです。

$D$ が $Y$ を含まない場合、 $Q \neq Y$ となる。 $X$ は $U$ 上になく、 $Q$ は $U$ 上にあるので、 $X \neq Q$ となる。レンマ3.3.2により、 $U(Q, Y)$ は $Z \setminus \{Q, Y\} = Z$ で $Q$ と $Y$ をd-connectしている。また、 $D(Q, X)$ は $Z \setminus \{Q, X\} = Z$ で $Q$ と $X$ をd-connectする。 $D(Q, X)$ は $Q$ から外れており、 $Q$ は $Z$ に

ブル

ない。レンマ3.3.1により、 $Z$ を与えて $X$ と $Y$ をd-connectする経路 $U$ があり、それは $X$ に

入る。 $Y$ が $D$ 上にない場合、 $U$ の $Y$ を含む辺はすべて $U(Q, Y)$ にあり、したがってレン

マ3.3.1により $U$ は $U$ がある場合にのみ $Y$ に入る。

有向無サイクルグラフ $G$ において、 $ND(Y)$ は、 $(Y)$ の子孫を持たないすべての頂点の集合である。

$Y$

**Lemma 3.3.4:**  $P(V)$ が $V$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ のマルコフ条件を満足する場合、 $S$ は $V$ の部分集合であり、 $ND(Y)$ は $S$ に含まれる、ならば

$$\sum_{S \sqcup V \sqcup V} P(V | \text{Parents}(V)) = \sum_{S \sqcup V \sqcup V} \prod_{V \in S} P(V | \text{Parents}(V)) \prod_{V \in V \setminus S} P(V | \text{Parents}(V))$$

証明する。Sは $S \setminus \text{ND}(Y)$  と  $S \cap \text{ND}(Y) = \text{ND}(Y)$  に分割されうる。 $V$ が $\text{ND}(Y)$ にある場合、 $P(V|\text{Parents}(V))$ の項に現れる変数は $\text{ND}(Y)$ に存在しない。したがって、 $V$ の各 $V$ について $\text{ND}(Y)$ の変数の値に対する和の範囲から $P(V|\text{Parents}(V))$ は削除することができる。

$$(1) \quad \sum_{S \setminus V \setminus V} \prod_{V \in \text{ND}(Y)} P(V|\text{Parents}(V)) = \sum_{V \in \text{ND}(Y)} \prod_{V \in \text{ND}(Y)} P(V|\text{Parents}(V))$$

を示すことにする。

$$\sum_{V \in \text{ND}(Y)} P(V|\text{Parents}(V)) = 1$$

ただし、ある  $S \setminus \text{ND}(Y)$  の値に対して、 $\text{ND}(Y)$  の各  $V$  に対して  $P(V|\text{Parents}(V))$  が定義されるような  $\text{ND}(Y)$  の値の集合が空である場合はこの限りではない。この場合、(1) の L.H.S ではその  $S \setminus \text{ND}(Y)$  の値を含む項は和に現れず、(1) の R.H.S では  $S \setminus \text{ND}(Y)$  に対する和の範囲においてその  $S \setminus \text{ND}(Y)$  の値を含む項はどれも 0 である。

$P(W|\text{Parents}(W))$ を、 $W$ が他の項に出現しない、すなわち $W$ が他のどの変数の親でもないような因数分解中の項とする。 $\text{ND}(Y)$ が空でない場合、 $W$ は $\text{ND}(Y)$ に含まれる。

$$\sum_{S \setminus V \setminus V} \prod_{V \in \text{ND}(Y)} P(V|\text{Parents}(V)) = \sum_{V \in \text{ND}(Y)} \prod_{V \in \text{ND}(Y)} P(V|\text{Parents}(V))$$

ブル  
後者の式は、次のように書くことができます。

$$\sum_{\mathbf{V} \in \mathbf{ND}(\mathbf{Y}) \setminus W} \prod_{V \in \mathbf{ND}(\mathbf{Y}) \setminus W} P(V | \text{Parents}(V)) \sum_{\mathbf{W} \in \mathbf{ND}(\mathbf{Y})} \prod_{W \in \mathbf{ND}(\mathbf{Y})} P(W)$$

なぜなら、 $\sum_{W \in \text{Parents}(W)} P(W|\text{Parents}(W))$  は1に等しいからである。さて、 $\text{ND}(Y) \setminus W$  のある要素は、親ではありません。

$\text{ND}(Y) \setminus W$  の他のメンバーのうち、各要素が  $\text{ND}(Y)$  から削除されるまで、このプロセスを繰り返すことができます。

有向無周期グラフ  $G$  において、 $Y \cap Z = \emptyset$  のとき、 $V$  が  $\text{IV}(Y, Z)$  ( $Z$  を与えられた  $Y$  の情報変数) にあるのは、 $V$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  に  $d$ -connected であり、 $V$  が  $\text{ND}(YZ)$  にはないときだけである。(これは  $d$ -connection の定義により、 $V$  が  $Y \setminus Z$  にはないことを意味する。) 有向無サイクルグラフ  $G$  において、 $Y \cap Z = \emptyset$

図 3.3.5:  $W$  が  $\text{IP}(Y, Z)$  にある ( $W$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  の情報変数である親を持つ) のは、以下の場合のみである。

$W$  は  $Z$  のメンバーであり、 $W$  は  $\text{IV}(Y, Z) \setminus Y$  に親を持つ。

**Lemma 3.3.5:**  $P$  が  $V$  上の有向無サイクルグラフ  $G$  のマルコフ条件を満たす場合、次のようになる。

$$P(Y|Z) = \frac{\sum_{W \in \text{IV}(Y, Z) \setminus Y} \prod P(W|\text{Parents}(W))}{\sum_{W \in \text{IV}(Y, Z) \setminus Y} \prod P(W|\text{Parents}(W))}$$

を、因数分解の条件分布が定義され、 $P(z) \neq 0$  となる  $V$  のすべての値について定義する。

**証明する。**  $V' = \text{VND}(YZ)$ 、すなわち  $V$  のうち  $YZ$  に子孫を持つ部分集合とする。条件付き確率の定義から次のようになる。

$$p(y|z) = \frac{\sum_{W \in \text{VND}(YZ)} \prod P(W|\text{Parents}(W))}{\sum_{W \in \text{VND}(YZ)} \prod P(W|\text{Parents}(W))}$$

ピーゼット

ーフ

レンマ3.3.4により、

$$\frac{\sum_{\mathbf{v} \in V} \prod_{\mathbf{w} \in W} P(\mathbf{w} | \text{Parents}(\mathbf{w}))}{\sum_{\mathbf{v} \in V} \prod_{\mathbf{w} \in W} P(\mathbf{w} | \text{Parents}(\mathbf{w}))} = \frac{\sum_{\mathbf{v} \in V'} \prod_{\mathbf{w} \in W} P(\mathbf{w} | \text{Parents}(\mathbf{w}))}{\sum_{\mathbf{v} \in V'} \prod_{\mathbf{w} \in W} P(\mathbf{w} | \text{Parents}(\mathbf{w}))}$$



まず、分子と分母を因数分解して2つの和の積にできることを示します。分子も分母も第2項は同じなので、相殺されます。分母の場合、次のことを示します。

$$\begin{aligned} & \sum_{V' \leftarrow Z} \prod_{W \in V'} P(W | \text{Parents}(W)) = \\ & \sum_{V'} \prod_{W \in V'} P(W | \text{Parents}(W)) \times \sum_{W \in V'} P(W | \text{Parents}(W)) \prod_{W \in V'} P(W | \text{Parents}(W)) \\ & \text{iv}(y,z) \square y \square \text{iv}(y,z) \square \text{ip}(y,z) \square y \quad v' \not\square (\text{iv}(y,z) \square yz) \square w \square v' \not\square (\text{iv}(y,z) \square \text{ip}(y,z) \square y) \end{aligned}$$

にある場合、 $W$ も $W$ の親も $V' \sim (IV(Y,Z) \square Y)$ に対する和の範囲に含まれないことを示すことにより、 $W \sim (Y,Z) \square IP(Y,Z) \square Y$ の和の範囲に含まれないことを示す、 $Z) \square YZ)$ 、また、 $W$ が $V' \sim (IV(Y,Z) \square IP(Y,Z) \square Y)$ にあれば、 $W$ も $W$ の親も $IV(Y,Z) \square Y$ に対する和のスコープに入らないことを示します。

まず、 $W$ が $IV(Y,Z) \square IP(Y,Z) \square Y$ にある場合、 $W$ は $V' \setminus (IV(Y,Z) \square YZ)$ にないことを証明します。 $W$ が $IV(Y,Z) \square Y$ にある場合、トリビア的に $V' \sim (IV(Y,Z) \square YZ)$ にないことがわかる。 $W$ が $IP(Y,Z)$ にある場合、 $W$ は $Z$ にあるので、 $W$ は $V' \sim (IV(Y,Z) \square YZ)$ にない。

ここで、 $W$ が $IV(Y,Z) \square IP(Y,Z) \square Y$ にある場合、 $W$ の親 $V' \not\square (IV(Y,Z) \square YZ)$ にないことを証明することにする。もし $T$ が $IV(Y,Z) \square IP(Y,Z) \square Y$ にあれば、前のケースと同じになる。次に、 $T$ が $IV(Y,Z) \square IP(Y,Z) \square Y$ に含まれないと仮定する。ここでは、 $T$ が $YZ$ にあることを示す。しかし、 $T$ の子 $W$ は、ある経路 $U$ によって $Z$ を与えられた $Y$ にd-connectedである。 $T$ が $U$ 上にある場合、 $T$ が $YZ$ になれば、仮定に反して、 $T$ は $Z$ を与えられた $Y$ にd-connectedである。 $T$ が $U$ 上になく、 $U$ が $W$ に入らない場合、 $T$ と $W$ の間の辺と $U$ の連結は、 $T$ が $YZ$ にない限り、我々の仮定に反し

ブル

て、 $T$ と $Z$ を与えられた $Y$ にd-connectedとなる。 $T$ が $U$ になく、 $U$ が $W$ にある場合、 $W$ は $IV(Y, Z)$ にあるので、 $YZ$ に子孫を持つことになる。もし $W$ が $Z$ に子孫を持つなら、 $W$ は $T$ と $W$ の間の辺と $U$ の連結上のコライダーであり、 $Z$ に子孫を持つ。したがって、 $T$ が $YZ$ にない限り、仮定に反して、 $T$ は $Z$ を与えられた $Y$ にd連結される。もし $W$ が $Z$ に子孫を持たないなら、 $W$ から $Y \rightarrow Z$ のメンバーを含まない有向パス $D$ が存在する。 $T$ から $W$ への辺と $D$ の連結は、 $T$ が $YZ$ にない限り、我々の仮定に反して、 $Z$ から $T$ と $Y$ をd-連結する。いずれにせよ、 $T$ は $YZ$ にあり、 $V' \setminus (IV(Y, Z) \cup YZ)$ にはない。

次に、 $W$ が $IP(Y, Z)$ にあり、 $T$ が $W$ の親であるとする。

$T$ が $IV(Y, Z) \cap IP(Y, Z) \cap Y$ にある場合、これは以下のようなになる。

前の場合次に $T$ が $IV(Y,Z) \sqcup IP(Y,Z) \sqcup Y$ に含まれないと仮定する。 $R$ が $Y$ にある場合、 $T$ が $YZ$ にない限り、 $R$ から $W$ への辺と $W$ から $T$ への辺の連結により、 $T$ は $Z$ を与えられた $Y$ に連結される。したがって、 $T$ は $YZ$ にあり、 $V'iv(IV(Y,Z))$ にはない。

$\square YZ$ である。 $R$ が $IV(Y,Z)$ にあると仮定する。 $R$ は、ある経路 $U$ によって $Z$ を与えられた $Y$ に $d$ -connectedである。

$T$ が $U$ 上にある場合、 $T$ が $YZ$ にない限り、 $T$ は $Z$ を与えられた $Y$ に $d$ -connectedである。

$W$ が $U$ 上にあり、 $T$ がない場合、 $W$ は $U$ 上のコライダーであり、 $W$ は $Z$ にあるため、 $W$ は $T$ から $W$ への辺と $W$ から $Y$ への $U$ のサブパスの連結上のコライダーでもある；したがって、このパスは $T$ が $YZ$ にない限り $Z$ から $T$ と $Y$ を $d$ -connectする。 $T$ も $W$ も $U$ 上にならない場合、 $T$ と $W$ の間の辺、 $W$ と $R$ の間の辺、 $U$ を連結したものは、 $W$ がコライダーで $R$ がコライダーでない（ $R$ が $W$ の親だから）経路であり、したがってこの経路は、 $W$ が $YZ$ にない限り、 $Z$ を与えられた $T$ と $Y$ を $d$ -connectする。仮説によれば、 $T$ は $IV(Y,Z)$ にないので、 $T$ は $Z$ を与えられた $Y$ に $d$ -connectedではない； $T$ は $YZ$ にあることがわかる。したがって、 $T$ は $V'iv(IV(Y,Z) \sqcup YZ)$ にはない。

最後に、 $W$ が $Y$ にあり、 $T$ が $W$ の親であるとする。 $T$ が $YZ$ にない限り、 $T$ は $Z$ を与えられた $Y$ に $d$ -connectedである。仮説によれば、 $T$ は $IV(Y,Z)$ にないので、 $T$ は $YZ$ にあり、 $Z$ を与えられた $Y$ に $d$ -connectedではない。したがって、 $T$ は $V'iv(IV(Y,Z) \sqcup YZ)$ にはない。

ここで、もし $W$ が $V'iv(Y,Z) \sqcup IP(Y,Z) \sqcup Y$ にあるならば $W$ も $W$ の親も $IV(Y,Z) \sqcup Y$ の和の範囲にないことを逆接で証明します。 $W$ が $IV(Y,Z) \sqcup Y$ にあれば、 $W$ が $V'iv(IV(Y,Z) \sqcup IP(Y,Z) \sqcup Y)$ にないことがトリビア的に成り立つ。 $T$ は $IV(Y,Z) \sqcup Y$ に含まれるが、 $W$ は含まれないとする。 $W$ が $YZ$ にあることを示す。 $T$ が $Y$ にある場合、 $T$ が $YZ$ にない限り、 $W$ は仮定に反して $Z$ を与えられた $Y$ に $d$ -connectedである。もし $T$ が $IV(Y,Z)$ にあれば、 $T$ と $Z$ を与えられた $Y$ を $d$ -connection

ブル

する経路  $U$  が存在することになる。もし  $W$  が  $U$  上にあれば、 $W$  が  $YZ$  がない限り、我々の仮説に反して、 $Z$  を与えられた  $Y$  に d-connected である。 $W$  が  $U$  上にない場合、 $W$  と  $T$  の間の辺と  $U$  の連結は、 $W$  が  $YZ$  がない限り、我々の仮説に反して、 $W$  と  $Z$  を与えられた  $Y$  を d-connect する ( $T$  はコライダーではなく、 $Z$  がないため)。 $W$  が  $YZ$  にあることは次のようになる。もし  $W$  が  $Z$  にいるならば、 $W$  は  $IP(Y, Z)$  にあり、したがって  $V' \setminus (IV(Y, Z) \sqcup IP(Y, Z) \sqcup Y)$  にはない。 $W$  が  $Y$  にある場合、 $W$  は  $V' \setminus (IV(Y, Z) \sqcup IP(Y, Z) \sqcup Y)$  にはない。したがって、逆接により、 $W$  が  $V' \setminus (IV(Y, Z) \sqcup IP(Y, Z))$  にある場合は  $\sqcup Y$  であれば、 $W$  も  $W$  の親も  $IV(Y, Z) \sqcup Y$  の和の範囲には入らない。

分子の証明も基本的に同じである。したがって

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{V' \leftarrow YZ} \prod_{W \in V'} P(W|Parents(W))}{\sum_{V' \leftarrow YZ} \prod_{W \in V'} P(W|Parents(W))} = \\
& \frac{\sum_{iv(y,z) \sqcup y \sqcup w \sqcup iv(y,z) \sqcup ip(y,z) \sqcup y} \prod P(W|Parents(W))}{\sum_{iv(y,z) \sqcup y \sqcup w \sqcup iv(y,z) \sqcup ip(y,z) \sqcup y} \prod P(W|Parents(W))} \times \\
& \frac{\sum_{v' \vdash (iv(y,z) \sqcup yz) \sqcup w \sqcup v' \vdash (iv(y,z) \sqcup ip(y,z) \sqcup y)} \prod P(W|Parents(W))}{\sum_{v' : (iv(y,z) \sqcup yz) \sqcup w \sqcup v' : (iv(y,z) \sqcup ip(y,z) \sqcup y)} \prod P(W|Parents(W))} = \\
& \frac{\sum_{iv(y,z) \sqcup y \sqcup w \sqcup iv(y,z) \sqcup ip(y,z) \sqcup y} \prod P(W|Parents(W))}{\sum_{iv(y,z) \sqcup y \sqcup w \sqcup iv(y,z) \sqcup ip(y,z) \sqcup y} \prod P(W|Parents(W))}
\end{aligned}$$

**Lemma 3.3.6:** 有向無サイクルグラフ  $G$  において、 $V$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  に  $d$ -連結し、 $X$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  から  $d$ -分離する場合、 $V$  は  $XZ$  を与えられた  $Y$  に  $d$ -連結する。

**証明する。**  $V$  が  $XZ$  を与えられた  $Y$  から  $d$ -separated であるが、 $Z$  を与えられた  $Y$  に  $d$ -connected である場合、 $V$  と  $Z$  を与えられた  $Y$  のある  $Y$  を  $d$ -connection する経路  $U$  が存在するが、 $XZ$  は与えられていない。このとき、 $U$  上のある非結合員  $X$  は  $X$  内にあることがわかる。したがって、 $U(X, Y)$  は  $Z$  を与えられた  $X$  と  $Y$  を  $d$ -connect する。

**Lemma 3.3.7:** 有向無サイクルグラフ  $G$  において、 $V$  が  $XZ$  を与えられた  $Y$  に  $d$ -連結し、 $X$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  から  $d$ -分離する場合、 $V$  は  $Z$  を与えられた  $Y$  に  $d$ -連結する。

**証明する。**  $V$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  から  $d$ -分離しているが、 $XZ$  を与えられた  $Y$  に  $d$ -接続しているとする、 $XZ$  を与えられた  $V$  と  $Y$  を  $d$ -接続する経路  $U$  が存在するが、 $Z$  は与

ブル

えられない。  $U$  上のある頂点は  $X$  に子孫を持つコライダーであるが、  $Z$  にはない。  $X$

にある  $Z$  のメンバーを含まない  $X$  への有向パスの元となる  $Y$  に最も近い  $U$  上の頂点を  $C$

とすると、  $C$  は  $Z$  を与えられた  $Y$  に  $d$ -connected である。

$X$ が $U$ 上にない場合、 $C$ から $X$ へは $Z$ のメンバーを含まない有向パスが存在するため、仮定に反して、 $X$ は $Z$ が与えられた $Y$ にd-connectedである。

**Lemma 3.8:** 有向無サイクルグラフ $G$ において、 $X$ が $Z$ を与えられた $Y$ からd分離され、かつ $P$

が $G$ のマルコフ条件を満たす場合、 $X$ は $Z$ が与えられた $Y$ から独立する。

**証明する。**  $X$ が $Z$ を与えられた $Y$ からd分割される場合、 $P(Y|XZ)=P(Y|Z)$ であることを、 $IV(Y,XZ)=IV(Y,Z)$ ,  $IP(Y,XZ)=IP(Y,Z)$ を示すとともにレンマ3.3.5を適用して示すことになる。

$V$ が $IV(Y,Z)$ にあるとする。 $V$ は $Z$ を与えられた $Y$ にd-connectedであり、 $YZ$ に子孫を持つ。したがって、 $V$ は $XYZ$ に子孫を持つ。レンマ3.3.6により、 $V$ は $XZ$ を与えられた $Y$ にd-connectedであることがわかる。したがって、 $V$ は $IV(Y,XZ)$ に含まれる。

次に、 $V$ が $IV(Y,XZ)$ にあるとする。 $V$ が $IV(Y,Z)$ にもあることを示す。 $V$ は $IV(Y,XZ)$ にあるので、 $V$ は $XYZ$ ではなく、 $V$ は $XYZ$ に子孫を持ち、 $XZ$ を与えられた $Y$ にd-connectedである。 $V$ は $XYZ$ にないため、 $XZ$ にはない。もし $V$ が $X$ のメンバー $X$ を子孫に持ち、 $YZ$ のメンバーを子孫に持たないなら、 $V$ から $X$ へ、 $Y$ または $Z$ のメンバーを含まない有向パスが存在することになる。したがって、 $V$ は $YZ$ のメンバーを子孫に持ち、 $IV(Y,Z)$ に含まれる。

$V$ が $IP(Y,Z)$ に入っているとする。 $V$ が $Y$ に親を持つなら、 $V$ は $IP(Y,XZ)$ にある。 $V$ が $IV(Y,Z)$ に親 $T$ を持つ場合、 $IV(Y,Z)=IV(Y,XZ)$ なので、 $T$ は $IV(Y,XZ)$ にある。したがって、 $V$ は $IP(Y,XZ)$ にある。

$V$ が $IP(Y,XZ)$ 内にあるとする。 $V$ は $IP(Y,XZ)$ にあるので、 $V$ は $XZ$ にあり、 $IV(Y,XZ)$

ブル

$\square Y$ に親を持つ。  $IV(Y, XZ) \square Y = IV(Y, Z)$   $\square Y$ であることは既に示しましたが、次 $V$ が $X$ にないことを示します。 $V$ が $X$ にあり、 $Y$ のメンバーを親に持つ場合、仮説に反して、 $X$ は $Z$ を与えられた $Y$ にd-connectedである。 $V$ が $X$ にあり、 $IV(Y, XZ)$ にある $W$ を親に持つ場合、 $W$ は $IV(Y, Z)$ にあります。このことから、仮説に反して、 $X$ は $Z$ を与えられた $Y$ にd-connectedであることがわかる。したがって、 $V$ は $X$ ではなく、 $IP(Y, XZ) = IP(Y, Z)$ となる。

レンマ3.3.5により、 $P(Y|XZ)=P(Y|Z)$ となり、したがって $X$ は $Z$ を与えられた $Y$ から独立である。

**Lemma 3.3.9:** 有向非循環グラフ $G$ において、 $X$ が $Y$ の子孫でなく、 $X$ と $Y$ が隣接しない場合、 $X$ と $Y$ は $Parents(Y)$ でd分離される。

証明する。(これの若干の変形がPearl (1989)に述べられている)。逆に、ある無向きの道 $U$ が、 $Parents(X)$ を与えられた $X$ と $Y$ をd-connectしているとする。もし $U$ が $Y$ に入るのであれば、 $U$ にはある



は、 $\text{Parents}(Y)$ のメンバーであり、非結合員である $X$ と等しくはない。したがって、仮定に反して、 $\text{Parents}(Y)$ を与えられた $X$ と $Y$ をd-connectすることはない。 $U$ が $Y$ から外れている場合、 $X$ は $Y$ の子孫ではないので、 $U$ にはコライダが含まれる。 $U$ 上の、 $Y$ に最も近いコライダを $C$ とする。 $U$ が $X$ と $Y$ をd-connectして $\text{Parents}(Y)$ が与えられると、 $C$ は $\text{Parents}(Y)$ に子孫を持つことになります。しかし、 $C$ は $Y$ の祖先であり、 $Y$ は $C$ の祖先であるから、 $G$ は仮定に反して環状である。したがって、 $\text{Parents}(Y)$ が与えられたとき、 $X$ と $Y$ をd-connectする $X$ - $Y$ 間の無向きのパスはない。

**定理3.3:**  $P(V)$ は、頂点集合 $V$ を持つ有向非循環グラフ $G$ に対して、頂点 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ のすべての不連続集合に対して、 $X$ と $Y$ が $Z$ を与えられたときにd分離する場合にのみ、 $Z$ を条件として独立である場合にのみ忠実となる。

**証明する。** □  $P$ が $G$ に忠実であると仮定すると、 $P$ は以下のマルコフ条件を満たす。  
 $G$ . レンマ3.3.8により、 $X$ と $Y$ が $Z$ でd-separatedであれば、 $X$ と $Y$ は $Z$ の条件付きで独立である。レンマ3.5.8（以下で証明）により、 $G$ のマルコフ条件を満たす分布 $P'$ があり、もし $X$ と $Y$ が $Z$ でd-separatedではないなら $X$ と $Y$ は $Z$ の条件では独立ではないことが導かれる。

$\text{Parents}(V)$ は $V$ を $V$ からdseparate( $\text{Descendants}(V) \setminus \text{Parents}(V)$ )するので、レンマ3.3.9から $P$ は $G$ に対するマルコフ条件を満たすことがわかる。もし、 $Z$ を条件とする $X$ と $Y$ の独立性が $G$ のマルコフ条件に当てはまらない場合、レンマ3.5.8により、 $X$ と $Y$ は $G$ においてd-separatedではなく、 $X$ と $Y$ は $Z$ を条件として独立ではないので、 $P$ は $G$ に対して忠実である。

## 13.5 定理3.4

**定理3.4:**  $P(V)$ がある有向無サイクルグラフに忠実である場合、 $P(V)$ が頂点集合 $V$ を持つ有向無サイクルグラフ $G$ に忠実なのは、以下の場合のみである。

- (i)  $G$ のすべての頂点 $X, Y$ について、 $X$ と $Y$ が、 $X$ または $Y$ を含まない $G$ のすべての頂点集合の条件下で従属する場合にのみ、 $X$ と $Y$ が隣接する；および
- (ii)  $X$ が $Y$ に隣接し、 $Y$ が $Z$ に隣接し、 $X$ と $Z$ が隣接しないようなすべての頂点 $X, Y, Z$ に対して、 $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ は、 $X, Z$ が $Y$ を含み、 $X$ または $Z$ を含まないすべての集合に対して従属条件である場合にのみ $G$ のサブグラフになります。

**証明する。** この定理は、Verma and Pearl (1990b) で最初に証明された定理に従う。

### 13.6 定理3.5

**定理3.5:**  $S$  を非エラー変数の集合  $V$  上の有向非周期グラフ  $G$  を持つ LCT とすると、 $V$  内の任意の2つの非エラー頂点  $A, B$  と  $V \setminus \{A, B\}$  の任意の部分集合  $H$  に対して、 $G$  は、 $A, B$  が  $H$  で  $d$  分離される場合にのみ  $_{AB.H} = 0$  を線形に含意する。

式や方程式  $E$  の**分散形**は、 $E$  のすべての乗算を実行した結果であり、加算、減算、除算がない場合、その分散形は項の和となる。例えば、方程式  $u = (a + b)(c + d)v$  の分散形は  $u = acv + adv + bcv + bdv$  である。LCF または LCT  $T$  において、式が  $ce$  に等しく、 $c$  がゼロでない定数であり、 $e$  が正の整数乗に上げた式係数の積である場合、 $e$  は  $ce$  の**式係数因子** ( $e \cdot c_2 \cdot f \cdot$ )、 $c$  は  $ce$  の**定数因子** ( $c \cdot f \cdot$ ) です。

$V$  上の非周期有向グラフ  $G$  は、 $V$  中の確率変数の不連続集合であるすべての  $X, Y, Z$  について、 $G$  において  $X$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  から  $d$  分離されるならば、 $P(V)$  において  $X$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  から独立であるならば、確率分布  $P(V)$  の**Iマップ**となる。 $V$  上の非周期グラフ  $G$  は、 $V$  中の確率変数の不連続集合であるすべての  $X, Y, Z$  について、 $G$  中の  $Z$  が与えられたとき、 $X$  が  $Y$  から  $d$  分離されないなら、 $X$  は  $P(V)$  中の  $Z$  が与えられた  $Y$  から独立していないなら、確率分布  $P(V)$  の**Dマップ**である。ただし、LCT や LCF で最小 I-map、I-map、D-map をグラフに適用する場合、定義中の量子子は非エラー変数の集合にのみ適用される。

二つの異なる頂点  $I$  と  $J$  の間の**トレック**  $T(I, J)$  は、ある頂点  $K$  から  $I$  と  $J$  にそれぞれ向かう

ブル

、 $K$ でのみ交差する非周期有向パスの無順序対である。IとJは**トレックの終着点**と呼

ばれる。IとJの間のトレック $T(I,J)$ があるとき、 $I(T(I,J))$ は $T(I,J)$ のソースからIへのパ

スを、 $J(T(I,J))$ は $T(I,J)$ のソースからJへのパスを示すことになる。しかし、トレック

の終端は異なるので、トレック内のパスは1つだけ空になることがある。 $T(I,J)$ はIとJ

の間のすべてのトレックの集合であり、 $T(I,J)$ のトレックを表すことになる。

$S(T(I,J))$ はトレック $T(I,J)$ のソース(source)を表す。

以下の2つのレンマの証明は些細なものである。

**Lemma 3.5.1:** 有向無サイクルグラフ  $G$  において、コライダのない無向パス  $V = \langle V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n \rangle$  は、 $\langle V_k, \dots, V_1 \rangle$  と  $\langle V_k, \dots, V_n \rangle$  が  $V_k$  でのみ交差する  $V$  の有向サブパスとなるような頂点  $V_k$  を含む。

したがって、コライダのない各無向パス  $V = \langle V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n \rangle$  に対応するのは、トレック  $T = (\langle V_k, \dots, V_1 \rangle, \langle V_k, \dots, V_n \rangle)$  です。  $V$  が有向パスの場合、パスの一方は空であり、例えば、 $V_k = V_1$  である。

**Lemma 3.5.2:** 有向非周期グラフ  $G$  において、すべてのトレック  $(\langle V_1, \dots, V_n \rangle, \langle V_1, \dots, V_m \rangle)$  に対して、 $\langle V_n, \dots, V_1 \rangle$  と  $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$  を連結したものは  $V_n$  から  $V_m$  へコライダのない無向経路とする。

有向無サイクルグラフにおいて、indegreeが0でないすべての頂点に、indegreeが0、outdegreeが1の頂点から入る辺がある場合、誤差変数を持つと言う。LCT  $S$  の各独立確率変数が正規分布する場合、LCTのすべての確率変数の集合の結合分布は多変量正規分布となる。このようなLCTの確率変数を線形多変量正規分布と呼ぶことにする。次の一連のレンマは、誤差変数を持つすべての有向非循環グラフが、 $S$  に含まれる確率変数の合同分布  $Q$  が線形多変量正規分布となるあるLCT  $S$  に忠実であることを示す。

**Lemma 3.5.3:**  $S$  が有向非周期グラフ  $G'$  と分布  $P$  を持つ非周期多変量正規LCTで、 $V$  が  $S$  の非エラー項の集合、 $G$  が  $V$  上の  $G'$  のサブグラフ、外生変数が共同独立のとき、 $G$  は  $P(V)$  の最小Iマップとなる。

**証明する。** まず、 $V$  を  $S$  の非エラー項の集合、 $G$  を  $V$  上の  $G'$  の部分グラフとする。ま

ブル

ず、 $A$ と $B$ が $V$ 中の別個の変数で、 $B$ が $G$ 中の $A$ の子孫でも $A$ の親でもない場合、 $\text{Parents}(G, A)$ が与えられて $B$ と独立であることを示す。 $A$ は正規分布で、 $A$ や $B$ の親のいずれとも相関がない。 $B$ は分布が正であるため、 $\text{Parents}(G, A)$ の線形関数ではない。したがって、 $A$ を $\text{Parents}(G, A)$ 、 $B$ 、 $A$ の一次関数と書くと、これは $A$ の回帰モデルである。このような式における $B$ の係数は0である。このような $A$ の一次方程式における $B$ の係数は、 $A$ と $B$ が $\text{Parents}(G, A)$ の条件で独立である場合にのみ、ゼロとなる。(Whittaker1990.参照)。したがって、 $B$ は $\text{Parents}(G, A)$ を条件として $A$ から独立である。共同分布は正規分布なので、 $A$ はその親を与えられたその親以外の子孫の集合から独立であることがわかる。したがって、 $G$ は $P(V)$ のI-mapである。

ここで、 $P(V)$ が $G$ の最小条件を満たすことを示す。逆に、 $G$ が $P(V)$ の最小I-mapでないとする。このとき、 $G$ のある部分グラフは $P(V)$ のI-mapであることがわかる。 $G$ と $G_{Sub}$ の唯一の違いは、 $G$ では $X$ が $Y$ の親であるが、 $G_{Sub}$ ではそうではないということである。なぜなら

$\text{Parents}(G_{Sub}, Y) \not\supseteq \{X\}$  とする。=  $\text{Parents}(G, X)$ ,  $Y$ を以下の一次関数として記述した場合。

$\text{Parents}(G_{Sub}, Y)$ ,  $X$ , and  $\frac{\partial}{\partial X} Y$ ,  $X$ の係数は0ではない。しかし、 $X$ は $G_{Sub}$ において $Y$ の親ではなく、また $G_{Sub}$ において $Y$ の子孫でもないので、 $\text{Parents}(G_{Sub}, Y)$ が与えられると、 $X$ と $Y$ はd-separatedであることがわかる。 $G_{Sub}$ は $P(V)$ のI-mapであるから、 $\text{Parents}(G_{Sub}, Y)$ が与えられれば、 $X$ と $Y$ は独立である。しかし、これは $\text{Parents}(G, Y)$ と $Y$ の一次方程式における $X$ の係数が0であることを意味し、矛盾となる。

**Lemma 3.5.4:** 実数変数 $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ の多項式 $Q$ が恒等式でない場合、 $Q$ のあらゆる解 $a$ について、またあらゆる $\epsilon > 0$ について、 $|b - a|$ が成り立つような $Q$ の非解 $b$ が存在する。

$< \epsilon$

**証明する。**  $Q$ の変数の数 $n$ に対する帰納法で証明する。

基本的な場合:  $n = 1$ の場合、 $Q$ の解は有限個しか存在しないので、 $Q$ のすべての解 $a$ についておおよびすべての $\epsilon > 0$ について $|b - a| < \epsilon$ を満たすような $Q$ の非解 $b$ が存在することがわかる。

帰納法の場合:  $Q$ が $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ の多項式方程式であり、 $Q$ が恒等式でなく、レンマが $n-1$ に対して真であるとする。 $Q$ の任意の解 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ をとり、変数 $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ を値 $\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ で固定し、 $Q$ を $X_n$ の多項式方程式 $Q'$ に変換せよ。2つの場合がある。

最初の場合、 $Q'$ は恒等式ではない。したがって、帰納仮説により、 $a_n$ からの距離が $< \epsilon$ である $Q'$ の非解が存在する。この $Q'$ の非解を $a'_n$ とする。すると、 $a' =$

ブル  
 $\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a'_n \rangle$  は  $Q$  の非解であり、  $|a - a'| < \varepsilon$   
 ーフ

2番目の場合、 $Q'$  は恒等式である。 $Q$  を次のような形になるように書き直せ。

$$\sum_m Q_m X_n^m$$

ここで、各  $Q_m$  はせいぜい  $X_1, \dots, X_{n-1}$  の多項式である。

各  $m$  について、式  $Q_m = 0$  は  $n$  未満の変数による多項式である。 $Q'$  を恒等式とすると、 $X_n$  の  
 同じ乗の項を足し合わせると、それぞれの係数が



$X_n$  のべき乗は0である。もし、各  $m$  について  $Q_m = 0$  が恒等式であるならば、 $Q$  も恒等式であり、ある  $m$  について  $Q_m = 0$  は恒等式ではない。この  $m$  の値に対して、帰納仮説により、 $Q_m = 0$  に対する非解  $\langle a'_1, \dots, a'_{n-1} \rangle$  が存在し、 $\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$  からの距離より小さくなる。 $\langle a'_1, \dots, a'_{n-1} \rangle$  を  $Q$  の  $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$  に代入すると、得られる  $X_n$  の多項式は恒等式でない。これは最初のケースに還元される。

**Lemma 3.5.5:**  $G'$  が  $G$  のサブグラフであり、有向無サイクルグラフ  $G$  と分布  $P$  を持つ LCT  $S'$  が  $P$  において  $I, Z \neq \emptyset$  となるように存在する場合、 $G$  と分布  $P$  を含む LCT  $S$  は  $P$  において  $I, Z \neq \emptyset$  となるように存在する。

**証明する。**  $S'$  における Lemma 3.2.1 により、 $I, Z = 0$  は  $S'$  における独立変数の線形係数と分散の多項式方程式と等価であることがわかる。 $S'$  において  $I, Z \neq \emptyset$  となるような  $G'$  を含む LCT  $S'$  が存在するので、この多項式方程式は恒等式ではない。

すべての変数  $J$ ,  $I$  について、 $S'$  における  $I$  の方程式における  $J$  の係数  $c'$  が 0 に等しくない場合、 $S$  における  $I$  の方程式における  $J$  の係数が  $c'$  に等しくなるような有向無サイクルグラフ  $G$  を持つ LCT を  $S$  とする。 $S$  において、 $I, Z = 0$  は、 $S$  における独立変数の線形係数と分散の多項式  $E$  と等価であり、 $G$  にあるが  $G'$  にない辺のラベルがゼロに設定されている場合、 $E$  の多項式は  $E'$  の多項式に等しい。 $G$  にあるが  $G'$  にない辺のラベルが  $E'$  に出現することはない。したがって、 $G$  にあるが  $G'$  にない辺のラベルをゼロ以外の値に設定すると、 $E$  の多項式は  $E'$  にあるすべての項と、場合によってはいくつかの余分な項を含む。多項式における2つの項が、同じ変数を同じ冪に上げたものを含む場合、**同類項であると言おう**。 $E$  に含まれるが  $E'$  に含まれない各項は、 $E'$  のどの項にも現れない線形係数を含み、したがって  $E$  の各追加項は  $E'$  のどの項とも似ていない。

もし  $E$  が恒等式であれば、 $E$  の同類の項の係数の和は 0 に等しくなる。 $E'$  は恒等式ではないので、 $E'$  には係数の和が 0 でないような同類項が存在する。さらに、 $E'$  にない  $E$

ブル

中の唯一の付加項は $E'$ のどの項とも似ていないので、 $E'$ の同類項の係数の和がゼロでなければ、 $E$ 中の同類項の係数の和は同一ゼロでないことがわかる。したがって、 $E$ は同一ゼロではなく、 $S$ において $I, J, Z \neq 0$ となるような $G$ を含むいくつかのLCT  $S$ が存在する。

次のレンマは、部分相関の集合 $Z$ と有向無サイクルグラフ $G$ が与えられたとき、有向無サイクルグラフ $G$ を持つLCTの集合 $S$ を構成することが可能であれば、 $Z$ 中の各 $Z$ が

が $S$ 中のLCTの1つに対して消失しない場合、 $Z$ 中の $Z$ が全て消失しないような有向無サイクルグラフ $G$ を持つ単一のLCTを構築することが可能である。

**Lemma 3.5.6:** 部分相関の集合 $Z$ と有向非周期グラフ $G$ が与えられたとき、 $Z$ 中のすべての $Z$ に対して、 $P$ において $Z \neq 0$ となるような有向非周期グラフ $G$ と分布 $P$ を持つLCT  $S'$ が存在する場合、 $Z$ 中のすべての $Z$ に対して、 $P$ において $Z \neq 0$ となるような有向非周期グラフ $G$ と分布 $P$ を持つ単一のLCT  $S$ が存在します。

**証明する。** 証明は、 $Z$ のカーディナリティに対する帰納法である。

基本ケース:  $Z$ のメンバーが $Z$ だけである場合、仮定により、 $G$ を含むLCT  $S$ が存在する。

$Z = 0$ となるような。

帰納的ケース: レンマが、カーディナリティ $n-1$ の各集合に対して真であると仮定すると、 $Z$ は

であり、 $Z$ の各 $Z_i$ に対して、 $P$ において $Z_i \neq 0$ となるような有向無周期グラフ $G$ と分布 $P$ を持つLCT  $S'$ が存在する。帰納仮説により、 $Z_i \neq 0$ 、 $i = 1 \dots n-1$ となるような有向非周期グラフ $G$ と分布 $P$ を持つLCT  $S$ が存在する。 $Z_i \neq 0$ 、 $i = 1 \dots n-1$ となるような独立変数の線形係数と分散の値の集合を $V$ とする。評価 $V$ は $Z_n$ を0にするかしないかのどちらかである。もしそうでないなら、証明は完了です。もしそうなら、各 $Z_i \neq 0$ 、 $i = 1 \dots n-1$ のまま、 $V$ を少量だけ摂動させて $Z_n \neq 0$ にする方法を示す。

レンマ3.2.1により、 $Z$ の $Z_i$ の偏相関の各々は、 $G$ の独立変数の線形係数と分散の多項式 $Q_i$ と等価である。評価 $V$ の下で $Q_i$ のいずれかの最小の非ゼロ値は、であるとします。レンマ3.5.4により、任意に小さい場合、 $V$ の距離 $\frac{\epsilon}{\delta}$ 以内に $Z_n = 0$ に対する非解 $V'$ が存在する。 $Q_i$ のいずれかにおける可能な最大の変化が以下であるように、十分に小さい  
選ぶ。評価 $V'$ に対して、 $Z_i$

フル  
 $\neq 0, i \in I \sqcup n.$   
 ーフ

エラー変数を持つグラフがある分布  $P$  の D-map である場合、非エラー変数間の依存関係のみを考慮することを思い出してください。

**Lemma 3.5.7:** エラー変数を持つ有向非周期グラフ  $G$  に対して、有向非周期グラフ  $G$  と共同線形多変量正規分布  $Q$  を持つ LCT  $S$  が存在し、 $G$  は  $Q$  の D-map であるようだ。

**証明する。**  $G$  が  $Q$  の D-map であることを示すには、すべての不連続な変数  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  の集合に対して、 $X$  と  $Y$  が  $G$  において  $d$ -分離されていない場合、 $X$  は  $Q$  において  $Z$  を与えられた  $Y$  から独立ではないことを示さなければならない。

の変数がある  $Y \mid Z \text{ if } Y \mid Z$  は、 $X$  中の  $X$  と  $Y$  中の  $Y$  のそれぞれについて、同様に、 $X \perp\!\!\!\perp^X$  様に、 $X$ 、 $Y$ 、および  $Z$  がしたがって、 $X$  と  $Y$  は個々の変数であり、 $X$  と  $Y$  は  $Z$  が与えられたときに独立していない、という形の依存関係記述のみを考慮すればよい。また、線形多変量正規分布では、 $XY \mid Z$  ならば、 $_{XY} \cdot Z = 0$  となる。 $\rho$  したがって、有向非循環グラフ  $G$  と分布  $P$  を持つ LCT  $S$  のうち、 $G$  において  $X$  と  $Y$  が  $Z$  を与えられたときに  $d$  分離しないような各  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  について、 $P$  において  $_{XY} \cdot Z \neq 0$  が存在することを証明すれば十分であり、証明は帰納法によっている。構築されたすべての LCT において、独立確率変数が正規分布していることを仮定する。

基本的な場合。 $Z$  が空である場合、レンマ 3.5.1 により、 $X$  と  $Y$  は、それらを結ぶトレックが存在する場合、 $Z$  を与えられても  $d$  分離されない。 $X$  と  $Y$  の間にちょうど 1 つのトレックが存在するような、有向非周期グラフ  $G'$  と分布  $P'$  を持つサブ LCT  $S'$  を形成せよ。この場合、 $X$  と  $Y$  の間の共分散は、トレックのエッジのラベル（線形係数）の積  $\rho$  にトレックのソースの分散をかけたものに等しいことが Glymour ら（1987）で証明された。これらの量のそれぞれが 0 でなければ、共分散もそうであり、 $P'$  の相関もそうである。レンマ 3.5.5 により、 $S'$  において  $_{XY}$  が同定的にゼロでない場合、有向無サイクルグラフ  $G$  を持つある LCT  $S$  においても同定的にゼロではない。レンマ 3.5.6 により、すべての  $X$  と  $Y$  について、 $X$  と  $Y$  が空集合によって  $d$  分離されない場合  $X$  と  $Y$  との相関がゼロでなく、 $G$  を含んだ LCT が存在する。

帰納法の場合有向非循環グラフ  $G$  と分布  $P$  を持つ LCT  $S$  があり、各  $X$ 、 $Y$ 、および  $X$  または  $Y$  を含まない  $n$  より小さいカーディナリティの各  $A$  について、 $G$  における  $A$  が与えられたときに  $X$  と  $Y$  が  $d$  分離しないように、 $P$  において  $_{XY} \cdot A \neq 0$  となるようにすると、 $Z$  はカーディナリティで

ブル

$n.G$ において $X$ と $Y$ が $Z$ によって $d$ 個分離されていないとすると、 $X$ と $Y$ の間には、コライダのないすべての頂点が $Z$ になく、コライダである $U$ 上のすべての頂点 $V_i$ が、 $V_i$ から $Z$ の変数への有向パス $U_i$ の元であるような無向パス $U$ が存在することになります。

最後に、 $U$ 上のコライダーである2つの変数 $V_n$ と $V_m$ が、交差する有向パス $U_n$ と $U_m$ の発生源である場合、 $U_n$ と $U_m$ の最初の交点を $F$ とする。 $V_n$ から $V_m$ への $U$ のサブパスを $U_n(V_n, F)$ と $U_m(F, V_m)$ のサブパスの連結で置き換え、 $U_n$ と $U_m$ を $U_n(F, Z)$  ( $Z$ は $Z$ 内) で置き換えると、新しいパスは古いパスより衝突者が一つ少なくなる。 $U_i$ のどれもが互いに交差しないか、 $U$ 上にコライダが存在しなくなるまでこの処理を繰り返す。

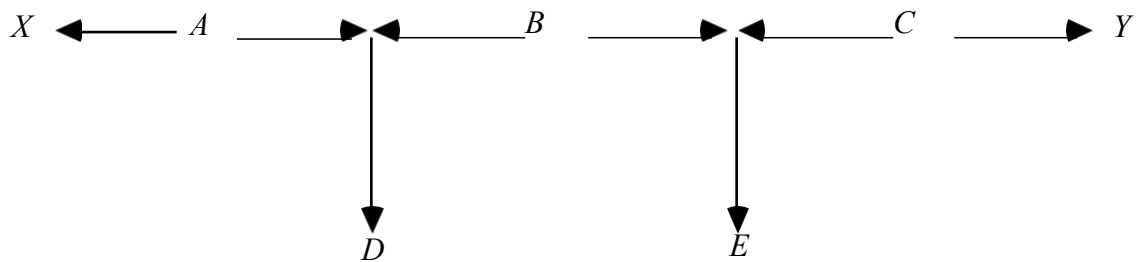
最初の場合、 $U$ はコライダを持つ頂点を含まず、したがって $Z$ の頂点も含まれない。

$Z$ の任意の頂点を $R$ とし、 $W = Z \setminus \{R\}$ とすると、 $W$ に頂点を含まない $X$ と $Y$ の間のトレッキングがある。 $W$ は $X$ と $Y$ を $d$ 分離しないので、帰納仮説により、 $\rho_{XY.W} \neq 0$ となる有向無周期グラフ $G'$ と分布 $P'$ を持つLCTが存在することになる。レンマから次のようになる。

3.5.3  $P'$ において、 $\rho_{XR.W} = 0$ 、 $\rho_{YR.W} = 0$ となるのは、構成上、無向きのものが存在しないためです。

は、偏相関の再帰式により、 $\rho_{XY.W} = \rho_{XR.W} \rho_{YR.W}$ ならば、 $\rho_{XY.W} = 0$ となるが、 $\rho_{XY.W}$ は $P'$ において非ゼロであり、 $\rho_{XR.W} \rho_{YR.W}$ は $P'$ においてゼロである。したがって、 $P'$ において $\rho_{XY.Z} \neq 0$ となる。レンマ3.5.5により、有向非周期グラフ $G$ と分布 $P''$ を持つLCT  $S''$ の中には、 $P''$ において $\rho_{XY.Z} \neq 0$ となるようなものが存在します。

2番目のケースでは、 $U$ はコライダを持つ頂点を含むが、コライダでないすべての頂点は $Z$ に含まれない。図1を参照。



$Z = \{D, E\}$  です。

図1

$U$ 上の $Y$ に最も近いコライダーからの有向パスのシンクである頂点を $E$ とし、 $W = Z \setminus \{E\}$ とする。また、コライダーでないすべての頂点が $W$ に含まれず、コライダーを含むすべての頂点が $W$ に子孫を持つように、 $X$ から $E$ への無向パスが存在する。誘導仮説により、有向無サイクルグラフ $G'$ と分布 $P'$ を持つLCT  $S'$ には、 $P'$ において $\rho_{XE.W} \neq 0$ 、 $\rho_{YE.W} \neq 0$ となるようなものが存在する。

二方、コライダーである各頂点が $Z$ に1つだけ子孫を持つように経路 $U$ が構成され、 $W$ には $E$ が含まれないので、 $X$ と $Y$ は $W$ によって $d$ 分離される。したがって、レンマ3・5・3により $P'$ では $_{XY} . w = 0$ となる。



$\rho_{XY.W} = \rho_{XE.W} \times \rho_{YE.W}$  ならば  $\rho_{XY.W} = 0$  であり、一方  $\rho_{XE.W} \times \rho_{YE.W} \neq 0$  であるからである、

$\rho_{P'}$  において  $\rho_{XY.Z} \neq 0$  となる。レンマ3.5.5により、有向無サイクルグラフ  $G$  と分布  $P'$  を持つ LCT  $S'$  が存在し、 $P'$  において  $\rho_{XY.Z} \neq 0$  である。

$G$  において  $Z$  が与えられたときに  $X$  と  $Y$  が  $d$  分離しないような各三重項  $X, Y, Z$  に対して、有向無サイクルグラフ  $G$  と分布  $P'$  を持つ LCT  $S'$  が存在するので、レンマにより  $P'$  において  $\rho_{XY.Z} \neq 0$  となる。

3.5.6 有向無周期グラフ  $G$  と分布  $P'$  を持つ LCT  $S'$  として、 $G$  において  $Z$  が与えられたときに  $X$  と  $Y$  が  $d$  分離しない各三重  $X, Y, Z$  に対して、 $P'$  において  $\rho_{XY.Z} \neq 0$  となるものがある。レンマ3.5.5と3.5.6で構築したLCTは独立変数の正規性を変えないので、 $S$  における確率変数の結合分布は線形多変量正規である。したがって、 $Q$  が線形多変量正規分布であり、 $G$  が  $Q$  のD-写像であるようなLCT  $S$  が存在する。

**レンマ3.5.8:** 誤差変数を持つすべての有向非循環グラフ  $G$  に対して、 $G$  が  $Q$  に忠実であるような線形多変量正規分布  $Q$  を持つ  $G$  を含む LCT  $S$  が存在することを証明する。これは、レンマ3.5.7と3.5.3から直ちに導かれる。

次の定理は、エラー項を含まない部分グラフから、非エラー変数の集合間の  $d$  分離性関係を求めることができることを示す。

**Lemma 3.5.9:** 有向非周期グラフ  $G$  を持つ非周期 LCT  $S$  において、非エラー変数に関する  $G$  の部分グラフを  $G'$  とする。非エラー変数の3つの不連続な集合  $X, Y, Z$  が与えられたとき、 $G'$  において  $X$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  から  $d$  分離されるならば、 $G$  において  $X$  は  $Z$  を与えられた  $Y$  から  $d$  分離される。

**証明する。** エラー変数が無向パス上に発生する場合、そのエラー変数は無向パスの

ブル  
ソースかシンクのいずれかである。したがって、エラー変数は非エラー変数間のど  
二  
の無向パス上にも発生しない。このことから、 $G$ と $G'$ の非エラー変数間の無向パスは  
全く同じであることがわかる。そして、レンマはd-分離可能性の定義から導かれる  
。

有向無サイクルグラフ $G$ は、 $G$ によって線形<sup>9</sup>に表現されるすべての分布において $_{AB.H}$   
 $= 0$ である場合にのみ、 $_{AB.H} = 0$ を線形に含意します（分布に対してすべての部分相  
 関が存在するとします）。Kiiveri and Speed (1982) は、マルコフ条件とゼロ部分相関  
 間の関連性を明示的に指摘しています。

**Lemma 3.5.10:** 非エラー変数の集合  $V$  と分布  $P(V)$  に対する有向非周期グラフ  $G$  を持つ LCT  $S$  において、 $Y$  が  $X$  と  $Z$  を  $d$  分離する場合、 $S \models_{XZ,Y=0}$  を線形に含意する。

**証明する。**  $Y$  が  $X$  と  $Z$  を  $G$  で  $d$  分離したとする。  $P(V)$  の偏相関の値は、線形係数と独立変数の分散の値によって完全に決定される。  $S$  と同じ線形係数と独立変数の分散を持つ LCT の多変量正規分布  $P'(V)$  を考えるが、この場合、独立変数は正規分布で共同独立である。 レンマ 3.5.3 により、  $G$  は  $P'(V)$  の I マップであり、  $Y$  は  $X$  と  $Z$  を  $d$  分離するので、  $P'(V)$  では  $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$  となる。  $P'(V)$  は多変量正規分布であるから、  $XZ,Y=0$  のときのみ  $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$  となり、  $P'(V)$  では  $XZ,Y=0$  であることがわかる。

**定理 3.5:**  $S$  を非エラー変数の集合  $V$  上の有向非周期グラフ  $G$  を持つ LCT とすると、  $V$  内の任意の 2 つの非エラー頂点  $A, B$  と  $V \setminus \{A, B\}$  の任意の部分集合  $H$  に対して、  $G \models A \perp\!\!\!\perp B \mid H$  である場合、  $S \models_{AB,H=0}$  を線形に含意する。

**証明する。** if 節は Lemma 3.5.10 より導かれる。

唯一の if 節は レンマ 3.5.7 から導かれる。 レンマ 3.5.7 により、  $Q$ 、確率変数の共同分布が線形多変量正規であり、  $G$  が以下の D-map であるような LCT  $S$  が存在する。

$Q, S$  において、  $A$  と  $B$  が  $H$  を与えられて  $d$  分離していない場合、  $A$  と  $B$  は  $H$  を与えられて独立ではなく、  $AB,H \neq 0$  となる。 したがって、  $H$  が与えられたときに  $A$  と  $B$  が  $d$  分離していなければ、  $G \models_{AB,H=0}$  を線形に含意しない。

**公則 3.5.1:** 外生変数が共同独立である LCT  $S = \langle G, (f, P), EQ, L \rangle$  において、  $X$  と  $Z$  が異なる非エラー変数で、  $Y$  が  $X$  と  $Z$  を含まない非エラー変数の集合の場合、  $XZ,Y$  が直線的に消滅することを暗示するなら  $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$ 。

**定理 3.5.2:** LCT  $S = \langle G, (f, P), EQ, L \rangle$  において、  $P$  が  $G$  に忠実で、  $X$  と  $Z$  が異なる非エラー変数で、  $Y$  が  $X$  と  $Z$  を含まない非エラー変数の集合だとすると、  $G \models_{XZ,Y=0}$  を線形に、  $X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$  を含意する。

ブル  
 $Z|Y$ がある場合にのみ  $XZ.Y = 0$  と含意する。  
 プ

### 13.7 定理3.6(操作の定理)

**定理3.6** (操作の定理) : 頂点集合  $V$  を持つ有向非循環グラフ  $G_{Comb}$  が与えられたとき  $V \sqcup W$  と  $G_{Comb}$  のマルコフ条件を満たす分布  $P(V \sqcup W)$  があり、 $W$  の値を  $w_1$  から  $w_2$  に変えることが  $V$  に対する  $G_{Comb}$  の操作であれば、 $G_{Unman}$  は操作されていないグラフ、 $G_{Man}$  は操作されたグラフ、である。

$$P_{Unman}(W)(V) = \prod_{X \sqcup V} P_{Unman}(W)(X | \text{Parents}(G_{Unman}, X))$$

条件付き分布が定義されている  $V$  のすべての値に対して、そのとき

$$P_{Man}(W)(V) = \prod_{X \sqcup (V \cup \text{Manipulated}(W))} P_{Man}(W)(X | \text{Parents}(G_{Man}, X)) \times \prod_{X \sqcup (V \cup \text{Manipulated}(W))} P_{Unman}(W)(X | \text{Parents}(G_{Unman}, X))$$

を、各条件付き分布が定義されている  $V$  のすべての値について定義する。

$G$  が変数  $V \sqcup W$  の集合に対する有向非周期グラフであり、 $V \cap W = \emptyset$  である場合、 $V$  の任意のメンバーから  $W$  の任意のメンバーへの有向辺が存在しない場合のみ、 $G$  において  $W$  はに関して外生的であるとすることができる。

$V \sqcup W$  が  $G_{Comb}$  のマルコフ条件を満たし、 $P(V \sqcup W)$  が  $G_{Comb}$  のマルコフ条件を満たす場合、 $V \sqcup W$  の値を変更することで、 $G_{Comb}$  のマルコフ条件を満たすことになります。

$w_1$  から  $w_2$  への  $W$  は、 $W$  が  $V$  に関して外生的である場合に限り、 $V$  に関して  $G_{Comb}$  の操作であり、 $P(V | W = w_1) \neq P(V | W = w_2)$  である。

$P_{Unman}(W)(V) = P(V | W = w_1)$ ,  $P_{Man}(W)(V) = P(V | W = w_2)$  と定義し、同様に  $P(V)$  から形成される各種限界分布、条件付き分布についても定義する。

ブル

ーフ

$GComb$  を

**combinedgraph** と呼び,  $GComb$  の  $V$  上の部分グラフ

を **combinedgraph** と呼ぶ.

**unmanipulatedグラフ**  $GUnmano$

$V$  が  $Children(W) \cap V$  にある場合に限り、 $V$  は  $Manipulated(W)$  にある（つまり、 $V$  は操作変数の1つから直接影響を受ける変数である）ものとする。

**Manipulated(W)**は、**直接操作**されている。以下、**W**の変数を政策変数である。

**操作グラフ**  $G_{Man}$  は、 $P_{Man}(W)(V)$ がマルコフ条件を満たす  $G_{Unman}$  の部分グラフで、**Manipulated(W)**のメンバーの親が  $G_{Unman}$  と異なるだけである。

定理3.6.1と3.6.2は、定理3.6の先行詞を満たす分布が存在することを示す。

$V$ 上の有向非循環グラフ  $G$  において、 $X$ が **Non-Descendants**( $G, Y$ )に含まれるのは、以下の場合のみである。

$V$ であり、 $G$ には $Y$ のどのメンバーから $X$ への有向パスも存在しない。

**Lemma 3.6.1:** 頂点集合  $V \sqcup W$  上の有向非循環グラフ  $G_{Comb}$  と  $G$  のマルコフ条件を満たす分布  $P(V \sqcup W)$  が与えられたとき、**W**の値を  $w$  から  $w_2$  に変えることが  $V$  に関する  $G_{Comb}$  の操作であり、 $G_{Unman}$  が操作されていないグラフであれば、 $P_{Unman}(w)(V)$  は  $G_{Unman}$  のマルコフ条件を満たしています。

**証明する。**  $P_{Unman}(W)(V)$  は、 $V$  中の各頂点  $V$  について、 $V$  が **Parents**( $G_{Unman}, V$ )  $\sqcap W$  の条件下で **Non-Descendants**( $G_{Unman}, V$ )  $\blacklozenge$  **Parents**( $G_{Unman}, V$ ) から独立していれば  $G_{Unman}$  のマルコフ条件を満足します。逆に  $V$  中のある  $V$  について、 $V$  が **Parents**( $G_{Unman}, V$ ) を条件として **Non-Descendants**( $G_{Unman}, V$ )  $\blacklozenge$  **Parents**( $G_{Unman}, V$ ) に依存するとする。

$\sqcap W.V$  を d-connect する  $G_{Comb}$  のパス  $U$  と、 $V$  を d-connect する  $G_{Comb}$  のメンバー  $X$  が存在することになる。

**Parents**( $G_{Unman}, V$ ) が **W** である場合、**Non-Descendants**( $G_{Unman}, V$ ) は  $U$  上で発生する **W** のメンバーはすべて  $U$  上のコライダーであり、 $U$  は  $X$  と  $V$  を d-connect するので、**Parents**( $G_{Unman}, V$ ) は  $\boxtimes$  **W** 。

したがって、 $G_{Comb}$  の **Parents**( $G_{Unman}, V$ ) を考えると、 $U$  は  $V$  と  $X$  を d-connect していることになる。 $G_{Unman}$  の  $U$  に対応するパスも、**Parents**( $G_{Unman}, V$ ) を考えると  $V$  と  $X$  を d-connect している。しかし、これはレマ3.3.9に矛盾する。

ーフ

**Lemma 3.6.2:** 頂点集合  $V \sqcup W$  上の有向非循環グラフ  $G_{Comb}$  と  $G_{Comb}$  のマルコフ条件を満たす分布  $P(V \sqcup W)$  が与えられたとき、 $W$  の値を  $w_1$  から  $w_2$  に変えることが  $V$  に関する  $G_{Comb}$  の操作であり、操作されていないグラフを  $G_{Unman}$  とすると  $P_{Man}(W)(V)$  は  $G_{Unman}$  のある部分グラフについてマルコフ条件を満たしていることになります。

**証明する。**  $P_{Man}(W)(V)$  が  $G_{Unman}$  のマルコフ条件を満たすことの証明は、レンマ3.6.1の証明と本質的に同じである。 $G_{Unman}$  はそれ自身の（不適切な）サブグラフであるから、 $P_{Man}(W)(V)$  は  $G_{Unman}$  のあるサブグラフに対してマルコフ条件を満たすことになる。



**定理3.6**（操作の定理）：頂点集合**V**を持つ有向非循環グラフ  $G_{Comb}$  が与えられたとき  $\mathbb{W}$  と  $G_{Comb}$  のマルコフ条件を満たす分布  $P(\mathbf{V} \square \mathbf{W})$  があり、**W** の値を  $w_1$  から  $w_2$  に変えることが **V** に対する  $G_{Comb}$  の操作であれば、 $G_{Unman}$  は操作されていないグラフ、 $G_{MAN}$  は操作されたグラフ、である。

$$P_{Unman}(\mathbf{W})(\mathbf{V}) = \prod_{X \square \mathbf{V}} P_{Unman}(\mathbf{W})(X | \mathbf{Parents}(G_{Unman}, X))$$

条件付き分布が定義されている **V** のすべての値に対して、そのとき

$$P_{Man}(\mathbf{W})(\mathbf{V}) = \prod_{X \in \mathbf{Manipulated}(\mathbf{W})} P_{Man}(\mathbf{W})(X | \mathbf{Parents}(G_{Man}, X)) \times \prod_{X \in (\mathbf{V} \text{ Manipulated})} P_{Unman}(\mathbf{W})(X | \mathbf{Parents}(G_{Unman}, X))$$

を、各条件付き分布が定義されている **V** のすべての値について定義する。

**証明する。** 仮定により、 $P_{Man}(\mathbf{W})(\mathbf{V})$  は  $G_{Man}$  のマルコフ条件を満足する。したがって

$$P_{Man}(\mathbf{W}) = \prod_{X \square \mathbf{V}} P(X | \mathbf{Parents}(G_{Man}, X)) \text{ である。}$$

$$\prod_{X \in (\text{エックス}) \square \text{Manipulated}(\mathbf{W})} P(X | \mathbf{Parents}(G_{Man}, X)) \times \prod_{X \in \mathbf{V} \text{ マニピュレート}(\mathbf{W})} P(X | \text{両親}(G_{Man}, X))$$

が存在する **V** のすべての値に対して、条件付き分布が存在する。**W** のメンバは  $G_{Comb}$  の **V** のどの変数の子孫でもないので、 $\mathbf{V} \text{ Manipulated}(\mathbf{W})$  の各  $V$  について、**W** は  $G_{Comb}$  の  $\mathbf{Parents}(G_{Comb}, V)$  で  $V$  から  $d$ -分離されています。 $\mathbf{V} \text{ Manipulated}(\mathbf{W})$  の任意のメンバー  $X$  に対して、 $\mathbf{Parents}(G_{Comb}, X) = \mathbf{Parents}(G_{Unman}, X) = \mathbf{Parents}(G_{Man}, X)$ 。 $P(\mathbf{V} | \mathbf{Parents}(G_{Man}, X), \mathbf{W} = w_2) = P(\mathbf{V} | \mathbf{Parents}(G_{Man}, X)) = P(\mathbf{V} | \mathbf{Parents}(G_{Man}, X), \mathbf{W} = w_1) = P(\mathbf{V} | \mathbf{Parents}(G_{Unman}, X), \mathbf{W} = w_1)$  となることがわかります。したがって

$$P_{Man}(\mathbf{W})(\mathbf{V}) = \prod_{X \square \mathbf{Manipulated}(\mathbf{W})} P_{Man}(\mathbf{W})(X | \mathbf{Parents}(G_{Man}, X)) \times \prod_{X \in \mathbf{V} \square \text{マニピュレート}(\mathbf{W})} P_{Unman}(\mathbf{W})(X | \mathbf{Parents}(G_{Unman}, X))$$

プル

ーフ

を、条件付き分布が定義されている $V$ のすべての値について定義する。

### 13.8 定理3.7

**定理3.7:**  $G$ が $V$ 上の有向非循環グラフ、 $X, Y, Z$ が $V$ の不連続部分集合、 $P(V)$ が $G$ のマルコフ条件と **Deterministic** ( $V$ ) の決定論的關係を満たす場合、 $X$ と $Y$ が $Z$ と **Deterministic** ( $V$ ) 与えられた $D$ 分離であれば、 $X$ と $Y$ は $P$ 中の $Z$ 与えられた独立です。

$G$ は $V$ 上の有向無サイクルグラフであり、**Deterministic**( $V$ )は $V$ の変数の順序付きタプルの集合であるとする。**Deterministic**( $V$ )の各タプル $D$ について、 $D$ が $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$ である場合、 $V_n$ は $V_1, \dots, V_{n-1}$ の決定論的関数であり、 $V_1, \dots, V_{n-1}$ のどの部分集合の決定論的関数でもない。また、 $\{V_1, \dots, V_{n-1}\}$ が $V_n$ を**決定**すると言う。与えられた**決定論的** ( $V$ ) に対して、 $Z$ が $V$ 中に含まれていれば、**Det** ( $Z$ ) は $Z$ の任意の部分集合によって決まる変数の集合となる。

$G$ が $V$ 上の有向無サイクルグラフで、 $Z$ が $V$ に含まれる場合、 $G'$ は $\text{Mod}(G)$ に相対的に含まれる。

**$V$ の各 $V$ について、以下の場合にのみ、**Deterministic**( $V$ )と $Z$ が成立する。**

- (i)  $Z$ に含まれる頂点のうち、 $G$ における $V$ の子孫でないもので、 $V$ を決定するものが存在する場合、**Parents**( $G', V$ )= $X$ 、ここで $X$ は $Z$ に含まれる頂点のうち、 $G$ における $V$ の子孫でないもので、 $V$ を決定するものの集合である；
- (ii)  $Z$ に含まれる頂点のうち、 $G$ において $V$ の子孫でないもので、 $V$ を決定する集合 $X$ が存在しない場合、**Parents**( $G', V$ ) = **Parents**( $G, V$ ) とする。

$G$ が頂点集合 $V$ を持つ有向無サイクルグラフで、 $Z$ が $X$ または $Y$ を含まない頂点集合で、 $X \neq Y$ である場合、 $X$ と $Y$ は、 $U$ 上の各コライダーが $Z$ に子孫を持ち、 $U$ 上の他の頂点

ブル

が  $\text{Det}(Z)$  にないように、 $X$  と  $Y$  間の  $G$  中の無向パス  $U$  が存在する場合にのみ  $Z$  と **決定**  
**論** ( $V$ ) において **D分離する**。さもなければ、 $X \neq Y$  で  $X$  と  $Y$  が  $Z$  にない場合、 $X$  と  $Y$  は  $Z$   
 と  $\text{Deterministic}(V)$  があれば **D-connected** である。同様に、 $X, Y, Z$  が変数の不連続集  
 合であり、 $X$  と  $Y$  が空でない場合、 $X$  と  $Y$  のデカルト積における各対  $\langle X, Y \rangle$  が  $Z$  と  
 $\text{Deterministic}(V)$  を与えられた **D-分離** である場合にのみ、 $X$  と  $Y$  は  $Z$  と  $\text{Deterministic}(V)$   
 を与えられ、その他の場合、 $X, Y, Z$  が不連続で  $X$  と  $Y$  が空でない場合は  $X$  と  $Y$  が  $Z$  と  
 $\text{Deterministic}(V)$  を与えられる **D-接続** されています。

$G$ を $V$ 上の有向無サイクルグラフとし、 $Z$ を $X$ または $Y$ を含まない $V$ の部分集合としたとき、 $X$

$\neq Y$ ,  $X$ と $Y$ が**Deterministic**( $V$ )と $Z$ に対するある $\text{Mod}(G)$ における $Z \boxtimes \text{Det}(Z)$ を与えられて d-separatedか、 $X$ か $Y$ が $\text{Det}(Z)$ にある場合にのみ、 $X$ と $Y$ は $Z$ と**Deterministic**( $V$ )を与えられたdet-separatedであり、そうではない場合  $X \neq Y$  と $X$ および $Y$ が $Z$ 内にない場合は $X$ と $Y$ は $Z$ と**Deterministic**( $V$ )が与えられるdet-connectedです。 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ が $V$ における変数の不連続集合であり、 $X$ と $Y$ が空でない場合、 $X$ のすべてのメンバー $X$ と $Y$ のすべてのメンバー $Y$ が $Z$ を与えられて不連続である場合にのみ、 $X$ と $Y$ は $Z$ を与えられて不連続である；その他、 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ が $V$ における変数の不連続集合で、 $X$ と $Y$ が空でない場合、 $X$ と $Y$ は $Z$ と**Deterministic** ( $V$ ) を与えられて不連続になる。

**Lemma 3.7.1:**  $G$ を、頂点集合 $V$ を持つ有向非循環グラフとし、 $Ord$ を、 $Ord$ において $A$ が $B$ より前にある場合、 $G$ において $A$ は $B$ の子孫でないような $V$ の変数の順序とし、**Predecessors** ( $Ord, V$ ) を $Ord$ において $V$ より前のすべての頂点の集合とし、 $P(V)$ を $V$ 上の分布とする。 $P(V)$ は、 $V$ 中の各 $V$ について、 $V$ が**Parents**( $G, V$ )を与えられた**Predecessors**( $Ord, V$ )  $\setminus$  **Parents**( $G, V$ ) から独立し、**Parents**( $G, V$ )のどの適切な部分集合 $X(V)$ でも、 $V$ が $X(V)$ を与えられた**Predecessors** ( $Ord, V$ )  $\star X(V)$  から独立する場合にのみ $G$ についての最小性とマルコフの条件を満足します。**証明する。** Pearl(1988)を参照。

**Lemma 3.7.2:**  $G$ が $V$ 上の有向非循環グラフで、 $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ が $V$ の不連続部分集合で、 $P(V)$ が $G$ のマルコフ条件と**Deterministic** ( $V$ ) の決定性関係を満たすとき、 $X$ と $Y$ が $Z$ と**Deterministic** ( $V$ ) が与えられたときにdet-分離であれば $X$ と $Y$ は $P$ 中の $Z$ が与えられたときに独立している。

**証明する。** まず、 $\text{Mod}(G)$ の各有向アシリックグラフ $G'$ に対して、 $P(V)$ がマルコフ条

ブル

件を満足することを証明する。まず、 $G$ に対して $V$ の変数の許容できる順序 $Ord$ を形

成し、 $Ord$ において $V$ に先行する変数を $\text{Predecessors}(Ord, V)$ とする。レンマ3.7.1から

、 $G$ が $V$ 中の各 $V$ について、 $\text{Parents}(V)$ が与えられた $\text{Predecessors}(V) \diamond \text{Parents}(V)$ から

独立である有向非循環グラフであれば、 $G$ は $P(V)$ のIマップになることがわかる。

$X$ が $\text{Parents}(V)$ の部分集合で $V$ を決定するものであれば、 $V$ は $X$ を与えられた

$\text{Predecessors}(V) \setminus X$ から独立していることになります。したがって、 $G$ において

$\text{Parents}(V) = X$ ならば、 $G$ はやはり $P(V)$ のIマップといえます。

$X$ と $Y$ のどちらかが $\text{Det}(Z)$ に含まれる場合、 $Z \square \text{Det}(Z)$ が与えられれば、 $X$ と $Y$ は独立で

あることがわかる。ここで、 $X$ も $Y$ も $\text{Det}(Z)$ に含まれないとする。Det-分離性の定義

により、 $X$ は $Z \square \text{Det}(Z)$ を与えられたとき、 $\text{Det}(Z)$ と $Y$ はd-分離される。したがって

$$P((X \square Y) \setminus \text{Det}(Z) | Z \square \text{Det}(Z)) = P(X | \text{Det}(Z) | Z \square \text{Det}(Z)) P(Y | \text{Det}(Z) | Z \square \text{Det}(Z))$$

、 $X$ が $Z$ を与えられた $Y$ から独立であることは、次のようになる。

$$\begin{aligned}
P(X \square Y | Z) &= P(X \square Y | Z \square \text{Det}(Z)) = P((X \square Y) \setminus \text{Det}(Z) | Z \square \text{Det}(Z)) = P(X \square Y | \text{Det}(Z)) \\
P(X \vdash \text{Det}(Z) | Z \vdash \text{Det}(Z)) P(Y \vdash \text{Det}(Z) | Z \vdash \text{Det}(Z)) &= (\text{注1}) \\
P(X | Z \square \text{Det}(Z)) P(Y | Z \square \text{Det}(Z)) &= P(X | Z) P(Y | Z)
\end{aligned}$$

**定理3.7:**  $G$ が $V$ 上の有向非循環グラフ、 $X, Y, Z$ が $V$ の不連続部分集合、 $P(V)$ が $G$ のマルコフ条件と **Deterministic** ( $G$ ) の決定論的關係を満たす場合、 $X$ と $Y$ が $Z$ と **Deterministic** ( $V$ ) が与えられたときにD分離されると、 $X$ と $Y$ は $P$ 中の $Z$ が与えられたときに独立する。

**証明する。**  $X$ と $Y$ が $Z$ と **Deterministic**( $V$ )を与えられたときにdet-connectedであれば、 $X$ と $Y$ は $Z$ と **Deterministic**( $V$ )を与えられたときにD-connectedであることが証明される。

次に、 $X$ と $Y$ が $Z$ と **Deterministic**( $V$ )が与えられたときにD-separatedであれば、 $X$ と $Y$ は $Z$ と **Deterministic**( $V$ )が与えられたときにdet-separatedであり、レンマ3.7.1により、 $X$ と $Y$ は $P$ の $Z$ が与えられたときに独立であることがわかる。

$X$ の中のある $X$ が、 $Z$ と **Deterministic**( $V$ )が与えられた $Y$ の中のある $Y$ にdet-connectedであるとする。 $X$ と $Y$ は $Z$ にも $\text{Det}(Z)$ にもないことが定義から導かれる。 $X$ と $Y$ は $Z$ でdet-connectedなので、**Mod**( $G$ )のあるグラフ $G'$ には $Z$ で $X$ と $Y$ をd-connectionする無向パス $U$ が存在する。

まず、 $U$ に対応するパス $U$ が $G$ に存在することを示し、次に、 $U$ が $G$ の $Z$ と **Deterministic**( $V$ )が与えられた $X$ と $Y$ をD-connectする。

$U$ は $Z \setminus \text{Det}(Z)$ が与えられると $X$ と $Y$ をd-connectするので、 $\text{Det}(Z)$ のメンバーは $U$ 上のノンコライダーにはならない。したがって、 $U$ 上の各非結合員 $A$ について、**Parents**( $G', A$ ) は **Parents**( $G, A$ ) に等しい。 $G'$ に $A$ への辺がある場合、 $G$ に $A$ への対応する辺がある

ブル  
ことがわかる。  
二フ

ここで、 $A$ は $U$ 上のコライダーであるとする。 $U$ の端点が $Z$ にあるか、 $U$ 上の非コライダーが $Z$ にあることになるが、 $G$ の $Z \sqcap \text{Det}(Z)$ を考えると、 $U$ は $X$ と $Y$ をd-connectしないことになる。したがって、 $U$ 上に $A$ への辺があれば、それに対応する辺が $G$ に存在することになる。

$G$ の $U$ に対応する $G$ のパス $U$ が存在することがわかる。

$U$ の端点は、 $Z \sqcap \text{Det}(Z)$ にない $U$ の端点と等しいからである。



$U$ 上の非結合子は $Z \boxtimes \text{Det}(Z)$ 内に存在しない。

$U$ であり、 $U$ 上のノンコリアは $Z \boxtimes \text{Det}(Z)$ には存在しない。

最後に、 $A$ が $U$ 上のコライダであるとする。このとき、 $A$ は $Z \boxtimes \text{Det}(Z)$ に以下のような子孫を持つ。

$G'$ の2つのケースがあります。

$A$ が $G'$ 内の $Z$ に子孫を持つ場合、 $G$ 内の $Z$ に子孫 $X$ を持ち、 $G'$ 内の $A$ から $X$ への有向パスを $D(A, X)$ とする。 $D(A, X)$ 上で $A$ に最も近い $Z$ のメンバを $Z$ とする。 $D(A, Z)$ は $Z$ のメンバーから外れる辺を持たない。したがって、 $D(A, Z)$ のすべての辺は $G$ に存在し、 $A$ は $G$ の $Z$ に子孫を持つ。

$A$ が $G'$ において $Z$ の子孫を持たなかったとする。このとき、 $A$ から $G'$ 内の $\text{Det}(Z) \setminus Z$ のメンバー $X$ への有向パス $D(A, X)$ が存在することになる。もし $A$ 自体が $\text{Det}(Z)$ にあるならば、 $U$ が $X$ と $Y$ を $Z \boxtimes \text{Det}(Z)$ でd-connectするので、 $A$ は $Z$ にない親を持つ。 $G'$ は $\text{Mod}(G)$ にあるので、 $A$ が $Z$ にない親を持つという事実から、 $G$ において $A$ が $Z$ にある子孫を持つことがわかる。 $A$ が $\text{Det}(Z)$ にない場合、 $D(A, X)$ は空パスではなく、 $Z$ のメンバーを含まない。 $G'$ は $\text{Mod}(G)$ にあるので、 $X$ が $Z$ にない親を持つという事実から、 $X$ は $G$ の $Z$ に子孫を持つことがわかる。 $G'$ にあるが $G$ にないすべての辺は $Z$ のメンバーから外れているので、 $D(A, X)$ は $G$ に存在し、 $D(A, X)$ には $Z$ のメンバーが含まれないから、 $A$ は $G$ の $Z$ に子孫をもつ。

$G$ の $Z$ と $\text{Deterministic}(V)$ が与えられると、 $U$ は $X$ と $Y$ をD-connectすることがわかる。

## 13.9 定理4.1

**定理4.1:** 2つの有向無サイクルグラフ  $G_1, G_2$  は、(i) 同じ頂点集合  $V$  を持ち、(ii) 頂点  $v_1$  と  $v_2$  が  $G_1$  で隣接するのは  $G_2$  で隣接する場合に限られ、(iii)  $V$  中のすべてのトリプル  $v_1, v_2, v_3$  に対して、 $v_1 \rightarrow v_2 \leftarrow v_3$  は  $G_2$  のサブグラフである場合に限る、かつ、そうである場合に、強く統計的に区別されない。

**証明する。** 定理3.4により、同じ分布が  $G_1$  と  $G_2$  に忠実であるため、同じ  $d$ -分離性関係を持ち、したがって  $G_2$  も  $P$  の  $I$ -map であるとする。

$G_2$ もまた最小である。 $G_1$ のすべての部分グラフは、対応する $G_2$ の部分グラフと同じ $d$ -分離性関係を持つ。なぜなら、両グラフから対応する頂点と隣接を取り除くと、同じ頂点、隣接、コライダーを含む部分グラフが残るからである。したがって、 $G_2$ のサブグラフが $P$ のIマップであるならば、 $G_1$ の対応するサブグラフは $P$ のIマップである。しかし、仮定により、 $G_1$ の適切なサブグラフは $P$ のIマップではなく、 $G_2$ の適切なサブグラフは $P$ のIマップではない。

□ 次に、 $G_1$ と $G_2$ が、頂点の集合、隣接関係、コライダーのいずれかが異なる場合を考える。 $G_1$ が $P$ の最小Iマップであり、 $G_2$ がそうでないような分布 $P$ が存在することを示すことにする。定義により、 $G_1$ と $G_2$ はs.s.i.でないことがわかる。

ケース1です。まず、 $G_1$ と $G_2$ は頂点の集合が異なるとする。定義により、これらはs.s.i.ではない。

ケース2  $G_1$ と $G_2$ はその隣接関係が異なるとする。一般性を損なわない範囲で、 $G_1$ が $G_2$ にない隣接を含むとする。すると、 $G_2$ の部分集合 $S$ が与えられると $X$ と $Y$ が $d$ 分離し、 $G_1$ の $S$ が与えられると $X$ と $Y$ が $d$ 分離しないような頂点 $X$ と $Y$ の組が存在する。 $G_1$ に忠実な分布 $P$ が存在する。 $G_1$ は $P$ の最小I-mapでもある。 $G_1$ では、 $X$ と $Y$ は $S$ を条件として依存している。しかし、 $G_2$ の部分集合 $S$ が与えられると $X$ と $Y$ は $d$ 分離されるため、 $G_2$ は $P$ のI-mapではありません。

ケース3  $G_1$ と $G_2$ は、遮蔽されていないコライダーは異なるが、隣接関係には違いがないとする。 $G_1$ ではパス $\langle X, Y, Z \rangle$ 上の遮蔽されていないコライダーを $Y$ とし、 $G_2$ では遮蔽されていないコライダーとする。 $P$ を $G_1$ に忠実な分布とする。 $G_2$ では、 $X$ と $Z$ は $Y$ を含む集合 $S$ を与えられたときに $d$ -分離されるが、 $G_1$ では $X$ と $Z$ は $S$ を与えられたときに $d$ -分離されない。 $G_1$ は $P$ に忠実であるため、 $X$ と $Z$ は $S$ を条件として従属である。したがって、

ブル

$G_2$ は $P$ の最小I-mapではなく、 $G_1$ と $G_2$ はs.s.i.ではありません。

ケース4最後に、 $G_1$ と $G_2$ が、遮蔽されたコライダは異なるが、隣接や遮蔽されないコライダは異ならないとする。 $G_1$ ではパス $\langle X, Y, Z \rangle$ 上の遮蔽された衝突者であるが、 $G_2$ ではそうでないものを $Y$ とする。 $G_2'$ を、 $X$ と $Z$ の間の辺を取り除いた $G_2$ の部分グラフとする。 $G_2'$ はある分布 $P$ に忠実であり、 $G_2$ は $P$ の最小Iマップではない（ $P$ のIマップである部分グラフを含むから）。ここで、 $G_1$ が $P$ の最小I-mapであることを示す。

まず、 $G_1$ は $P$ のI-mapであり、 $G_1$ は $G_2$ に対してf.i.である。 $G_2$ は $G_2'$ の適切なスーパーグラフであるから、 $G_2$ の真であるd-分離関係は $G_2'$ の真であるd-分離関係に含まれ、したがって、 $G_1$ の真であるd-分離関係は $G_2'$ の真であるd-分離関係に含まれる。したがって、 $G_1$ は $P$ のI-mapであることがわかる。

$G_1$ も最小である。 $G_1'$ が $G_1$ から $X-Z$ 辺以外の辺を削除して得られる部分グラフである場合、ケース2により、その部分グラフは $P$ のI-mapではない。ケース3により、 $G_1'$ は $P$ のI-mapでない。

$G_1$ は $P$ の最小Iマップであり、 $G_2$ はそうではないので、 $G_1$ と $G_2$ はs.s.i.ではありません。

### 13.10 定理4.2

**定理4.2:** 2つの有向無サイクルグラフ $G$ と $H$ が忠実に区別できないのは、(i) 同じ頂点集合を持ち、(ii)  $G$ において任意の2頂点が隣接するのは $H$ において隣接する場合に限られ、(iii)  $G$ または $H$ において $X$ は $Y$ に隣接し、 $Y$ は $Z$ に隣接するが $X$ は $Z$ に隣接しないといった任意の3頂点、 $X, Y, Z$ が $G$ において $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ として方向付けられるのは $H$ においてそう方向付けられる場合だけ、また、その場合だけ。

**証明する。** これはVerma and Pearl (1990b)で証明

された。また、定理3.4から直接導かれる。

### 13.11 定理4.3

**定理4.3:** 2つの有向無サイクルグラフが忠実に区別できないのは、一方に忠実なある分布が他方にも忠実であり、逆に、w.f.i.である場合のみで、すなわち、それらはf.i.です。

**証明する。**  $G_1$ 、 $G_2$ がf.i.であるとする、レンマ3.5.8により、次のように忠実な分布 $P$ が存在する。

$G_1$ .したがって、 $P$ は $G_2$ に忠実であり、 $G_1$ と $G_2$ はw.f.i.である。

$G_1$ と $G_2$ がw.f.i.であるとする、 $G_1$ と $G_2$ に忠実な分布 $P$ が存在する。 $G_1$ と $G_2$ は同じd-分離関係を持つので、 $G_1$ に忠実な分布は $G_2$ にも忠実であり、その逆もまた然りであることがわかります。

### 13.12 定理4.4

**定理4.4:** 確率分布 $P$ が有向無サイクルグラフ $G$ と $H$ のマルコフ条件を満たし、 $P$ が $H$ に忠実であれば、すべての頂点 $X, Y$ について、 $X, Y$ が $H$ で隣接すれば、 $G$ でも隣接する。

**証明する。**  $P$ が $H$ に忠実な場合、 $X$ と $Y$ が $H$ において $Y$ に隣接するのは、 $X$ と $Y$ を含まないすべての頂点集合において $X$ と $Y$ が依存関係にある場合に限られる。このとき、 $P$ が $G$ のマルコフ条件を満たすが、主張とは逆に、 $X$ と $Y$ は $G$ で隣接していないとする。 $X$ が $Y$ の子孫でないか、 $Y$ が $X$ の子孫でないか、一般性を損なわずに $X$ が $Y$ の子孫でないとする。このとき、マルコフ条件により、 $X$ と $Y$ は $Y$ のすべての親の集合を条件として $P$ で独立であり、これは矛盾である。

### 13.13 定理4.5

**定理4.5:** 確率分布 $P$ が有向無サイクルグラフ $G$ のマルコフ条件と最小値条件を満たし、 $P$ がグラフ $H$ に忠実である場合、(i) すべての $X, Y, Z$ について、 $X$ が次のようになる。

$X \rightarrow Y \leftarrow Z$ が $H$ にあり、 $X$ が $H$ で $Z$ に隣接していない場合、 $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ が $G$ にある

ブル

か、 $X, Z$ が $G$ で隣接している、(ii)  $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ が $G$ にあり、 $X$ が $G$ で $Z$ に隣接しな

いような頂点の三重 $X, Y, Z$ について、 $X$ が $H$ で $Y$ に隣接し、 $Y$ が $H$ で $Z$ に隣接す

るなら  $X \rightarrow Y \leftarrow Z$  in  $H$ . **Proof.**(i)  $P$ が有向無サイクルグラフ $G$ のマルコフ条件と最小値

条件を満たし、 $P$ がグラフ $H$ に忠実であるとする。 $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ が $H$ にあり、 $X$ が $H$ で $Z$

に隣接していないとすると、定理4.4により、 $G$ で $X$ は $Y$ に隣接し $Y$ は $Z$ に隣接している

。このとき、マルコフ条件により、 $X$ と $Z$ は $Y$ を含むある集合を条件として独立であ

るが、 $H$ は忠実であるので、これは不可能である。



(ii)  $Y$ が $G$ のパス $\langle X, Y, Z \rangle$ 上の遮蔽されていないコライダーであると仮定する。 $Y$ は $G$ において $X$ または $Z$ の親ではないので、 $P$ において、 $X$ と $Z$ は $Y$ を含まない集合を与えれば独立である。しかし、 $X, Y$ および $Y, Z$ が $H$ で隣接しており、 $Y$ が $H$ のコライダーでない場合

$\langle X, Y, Z \rangle$  とすると、 $X$ と $Z$ の間には $X, Y, Z$ だけを含むトレックが存在する。したがって、 $H$ において、 $X$ と $Z$ は $Y$ を含まない任意の変数集合が与えられてもd分離されない。 $P$ は $H$ に忠実なので、 $X$ と $Z$ は、 $Y$ を含む任意の変数集合があれば独立ではない。これは矛盾である。

**定理4.1:** 確率分布 $P$ が有向無サイクルグラフ $G$ のマルコフ条件を満たし、 $P$ が有向無サイクルグラフ $H$ に忠実で、 $X < Y$ のときだけ $X \rightarrow Y$ という変数の順序（例えば時間による）が $G$ と $H$ で一致するとき、 $H$ は $G$ の部分グラフとなる。

**証明する。** 定理 4.4 の直接的な帰結である。

### 13.14 定理4.6

**定理4.6:** 同じ頂点集合を持つ2つの異なるs.s.i.有向非周期グラフが剛体統計的に区別されないことはない。

**証明する。**  $G_1$ と $G_2$ は頂点集合 $V$ を持つs.s.i.有向非周期グラフであり、s.s.i.なので同じ隣接関係を持つ。したがって、もしそれらが異なるグラフであれば、 $G_1$ には $A \rightarrow B$ 、 $G_2$ には $B \rightarrow A$ という辺がある。 $U_1$ 、 $U_2$ を $V$ にない変数とし、 $U_1$ から $A$ 、 $U_2$ から $B$ への辺を追加して $G_1$ 、 $G_2$ をそれぞれ $H_1$ 、 $H_2$ に埋め込むと、 $H_1$ 、 $H_2$ は異なるコライダーを持つのでs.s.i.ではない。

### 13.15 定理5.1

**定理5.1:** PC、SGS、PC-1、PC-2、PC\*、IGアルゴリズムの入力が有向無サイクルグラフ  $G$  に忠実なデータの場合、出力は  $G$  を表現するパターンになります。

グラフ  $G$  において、 $V$  が  $X$  と  $Y$  の間のある無向パス上にある場合にのみ、 $V$  を  $\text{Undirected}(X, Y)$  に入れるとする。

**Lemma 5.1.1:** 有向非循環グラフ  $G$  において、 $X$  が  $Y$  の子孫でなく、 $Y$  と  $X$  が  $G$  内で隣接していない場合、 $\text{Parents}(Y) \cap \text{Undirected}(X, Y)$  が与えられると  $X$  は  $Y$  から  $d$  分離される。

**証明する。** 逆に、ある無向きの道  $U$  が  $X$  と  $Y$  を  $d$ -connect しているとする。

$\text{Parents}(X) \cap \text{Undirected}(X, Y)$ .  $U$  が  $Y$  に入るなら、 $\text{Parents}(Y)$  のメンバーを含む。

$\cap \text{Undirected}(X, Y)$  は、非結合体として  $X$  と等しくない。したがって、 $\text{Parents}(Y) \cap \text{Undirected}(X, Y)$  を考えると、仮定に反して  $X$  と  $Y$  を  $d$ -connect することはない。 $U$  が  $Y$  から外れている場合、 $X$  は  $Y$  の子孫ではないので、 $U$  は  $\text{Undirected}(X, Y)$  にコライダーを含む。 $U$  のコライダーで  $Y$  に最も近いものを  $C$  とする。 $U$  が  $X$  と  $Y$  を  $d$ -connect して  $\text{Parents}(Y) \cap \text{Undirected}(X, Y)$  が与えられると、 $C$  は  $\text{Parents}(Y) \cap \text{Undirected}(X, Y)$  に子孫を持つことになります。しかし、 $C$  は  $Y$  の祖先であり、 $Y$  は  $C$  の祖先であるから、 $G$  は仮定に反して環状である。したがって、 $\text{Parents}(Y) \cap \text{Undirected}(X, Y)$  を考えると、 $X$  と  $Y$  を  $d$ -connect する無向パスがない。

**レマ5.1.2:** 有向無サイクルグラフ  $G$  において、 $X$  が  $Y$  に隣接し、 $Y$  が  $Z$  に隣接し、 $X$  が  $Z$  に隣接しないとき、 $V$  のあらゆる部分集合  $S$  に対して、 $X$  が  $Z$  に  $d$ -connected である  $\{Y\}$  が与えられたときのみ、辺は  $X \rightarrow Y \leftarrow Z$  と配向される。□  $S \not\supset \{X, Z\}$  となる。

**証明する。** これは定理3.4から導かれる。

Lemma 5.1.3はPearl(1990a)で示唆されたも  
二フ

のである。

**Lemma 5.1.3:** 有向非循環グラフ  $G$  において、 $X$  が  $Y$  に隣接し、 $Y$  が  $Z$  に隣接し、 $X$  が  $Z$  に隣接しない場合、 $Y$  は  $X$  と  $Z$  を  $d$  分離するすべての変数集合にあるか、 $X$  と  $Z$  を  $d$  分離する変数集合にないかのいずれかである。

**証明する。**  $G$  において、 $X$  と  $Z$  は隣接していないが、 $X$  は  $Y$  に隣接し、 $Y$  は  $Z$  に隣接していると仮定する。 $X$  と  $Z$  は隣接していないので、ある部分集合  $S \subseteq \{X, Z\}$  があれば、それらは  $d$ -分離する。 $G$  において、 $X$ - $Y$  と  $Y$ - $Z$  の辺が  $Y$  で衝突するのは、 $Y$  を含み  $X$  でも  $Z$  でもない集合  $S$  が存在し、 $S$  が与えられたときに  $X$  と  $Z$  が  $d$  個分離する場合に限られる。 $X$ - $Y$ 、 $Y$ - $Z$  の辺が  $Y$  で衝突しない場合、 $X$  と  $Z$  の間に ( $Y$  を含む) 衝突者を含まない無向きの経路  $U$  が存在する。 $Y$  を含まない集合  $S \perp$  は、この経路のために  $X$  と  $Z$  の  $d$  分離に失敗する。

**定理5.1:** PC、SGS、PC-1、PC-2、PC\*、IGアルゴリズムの入力が有向無サイクルグラフ  $G$  に忠実なデータの場合、出力は  $G$  を表現するパターンになります。

**証明する。** SGSアルゴリズムの正しさは定理3.4から明らかであり、その手順は定理で与えられた忠実性の条件を単に検証するだけだからである。

SGSを除くいずれかのアルゴリズムの出力を  $G'$  とする。 $G'$  において、 $X$  と  $Y$  が隣接していないとする。どのアルゴリズムも、 $X$  と  $Y$  が  $\forall \{X, Y\}$  のある部分集合で  $d$ -separated でない限り、 $X$  と  $Y$  の間の辺を取り除かない。もし  $X$  と  $Y$  が  $\forall \phi \{X, Y\}$  のある部分集合で  $d$ -separated であれば、それらは  $G$  で隣接していない。

PC\*以外のアルゴリズムの出力  $G'$  において、 $X$  と  $Y$  が隣接しているとする。このとき、 $G'$  における  $X$  の隣接の部分集合や  $Y$  の隣接の部分集合があれば、 $X$  と  $Y$  は  $d$ -separated にならない。今、証明したことから、 $G'$  における  $X$  の隣接は  $\mathbf{Parents}(G, X)$  のスーパーセットであり、 $G'$  における  $Y$  の隣接は  $\mathbf{Parents}(G, Y)$  のスーパーセットである。したがって、 $G$  の  $\mathbf{Parents}(X, G)$  または  $\mathbf{Parents}(Y, G)$  が与えられたとき、 $X$  と  $Y$  は  $d$ -separated ではない。レンマ3.5.9から、 $X$  と  $Y$  は  $G$  で隣接していることがわかる。

PC\*の出力  $G'$  において、 $X$  と  $Y$  が隣接しているとする。 $G'$  の  $\mathbf{Undirected}(X, Y)$  は  $G$  の  $\mathbf{Undirected}(X, Y)$  のスーパーセットである。これは、レンマ3.5.9と5.1.1とともに、 $X$  と  $Y$  が  $G$  で隣接することを含意する。

アルゴリズムの繰り返しループにおける配向規則の適用回数に帰納することで、出力  $G'$  において配向が正しいことを示します。

基本ケース:  $X \rightarrow Y$  が「 $X$  が  $Y$  に隣接し、 $Y$  が  $Z$  に隣接し、 $X$  が  $Z$  に隣接しない場合、 $Y$  が  $\mathbf{Sepset}(X, Z)$  にない場合のみ、エッジは  $X \rightarrow Y \leftarrow Z$  として配向する」というルールで配

ブル

向されるとする。これは、レンマ5.1.2および5.1.3によって正しい向きとなる。

帰納法ケース：方位規則を $n$ 回適用した後の $G'$ の方位が正しいとする。まず、 $G'$ に $X$ から $Y$ への有向パスがあるため、 $X \rightarrow Y$ が配向しているとする。帰納仮説から、 $G$ には $X$ から $Y$ への有向パスが存在し、 $G$ は非周期的であるため、 $G$ には $X \rightarrow Y$ が存在することがわかる。次に、 $X \rightarrow Y$ は辺 $Z \rightarrow X$ があり、 $G$ の $X$ と $Y$ の間の辺は $X$ に矢尻がないため、指向性があるとする。 $Y$ は $\text{Sepset}(X, Z)$ にあり、したがって $Y$ は $G$ のパス $\langle X, Y, Z \rangle$ 上のコライダーではないことがわかる。また帰納仮説により $Z \rightarrow X$ は $G$ にあり、したがって $X \rightarrow Y$ は $G$ にある。

### 13.16 定理6.1

**定理6.1:** (VermaとPearl) :  $V$ を頂点の集合、 $O$ を $A$ と $B$ を含む $V$ の部分集合、 $G$ を $V$ 上の有向無サイクルグラフ (または $O$ 上の誘導経路グラフ) とすると、 $A$ と $B$ の間に部分集合 $O$ 上の誘導経路が存在する場合に限り、 $O\{A, B\}$ の任意の部分集合によって $A$ と $B$ は $d$ 分離されることはない。

(定理6.1はVerma and Pearl 1990で有向無サイクルグラフについて初めて述べられ証明されたが、その論文には、その端点に入る(または出る)誘導経路の存在とその端点に入る(または出る) $d$ -連結経路の存在に関するレンマの部分が含まれていなかった)。

$G$ を変数集合 $V$ 上の有向無サイクルグラフ、 $O$ を $A$ と $B$ を含む $V$ の部分集合、 $A \neq B$ とすると、 $A$ と $B$ 間の無向パス $U$ は、終点を除く $U$ 上の $O$ のすべてのメンバーが $U$ 上のコライダーであり、 $U$ 上のすべてのコライダーが $A$ または $B$ のいずれかの祖先である場合にのみ $O$ に対して誘導パスとなります。グラフ $G$ において、 $A$ - $B$ 間の辺は、辺の $A$ 端のマークが" $>$ "である場合にのみ、 $A$ に入る。グラフ $G$ において、 $A$ - $B$ 間の無向パス $U$ が $A$ へのエッジを含む場合、 $U$ は $A$ に入る、とすることにする。 $A$ - $B$ 間の無向パス $U$ が $A$ から外れた辺を含む場合、 $U$ は $A$ から外れたとすることにする。

**Lemma 6.1.1:**  $V$ を頂点集合、 $O$ を $V$ の部分集合、 $G$ を $V$ 上の有向非循環グラフ (または $O$ 上の誘導経路グラフ) としたとき、 $A$ と $B$ の間に $A$ から出て $B$ に入る $O$ に対する誘導経路がある場合、 $O\{A, B\}$ の任意の部分集合 $Z$ に対して、 $A$ から出て $B$ に入る、 $Z$ を与えられた $A$ と $B$ を $d$ 結する無向経路 $C$ が存在する。

ブル

**証明する。** 終点を除く  $U$  上のすべての観測頂点はコライダーであり、すべてのコライダーは  $A$  または  $B$  のいずれかの祖先である。

$U$  上のすべてのコライダーが  $Z$  に子孫を持つ場合、 $C=U$  とする。すべてのコライダーが  $Z$  に子孫を持ち、非コライダーが  $Z$  に存在しないため、 $C$  は  $Z$  を与えられた  $A$  と  $B$  を d-connect する。



$U$ 上のすべてのコライダーが $Z$ に子孫を持つわけではないとする。 $A$ に最も近い $U$ 上のコライダーで $Z$ に子孫を持たないものを $R$ 、 $A$ に最も近い $U$ 上のコライダーを $W$ とすると、 $A$ 、 $B$ は $U$ 上のコライダーではないので $R \neq A$ 、 $R \neq B$ とする。

$R$ は $Z$ に子孫を持たないので、 $B$ は $U(A,R)$ 上に存在しない。レンマ3.3.2により、 $U(A,R)$ は $Z$ を与えられた $A$ と $R$ をd-connectし、 $A$ から外れている。

3.3.3  $Z$ を与えられた $A$ と $B$ の間には、 $A$ から外に出て $B$ に入るd-connecting path  $C$ がある。

ここで、 $R \neq W$ とする。 $U$ は $A$ から外れているので、 $W$ は $A$ の子孫である。 $R$ の定義により、 $W$ は $Z$ に子孫を持つ。したがって、 $U$ 上のコライダーで $A$ の祖先であるものは $Z$ に子孫を持つ。レンマ3.3.2により、 $U(A,R)$ は $Z$ が与えられたときに $A$ と $R$ をd-connectし、 $A$ から外れる。仮説により、 $R$ から $B$ への有向パス $D$ があり、 $A$ も $Z$ のどのメンバーも含まれない。

**Lemma 6.1.2:**  $V$ を頂点集合、 $O$ を $V$ の部分集合、 $G$ を $V$ 上の有向無サイクルグラフ（または $O$ 上の誘導経路グラフ）、 $A$ と $B$ の間に $A$ に入り $B$ に入る $O$ 上の誘導経路 $U$ があるとき、 $O\{A,B\}$ のすべての部分集合 $Z$ に対して、 $A$ に入り $B$ に入る $Z$ を与えられた $A$ と $B$ をd結んでいる無向パス経路 $C$ が存在する。

**証明する。**  $U$ 上のすべてのコライダーが $Z$ に子孫を持つならば、 $U$ は $Z$ を与えられた $A$ と $B$ の間をd-connecting pathであり、 $A$ に入り $B$ に入る。 $Z$ に子孫を持たないコライダーが存在するとする。レンマ3.3.2により、 $U(A,W)$ は $Z$ が与えられたときに $A$ と $W$ をd結んで $A$ に入る道であり、レンマ3.3.3により、 $Z$ が与えられたときに $A$ と $B$ をd結んで $A$ にも $B$ にも入る無向きの道 $C$ が存在する。同様に、 $Z$ に子孫を持たない $B$ 以降の $U$ 上の最初のコライダー $W$ が、 $B$ を含まない $A$ への有向パス $D$ の発生源である場合、レンマ3.3.3により、 $A$ と $B$ は $Z$ が与えられたときに、 $A$ への、 $B$ への無向パスによりd-

ブル  
connectedである。  
二フ

次に、 $A$ に最も近い $U$ 上のコライダー $W$ で $Z$ に子孫を持たないものが、 $A$ を含まない $B$ への有向パスの発生源ではなく、 $B$ に最も近い $U$ 上のコライダー $R$ で $Z$ に子孫を持たないものが、 $B$ を含まない $A$ への有向パスの発生源ではないとする。レンマ3.3.2により、 $U(W,R)$ は $Z=Z\{R,W\}$ が与えられたとき、 $R$ と $W$ を $d$ -コネクトしている。 $D'$ は $Z=Z\{R,B\}$ で $R$ と $B$ を $d$ -連結し、 $D$ は $Z=Z\{A,W\}$ で $W$ と $A$ を $d$ -連結する。によって

lemma 3.3.1 **Z**が与えられたとき、 $A$ と $B$ をd-connectする無向きのパスで、 $A$ に入り、かつ、 $B$ に入るものがある。

$B$ .

グラフ $G$ において、 $A(A,B)$ を $A$ または $B$ の祖先の連合とする。

**Lemma 6.1.3:**  $V$ を頂点の集合、 $O$ を $V$ の部分集合、 $G$ を $V$ 上の有向無サイクルグラフ（または $O$ 上の誘導パスグラフ）、 $G$ の無向パス $U$ が $A$ と $B$ をd-連結するとき、 $(A(A,B) \cap O) \setminus \{A, B\}$ が与えられたら $U$ は $O$ 上の $A$ と $B$ 間の誘導パスとなります。

**証明する。**  $(A(A,B) \cap O) \setminus \{A, B\}$ が与えられたとき、 $A$ と $B$ をd-connectするパス $U$ があれば、 $U$ 上のすべてのコライダーは $(A(A,B) \cap O) \setminus \{A, B\}$ のメンバーの祖先で、したがって $A$ または $B$ の祖先となる。 $U$ 上のすべての頂点は $A$ か $B$ か $U$ 上のコライダーの祖先であり、したがって $U$ 上のすべての頂点は $A$ か $B$ の祖先である。 $U$ が $A$ と $B$ をd-connectする場合、 $(A(A,B) \cap O) \setminus \{A, B\}$ の端点を除く $U$ にあるすべてのメンバーはコライダーである。 $U$ 上のすべての頂点は $A(A,B)$ にあるので、端点を除いて $U$ にある $O$ のすべてのメンバーはコライダーである。したがって、 $U$ は $O$ 上の $A$ と $B$ の間の誘導経路である。

以下のレマの組は、誘導パスのいくつかの基本的な性質を述べている。

**Lemma 6.1.4:**  $G$ が $V$ 上の有向非循環グラフで、 $O$ が $V$ の部分集合で $A$ と $B$ を含み、 $G$ が $A$ と $B$ の間の $O$ 上の誘導経路で $A$ から外れたものを含む場合、 $G$ に $A$ から $B$ への有向経路が存在する。

**証明する。**  $U$ がコライダーを含まない場合、 $U$ は $A$ から $B$ への有向パスである。 $U$ がコライダーを含む場合、 $C$ を $A$ の後の最初のコライダーとする。 $U$ は $A$ から外れており、 $C$ は $A$ の後の最初のコライダーであるため、 $A$ から $C$ への有向パスが存在する。

**Lemma 6.1.5:**  $V$ を頂点の集合、 $O$ を $V$ の部分集合、 $G$ を $V$ 上の有向非循環グラフ（または $O$ 上の誘導経路グラフ）とし、 $A$ - $B$ 間の $O$ に対する誘導経路で $A$ から出るものを含む場合、 $A$ - $B$ 間の $O$ に対するあらゆる誘導経路は $B$ に入る。

**証明する。** レンマ6.1.4により、 $A$ から出る誘導経路と $B$ から出る誘導経路がある場合、 $G$ にサイクルが存在することになる。

**定理6.1:** (VermaとPearl) :  $V$ を頂点の集合とするとき、 $O$ は $A$ を含む $V$ の部分集合である。

と $B$ 、 $G$ は $V$ 上の有向非循環グラフ（または $O$ 上の誘導パスグラフ）  $A$ と $B$ は非

$O\{A,B\}$ の任意の部分集合によってd-separatedされるのは、部分集合 $O$ に対する誘導パスが存在する場合のみである。

$A \cdot B$ 間

**証明する。**これは、レンマ6.1.1, 6.1.2, 6.1.3, 6.1.5 から導かれる。

### 13.17 定理6.2.

**定理6.2:**  $O$ 上の誘導経路グラフ $G$ において、 $A$ が $B$ の祖先でなく、かつ $A$ および $B$ が隣接していない場合、 $\mathbf{D-SEP}(A,B)$ が与えられると、 $A$ と $B$ は $d$ 個に分離される。

$G$ を $O$ 上の誘導パスグラフとし、 $A \neq B$ とすると、 $\forall \mathbf{D-SEP}(A,B)$ は、 $A \neq B$ である場合に限り、 $U$ 上のすべての頂点が $A$ または $B$ の祖先であり、（端点を除いて） $U$ 上のコライダであるような $A-U$ 間の無向パス $U$ が存在するとする。

**Lemma 6.2.1:**  $G$ が $O$ 上の $G$ の誘導パスグラフであり、以下のような有向パスが存在する場合。

$G$ 内の $A$ から $B$ へ、 $G$ 内の $A$ から $B$ への有向パスが存在することになる。

**証明する。** $G$ に $A$ から $B$ への有向パス $D$ があるとする。有向パス上で隣接し、その順序で発生する任意の2つの頂点を $X$ と $Y$ とする。 $G$ には、 $X$ から $Y$ への有向辺が存在する。誘導経路グラフの定義により、 $G$ の $X$ と $Y$ の間には $X$ から外れる誘導経路が存在する。したがって、レンマ6.1.4により、 $G$ には $X$ から $Y$ に至る有向経路が存在する。

$G$ において、 $D$ 上で隣接する頂点間の有向パスの連結は、 $A$ から $B$ への有向パスであるサブパスを含む。

ブル

**Lemma 6.2.2:**  $G$  を  $\mathcal{O}$  上の  $G$  の誘導パスグラフとし、 $G$  に  $\mathbf{Z}$  を与えられた  $A$  と  $B$  を結ぶ

パス  $U_d$  がある場合、 $G$  に  $\mathbf{Z}$  を与えられた  $A$  と  $B$  を結ぶパス  $d$  があることを証明する。

$G$  において  $U$  が  $A$  と  $B$  を  $d$ -連結しているとする。誘導経路グラフの定義により、 $G$  において、 $R$  と  $S$ 、 $S$  と  $T$  の間に  $\mathcal{O}$  上の誘導経路が存在し、それぞれが  $S$  に入るような経路である。レンマ 6.1.1 と 6.1.2 により、 $G$  において、 $R$  と  $S$  の間に  $\mathbf{Z}_{\{R,S\}}$  を与えられた  $d$ -connecting path があり、 $S$  と  $T$  の間に  $\mathbf{Z}_{\{S,T\}}$  を与えられた  $d$ -connecting path があり、それぞれ  $S$  に入るようなパスがある。

$U$  上で  $R$  と  $S$  が隣接し、 $U$  上で  $S$  と  $T$  が隣接するような頂点  $R$ 、 $S$ 、 $T$  が存在し、 $S$  が  $U$  上でコライダである場合、 $S$  は  $G$  において  $\mathbf{Z}$  に子孫を持つ。の定義により

レンマ6.1.1と6.1.2により、 $G$ において $R$ と $S$ の間に $Z\{R,S\}$ を与えられたd-connecting pathと $S$ と $T$ の間に $Z\{S,T\}$ を与えられたd-connecting pathがあり、両方とも $S$ に入る。

レンマ3.3.1により、 $Z$ が与えられると $A$ と $B$ をd-connectするパスが $G$ に存在することになる。

**Lemma 6.2.3:**  $G'$ が $O$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ の誘導経路グラフで、 $G'$ の $A$ と $C$ の間に $O$ 上の誘導経路 $U$ がある場合、 $G'$ の $A$ と $C$ の間にエッジがある。

**証明する。** $G'$ において、 $A$ と $C$ の間に $O$ 上の誘導経路があるとする。レンマ6.1.1、6.1.2により、 $G'$ において、 $A(A,C) \cap O\{A,C\}$  が与えられたときに $A$ と $C$ をd-connectする無向パスが存在する。したがって、レンマ6.2.2により、 $G$ において $A(A,C) \cap O\{A,C\}$  が与えられたときに $A$ と $C$ がd-connectedとなるような無向パスが存在する。レンマ6.1.3により、 $G$ において $A$ と $C$ の間に $O$ 上の誘導パスが存在し、定義により $G'$ において $A$ と $C$ 間に辺が存在することがわかる。

誘導経路グラフまたは有向非周期グラフ $G'$ における変数の全順序 $Ord$ は、 $A \neq B$ で $G'$ に $A$ から $B$ への有向パスがあるとき、 $Ord$ において $A$ が $B$ より前にある場合にのみ許容できるとする。グラフ $G$ において、頂点 $X$ は、 $G$ 中に $Y$ から $X$ への有向パスがある場合にのみ頂点 $Y$ の後にあり、 $G$ 中に $X$ から $Y$ への有向パスがある場合にのみ、頂点 $Y$ の前にある。誘導パスグラフ $G'$ と許容可能な全順序 $Ord$ について、 $\text{Predecessors}(Ord, V)$ を $Ord$ に従って $V$ に先行する（ $V$ を含まない）すべての変数の集合に等しくするとする。誘導パスグラフ $G'$ と許容可能な全順序 $Ord$ に対して、 $W$ は、 $W \neq V$ であり、 $V$ を除く $U$ 上の各頂点が $Ord$ において $V$ に先行し、終点を除く $U$ 上の各頂点が $U$ 上のコライダーであるような $W$ と $V$ との間の無向パス $U$ が存在する場合にのみ $\text{SP}(Ord, G', V)$  内にある。この定義によって、 $V$ の各親は $\text{SP}(Ord, G', V)$  内にあるということに注意。

ブル

例えば図2において、 $Ord = \langle X, S, T, R, M, Z, Q, Y \rangle$ ならば、 $\mathbf{SP}(Ord, G', Y) = \{Q, T, S\}$ 、

$Ord = \langle X, S, T, R, M, Z, Y, Q \rangle$ ならば $\mathbf{SP}(Ord, G', Y) = \emptyset$ となります。



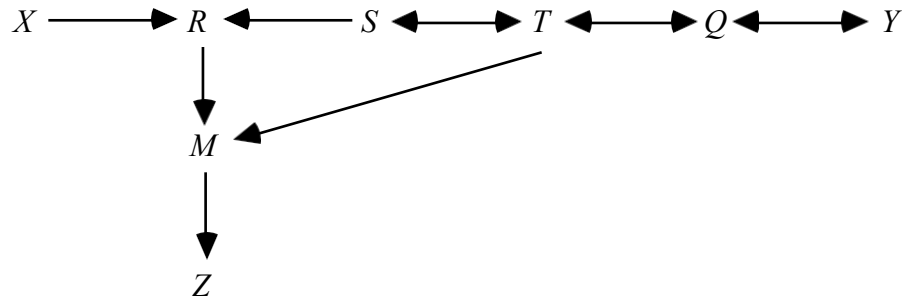


図2

**Lemma 6.2.4:**  $G'$ が誘導パスグラフで、 $Ord$ が許容できる総順序であるとき

$\text{Predecessors}(Ord, X) \setminus \text{SP}(Ord, G', X)$ は $\text{SP}(Ord, G', X)$ が与えられた $X$ から $d$ 分離される。

**証明する。** のある $V$ を $d$ -connectするパス $U$ が存在するとする。

$\text{SP}(Ord, G', X)$ が与えられた $X$ に対して、 $\text{Predecessors}(Ord, X) \setminus \text{SP}(Ord, G', X)$ がある。3つのケースがある。

まず、 $U$ が $X$ に入る辺が両頭の矢印でないとする(両頭の矢印とは、例えば $A \leftrightarrow B$ のこと)。 $R$ は $\text{SP}(Ord, G', X)$ にあり、 $V$ と等しくない。 $R$ は $U$ 上のコライダーではないので、仮定に反して、 $\text{SP}(Ord, G', X)$ が与えられても $U$ は $V$ を $X$ に $d$ -connectしない。

次に、 $U$ が $X$ から出るエッジを持っているとする。 $V$ は $\text{Predecessors}(Ord, X) \setminus \text{SP}(Ord, G', X)$ にあるので、 $Ord$ において $X$ より前にある。したがって、 $X$ から $V$ への有向パスは存在しない。 $R$ は $X$ の子孫であり、 $R$ の子孫は $X$ の子孫である。 $R$ の子孫 ( $R$ 自身を含む) は $\text{SP}(Ord, G', X)$ には存在しないので、仮定に反して $U$ は $V$ と $X$ を $d$ -connectしないことが分かる。

最後に、 $U$ が $X$ への二重矢印を含むとする。 $U$ は $X$ と $V$ を $\text{SP}(Ord, G', X)$ で $d$ 結んでいるので、 $U$ に沿った各コライダーは $\text{SP}(Ord, G', X)$ に子孫を持ち、したがって $Ord$ では $X$ より前になる。このことは $U$ 上のコライダーのすべての祖先が $Ord$ では $X$ より前にな

ブル

ることを示している。 $U$ 上の $X$ に最も近い頂点で $\text{SP}(\text{Ord}, G, X)$ にないものを $W$ とし、 $U$ 上で $W$ に隣接し、 $W$ と $X$ の間にある頂点を $R$ とする。 $R$ が $U$ 上のコライダでない場合、 $U$ は $\text{SP}(\text{Ord}, G', X)$ を与えられた $V$ と $X$ をd-connectしない。 $W$ は $V$ の祖先か $U$ 上のコライダの祖先のどちらかであり、その場合は $X$ に先行し、我々の仮定に反して $\text{SP}(\text{Ord}, G', X)$ のメンバとなる。

**定理6.2:**  $O$ 上の誘導経路グラフ $G$ において、 $A$ が $B$ の祖先でなく、かつ $A$ および $B$ が隣接していない場合、 $\text{D-SEP}(A, B)$ が与えられると、 $A$ と $B$ は $d$ 個に分離される。

**証明する。**  $G'$  の変数の全順序  $Ord$  を、 $A$  のすべての祖先と  $A$  以外の  $B$  のすべての祖先が  $A$  より前にあり、他のすべての頂点が  $A$  より後にあるようなものとする。したがって、レンマ6.2.4により、 $B$  が  $\mathbf{D-SEP}(A, B)$  にない場合、 $\mathbf{D-SEP}(A, B)$  は  $G$  において  $A$  と  $B$  を  $d$  分離する。 $B$  が  $\mathbf{D-SEP}(A, B)$  にあるのは、終点を除く各頂点がパス上の衝突者であり、パス上の各頂点が  $A$  または  $B$  の祖先となる  $A$  から  $B$  へのパスが存在する場合に限る。しかし、その場合、 $A$  と  $B$  の間に誘導経路が存在し、レンマ6.2.3により  $A$  と  $B$  は仮定に反して隣接している。

### 13.18 定理6.3

**定理6.3:** CIアルゴリズムの入力が  $G$  に忠実な  $\mathbf{O}$  上のデータである場合、出力は  $\mathbf{O}$  上の  $G$  の部分配向誘導パスグラフとなる。

誘導経路グラフ  $G'$  において、 $U$  は  $B$  の**判別経路**である。 $U$  が  $B$  を含む  $X$  と  $Y$  の間の無向パスであり、 $B \neq X$ 、 $B \neq Y$ 、である場合にのみ、 $B$  の**判別パス**となる。

- (i)  $U$  上で  $V$  と  $V'$  が隣接し、 $V'$  が  $U$  上で  $V$  と  $B$  の間にある場合、 $U$  上で  $V \rightarrow^* V'$  となります、
- (ii)  $V$  が  $U$  上の  $X$  と  $B$  の間にあり、 $V$  が  $U$  上のコライダーであるならば、 $G'$  において  $V \rightarrow Y$ 、それ以外は  $V \leftarrow^*$ 。

$Y$  in  $G'$  です、

- (iii)  $V$  が  $U$  上の  $Y$  と  $B$  の間にあり、 $V$  が  $U$  上のコライダーであれば、 $G'$  において  $V \rightarrow X$ 、それ以外は  $V \leftarrow^*$ 。

$G'$  の  $X$  です、

- (iv)  $X$  と  $Y$  は  $G'$  で隣接していない。

ブル

$B$ は、 $B$ が $U$ の端点であるか、 $U$ が $A \leftarrow B \rightarrow C, A \rightarrow B$ のいずれかの部分経路を含むよ

うな頂点 $A$ および $C$ が存在する場合にのみ、無向経路 $U$ 上の**確定無結晶体**であることがわかる。

$\rightarrow C$ 、または $A \rightarrow B \rightarrow C$ 。

部分配向誘導経路グラフにおいて、 $U$ が $B$ を含む $X$ - $Y$ 間の無向パスであり、 $B \neq X$ 、 $B \neq Y$ 、 $U$ 上の $B$ と端点を除くすべての頂点が $U$ 上の衝突者または明確な非衝突者である場合にのみ、 $B$ の**確定識別経路**となる。

(i)  $U$ 上で $V$ と $V'$ が隣接し、 $V'$ が $U$ 上で $V$ と $B$ の間にある場合、 $U$ 上で $V \rightarrow V'$ となります

、

(ii)  $V$ が $U$ 上の $X$ と $B$ の間にあり、 $V$ が $U$ 上のコライダーである場合、 $V \rightarrow Y$  in , else  $V \leftarrow Y$

において

(iii)  $V$ が $U$ 上の $Y$ と $B$ の間にあり、 $V$ が $U$ 上のコライダーである場合、 $\pi V \rightarrow X$  in , else  $V \nrightarrow X$

において

(iv) において、 $X$ と $Y$ は隣接しない。

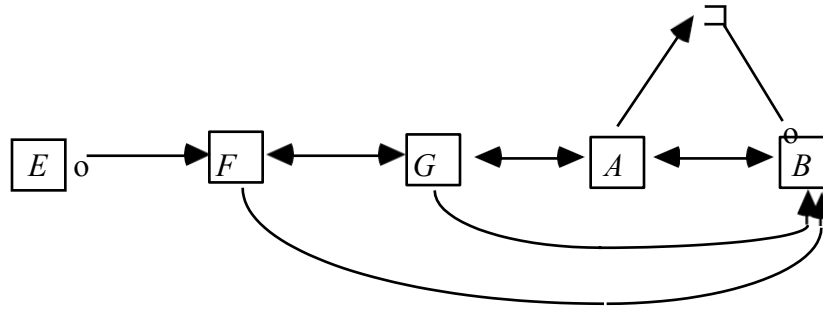


図3:  $\langle E, F, G, A, C, B \rangle$ は $C$ の確定判別パスである

**Lemma 6.3.1:**  $G$ が誘導経路グラフで、 $U$ が $X$ と $Y$ の間の $B$ の判別経路で、 $X$ と $Y$ が $S$ を与えられて $d$ 分離している場合、 $U$ 上の $B$ と等しくないすべての頂点 $V$ に対して、 $V$ が $U$ 上のコライダーである場合にのみ $V$ は $S$ にある。

**証明する。**まず、 $X$ と $B$ の間の $U$ 上の各頂点 $V$ について、 $V$ が $U$ 上のコライダーである場合に限り、 $V$ が $S$ にあることを証明する。この証明は、 $U$ 上の $X$ と $V$ の間の頂点の数に対する帰納法によって行われる。

基本ケースです： $A$ を $X$ の後の $U$ 上の最初の頂点とする。 $A \neq B$ とすると、 $X$ と $A$ の間のすべての頂点 $V$ について、 $V$ が $U$ 上の衝突者である場合にのみ、 $V$ は $S$ に入ることになる。 $A$ は $U(X, A)$ と $A$ - $Y$ 間のエッジを連結したものではありませんので、 $A$ が $S$ にいない限り、そのパスは $S$ を与えられた $X$ と $Y$ を $d$ -connectする。判別パスの定義から、 $X$ と $A$ の間の辺は $A$ に入る。したがって、 $A$ は $U(X, A)$ と $A$ と $Y$ の間の辺を連結した上で判別する。したがって、 $A$ が $S$ にない場合を除き、そのパスは $S$ を与えられた $X$ と $Y$ を $d$ -connectする。

ブル

$X$ と $B$ の間に $n$ 個の頂点しかない場合は、これで終わりであるが、そうでない場合は、 $U$ 上の $X$ と $V$ の間に $n+1$ 個の頂点があるような頂点を $A$ とする。終点を除いて、 $V$ が $U(X, A)$ 上にある場合、 $U$ が $S$ にある場合に限り、 $V$ は $U$ 上のコライダである。 $A$ が $U$ 上のコライダである場合、 $A$ から $Y$ への有向辺が存在する。 $A$ は $U(X, A)$ と $A$ から $Y$ への辺の連結の上でコライダーではないので、 $A$ が $S$ にない限り、 $S$ を与えられた $X$ と $Y$ をd-connectするパスがある。 $A$ が $U$ 上のコライダーでない場合、 $A$ と $Y$ の間のエッジは、 $S$ に入る。

$A$  したがって、 $A$  は  $U(X, A)$  と  $A$  から  $Y$  へのエッジの連結上のコライダーであり、 $A$  が  $S$  にない場合を除き、パスが  $S$  を与えられた  $X$  と  $Y$  を  $d$ -連結することになる。

同様に、 $V$  が  $Y$  と  $B$  の間にある場合、 $V$  が  $U$  のコライダーである場合に限り、 $V$  は  $S$  にある<sup>②</sup>。

**Lemma 6.3.2:**  $G$  が誘導パスグラフで、 $U$  が  $X$  と  $Y$  の間の  $B$  の判別パスで、 $X$  と  $Y$  が  $S$  で  $d$  分離されている場合、 $B$  が  $U$  上のコライダーでない場合にのみ、 $S$  に入る。

**証明する。** レンマ 6.3.1 により、 $U$  上の  $B$  と等しくないすべての頂点  $V$  について、 $V$  が  $S$  にある場合に限り、 $V$  は  $U$  上のコライダーとなる。もし  $B$  がコライダーで  $S$  にあるならば、我々の仮定に反して、 $U$  は  $S$  を与えられた  $X$  と  $Y$  を  $d$ -connect していることになる。もし  $B$  がコライダーでなく、 $S$  にいないなら、我々の仮定に反して、 $U$  は  $S$  を与えられた  $X$  と  $Y$  を  $d$ -connect する。したがって、 $B$  が  $S$  にあるのは、 $B$  が  $U$  上のコライダーでない場合に限られる<sup>③</sup>。

**定理 6.3:** CI アルゴリズムの入力が  $G$  に忠実な  $O$  上のデータである場合、出力は  $O$  上の  $G$  の部分配向誘導パスグラフとなる。

**証明する。** 証明は、因果推論アルゴリズムの繰り返しループにおける方位規則の適用回数に対する帰納法によるものである。 $G'$  を  $G$  の誘導パスグラフとし、リピートループの  $n$  回目の反復後にアルゴリズムが構築したオブジェクトを  $n$  とする。

基本ケース:  $F$  において  $A \ast\ast B \ast\ast C$  が隣接していない場合、 $A \ast\ast B \ast\ast C$  は、 $B$  が  $\text{Sepset}(A, C)$  のメンバーではない場合は  $A \ast\rightarrow B \leftarrow\ast C$  として、 $B$  が  $\text{Sepset}(A, C)$  のメンバーならば  $A \ast\ast B \ast\ast C$  として方向づけられるという、唯一の方向づけルールが適用されているとする。仮に  $A$

<sub>0</sub> では  $\ast\rightarrow B \leftarrow\ast C$  であるが、 $G'$  ではない。このことから、 $B$  は  $\text{Sepset}(A, C)$  のメンバではなく、以下のどちらかである。

ブル

$B$ は $G'$ において $A$ の親または $C$ の親である。 $B$ が $G'$ において $A$ または $C$ の親である場合、 $A$ と $C$ の間には $B$ で衝突せず、終点を除いて $B$ のみを含む無向パスが存在する。任意の部分集合 $S$ について、 $G'$ におけるそのパスが $S$ を与えられた $A$ および $C$ をd-connectしない場合、 $S$ は $B$ を含むことになり、セセット $(A, C)$ は $B$ を含むという矛盾が成立する。

$0$ において $A \xrightarrow{\pi} B \xrightarrow{\pi} C$ が存在するが、 $A$ と $B$ 、 $B$ と $C$ の間の辺は $G'$ において $B$ で衝突するとする。このとき、 $\text{Sepset}(A, C)$ は $B$ を含むが、 $G'$ において $A$ と $C$ をd分割するすべての集合は $B$ を含まないので、 $\text{Sepset}(A, C)$ は $B$ を含まない、これは矛盾となる。

帰納法ケース： $n$ が $G$ の部分配向誘導パスグラフであるとする。以下、 $n+1$ が $G$ の部分配向誘導パスグラフであることを示す。

ケース1： $A$ から $B$ への有向パスがあり、 $n$ にエッジ $A \xrightarrow{\pi} B$ があるので、 $A \xrightarrow{\pi} B$ は $A \xrightarrow{\pi} B$ として配向される。誘導仮説により、 $n$ にエッジ $R \rightarrow S$ がある場合は、エッジ



$G'$ において $R \rightarrow S$ となる。 $n$ に $A$ から $B$ への有向パスがあれば、 $G'$ に $A$ から $B$ への有向パスが存在することがわかる。 $G'$ は非周期的であるから、 $G'$ において $A \rightarrow^* B$ となる。

ケース2:  $n$ において $B$ が $\langle A, B, C \rangle$ に沿ったコライダーであり、 $B$ が $D$ に隣接し、 $A$ と $C$ が $D$ を与えられてもd-接続されていない場合、 $B \leftarrow^* D$ として $B \rightarrow^* D$ を配する。誘導仮説により、 $B$ は $G'$ において $\langle A, B, C \rangle$ に沿ってコライダーであり $D$ が $B$ と隣接する。 $G'$ において、 $D$ が与えられたときに $A$ と $C$ がd-連結でない場合は

$\langle A, B, C \rangle$  ならば、 $B$ は $\{D\}$ に子孫を持たない。したがって、 $G'$ において $D \rightarrow^* B$ となる。

ケース3:  $U$ が $M$ 宿の $A \cdot B$ 間の明確な判別経路であり、 $U$ 上で $P$ と $R$ が $M$ に隣接し、 $P$ - $M$ - $R$ が三角形である場合。

$M$ が $\text{Sepset}(A, B)$ にある場合、サブパス $P \rightarrow^* M \rightarrow^* R$ 上で $M$ を非共闘者としてマークする。

else orient  $P \rightarrow^* M \rightarrow^* R$  as  $P \rightarrow^* M \leftarrow^* R$ .

帰納仮説により、 $U$ が $n$ における $M$ の確定判別パスであるならば、それは $G'$ における $M$ の判別パスである。レンマ6.3.2により、 $G'$ において、 $U$ が $M$ のための判別パスであるならば、 $M$ が $\text{Sepset}(A, B)$ にない場合にのみ、 $M$ は $\langle P, Q, R \rangle$ 上のコライダーとなる。

ケース4:  $P \rightarrow^* M \rightarrow^* R$ の場合、向きが $P \rightarrow^* M \rightarrow^* R$ に変更される。帰納仮説により、 $n$ において $P \rightarrow^* M \rightarrow^* R$ の場合、 $G'$ において $P$ から $M$ への辺は $M$ に入っているが $M$ は $P \rightarrow^* M \rightarrow^* R$ のコライダーではないので、 $G'$ において $P \rightarrow^* M \rightarrow^* R$ とする。

## 13.19 定理6.4

ブル

**定理6.4:** FCIアルゴリズムの入力が $G$ に忠実な $\mathbf{O}$ 上のデータである場合、出力は $\mathbf{O}$ 上の $G$ の部分配向誘導経路グラフとなる。

部分配向誘導経路グラフにおいて $A \neq B$  のとき、 $V$ が $\text{Possible-D-Sep}(A, B)$ にあるのは、 $V \neq A$  のときだけで、 $A-V$ 間に、 $U$ のすべてのサブパス $\langle X, Y, Z \rangle$ について $Y$ がサブパス上のコライダーであるか、 $Y$ が $U^\pi$ 上の確定非コライダーではなく、 $X, Y, Z$ は三角形を成す、といった無向経路 $U$ があるとき。

**Lemma 6.4.1:**  $G$ を $\mathbf{O}$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ の誘導パスグラフ、 $F$ を $G$ の高速因果推論アルゴリズムのステップC)で構築した部分配向グラフとした場合

が $O$ にあり、 $A$ と $B$ が $O$ にあり、 $G'$ において $A$ が $B$ の祖先でない場合、 $G'$ における $D\text{-SEP}(A, B)$ のすべての頂点が $F$ における $\text{Possible-D-SEP}(A, B)$ にある。

**証明する。**  $A$ が $B$ の祖先でないとする。 $V$ が $G'$ の $D\text{-SEP}(A, B)$ にある場合、 $A$ から $V$ への無向パス $U$ があり、終点以外のすべての頂点がコライダーである。 $G'$ において、 $U$ のすべてのサブパス $\langle X, Y, Z \rangle$ について、 $Y$ はそのサブパス上のコライダーであることが導かれる。したがって、 $G'$ において、 $Y$ はコライダーであるか、 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ が三角形を形成し、 $Y$ が確定的な非コライダーでないかのいずれかである。

**定理6.4:** FCIアルゴリズムの入力が $G$ に忠実な $O$ 上のデータである場合、出力は $O$ 上の $G$ の部分配向誘導経路グラフとなる。

**証明する。** これは定理6.3およびレンマ6.4.1から直ちに導かれる。

## 13.20 定理6.5

**定理6.5:**  $O$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ の部分配向誘導パスグラフであり、 $A$ から $B$ への有向パス $U$ が $G$ に存在する場合、 $A$ から $B$ への有向パスが $G$ に存在する。

**Lemma 6.5.1:** 有向無周期グラフ $G$ の部分配向誘導パスグラフであるとき  
を $O$ に重ね、 $A \rightarrow B$ を $\pi$ 、 $G$ の中に $A$ から $B$ への有向パスが存在する。

**証明する。**  $G'$ を $G$ の誘導経路グラフとする。 $G'$ において $A \rightarrow B$ とすれば、 $G'$ において $A \rightarrow B$ となる。 $G'$ において $A \rightarrow B$ であれば、 $G$ において、 $A$ に入らない $A$ から $B$ への誘導経路が存在する。したがって、レンマ6.1.4により、 $G$ において $A$ から $B$ への有向経路が存在する。

ブル

**定理6.5:**  $\mathbf{O}$ 上の有向無サイクルグラフ  $G$  の部分配向誘導パスグラフであり、 $A$  から  $B$  への有向パス  $U$  が  $G$  に存在する場合、 $A$  から  $B$  への有向パスが  $G$  に存在する。

**証明する。** レンマ6.5.1により、 $U$  の  $R$  と  $S$  の間の各辺に対して、 $G$  の  $R$  から  $S$  への有向パスが存在する。 $G$  の有向パスの連結は、 $G$  の  $A$  から  $B$  への有向パスである副パスを含む。

### 13.21 定理6.6

**定理6.6:**  $\mathbf{O}$ 上の有向無サイクルグラフ  $G$  のCI部分配向誘導パスグラフであり、 $A$  から  $B$  への半有向パスが  $G$  に存在しない場合、 $A$  から  $B$  への有向パスは  $G$  に存在しない。

**Lemma 6.6.1:**  $G$  が有向無サイクルグラフであり、 $G$  に  $A$  で始まり  $C$  で終わる頂点  $M$  の列と、 $M$  で隣接する頂点  $I$  と  $J$  の各組に対して、 $F$  の  $I$  と  $J$  の間に  $\mathbf{O}$  上の誘導経路  $W$  がちょうど1つ存在するような経路の集合  $F$  があると仮定する。さらに、 $J \neq C$  ならば  $W$  は  $J$  に入り、 $I \neq A$  ならば  $W$  は  $I$  に入り、 $I$  と  $J$  は  $A$  か  $C$  のいずれかの祖先であるとする。そして  $G$  には、 $F$  における  $A$  と  $M$  におけるその後継者の間のパスが  $A$  に入るならば  $U$  は  $A$  に入り、 $F$  における  $C$  と  $M$  におけるその先行者の間のパスが  $C$  に入るならば  $U$  は  $C$  に入るとする、 $A$  と  $C$  間の  $\mathbf{O}$  上の誘導パス  $T$  が存在する。

**証明する。**  $G$  において、 $A$  で始まり  $C$  で終わる  $\mathbf{O}$  の頂点列  $M$  と、 $M$  で隣接する頂点  $I$  と  $J$  の各組に対して、 $I$  と  $J$  の間に  $\mathbf{O}$  上の誘導経路  $W$  がちょうど1つあり、 $J \neq C$  なら  $W$  は  $J$  に入り、 $I \neq A$  なら  $W$  は  $A$  に入り、 $I$  と  $J$  は  $A$  または  $C$  のいずれかの先祖であるような経路の集合  $F$  が存在するとする。 $T$  は無向きのサイクルを含む可能性があるため、非周期的無向パスでない可能性がある。ここで、終点を除いて、 $T$  上の  $\mathbf{O}$  のすべての頂点はコライダーであり、 $T$  上のすべてのコライダーは  $A$  または  $C$  の祖先であることを示す。

$V$  が  $\mathbf{O}$  の頂点で  $T$  上にあり、 $A$  または  $C$  に等しくない場合、 $F$  のすべてのパス上のすべてのエッジは  $V$  に入る。したがって、 $T$  上のエッジは  $F$  の誘導パスのエッジのサブセットであるため、 $V$  を含む  $T$  上のすべてのエッジは  $V$  に入る。

仮説によれば、 $R$  は  $A$  または  $C$  のいずれかの祖先であり、 $S$  は  $A$  または  $C$  のいずれかの

ブル

祖先である。 $W$ は $O$ 上の誘導パスであるため、 $W$ 上のすべてのコライダーは $R$ または $S$ のいずれかの祖先であり、したがって、 $A$ または $C$ のいずれかの祖先である。したがって、 $W$ 上のすべての頂点は $A$ か $C$ のいずれかの祖先である。 $T$ 上の頂点は $F$ のパス上の頂点の部分集合であるから、 $T$ 上のすべてのコライダーは $A$ か $C$ の祖先であることがわかる。

定義により、 $T$ は $O$ 上の $A$ と $C$ の間の誘導経路である。

$T$ 上の端点 $A$ を持つ辺が、 $F$ 上の経路で、 $A$ が

もし $T$ 上の端点 $A$ を持つ辺が、 $A$ がパスの端点でない $O$ 上の誘導パス上にある場合、 $A$ は $O$ にあるので $T$ は $A$ に入り、端点でないすべての誘導パス上でコライダーとなります。同様に、 $F$ において $C$ とその前任者の間のパスが $A$ に入る場合、 $T$ は $C$ に入る。

$X$ - $Y$ 間の無向パス $U$ を含む誘導パスまたは有向無サイクルグラフ $G$ において、 $V$ - $W$ 間のエッジは、 $V$ と $W$ が $U$ 上にあり、 $V$ が $U$ 上の $X$ - $W$ 間にあり、 $G$ が $V$ - $W$ 間のエッジを含む場合にのみ、 $U$ における $U(V, W)$ に置き換え可能である、 $V$ は $U(X, V)$ の連結と $V$ と $W$ の間の辺が $U$ 上のコライダーである場合にのみコライダーとなり、 $W$ は $U(Y, W)$ の連結と $V$ と $W$ の間の辺が $U$ 上のコライダーである場合にのみコライダーである。

**Lemma 6.6.2:**  $G$ が $O$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ の誘導パスグラフで、 $C$ が $G$ 中の $B$ の子孫で、 $U$ が $X$ と $R$ の間の $G$ の無向パスで、サブパス $A$ を含むとするとき

\*-> さらに、 $U(X, E)$ と $E$ と $C$ の間の辺の連結は $C$ に入り、 $U$ が $X$ に入るなら、 $U(X, E)$ と $E$ と $C$ の間の辺の連結は $X$ に入ることになります。

**証明する。**  $G$ を $O$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ の誘導パスグラフ、 $C$ を $G$ 中の $B$ の子孫、 $U$ を $X$ と $R$ の間の $G$ 中の無向パスで、サブパス $A$

\*->  $E$ と $F$ が $U$ 上にあるとき、 $E$ と $F$ の間に $U$ 上の辺があり、 $E$ が $X$ と $F$ の間にあるか、 $E = X$ である場合に限り、 $F$ は $U$ 上の $E$ の後継者であるということにします。 $U$ 上の $X$ の後継者を $Y$ とする。

まず、 $X$ と $A$ 包括の間の $U$ 上に、 $V$ から $C$ への辺が $U(V, C)$ で代用できるような頂点 $V$ が存在せず、 $Y$ と $A$ 包括の間の $U$ 上の各頂点が $G$ において $C$ と隣接する場合を考える。 $Y$ から $B$ への有向パスが存在することを示す。

$U(E, B)$ が $E$ から $B$ への有向パスでないように、 $U$ 上で $B$ に最も近い頂点を $E$ とする。 $F$ を

ブル

$U$ 上の $E$ の後継とする。 $F$ は $G$ において $B$ の祖先であり、 $U$ 上の衝突者ではなく、仮定により $F$ は $C$ に隣接する。 $F=B$ とすると、 $G$ では $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$ となる。 $G$ には $A$ と $C$ の間の誘導路があり、それは $A$ と $C$ に入るので、 $G$ では $A \leftrightarrow C$ となり、 $A$ と $C$ の間の辺は $A$ と $C$ の間の $U$ のサブパスで代用可能である。 $F$ と $C$ の間のエッジは $U$ の $U(F,C)$ で代用できないので、 $F$ は $U(X,F)$ と $F$ と $C$ の間のエッジを連結したコライダーであることがわかる。



$F$ と $C$ の間の辺は $F$ と $C$ に入り、 $U$ 上の $E$ と $F$ の間の辺は $F$ に入る。 $E$ は $B$ の祖先ではなく、 $F$ は祖先なので、 $E$ と $F$ の間の辺も $E$ に入ることになる。したがって、 $G'$ は $E \leftrightarrow F \leftrightarrow C$ の経路を含む。 $F$ は $G'$ において $B$ の祖先であり、 $B$ は $G$ において $C$ の祖先であるので、 $F$ は $G$ において $B$ の祖先である。レンマ6.6.1により、 **$O$ に対する $G$ の $E$ と $C$ の間には**、 $E$ に入り $C$ に入る誘導経路が存在するが、そうすると $G'$ では $E$ と $C$ の間の辺は $U$ の $U(E, C)$ に置き換え可能であり、矛盾する。

$U(Y, B)$ が $Y$ から $B$ への有向パスであることを示した。 $Y$ は $G$ において $B$ の祖先であり、 $B$ は $G$ において $C$ の祖先であるため、 $Y$ は $G$ において $C$ の祖先である。したがって、 $Y$ は $U$ 上のコライダーではない。仮定によれば、 $G'$ には $Y$ と $C$ の間にエッジがある。 $Y$ と $C$ の間の辺が $U$ の $U(Y, C)$ と置換可能でない場合、 $Y$ と $C$ の間の辺は $Y$ に入り、 $G'$ は非周期的（すなわち、 $G'$ に有向サイクルはない）なので、 $Y$ と $C$ の間の辺も $C$ に入る。 $Y$ と $C$ の間の辺が $U$ の $U(Y, C)$ と置換不可能で、 $Y$ と $C$ との辺は $Y$ に入っているので、 $X$ と $Y$ との辺は $Y$ に入っていると言える。したがって、 $G'$ には $X \rightarrow Y \leftrightarrow C$ というパスがあり、 $Y$ は $G$ 中の $C$ の祖先である。このことから、 **$O$ に対する $G$ 中の $X$ と $C$ の間には**、 $C$ に入る誘導パスがあり、 $U$ が $X$ に入るなら $X$ にも入る。しかし、この場合、 $X$ と $C$ の間の辺は $U$ の $U(X, C)$ に置き換え可能であり、これは矛盾である。

次に、 $V$ から $C$ への辺が $U$ の $U(V, C)$ に置換可能であるような $X$ と $A$ を含む間の $U$ 上の頂点 $V$ が存在せず、 $Y$ と $A$ を含む間の $U$ 上のある頂点が $C$ に隣接しない場合について考える。 $E \neq A$ は、レンマ6.6.1により、 $G$ において $A$ と $C$ の間に誘導経路が存在し、したがって、 $G'$ において $A$ は $C$ に隣接している。前のケースから、 $U(E, C)$ 上の $V$ と $C$ の間に、 $U(E, C)$ の $U(V, C)$ に置換可能な辺が存在するか、 $F$ が $G'$ において $B$ の祖先となることが分かる。まず、 $U(E, C)$ 上の $V$ と $C$ の間に、 $U(E, C)$ 上の $U(V, C)$ と置換可能な辺があると

ブル

する。  $E$  は  $C$  に隣接していないので、  $V \neq E$  となり、  $V$  は  $U(F, C)$  上に存在する。  $V$  と  $C$  の間の辺が  $U(E, C)$  の  $U(V, C)$  に置換可能であれば、それは  $U$  の  $U(V, C)$  にも置換可能であり、これは矛盾することになる。したがって、  $F$  は  $G'$  における  $B$  の祖先である。  $E$  の定義により、  $F$  は  $G'$  において  $C$  に隣接する。  $G'$  は非周期的なので、  $F$  と  $C$  の間の辺は、  $C$  から外に出て  $F$  に入ることはない。  $F$  と  $C$  の間の辺は、  $U(E, C)$  において  $U(F, C)$  と置換不可能であり、  $U(F, B)$  は  $F$  から  $B$  への有向パスであるから、  $F$  から  $F$  に出ることも  $C$  に入ることもない。  $G'$  に  $E \rightarrow F$  があれば、  $G'$  は  $E \rightarrow F \leftrightarrow C$  の経路を含み、  $F$  は  $G'$  において  $C$  の祖先であり、したがって  $G$  において、次のものが存在することになる。

は、 $G$ の $O$ に対する $E$ と $C$ の間の誘導経路であり、 $E$ は $G'$ において $C$ に隣接している。  
これは矛盾である。

$E=X$ の場合、 $X$ を終点とする $U$ 上の辺を含む、 $X$ と $C$ の間の誘導経路が存在する。最初の場合、 $U$ が $X$ に入るなら誘導経路は $X$ に入り、したがって $C$ と $X$ の間の辺は $X$ に入ることになる。第二の場合、 $U(X, V)$ と $V$ と $C$ の間の辺の連結からなる経路は、 $X$ を終点とする $U$ 上の辺を含むので、 $U$ が $X$ の中にある場合、 $X$ の中にある。

**Lemma 6.6.4:** が $O$ 上のグラフ $G$ のCI部分配向誘導パスグラフであり、 $A$   
で  $A \xrightarrow{*} B$ 、 $G$ の $A$ - $B$ 間のすべての誘導経路は $B$ に入る。

**証明する。** 因果推論アルゴリズムの各オリエンテーションルールが、 $A$ と $B$ の間のエッジを $A \xrightarrow{*} B$ のようにオリエンテーションする場合、 $G$ の $O$ 上の $A$ と $B$ の間のすべての誘導経路が $B$ に入るようなルールであることを証明する。

ケース1: レンマ6.5.1により、 $A$ と $B$ の間の辺を $A \rightarrow B$  inとして方向付けるルールのいずれかが、 $G$ 中に $A$ から $B$ への有向パスを含む。 $G$ 中の $A$ と $B$ の間に $B$ から外れる $O$ 上の誘導パスがあり、 $G$ 中に $B$ から $A$ への誘導パスがある場合。しかし $G$ は環状ではないので $G$ 中の $A$ と $B$ 間の誘導パスで $B$ へ入らないものは存在しない。

定理6.5により、 $G$ には $A$ から $B$ への有向パスが存在する。もし、 $B$ から外れる $G$ の $A$ - $B$   
 $\pi$   
間の $O$ 上の誘導パスが存在するならば、 $G$ には $B$ から $A$ への有向パスが存在する。

ケース3:  $A$ - $B$ 間のエッジが $A \xrightarrow{*} B$ という向きになるのは、 $A$ - $B$ がas adjacent in  $\pi$ ,  $B$  and  $C$  are adjacent in  $\pi$ ,  $A$  and  $C$  are not adjacent in  $\pi$ ,  $B$  is not in  $\text{Sepset}(A, C)$  という頂点 $C$ が存在するからだとします。 $G'$ において $A \xrightarrow{*} B \leftarrow^* C$ が成立することがわかる。 $G$ の構成

ブル

から、 $G$ には $A$ と $B$ の間の $\mathbf{O}$ を越える誘導経路が $B$ に、 $B$ と $C$ の間の $\mathbf{O}$ を越える誘導経路

が $B$ に存在することがわかる。レンマ6.1.4により、 $G$ において $A$ は $B$ の子孫であり、レ

ンマ6.6.1により $A$ - $C$ 間に $\mathbf{O}$ を越える誘導経路があるが

$G$ の $A$ と $C$ の間に $O$ 上の誘導経路がある場合、 $A$ と $C$ は仮定に反して、で隣接している。

ケース4:  $B$ が $\langle C, B, D \rangle$ に沿ったコライダーであり、 $B$ は $A$ に隣接し、 $C$ と $D$ は $A$ から $d$ -connectedではないため、 $A$ と $B$ 間の辺は $A \xrightarrow{*} B$ という向きであるとする。定理に反して、 $G$ において $A$ と $B$ の間に $B$ から外れる $O$ 上の誘導経路があるとする。 $G$ において $A$ は $B$ の子孫である。レンマ6.1.1および6.1.2により、 $G$ には $A$ が与えられたとき $C$ と $B$ を $d$ -接続して $B$ に入る経路がある。同様に、 $G$ には $A$ が与えられたとき $D$ と $B$ を $d$ -接続して $B$ に入る経路がある。レンマ3.3.1により、 $C$ と $D$ は

$G$ . これは矛盾していますね。

ケース5:  $U$ が $X$ と $Y$ の間の $B$ の明確な識別経路であり、 $B$ が $U$ 上の三角形にあり、 $B$ が $\text{Sepset}(X, Y)$ にないため、 $A$ と $B$ の間の辺が $A \xrightarrow{*} B$ という向きであるとする。 $U$ が、 $\pi$ において $B$ の明確な判別経路であるならば、帰納仮説により、 $G'$ の対応する経路 $U$ は $B$ の判別経路である。 $G'$ において、 $X$ と $Y$ は明確な判別経路の定義により隣接しないので、 $\text{Sepset}(X, Y)$ から $d$ 分離している。 $G'$ において $X$ と $Y$ が $\text{Sepset}(X, Y)$ で $d$ -separatedであれば、レンマ6.3.1により $U$ 上の $B$ 以外の全てのコライダーは $\text{Sepset}(X, Y)$ にあり、 $U$ 上の全ての非コライダーは $\text{Sepset}(X, Y)$ にないことがわかる。

$G$ の $B$ と $A$ の間に、 $B$ から外れる $O$ 上の誘導パスがあるとする。このとき、 $G$ の $B$ から $A$ への有向パスがあり、 $G'$ では $A \leftrightarrow B$ となる。判別パスの定義により、 $A$ は $U$ 上のコライダーであるか、 $A=X$ であることがわかる。レンマ6.3.1により、 $A$ は $\text{Sepset}(X, Y)$ にあることがわかる。したがって、 $B$ は $G'$ の $U$ 上のコライダーであり、 $B$ は $G$ の $\text{Sepset}(X, Y)$ 内に子孫を持つ。

$\bar{U}$ 上の頂点 $Z$ が $\text{Sepset}(X, Y)$ にあるとき、 $Z$ は $U$ 上のコライダである。誘導経路グラフの定義により、 $G$ には $R$ と $Z$ の間、 $Z$ と $T$ の間に、それぞれが $Z$ に入るような $U$ 上の誘導経路が存在する。レンマ6.1.1と6.1.2により、 $G$ には $R$ と $Z$ の間に $S \setminus \{R, Z\}$ 与えられた $d$ -連結経路、 $Z$ と $T$ の間に $S \setminus \{Z, T\}$ 与えられた $d$ -連結経路、それらがそれぞれが $Z$ に入っているとする経路がある。

$U$ 上に $R$ と $Z$ が隣接し、 $Z$ と $T$ が $U$ 上で隣接するような頂点 $R$ 、 $Z$ 、 $T$ があり、 $Z$ が $U$ 上のコライダである場合、 $Z$ が $\text{Sepset}(X, Y)$ にあるか ( $Z \neq B$ の場合)、 $Z$ が $G$ 中の $\text{Sepset}(X, Y)$ に子孫を持っているか ( $Z = B$ の場合) である。いずれの場合も、 $Z$ は $\text{Sepset}(X, Y)$ に子孫を持つ。

誘導経路グラフの定義により、 $G$ には $R$ と $Z$ 、 $Z$ と $T$ の間に $O$ 上の誘導経路が存在し、その両方が $Z$ に入る。2により、 $G$ には $R$ と $Z$ の間に $\text{Sepset}(X, Y) \setminus \{R, Z\}$  が与えられた $d$ -接続パスと、 $Z$ と $T$ の間に $\text{Sepset}(X, Y) \cap \{Z, T\}$  が与えられた $d$ -接続パスがあり、これらは共に $Z$ に入る。レンマ3.3.1により、 $G$ には $X$ と $Y$ を $d$ -接続するパスが $\text{Sepset}(X, Y)$ により与えられる。しかし、これは $\text{Sepset}(X, Y)$ が与えられたとき、 $X$ と $Y$ が $d$ -separatedであるという仮定に矛盾する。したがって、 $B$ から外れる誘導経路は $G$ に存在しない。

部分配向誘導経路グラフにおける $A$ から $B$ への半指向経路とは、 $A$ から $B$ への無向経路 $U$ において、どの辺も $A$ を指す矢尻を含まない、つまり $U$ 上の $A$ には矢尻がなく、経路上で $X$ と $Y$ が隣接し、 $X$ が経路上の $A$ と $Y$ の間にある場合、 $X$ と $Y$ の間の辺の $X$ 端には矢尻は存在しないものです。

**定理6.6:**  $O$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ のCI部分配向誘導パスグラフであり、 $A$ から $B$ への半有向パスが $G$ に存在しない場合、 $A$ から $B$ への有向パスは $G$ に存在しない。

証明する。 $G$ に $A$ から $B$ への有向パス $P$ があるとする。 $P$ に沿った $O$ の頂点の出現順の並び $P'$ は $P$ の無向パスで。

なぜなら $P'$ で隣接する頂点 $X$ と $Y$ の各組で、 $X$ が $A$ と $Y$ の間、または $X=A$ である場合、 $X$ から外れる $G$ 内の $O$ 上の誘導パスが存在する。 $P'$ が $X$ から $Y$ への半指向性パスであるのは、レンマ6.6.4により、 $P'$ 上に $X$ への矢尻が存在しないため。

## 13.22 定理6.7

**定理6.7:**  $\mathbf{O}$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ の部分配向誘導パスグラフであり、 $A$ と $B$ が $\pi$ 、 $\pi$ で隣接し、 $A$ と $B$ の間にエッジを除く無向パスが存在しない場合、 $G$ には $A$ と $B$ の間に $A$ または $B$ 以外の $\mathbf{O}$ 内の変数を含まないトレクが存在する。

**証明する。**  $G$ の $A$ - $B$ 間のトレックには、 $\mathbf{O}$ のメンバーのうち $A$ または $B$ 以外のメンバー $\pi$ が含まれているとする。  $G$ の $A$ - $B$ 間には辺があるので、  $G$ の $A$ - $B$ 間には誘導経路が存在する。



したがって、 $U$ は、 $A$ または $B$ 以外の $O$ のメンバーを含む無向きのパスである。 $\pi$

### 13.23 定理6.8

**定理6.8:**  $O$ 上の有向無サイクルグラフ $G$ のCI部分配向誘導パスグラフであり、 $A$ から $B$ へのすべての半有向パスが、 $G$ の $A$ から $B$ へのすべての有向パスが $C$ のいくつかのメンバーを含む場合、。

**証明する。**  $U$ が $G$ の $A$ から $B$ への有向パスであり、 $A$ から $B$ への有向パスの中に $C$ に $G$ における $U$ 上の観測変数の並びを $U$ とする。 $U$ の隣接する2つの頂点を $X$ と $Y$ とし、 $X$ は $A$ と $Y$ の間にある。 $U(X, Y)$ は $U$ の有向サブパスであり、終点を除いて観測変数を含まない。したがって、 $U(X, Y)$ は $X$ から外れた $O$ を与えられた $X$ と $Y$ の間の誘導経路である。また、レンマ6.6.4により、 $X$ と $Y$ の間の辺は $X$ に入らない。したがって、 $U$ は $C$ のメンバーを含まない $A$ から $B$ への半指向性パスであるin。

### 13.24 定理6.9

**定理6.9:**  $\pi$  もし、有向無サイクルグラフ $G$ の部分配向誘導経路グラフを $O$ で、 $A \leftrightarrow B$ で $\pi$   $G$ に $A$ と $B$ の共通原因が潜んでいる。

**証明する。** 定理6.6により、 $A$ と $B$ の間の $G$ の $O$ 上の誘導経路はすべて $B$ に入り、かつ $A$ 。レンマ6.1.2により、 $G$ において $A$ への辺と $B$ への辺がある空集合が与えられたとき、 $A$ と $B$ の間にd-connecting path  $U$ が存在する。 $U$ は $G$ の空集合が与えられたとき $A$ と $B$ をd-connectするので、衝突者を含まず、したがって $A$ と $B$ 以外の $O$ メンバーはいない

ブル

。  $U$  には  $A$  への点と  $B$  への点があるので  $U$  は  $A$  と  $B$  間の単一辺ではない。したがって  $U$

上には  $A$  と  $B$  の共通原因となる  $O$  ではないいくつかの頂点  $C$  が存在する。

### 13.25 定理6.10（四元代表の定理）

**テトラッド**                      **表現方法**    **定理 6.10:**    非周期的なLCF  $G$ において、以下のものが存在する。

$LJ(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョークポイントか $IK(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョーク

$G$ が線形に  $IJKL - ILJK = 0$  を意味する場合、点。

グラフ  $G$ において、経路の**長さ**は、その経路に含まれる頂点の数から1を引いたものに等しい。グラフ  $G$ において、長さ  $n$ の経路  $U$ は、 $m \leq n$ であれば長さ  $m$ の経路  $V$ の**初期セグメント**であり、1について

$0 \leq i \leq n+1$ 、 $V$ の第  $i$  頂点は  $U$ の第  $i$  頂点に等しい。グラフ  $G$ において、長さ  $n$ のパス  $U$ は次のようなものである。

長さ  $n$ の経路  $U$ は、 $U$ が $V$ および $UV$ の初期セグメントである場合、長さ  $m$ の経路  $V$ の**適切な初期セグメント**である。長さ  $n$ の経路  $U$ は、 $U$ が $V$ および $UV$ の最終セグメントである場合、長さ  $m$ の経路  $V$ の**適切な最終セグメント**である。

以下のレンマの証明は自明である。

**Lemma 6.10.1:** 有向グラフ  $G$ において、 $R(U,I)$ を非周期経路とし、 $X$ を以下の頂点とする。

$R(U,I)$ の場合、 $U$ から $X$ までの $R(U,I)$ にはユニークな初期セグメントが存在する。

証明では多くの異なる経路を参照するため、通常、有向経路を $R(X,Y)$ で指定し、 $X$ と $Y$ は経路の終点とする。証明の中に経路 $R(U,I)$ があり、 $R(U,I)$ 上に頂点 $X$ がある場合、 $R(U,X)$ は $U$ から $I$ までの $R(U,I)$ の一意の初期区間を指し、 $R(X,I)$ は $X$ から $I$ への $R(U,I)$ の一意の最終区間を指すことになる。

有向無サイクルグラフ  $G$  において、有向パス  $R(U, I)$  と有向パス  $R(V, J)$  との最後の交点は、 $R(U, I)$  上の最後の頂点で、 $R(V, J)$  上にも存在する頂点となる。なお、 $G$  が有向無周期グラフの場合、有向パス  $R(U, I)$  と有向パス  $R(V, J)$  の最後の交点は、 $R(V, J)$  と  $R(U, I)$  の最後の交点と等しく、これは有向環状パスには当てはまらない。

**Lemma 6.10.2:**  $G$  が有向無サイクルグラフであるとき、 $G$  のすべての変数  $Y$  と  $Z$  に対して、 $YZ$  と  $R$  と  $R'$  がそれぞれシンク  $Y$  と  $Z$  を持つ二つの交差する有向パスであれば、 $R$  と  $R'$  のサブパスからなる  $Y$  と  $Z$  間のトレクが存在することになります。



ブル

$l(r(u,i))l(r(u,j))l(r(v,k))l(r(v,l))$

ーフ

$^{2,2}m$  に関連する経路を次のようにする。

順序付き四重極  $\langle R(U,I), R(U,J), R(V,K), R(V,L) \rangle$  があります。共分散の積のパス形式の項と、このような順序付き四重極との間には、一対一の対応がある。関連するパスが異なる場合、項 $m$ と $m'$ を別個の項とみなす(すなわち、項は同じエッジラベルの同じ数の出現を含むが、順序が異なる場合がある)。この項の同一性の基準では、共分散の積やテトラッド差のパスフォームに2度現れる項はないことに注意する。今後、ある式に現れる項の集合を考える場合、各項はその式に最大1回出現するという仮定で行う(ただし、値が同一に等しい別個の項は

が式中出现する)。関連する四則演算が $X$ を含む場合、項 $m$ がパスまたはトレック $X$ を含むと言うことにする。

**Lemma 6.10.4:**  $IJKL$ のパスフォームは項 $m$ があり、 $ILJK$ のパスフォームにあるすべての項 $m'$ が $m$ に含まれない辺を含む場合、四分子差 $IJKL - ILJK$ はLCF  $S$ によって消滅するように線形に暗示されることはない。

**証明する。**  $IJKL$ のパスフォームに、 $ILJK$ のパスフォームに含まれるすべての項 $m'$ が $m$ に含まれない辺を含むような項 $m$ があるとする。 $ILJK$ のすべての項が $m$ に含まれない変数を含むので、 $ILJK$ はゼロである。 $IJKL$ のパスフォームに含まれるすべての非ゼロ項は正である。なぜなら、各非ゼロ項のc.f.は正であり、各非ゼロ項のc.f.は正であるからである。 $IJKL$ は、その中のすべての項が0か正のどちらかであり、一部は正であるため、0ではありません。したがって、四分木差は直線的に消滅することを意味しない。

**Lemma 6.10.5:** LCF  $S$ において、tetrad differenceのパスフォームにある項 $m$ のパスが項 $m'$ のパスと異なるソースを持つ場合、 $m$ には $m'$ にない何らかの変数が含まれる。

**証明する。**  $m$ と $m'$ のパスの元はそれぞれ独立な確率変数であり、 $m$ や $m'$ のパスがすべて空であることはないものとする。 $m$ のパスの元を $\{I, J\}$ 、 $m'$ のパスの元を $\{K, Z\}$ とし、 $\{I, J\}$ を仮定する。 $\{K, Z\}$ であるとする。を仮定する。

$I$ 、 $K$ 、 $Z$ は独立なので、 $I$ はソース $K$ や $Z$ のあるパスには出現しない。 $m$ は $I$ のうち少なくとも1つの辺 $X$ を含む。

LCF  $F$ において、 $e(S)$ は $S$ が独立変数であれば $S$ と等しく、 $S$ が独立変数でなければ $S$ への誤差変数と等しくなる。

**Lemma 6.10.6:** LCF  $S$ において、以下のような $T(I, J) \boxplus T(I, J)$ 、 $T(K, L) \boxplus T(K, L)$

ブル  
が存在する場合。

$i(t(i,j)) \cap k(t(k,l)) = \phi, j(t(i,j)) = \phi, L(T(K,L)) = \phi, I(T(I, J)) \cap L(T(K,L)) = \phi$ 、である。

は、 $ILJK$ のすべての項 $m$ が $m$ に含まれない辺を含むような $IJKL$ の項 $m$ が存在することを  
証明する。 $S$ を $T(I,J)$ の元とし、 $S'$ を $T(K,L)$ の元とする。(なお、 $I(T(I,J))$ は $L(T(K,L))$ と  
交差しないので、 $T(I,J)$ の元は $T(K,L)$ の元とはならず、従って $e(S)$ は $e(S')$ とはならない。  
図4参照。

$m = L(R(e(S),I))L(R(e(S),J))L(R(e(S'),K))L(R(e(S'),L))$  とする。 $m$ は $IJKL$ の項の係数(全項に  
は $m$ 中のパスの発生源の分散の積と同じ因子も含まれている)。



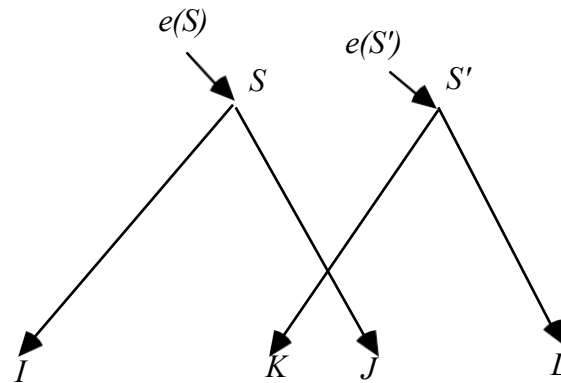


図4

$ILJK$ に、関連するパスが $m$ 中のエッジのみを含む項 $m'$ があるとする。 $m'$ はトレック $T(I,L)$ のエッジのラベルの積を含む。 $T(I,L)$ の元を $S''$ とする。 $S'' \neq S$ 、 $S'' \neq S'$ であれば、 $e(S'') \neq e(S)$ 、 $e(S'') \neq e(S')$ となります。 $e(S'')$ は独立変数であり、 $m$ における独立変数は $e(S)$ と $e(S')$ だけなので、 $e(S'') \neq e(S)$ かつ $e(S'')$ ならば

$\neq S'' = S$ とすると、 $T(I,L)$ には $m$ に含まれないエッジラベルが存在することになる。

。

$\cap L(T(K,L)) = \square$ 、 $L$ を含む $m$ 内のパスは $L(T(K,L))$ だけである。したがって、 $R(S,L)$ は $L(T(K,L))$ とある頂点で交差している。ソース $S$ を持つ $m$ 内のパスは $I(T(I,J))$ と $J(T(I,J))$ の2つだけで、どちらも $L(T(K,L))$ とは交差していない。したがって、そのうちの1つは他のパスと交差し、そのパスは $L(T(K,L))$ と交差することになる。 $L(T(K,L))$ と交差する $m$ 内の他のパスは、 $K(T(K,L))$ だけである。つまり、 $R(S,L)$ は $K(T(K,L))$ と交差している。 $L(T(K,L))$ と $K(T(K,L))$ の最後の交点は $S'$ なので、 $R(S,L)$ は $S'$ かそれ以前に $K(T(K,L))$ と交わっている。しかし、 $m$ 内にソース $S$ を持つパスは $J(T(I,J))$ と $I(T(I,J))$ しかなく、どちらも $K(T(K,L))$ と $S$ の位置または手前で交差している。同様に、 $S'$ から $I$ へのパスには、 $m$ 内のエッジラベルのみを含むパスは存在しないことが示される。

**Lemma 6.10.7:** LCF  $S$ において、 $I(T(I, J)) \cap K(T(K, L)) = \phi$ 、 $L(T(K, L)) \cap J(T(I, J)) = \phi$ 、または $T(I, L) \boxplus (I, J)$ が存在する場合、 $T(K, L) \boxplus T(K, J)$ が存在し、かつ $T(I, J)$ 、 $T(K, L) \boxplus T(K, L)$ 、が存在する。

$I(T(I, L)) \cap K(T(J, K)) = \phi$ 、 $L(T(I, L)) \cap J(T(J, K))$ となるような $T(I, L)$  および $T(J, K) \boxplus T(J, K)$ であって

$= \boxplus$ であれば、 $S$ は $IJKI - ILJK$ が消滅することを線形に含意しない。

**証明する。**  $I(T(I, J)) \cap K(T(K, L)) = \boxplus$ ,  $L(T(K, L)) \cap J(T(I, J)) = \boxplus$ と w.l.g. を仮定します。

i)  $I(T(I, J)) \cap L(T(K, L)) = \phi$ 、 $J(T(I, J)) \cap K(T(K, L)) = \phi$ のいずれか、または4ケースです。

(ii)  $I(T(I, J)) \cap L(T(K, L)) = \phi$ 、 $J(T(I, J)) \cap K(T(K, L)) \neq \phi$ 、または(iii)  $I(T(I, J)) \cap L(T(K, L))$

$\neq \emptyset$ 、 $J(T(I, J)) \cap K(T(K, L)) = \emptyset$ 、または (iv)  $I(T(I, J)) \cap L(T(K, L)) \neq \emptyset$  であり、 $J(T(I, J)) \cap K(T(K, L)) \neq \emptyset$ 。  
 $K(T(K, L)) \neq \emptyset$ 。

最初の3つのケースでは、レンマ6.10.6によって、 $IJKL$ のすべての $m'$ を満たすような項 $m$ が存在する。

$\forall_{IL} \forall_{JK} m$ にないエッジラベルを含む。

第4の場合、 $I(T(I, J))$ と $L(T(K, L))$ の最後の交点を $X$ とし、 $J(T(I, J))$ と $K(T(K, L))$ の最後の交点を $Y$ とする。そうでなければ $I(T(I, J)) \cap K(T(K, L)) \neq \emptyset$ なので、 $X$ はいずれのトレックの元でもない。 $\neq \emptyset$ または $J(T(I, J)) \cap L(T(K, L)) \neq \emptyset$ 。同様に、 $Y$ はどちらのトレックも元にはならない。 $\{R(X, I), R(X, L)\}$ は、レンマ6.10.2により、 $I$ と $L$ の間のトレック $T(I, L)$ となる。同様に、 $\{R(Y, J), R(Y, K)\}$ はトレック $T(J, K)$ を形成する。(図5参照)。

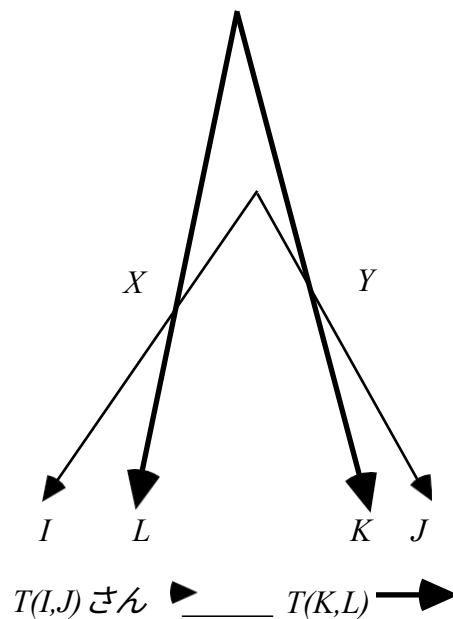


図5

ブル

ここで、 $T(I,L) \cap T(J,K) = \emptyset$ を示す。 $I(T(I,L))$ は $T(I,J)$ の適正サブパスであり、 $J(T(J,K))$ は $J(T(I,J))$ の適正サブパス、そして $I(T(I,J))$ と $J(T(I,J))$ の最後の交点は、 $T(I,J)$ の源となるからである、 $I(T,L) \cap J(T(J,K)) = \emptyset$ 、 $I(T(I,L)) \cap K(T(J,K)) = \emptyset$ であるため、以下のようになります。

$I(T(I,L))$ は $I(T(I,J))$ のサブパスであり、 $K(T(J,K))$ は $K(T(K,L))$ のサブパスであり、 $I(T(I,J))$ 。

$K(T(K,L)) = \emptyset$ となる。同様の理由で、 $L(T(I,L)) \cap J(T(J,K)) = \emptyset$ 、 $L(T(I,L))$ 。

$\cap K(T(J,K)) = \emptyset$ である。レンマ6.10.7から、 $IL_{JK}$ の項 $m$ が存在し、そのような項 $m$ はすべての

$IL_{KL}$ の $m$ は、 $m$ に含まれないエッジラベルを含む。

$ILJK$ には、 $IJKL$ のすべての $m$ が $m$ に含まれない辺を含むような項 $m$ が存在するので、レンマ6.10.4により $IJKL - ILJK$ は線形に含意されない。

テトラッド差の消失は、4組の変数の共分散を制約するものである：

$\langle I, J \rangle$ 、 $\langle K, L \rangle$ 、 $\langle I, L \rangle$ 、 $\langle J, K \rangle$  である。大雑把に言えば、このような変数ペアの4組のチョークポイントとは、 $I$ と $J$ 間のトレックのすべてが $K$ と $L$ 間のトレックのすべてと交差し、 $I$ と $L$ 間のトレックのすべてが $J$ と $K$ 間のトレックのすべてと交差する点である（より正確な定義は後で述べる。本節では、LCF  $G$ において、このようなチョークポイントの存在が、 $G$ が完全に表現する分布において対応する四分子差が消滅するための必要条件であることを証明する。 $G$ におけるチョークポイントの存在は、 $S$ が消滅する四分子差を線形に暗示するための必要条件として既に証明されている条件、すなわちレンマ 6.10.7 で述べたトレックの交差条件と等しいことを示すことによってこれを証明する。残念ながら、この証明は長く退屈なものである。なぜなら、どのトレックが交差すると仮定し、どのトレックが交差しないと仮定するかによって、チョークポイントが存在しないことができる多くの異なる方法が存在するからである。それぞれの場合において、チョークポイントの非存在が、レンマ6.10.7で説明した必要条件の違反を意味することを示す。

証明には2つの戦略が採用されている。一つは、交差するトレックと交差しないトレックについての仮定が矛盾を引き起こすことを示すことである。もう一つは、 $I$  ( $T(I, J)$ ) と $K$  ( $T(K, L)$ ) が交差せず、 $J$  ( $T(I, J)$ ) と $L$  ( $T(K, L)$ ) が交差しないようなトレック  $T(I, J)$  と  $T(K, L)$  を組立てることが可能であることを示す（つまり、 $\rho_L$ ) が交わらないように、あるいは、 $I$  ( $T(I, L)$ ) と $K$  ( $T(J, K)$ ) が交わらず、 $J$  ( $T(J, K)$ ) と $L$  ( $T(I, L)$ ) が交わらないようにトレック  $T(I, L)$  および  $T(J, K)$  の対を構築する

ブル  
こと。いずれの場合も、レンマ6.10.7により、 $IJ \cdot KL - IL \cdot JK$ は $G$ によって線形に含意されないことが分かる。

一般に、トレック $T(I, J)$ を構成する場合、共通のソース $S$ からシンク $I$ と $J$ にそれぞれ向かう（非循環）有向パスのペア $R$ と $R'$ の構成方法を示せば十分であるかのように話すが、構成した有向パスのペアが交差しないことを示すことはない。これは、 $R$ と $R'$ が $S$ 以外の頂点で互いに交差してトレックを形成しないとしても、 $R$ と $R'$ の有向サブパスがトレックを形成することをレンマ6・10・2で示したので、 $R$ と $R'$ の有向サブパスが存在すれば十分であるためである。我々は一般に、トレックの枝の特定のペアが交差しないことを示すことに興味がある。もし $R_1$ と $R_2$ が交差しないのであれば、 $R_1$ と $R_2$ の有向亜経路も交差しないことになる。したがって、トレックブランチ $T$ と $T'$ が交差しないことを示すことが目的であれば、 $T$ と $T'$ がそれぞれ $R_1$ と $R_2$ の有向サブパスに等しいとしても、 $R_1$ と $R_2$ が交差しないことを示せば十分である。

$S$ を頂点の集合とし、 $\mathbf{RK}(S)$ をシンク $K$ とソース $in$ を持つすべての有向パスの集合とする。

$S, \mathbf{RK}(S)$ の有向パスが交差する $R(S, I)$ 上の $n$ 番目の頂点を $X_n$ とする。 $\mathbf{RK}(S)$ の有向パスのうち、 $R(S, I)$ との最初の交点が $X_n$ であるものの元となる集合を $S_n$ とする。 $\mathbf{RK}(S)$ のある有向パスの $R(S, I)$ との最初の交点となる $R(S, I)$ の最後の頂点を $X_{max.}$ とする。なお、 $X_{max.}$ は必ずしも $\mathbf{RK}(S)$ と $R(S, I)$ のある有向パスの最後の交点とは限らず、単に最初の交点の最後の点である。図6を参照。

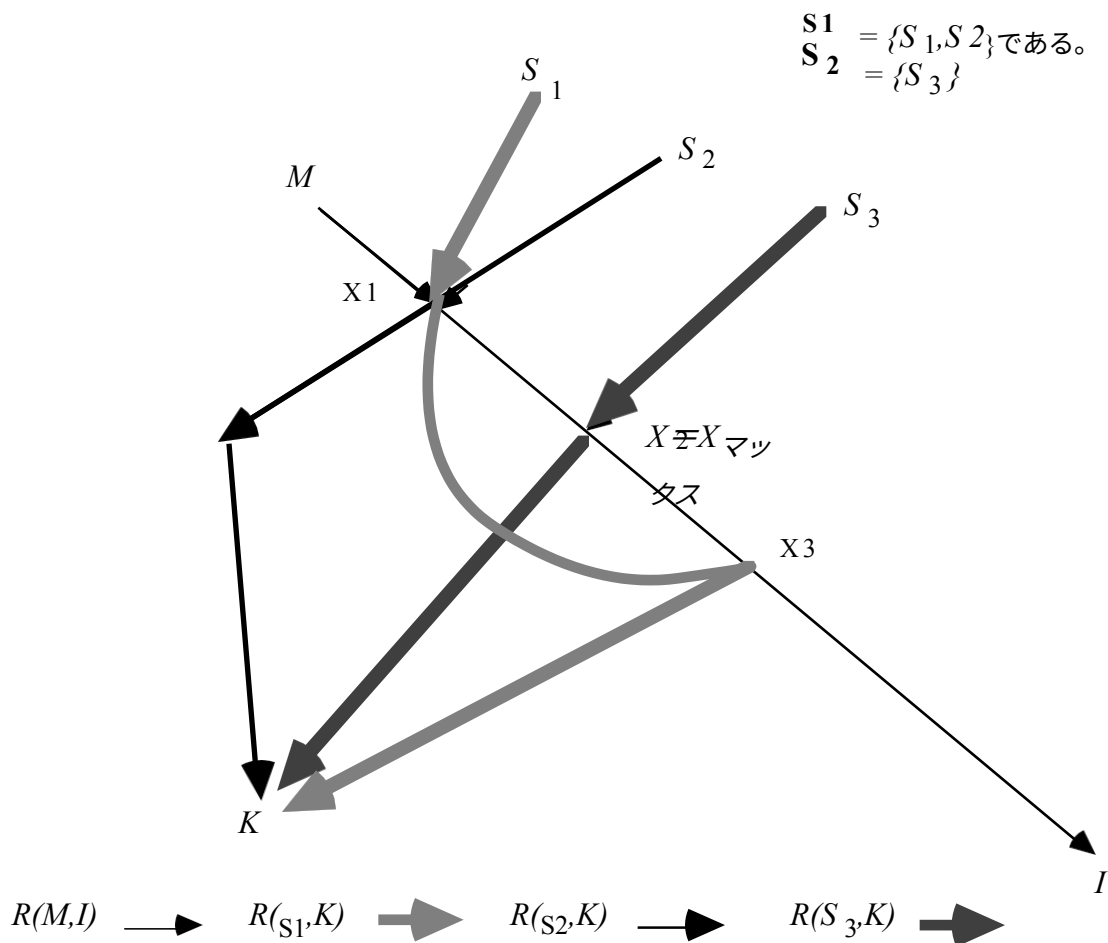


図6

**Lemma 6.10.8:** 有向非周期グラフ $G$ において、 $R(M, I)$ が有向パスであり、 $\mathbf{RK}(S)$ が与えられたソースの集合 $S$ から $K$ へのすべての有向パスの集合で、 $\mathbf{RK}(S)$ のすべての有

ブル

向パスが  $Z$  で  $R(M, I)$  と交差するような頂点  $Z$  が存在しないとき、次の性質を持つ一対

の有向パス、 $R$  と  $R'$  が存在する:  $M$  は  $R$  のソースであり、 $R'$  は  $S$  にソースを持つ、



$R$ がシンク $I$ を持ち $R'$ がシンク $K$ を持つか、 $R$ がシンク $K$ を持ち $R'$ がシンク $I$ を持ち、 $R$ が $R'$ と交差しないか。

**証明する。**  $RK(S)$ に $R(M, I)$ と交差しないパス $R'$ があれば、証明は完了である。そこで、 $RK(S)$ のすべてのパスが $R(M, I)$ と交差していると仮定する。 $S''$ を  $S_{\max}(RK(S))$ のパスのすべてのソースの集合で、 $R(M, I)$ との最初の交点を  $X_{\max}$ とする)のパスのソースとする。証明は、 $RK(S)$ のパスが $R(M, I)$ と交差する異なる頂点の数に対する帰納法によるものである。

基本ケース：レンマの文中の先行詞が真であるとする。 $RK(S)$ のパスは2つの異なる頂点で $R(M, I)$ と交差する。そうでなければ $RK(S)$ のすべての経路が $X_2$ と交差してしまうので、仮説に反して、 $X_2 (= X_{\max})$ で $R(M, I)$ と交差しない経路 $R(S', K)$ が存在する。また、 $R(S', K)$ は $X_1$ より前のどの頂点でも $R(M, I)$ と交差しない。なぜなら、そうでなければ $RK(S)$ のパスは我々の仮説に反して2つ以上の異なる頂点で $R(M, I)$ と交差してしまうからだ。同様に、 $R(M, I)$ と $X_2$ においてのみ交差する経路 $R(S'', K)$ が存在する。

$R(X_1, K)$ を $R(S', K)$ の最終区間、 $R(S'', X_2)$ を $R(S'', K)$ の初期区間とする。2つのケースがある。

1.  $R(X_1, K)$ は $R(S'', X_2)$ と交差していない。図7を参照。 $R(M, X_1)$ を $R(M, I)$ の初期セグメント、 $R(X_2, I)$ を $R(M, I)$ の最終セグメントとし、 $R = R(M, X_1) \& R(X_1, K)$ 、 $R' = R(S'', X_2) \& R(X_2, I)$ とする。 $R$ と $R'$ は以下の理由で交わることはない。

ブル  
ーフ

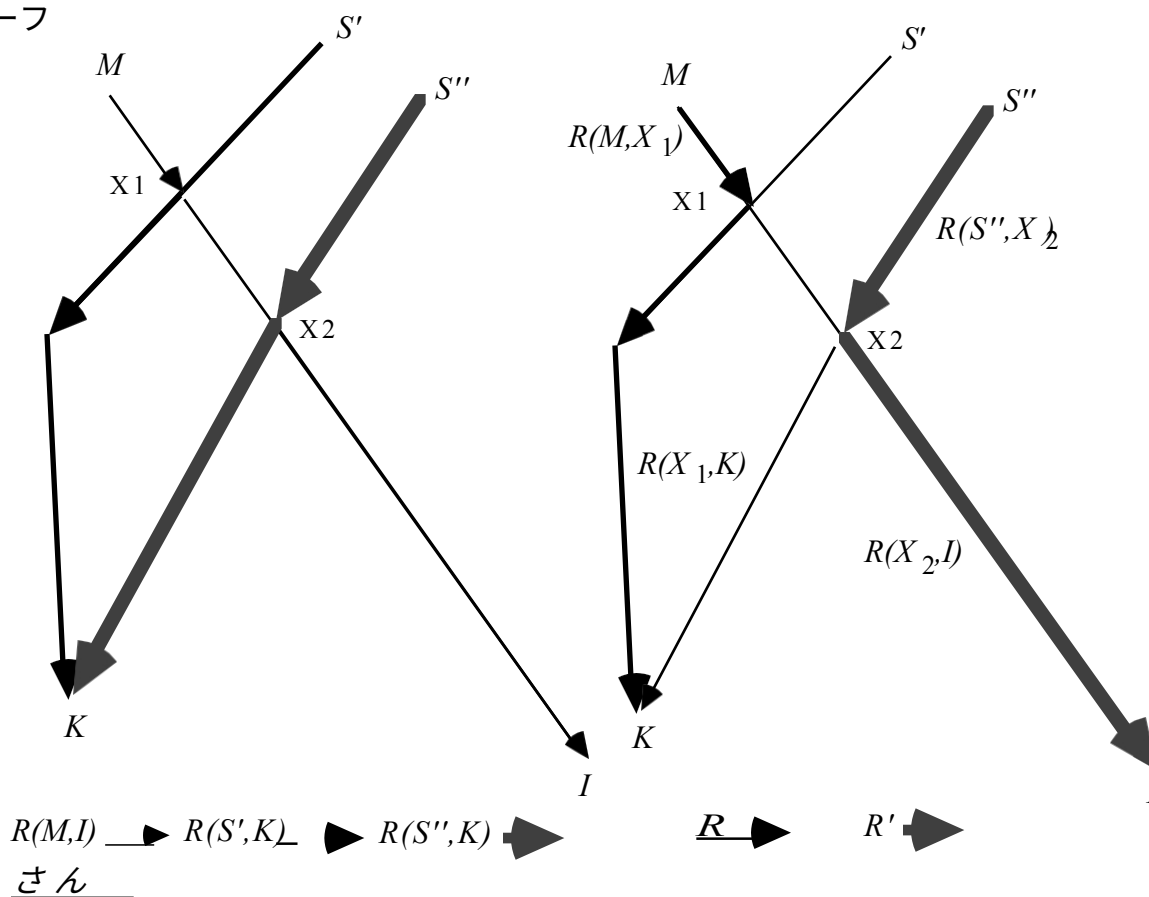


図7

$R(M, X_1)$ は $R(S'', X_2)$ と交差していない。 $R(S'', X_2)$ は $R(S'', K)$ のサブパスであり、仮説により、 $X_2$ においてのみ $R(M, I)$ と交差する。 $R(M, I)$ において $X_2$ は $X_1$ より後に起こるので、 $X_2$ は $R(M, X_1)$ において発生しない。 $R(M, X_1)$ は $R(X_2, I)$ と交差しない。 $R(M, X_1)$ と $R(X_2, I)$ は共に $R(M, I)$ のサブパスであり、 $G$ は非周期的で、仮説により $X_1$ は $X_2$ より前に発生する。 $R(X_1, K)$ は、仮説により $R(S'', X_2)$ と交差しない。 $R(X_1, K)$ は $R(X_2, I)$ と交わることはない。 $R(X_1, K)$ は $R(S', K)$ のサブパスであり、 $R(X_2, I)$ は $R(M, I)$ のサブパスである。仮説により $R(S', K)$ は $X_1$ においてのみ $R(M, I)$ と交差するが、 $R(X_2, I)$ には発生しない。

2.  $R(X_1, K)$  は  $Y$  で  $R(S'', X_2)$  と交差している。図8を参照。 $R(S'', Y)$ の初期セグメントを  $R(S'', K)$ ,  $R(Y, K)$ は $R(S', K)$ の最終セグメント、 $R = R(M, I)$ ,  $R' = R(S'', Y) \& R(Y, K)$ .  $R$

と $R'$ は以下の理由で交わることはない。

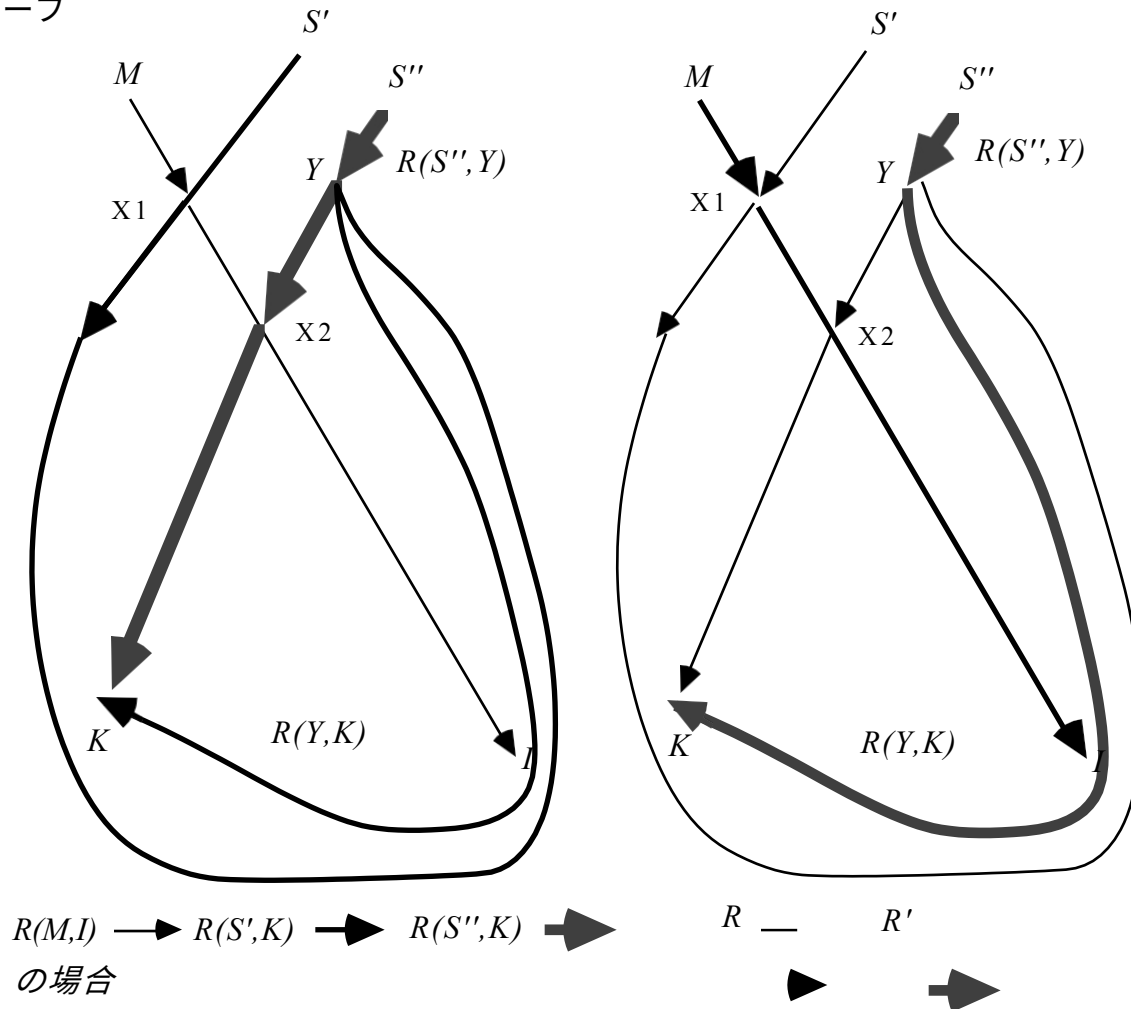


図8

まず、 $R(M,I)$ が $R(S'', Y)$ と交差していないことを示す。また、 $G$ は非周期的であり、 $Y$ は $R(S'', K)$ 上で $X_2$ より前にあり、 $X_2$ は $R(S'', K)$ と $R(M, I)$ の最初の交点となる。次に、 $R(M,I)$ が $R(Y,K)$ と交差していないことを示す。 $Y$ は $X_1$ を含まない $R(S'', K)$ 上にあり、したがって $Y$ は $X_1$ と等しくない。 $R(S', K)$ 上で $Y$ は $X_1$ の後に発生するので、 $R(Y,K)$ は $X_1$ を含まないことが分かる。仮説により、 $R'(M,K)$ は $X_1$ においてのみ $R(M,I)$ と交差するので、 $R(Y,K)$ は $R(M,I)$ とは全く交差しない。

帰納法の場合： $\mathbf{RK}(S)$ に $R(M,I)$ と交差しないパスがあれば、証明は完了である。次に、 $\mathbf{RK}(S)$ のすべての経路が $R(M,I)$ と交差し、 $\mathbf{RK}(S)$ の経路の集合がちょうど $n$ 個の異なる頂点で $R(M,I)$ と交差しているとする。 $R(X_{\max}, I)$ を $R(M,I)$ の最終区間とする。 $\mathbf{RK}(S)$

のすべてのパスが $R(M, I)$ と $X_{max}$ で交差するわけではないので、 $R(M, I)$ には $X_{max}$ より前の交差点が存在する。したがって、 $RK(S)$ のパスと $R(X_{max}, I)$ が交差する点の個数は

誘導仮説により、 $\mathbf{RK}(S)$ のソースにはソース $X_{max}$ を持つパス $R_1$ とソース $S'$ を持つパス $R_1'$ があり、 $R_1$ と $R_1'$ の一方がシンク $I$ 、他方がシンク $K$ で、 $R_1$ と $R_1'$ は交差していないことが分かる。 $R_1'$ は $X_{max}$ を含まないので、 $R(M, I)$ との最初の交点は、 $R(M, I)$ 上で $X_{max}$ より先に発生する頂点 $X_r$ である ( $X_{max}$ の定義により。 $R_1'(X_r, K)$ を $R_1'$ の最終区間、 $R(S'', K)$ を $R(M, I)$ との最初の交点が $X_{max}$ である $\mathbf{RK}(S)$ のパス、 $R(S'', X_{max})$ を $R(S'', K)$ の初期区分とする。) 2つのケースがある。

1.  $R(X, K)$ が $R(S'', X_{max})$ と交差していないとする。 $R = R(M, X_r) \ \& \ R_1'(X_r, K)$  とし、 $R' = R(S'', X_{max}) \ \& \ R_1$ .  $R$ と $R'$ は、基本例のケース1 ( $X_r$ を $X_1$ に、 $X_{max}$ を $X_2$ に置き換えた場合、図9参照) と同様の理由で、交差しない。

2.  $R_1'(X_r, K)$ が $R(S'', X_{max})$ と交差し、最後の交点が $Y$ であると仮定する。 $Y$ は $R_1'(X_r, K)$ 上にあり、 $R_1'(X_r, K)$ は $X_{max}$ を含まないので、 $Y \neq X_{max}$ とする。 $R_1'(Y, K)$ を $R_1'(X_r, K)$ の最終区間とする。2つのケースがある。

a.  $R_1'(Y, K)$ は $R(M, X_{max})$ と交差し、最初の交点は $Z$ であると仮定する。 $R(S'', Y)$ を $R(S'', X_{max})$ の初期セグメント、 $R(Y, Z)$ を $R_1'(Y, K)$ の初期セグメント、そして $R(M, Z)$ を $R(M, I)$ の初期セグメントとする。 $R_1'(Y, K)$ が $X_{max}$ と交差しないので、 $Z \neq X_{max}$ となる。(となる(図9参照) )。

ここで、 $Z$ が $X_{max}$ 以降でないことを証明する。 $R(S'', Y) \ \& \ R(Y, Z)$ の経路を考える。 $Y$ は $X_{max}$ の前に発生し、 $R(S'', Y)$ は $R(S'', K)$ の初期セグメントであり、 $R(M, I)$ と $R(S'', K)$ の最初の交点は $X_{max}$ であるから $R(M, I)$ と交わることは無い。 $R(Y, Z)$ は $R_1'(Y, K)$ の初期セグメントであり、 $Z$ は $R_1'(Y, K)$ と $R(M, I)$ の最初の交点であることから、 $R(Y, Z)$ と $R(M, I)$ の最初の交点は $Z$ です。したがって、 $R(S'', Y) \ \& \ R(Y, Z)$ と $R(M, I)$ の最初の交点は $Z$ である。 $R(S'', Y) \ \& \ R(Y, Z)$ は、 $\mathbf{RK}(S)$ にある $S''$ から $K$ へのパスの初期セグメントである。このことから、 $\mathbf{RK}(S)$ には、その最初の交点が

もし  $Z$  が  $X_{max}$  の後であれば、 $\mathbf{RK}(S)$  には  $R(M, I)$  との最初の交点  $X_{max}$  の後にあるパスが存在し、 $X_{max}$  の定義に反している。

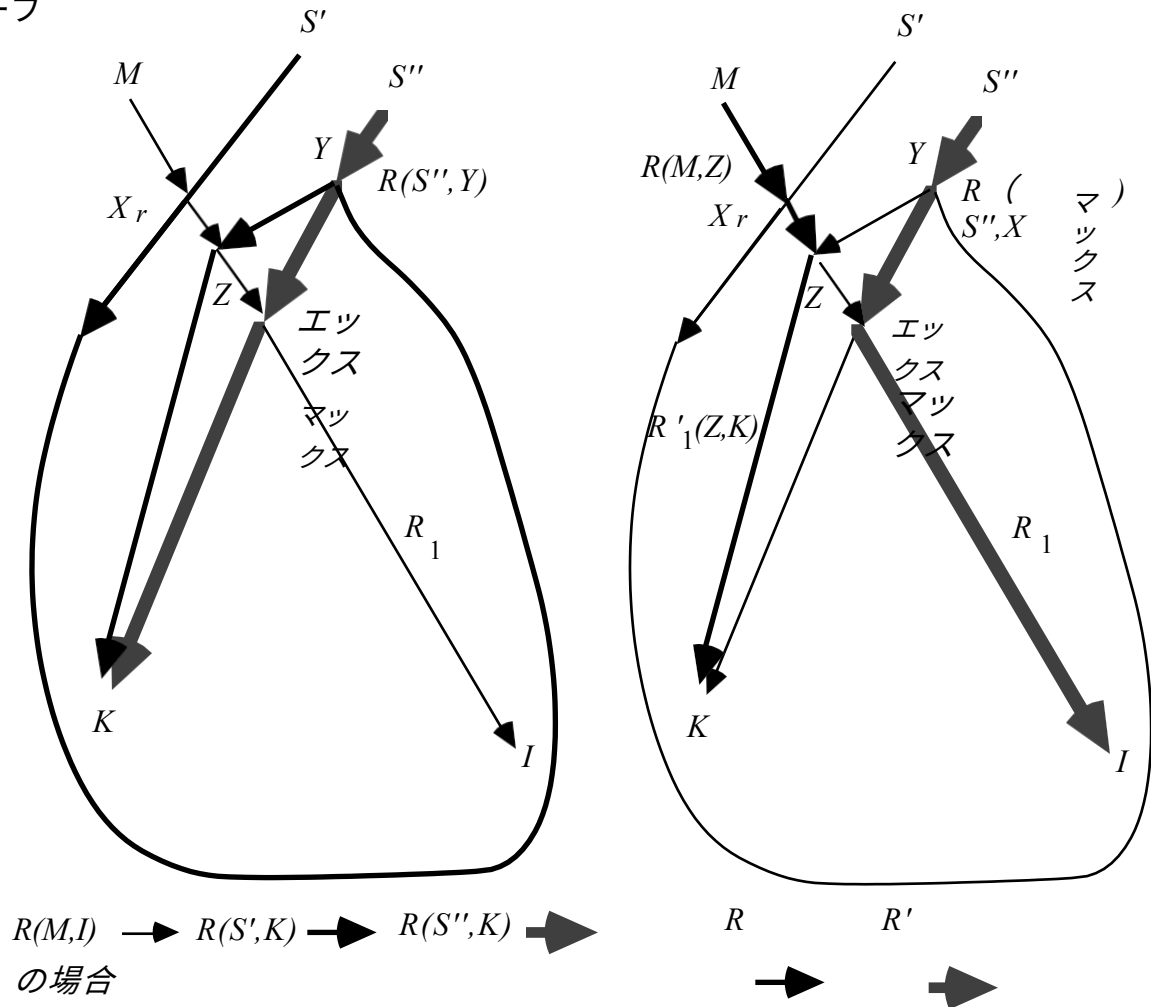


図9

$R = R(M, Z) \ \& \ R_1'(Z, K)$ 、 $R' = R(S'', X_{max}) \ \& \ R_1$  とする。 $R(S'', X_{max})$  は  $R(S'', K)$  の初期セグメントであり、 $R(M, Z)$  は  $R(M, I)$  の初期セグメントであり、 $R(M, I)$  と  $R(S'', K)$  の最初の交点は  $X_{max}$  であるので  $R(M, Z)$  は  $R(S'', X_{max})$  と交わることは無い。 $Z$  は  $X_{max}$  の前に発生し、有向グラフは非周期的であるため、 $R(M, Z)$  は  $R_1$  (ソース  $X_{max}$  を持つ) と交差しない。 $R_1'(Z, K)$  は  $R_1'$  のサブパスであり、構成上  $R_1$  と交差しないので、 $R_1$  とは交差しない。 $R_1'(Z, K)$  は  $R_1'(X_r, K)$  の最終セグメントであり、 $Z$  は  $Y$  の後であり、 $Y$  は  $R_1'(X_r, K)$  と  $R(S'', X_{max})$  の最後の交点であるため、 $R_1'(Z, K)$  は  $R(S'', X_{max})$  とは交叉していない。



b.  $R_1'(Y, K)$ が $R(M, X_{max})$ と交差していないと仮定する。(これは、 $X_{max}$ を $X_2$ に置き換えたBase caseのパート2に似ている。図8参照)。  $R' = R(S'', Y) \& R_1'(Y, K)$ 、  $R = R(M, X_{max}) \& R_1$ とする。 $R(S'', Y)$ が $R(M, I)$ と交差しないこと、 $R(M, X_{max})$ が $R(M, I)$ の初期区分であることは既を示した。 $R(S'', Y)$ は $R_1$ と交差せず、 $Y$ は $R(M, I)$ の前にあるため

ーフ $_{Xmax}$ であり、有向グラフは非周期的である。 $R_1'(Y, K)$ は仮説により $R(M, X_{max})$ と交差せず、 $R_1'(Y, K)$ は構成により $R_1$ と交差しない $R_1'$ のサブパスなので $R_1$ とは交差しない。

有向無サイクルグラフ $G$ において、すべての $L(T(K, L))$ とすべての $J(T(I, J))$ が頂点 $Q$ で交差する場合、 $Q$ は $LJ(T(I, J), T(K, L))$  **チョークポイント**である。同様に、すべての $L(T(K, L))$ とすべての $J(T(I, J))$ が頂点 $Q$ で交差し、すべての $L(T(I, L))$ とすべての $J(T(J, K))$ も $Q$ で交差する場合、 $Q$ は $LJ(T(I, J), T(K, L), T(I, L), T(J, K))$ という**チョークポイント**である。

**Lemma 6.10.9:**有向無サイクルグラフ $G$ において、 $LJ(T(I, J), T(K, L))$ のチョークポイントが存在しない場合、すべての $J(T(I, J))$ と $L(T(K, L))$ との交点に出現する頂点 $V$ がないようなトレック $T(I, J)$ が存在するか、すべての $L(T(K, L))$ と $J(T(I, J))$ の交点に出現する頂点 $V$ が存在するようなトレッキングが存在するか、です。

**証明する。**レンマが偽であるとする。そのとき、各トレッキング $T(K, L)$ について、 $P(T(K, L))$ のすべての点が、 $L(T(K, L))$ とすべての $J(T(I, J))$ の交点にあるような点の空でない集合が存在する。同様に、各トレック $T(I, J)$ について、 $P(T(I, J))$ のすべての点が $J(T(I, J))$ とすべての $L(T(K, L))$ の交点にあるように、点の空でない集合 $P(T(I, J))$ が存在します。すべての

$J(T(I, J))$ は、以下のすべての頂点を含む。 (すべての $J(T(I, J))$ は、各 $J(T(I, J))$ と交差している)  
 $P(T(K, L))$

$$t(k, l) \sqsubseteq t(k, l) \text{ で}$$

ある。

$L(T(K, L))$ は $P(T(K, L))$ のある頂点にあり、 $P(T(K, L))$ の各頂点は、その頂点にある。  $\cup$

$P(T(K, L))$ 上に存在する。

$$t(k, l) \sqsubseteq t(k, l) \text{ である。}$$

あるトレック $L(T(K, L))$ 。同様に、すべての $L(T(K, L))$ は、以下のすべての頂点を含む。  $\cup$

$P(T(I, J))$  のすべての頂点を含む.

$$t(i, j) \sqsubseteq t(i, j)$$

さらに、 $P(T(K, L))$  の各頂点に対して  $\bigcup P(T(K, L))$  には、以下のような  $L(T(K, L))$  が存在しない。

$$t(k, l) \sqsubseteq t(k, l) \text{ である。}$$

を含む（そうでなければ、すべての  $J(T(I, J))$  とすべての  $L(T(K, L))$  は1つの頂点で交差する）、そしていくつかの

$L(T'(K, L))$  を含むものである。同様に、 $P(T(I, J))$  の各頂点について 無きにしもあら

$$\bigcup P(T(I, J)) \text{ ず}$$

$$t(i, j) \sqsubseteq t(i, j)$$

それを含まない  $J(T(I, J))$  とそれを含む  $J(T'(I, J))$  がある。

のすべての頂点は、すべての  $J(T(I, J))$  上に存在するので  $\bigcup P(T(K, L))$  のすべての頂点は、すべての  $J(T(I, J))$  上に存在するので、それらは

$$t(k, l) \sqsubseteq t(k, l) \text{ である。}$$

の頂点は、ある  $J(T(I, J))$  上に出現する順番である。同様に、 $P(T(I, J))$  のすべて かもね  
の頂点は

$$\bigcup P(T(I, J))$$

のすべての頂点

$$t(i, j) \sqsubseteq t(i, j)$$

を命じた。レンマの先行詞により、以下の各項目には少なくとも2つの頂点が存在する。  
。

$\bigcup P(T(K, L))$  および  $\bigcup P(T(I, J))$  である。  
 $t(k, l) \sqsubseteq t(k, l)$   $t(i, j) \sqsubseteq t(i, j)$

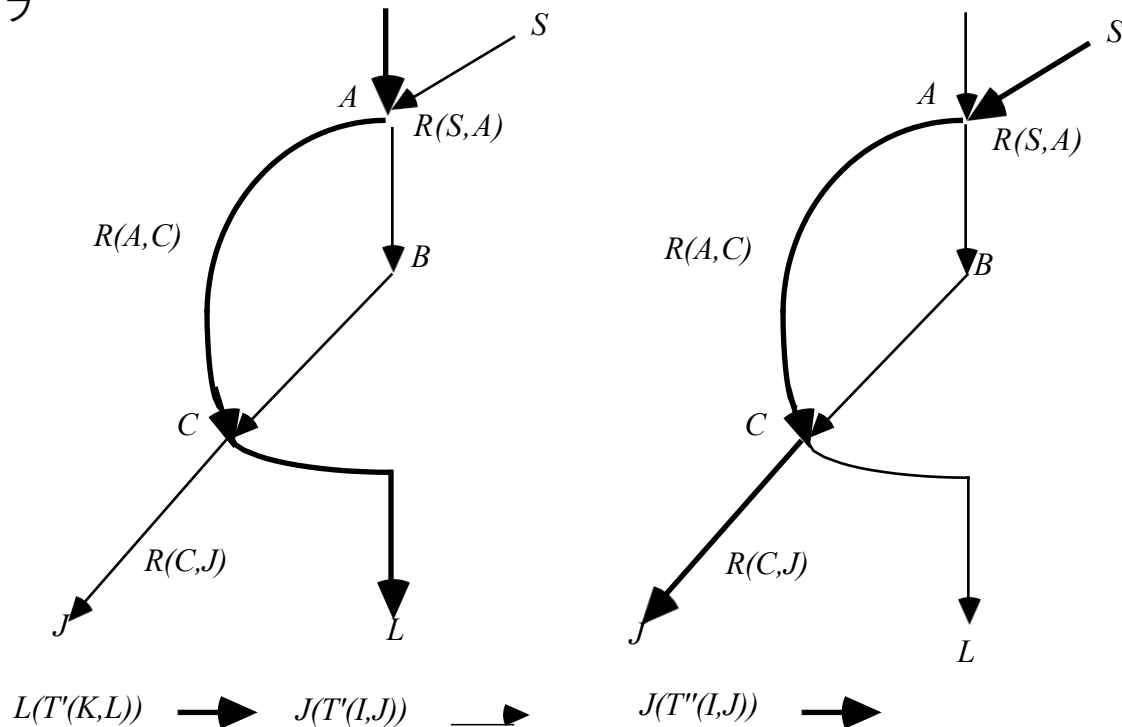


図10

図10をご覧ください。の最初の頂点をAとする。  $\cup$  の最初の頂点をBとする。

$P(T(I, J))$

$$t(i, j) \sqcap t(i, j)$$

$\cup P(T(K, L))$ とする。仮にAがBの前にあるとする。

$t(k, l) \sqcap t(k, l)$  である。

はAを含み（すべての  $L(T(K, L))$  はAを含むので）、Bを含まないが、 $P(T(K, L))$  のある頂点  $C (\neq B)$  を含むものである。  $\cup P(T(K, L))$  に含まれる。

$t(k, l) \sqcap t(k, l)$  である。

また、Aを含む  $J(T(I, J))$  が存在し、Sを  $T(I, J)$  のソース、 $R(S, A)$  を  $J(T(I, J))$  の初期セグメント、 $R(A, C)$  を  $L(T(K, L))$  のセグメント、 $R(C, J)$  を  $J(T(I, J))$  の最終セグメントとしておきます。  $J(T'(I, J)) = R(S, A) \& R(A, C) \& R(C, J)$ ,  $I(T'(I, J)) = I(T(I, J))$  とする。  $J(T''(I, J))$  となる。

がBを含まないのは、以下の理由からである。 $R(S, A)$  は、AがBより先に発生するのでBを含まない。 $R(A, C)$  は、 $L(T(K, L))$  のセグメントであり、Bを含まないので

$R(C, J)$ は $J(T(I, J))$ のセグメントであるため $B$ を含まず、 $B$ は $\bigcup P(T(K, L))$ の最初の頂点  
 点  $t(k, l)$  である。なので、 $J(T(I, J))$ では $C$ より先に発生します。

$t(k, l) \sqsubset t(k, l)$  である。

しかし、これは、すべての $T(I, J)$ に対して、 $J(T(I, J))$ が $B$ を含むという事実と矛盾する。

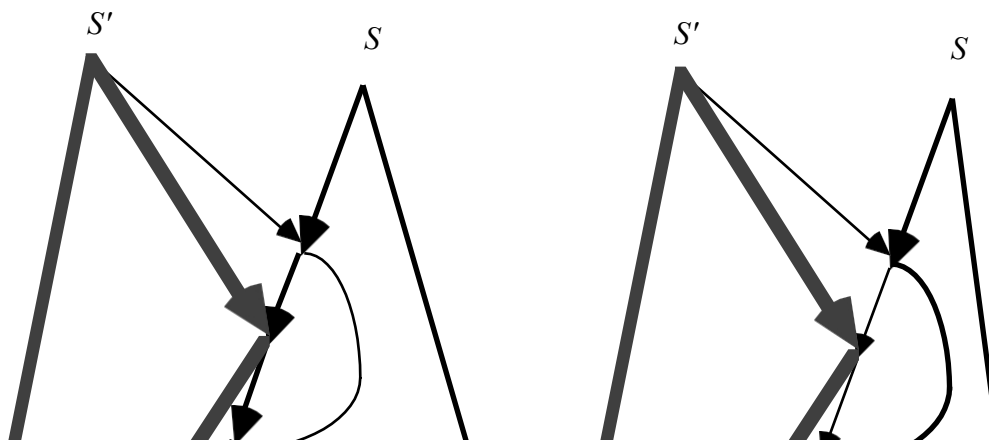
**Lemma 6.10.10.** 有向無サイクルグラフ  $G$  において、 $IK(T(I, J), T(K, L))$  の  
 チョークポイントが存在しない場合、すべての  $I(T(I, J))$  と  $K(T(K, L))$  の交点  
 に現れる頂点  $V$  が存在しないか、または、 $K(T(K, L))$  と  $I(T(I, J))$  の交点に現れる  
 頂点  $V$  が存在しないトレッキング  $T(I, J)$  が存在します。

**証明する。** レンマ6.10.10の証明は、レンマ6.10.9の証明と同じで、 $I, J, K, L$  が  
 パーミュレートされています。

**Lemma 6.10.11:** 非周期的LCF  $G$  において、すべての  $J(T(I, J))$  と  $L(T(K, L))$   
 ) ) との交点に現れる頂点  $V$  が存在しないようなトレック  $T(K, L)$  が存在する場合、 $J$   
 ( $T'(I, J)$ ) が  $L(T'(K, L))$  と交差しないようなトレック  $T'(I, J)$  と  $T'(K, L)$   
 ,  $L$  が存在するか、 $IJKL - ILJK$  は  $G$  によって線形暗示しない。

**証明する。**  $T(K, L)$  の発生源を  $S$  とし、 $I$  と  $J$  の間のトレックの発生源の集合を  $S'$  とす  
 る。レンマ6.10.8により、発生源  $S$  と  $S'$  ( $S$  内)、シンク  $J$  と  $L$  を持つ、 $R$  と  $R'$  が交差し  
 ないような経路の対  $R$  と  $R'$  を構成することが可能である。2つのケースがある。

1.  $R$  を  $S$  から  $L$  へのパス、 $R'$  を  $S'$  から  $J$  へのパスとすると、 $R$  と  $R'$  のサブパスから以下の  
 トレックを形成することができる。(図11参照)  $J(T'(I, J)) = R'$ 、 $I(T'(I, J)) = I(T(I, J))$ 、  
 $K(T'(K, L)) = K(T(K, L))$ 、 $L(T'(K, L)) = R$ 。構成上、 $R$  は  $R'$  と交差しないので、 $J(T'(I, J))$  は  $L(T'(K, L))$  と交差しない。



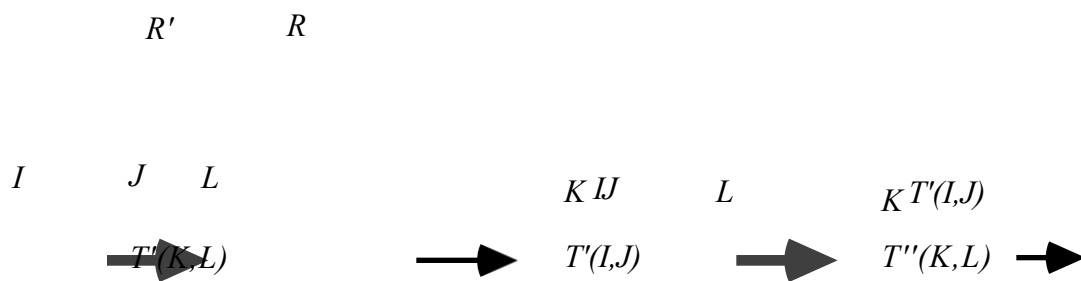


図11

2.  $R$ を $S$ から $J$ への道、 $R'$ を $S'$ から $L$ への道とした場合、2つのケースがある。

a.  $K(T(K,L))$  は  $I(T(I,J))$  と交差し、交差点の最初の頂点は  $Y$  である。 $R(S,Y)$  を  $K(T(K,L))$  の初期セグメント、 $R(Y,K)$  を  $K(T(K,L))$  の最終セグメント、 $R(S',Y)$  を  $I(T(I,J))$  の初期セグメント、 $R(Y,J)$  を  $I(T(I,J))$  の最終セグメント、 $J(T(I,J)) = R$ 、 $I(T(I,J)) =$

$R(S,Y) \& R(Y,J)$ 、 $K(T'(K,L)) = R(S',Y) \& R(Y,K)$ 、 $L(T'(K,L)) = R'$  です。(図12参照) により  
の構成では、 $J(T'(I,J))$  と  $L(T'(K,L))$  は交わることはない。

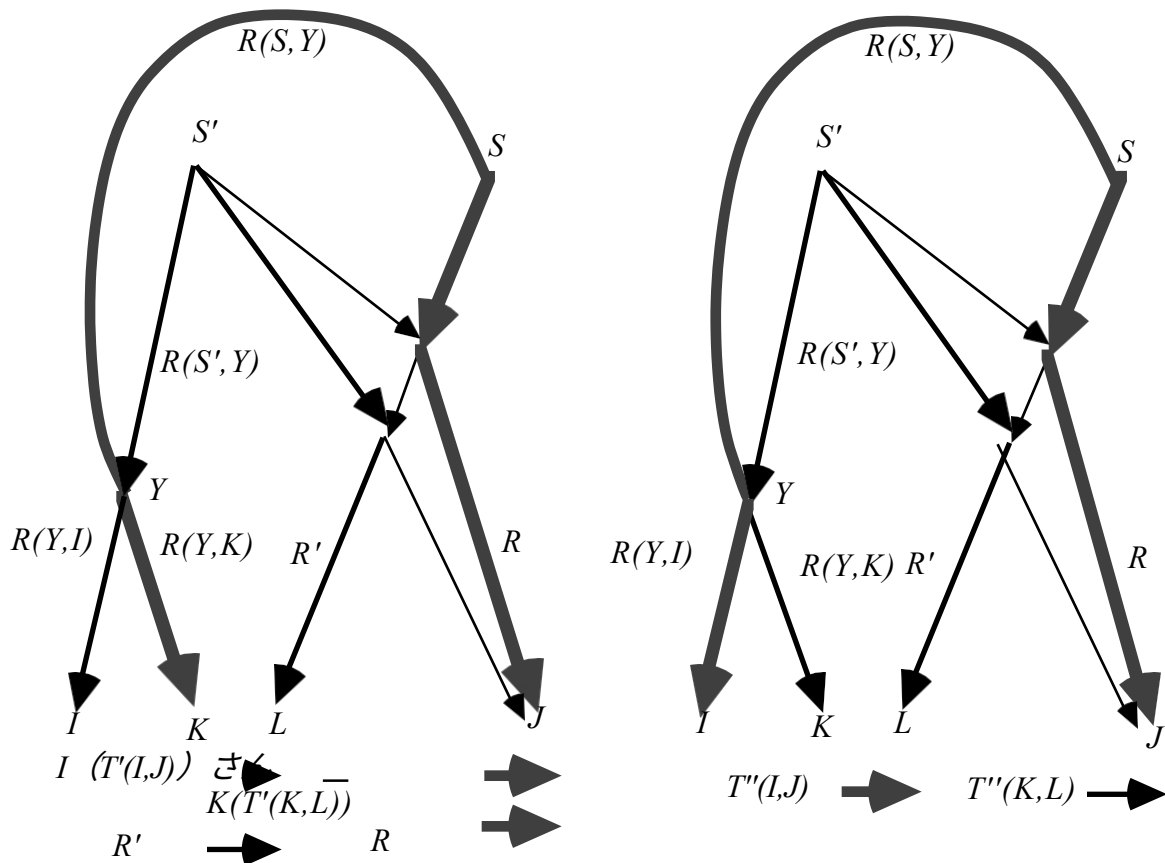


図12

b.  $K(T(K,L))$  が  $I(T(I,J))$  と交差しえない場合、以下のトレックを形成することができる。(図13参照)  $I(T(I,L)) = I(T(I,J))$ 、 $L(T(I,L)) = R'$ 、 $J(T(J,K)) = R$ 、 $K(T(J,K)) = K(K,L)$ 。



仮説により、 $K(T(J,K))$ は $I(T(I,L))$ と交わることはない。構成上、 $L(T(I,L))$ は

$J(T(J,K))$ と交わることはない。 $\rho \quad \rho \quad \rho \quad \rho$ したがって、レンマ6.10.7により、 $IJ \quad KL$

-  $IL \quad JK$ は $G$ によって線形に含意されない。

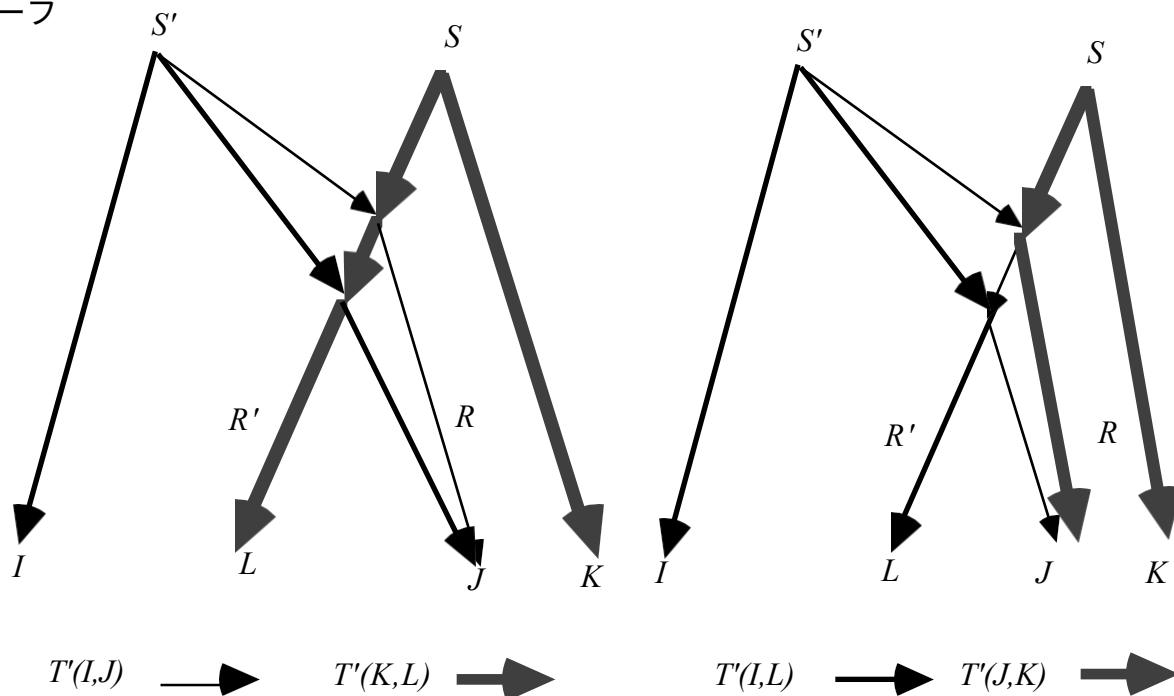


図13

**Lemma 6.10.12:**非周期的LCF  $G$ において、すべての  $L(T(K, L))$  と  $J(T(I, J))$  の交点に出現する頂点  $v$  が存在しないようなトレック  $T(I, \rho)$   $\rho$  が存在するとする、となるようなトレック  $T'(I, J)$  と  $T'(K, L)$  が存在し、 $J(T'(I, J))$  が  $L(T'(K, L))$  と交差しないか、 $IJ_{KL} - IL_{JK} = 0$  が  $G$  によって線形に暗示されないかのいずれかであるとする。

**Lemma 6.10.13:**非周期的LCF  $G$ において、すべての  $K(T(K, L))$  と  $I(T(I, J))$  の交点に出現する頂点  $v$  が存在しないようなトレック  $T(I, J)$  が存在する場合、とすると、 $I(T'(I, J))$  が  $K(T'(K, L))$  と交差しないようなトレック  $T'(I, J)$  と  $T'(K, L)$  が存在するか、 $IJ_{KL} - IL_{JK} = 0$  は  $G$  によって線形に暗示されない。

**Lemma 6.10.14:**非周期的LCF  $G$ において、すべての  $I(T(I, J))$  と  $K(T(K, L))$  の交点に出現する頂点  $v$  が存在しないようなトレック  $T(K, \rho)$   $\rho$  が存在する場合、とすると、 $I(T'(I, J))$  が  $K(T'(K, L))$  と交差しないようなトレック  $T'(I, J)$  と  $T'(K, L)$  が存在するか、 $IJ_{KL} - IL_{JK} = 0$  は  $G$  によって線形に暗示されない。

$K, L)$  が存在するか、 $IJ_{KL} - IL_{JK} = 0$  が  $G$  によって線形に暗示されないかのいずれか。

レンマ6.10.12、6.10.13、6.10.14の証明は、いずれも  $I$ 、 $J$ 、 $K$ 、 $l$  を順列化することによって、レンマ6.10.11の証明から得ることができる。

**Lemma 6.10.15:** 非周期的LCF  $G$ において、 $LJ(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントがなく、 $IK(T(I,J), T(K,L))$  チョーク頂点がない場合、トレッキング  $T(I,J), T(K,L), T'(I,J)$  が存在します、

と  $T'(K,L)$  の間で、 $I(T(I,J))$  が  $K(T(K,L))$  と交差せず、 $J(T'(I,J))$  が  $L(T'(K,L))$  と交差しないか、 $IJKL - ILJK = 0$  は  $G$  により線形暗示されていない。

**証明する。** これは、レンマ6.10.9から6.10.14から直接導かれる。

**Lemma 6.10.16:** 非周期的LCF  $G$ において、 $LJ(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントがなく、 $IK(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントがない場合、 $IJKL - ILJK = 0$  は  $G$  により線形暗示されない。

**証明する。**  $LJ(T(I,J), T(K,L))$  のチョークポイントは存在せず、 $IK(T(I,J), T(K,L))$  のチョークポイントは存在しないと仮定する。レンマ6.10.15により、 $IJKL - ILJK = 0$  が  $G$  によって線形暗示されないか、または  $I(T(I,J))$  が  $K(T(K,L))$  と交差せず、 $J(T'(I,J))$  が  $L(T'(K,L))$  と交差しないようなトレック  $T(I,J), T'(I,J), T(K,L), T'(K,L)$  が存在すると考えられる。 $IJKL - ILJK = 0$  が  $G$  によって線形に暗示されない場合、証明は終了する。次に、 $I(T(I,J))$  が  $K(T(K,L))$  と交差せず、 $J(T'(I,J))$  が  $L(T'(K,L))$  と交差しないようなトレック  $T(I,J), T(K,L), T'(I,J)$  および  $T'(K,L)$  が存在するとする。の3つのケースがある。

1. すべての  $T(I,J), J(T(I,J))$  が頂点  $P'$  の空でない集合の各頂点で  $L(T(K,L))$  と交差し、すべての  $L(T(K,L))$  が頂点の空でない集合の各頂点で  $J(T(I,J))$  と交差するとしよう。

**P.**したがって、すべての  $L(T(K,L))$  は  $P$  のすべての頂点を含み、すべての  $J(T(I,J))$  は  $P'$  のすべての頂点を含む。 $LJ(T(I,J), T(K,L))$  のチョークポイントは存在しないので、すべての  $T(I,J)$  とすべての  $T(K,L)$  に対して、 $Z$  が  $L(T(I,J))$  と  $J(T(I,J))$  の交差に出現するとい

う頂点 $Z$ が存在しない。したがって、 $P$ と $P'$ は交わることはない。

$P$ の最初の頂点を $A$ 、 $P'$ の最初の頂点を $B$ とする。 $A$ は $B$ の前に発生するとする。

$S'(I,J)$ を $T(I,J)$ の元、 $S'(K,L)$ を $T(K,L)$ の元、 $S'(I,J)$ を $T'(I,J)$ の元とし、 $S'(K,L)$ を $T'(K,L)$ の元とする。 $L(T'((K,L)))$ は $A$ を含み(すべての $L(T(K,L))$ は $A$ を含むので)、 $J(T'(I,J))$ は $B$ を含む(すべての $J(T(I,J))$ なので)の2つのケースがある。

a.  $K(T'((K,L)))$ が $I(T'((I,J)))$ と交差していないとする。すると、 $K(T'(K,L))$ は交差しないので

は $I(T'(I,J))$ と交差し、 $J(T'(K,L))$ は $L(T'(K,L))$ と交差しない、レンマ 6.10.7 により、 $\rho_{IJ, KL} = 0$ となる。

$\rho_{IL, JK} = 0$ は $G$ によって線形に暗示されることはない。

b.  $K(T'(K, L))$ が $I(T'(I, J))$ と頂点 $X$ で交差しているとする(図14参照)。

$R(S'(I,J), X)$ は $I(T'(I,J))$ の初期セグメント、 $R(X, K)$ は $L(T'(K,L))$ の最終セグメントである。とする。

$R(S'(I,J), B)$ は $J(T'(I,J))$ の初期セグメント、 $R(B, L)$ は $L(T(K,L))$ の最終セグメントである。

下レック  $K(T'''(K,L)) = R(S''(I,J,X) \& R(X,K), L(T'''(K,L)))$  を形成します。

$R(S''(I,J),B) \& R(B,L)$  となる。 $R(S''(I,J),B)$  は  $J(T'(I,J))$  のサブパスで、 $A$  を含む  $L(T'(K,L))$  と交差しないので、 $A$  を含まない。 $R(B,L)$  には  $A$  が  $B$  より前に発生するので、 $A$  を含まない。したがって  $L(T''(K,L))$  には  $A$  は含まないがこれは矛盾である。

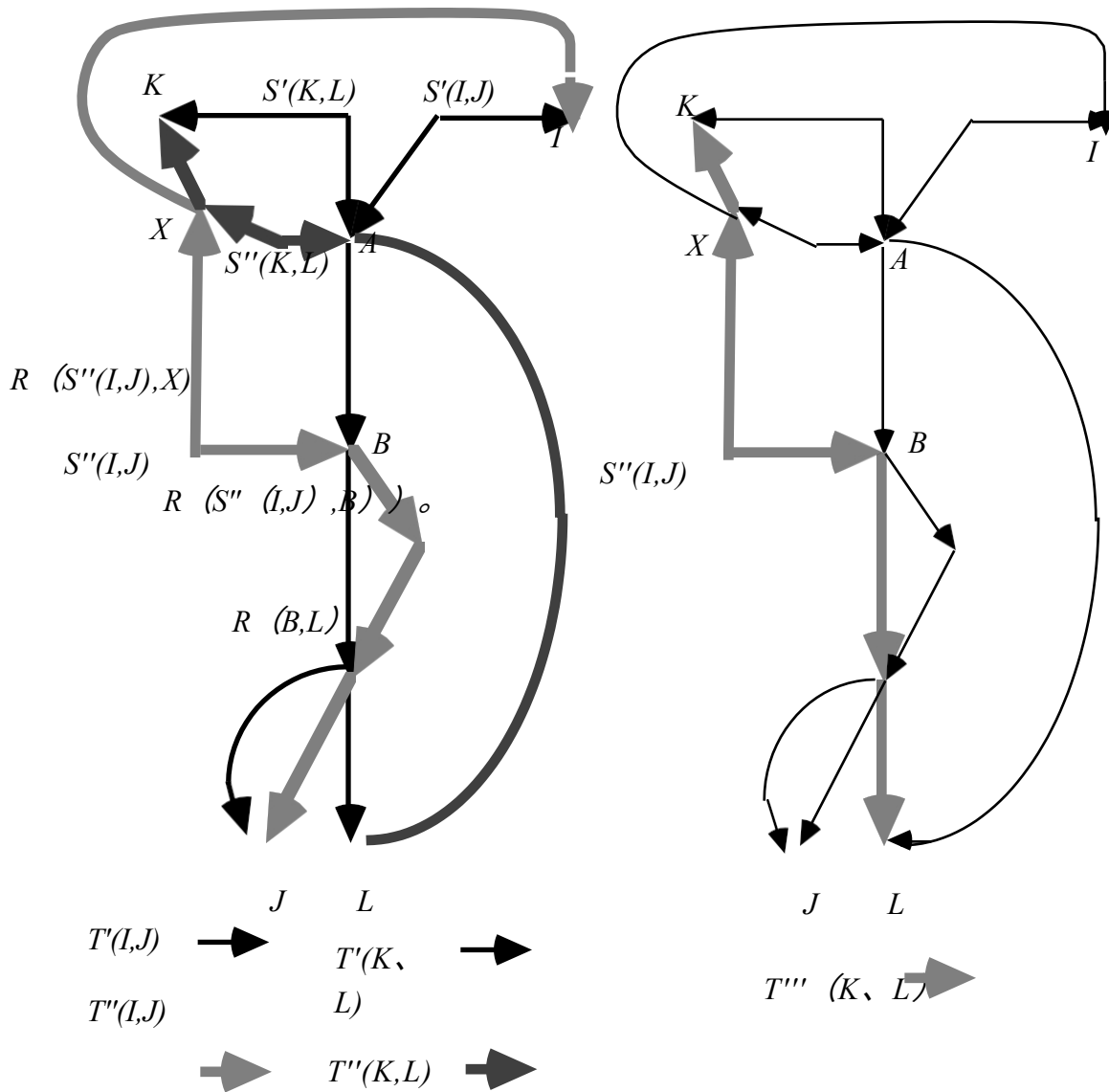


図14

2. すべての  $L(T(K,L))$  が  $J(T(I,J))$  と交差するが、1つの頂点では交差しない、あるいはすべての  $J(T(I,J))$  が  $L(T(K,L))$  と交差するが1つの頂点でもない。後者であることを仮定する。 $T(I,J)$  の元を  $S'$  とし、 $T(K,L)$  の元を  $S$  とする。レンマ6.10.8により、交差しな

い2つの経路 $R(S'', L)$ と $R(S, J)$ 、 $R(S'', J)$ と $R(S, L)$ を作ることが可能で、 $S''$ は $S$ 内に存在する．交差しない経路 $R(S'', L)$ と $R(S, J)$ を形成することが可能であると仮定する。(交差しない経路が $R(S'', J)$ と $R(S, L)$ の場合、インデックスが順列化される以外は同じ証明である)。を持つトレックを $T''(I, J)$ とする。

ーフ  
source  $S''$  (図15参照)  $I(T'(I,J))$  と  $I(T(I,J))$  の最初の交点を  $M$  とすると、2つのケースがあります。

a.  $I(T'(I,J))$  が  $M$  で  $I(T'(I,J))$  と交差する前に  $K(T'(K,L))$  と交差しないとする。(図15参照)  $R(M,I)$  を  $I(T(I,J))$  の最終セグメント、 $R(S''(I,J))$  の初期セグメントとする。 $I(T(I,L)) = R(S'', M) \& R(M, I)$ 、 $L(T(I,L)) = R(S'', L)$ 、 $J(T'(J,K)) = R(S, J)$  であるとする。

となり、 $K(T(J,K)) = K(T(K,L))$  となる。 $R(S'', M)$  と  $R(M, I)$  は仮説により

$\rho \quad \rho \quad \rho \quad \rho$   
 $K(T(K,L))$  と交差していない。レンマ6.10.7により  $IJKL$

-  $ILJK = 0$  は  $G$  によって線形に暗示されない。

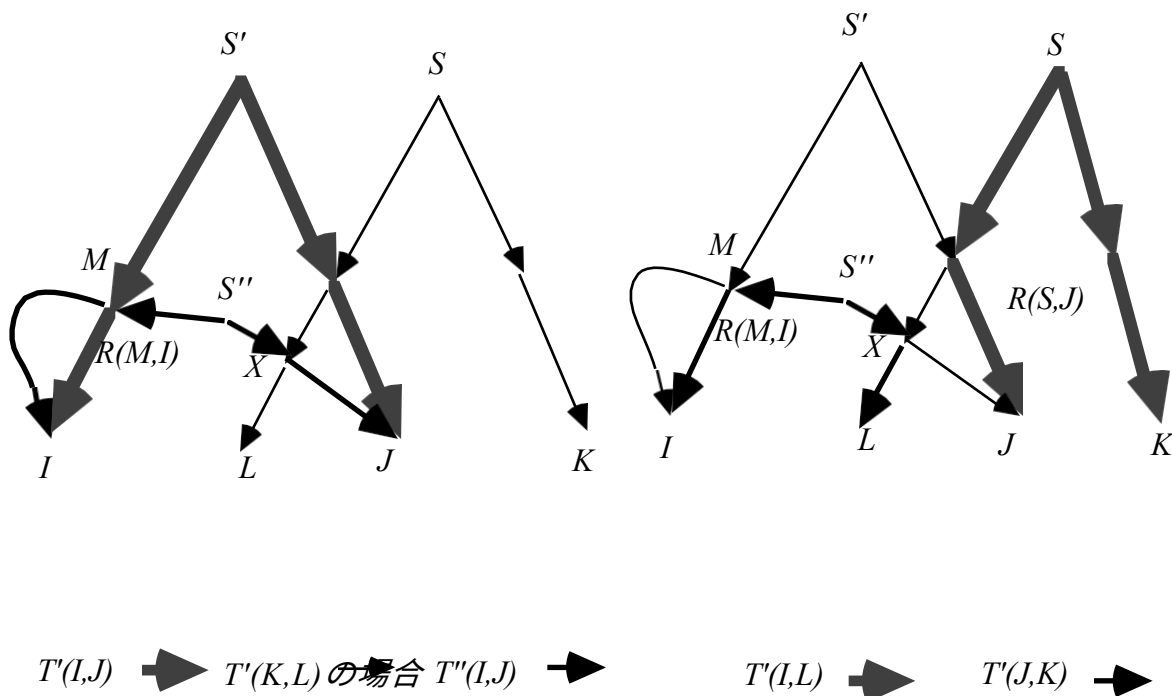


図15

b.  $I(t'(I,J))$  は  $I(T(I,J))$  と交差する前に  $K(T(K,L))$  と交差し、最初の交差点は  $Q$  であると仮定し、 $R(Q,K)$  を  $K(T(K,L))$  の最終セグメント、 $R(S'', Q)$  を  $I(t'(I,J))$  の初期セグメントとします。)  $R(S, J)$  と  $J(T(I,J))$  の最初の交点を  $Y$  とし、 $R(S', Y)$  を  $J$



( $T(I, J)$ ) の初期区間とする。2つのケースがある。

1.  $R(S'', L)$  は  $R(S', Y)$  と交わり、最初の交点は  $Z$  であるとする。 $R(S', Z)$  を  $J(T(I, J))$  の初期セグメント、 $R(Z, L)$  を  $R(S'', L)$  の最終セグメント、 $L(T(I, L)) = R(S', Z) \ \& \ R(Z, L)$ 、 $I(T(I, L)) = I(T(I, J))$ 、 $J(T(J, K)) = R(S, J)$ 、 $K(T(J, K)) = K(K, L)$  であるとしします。

(図16参照)。

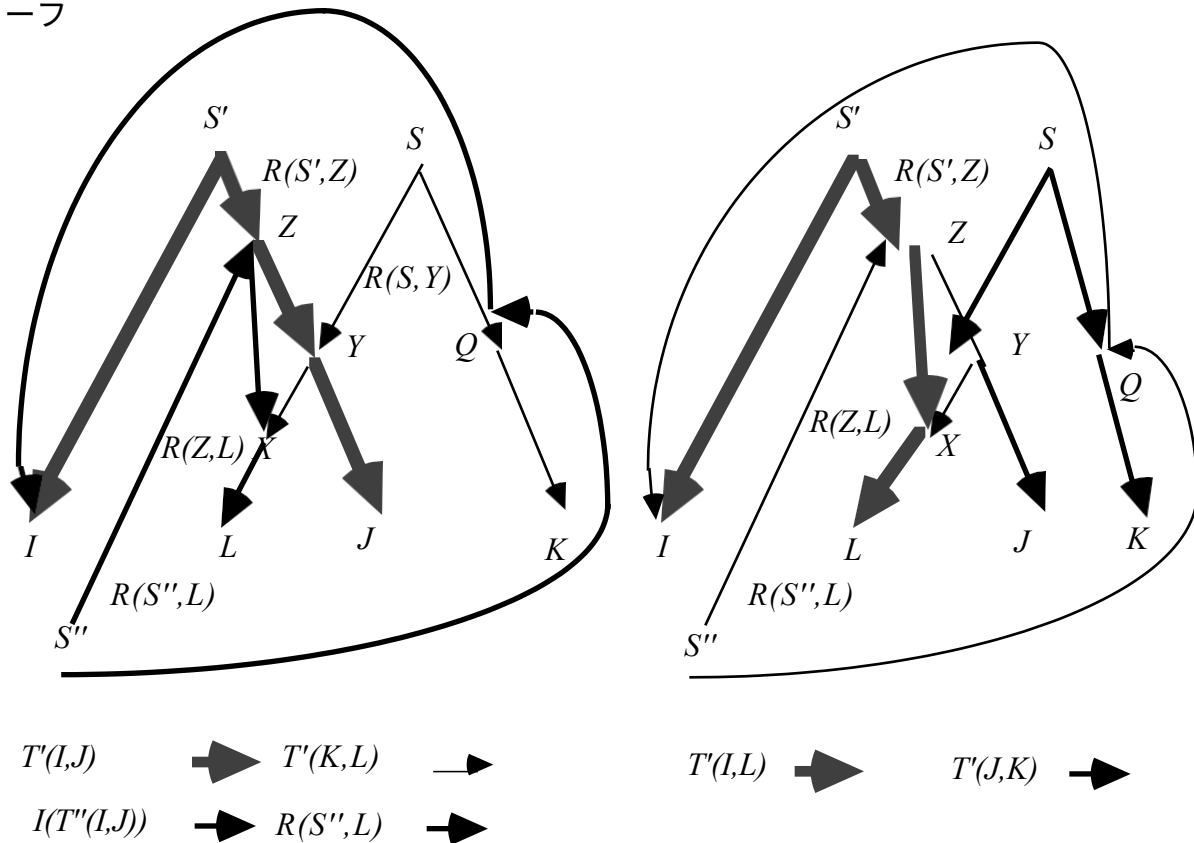


図16

$K(T(J, K))$ は、仮説により $I(T(I, L))$ と交差しない。 $J(T(J, K))$ は以下の理由で $L(T(I, L))$ と交わることはない。 $R(S', Z)$ は、 $R(S', Z)$ が $J(T(I, J))$ のサブパスであり、 $Z$ は $Y$ より前にあり、 $J(T(I, J))$ と $R(S, J)$ の最初の交点は $Y$ だから、 $R(S, J)$ と交差していない。 $R(Z, L)$ は $R(S, J)$ と交差しないが、これは $R(S'', L)$ のサブパスであり、構成上 $R(S, J)$ と交差しない。レンマ6.10.7により。 $IJ KL - IL JK = 0$ は、 $G$ によって線形に暗示されることはない。

2.  $R(S'', L)$ が $R(S', Y)$ と交差していないとする。 $L(T'(K, L)) = R(S'', L)$ 、 $K(T'(K, L))$ とする。

$= R(S'', Q) \& R(Q, K)$ ,  $I(T'(I, J)) = I(T(I, J))$ ,  $J(T''(I, J)) = R(S', Y) \& R(Y, J)$ . (図参照)

17.)  $K(T'(K, L))$ は以下の理由で $I(T'(I, J))$ と交わることはない。 $R(S'', Q)$ は $I(T'(I, J))$ の初期セグメントであり、 $Q$ は $I(T'(I, J))$ と $I(T''(I, J))$ の最初の交点の前に発生するの

で  $I(T)(I,J)$  とは交差していない。  $R(Q,K)$  は  $K(T(K,L))$  の最終セグメントであるため  $I(T'(I,J))$  と交差しないが、これは仮説により  $I(T(I,J))$  とは交差していない。  $L(T'(K,L))$  は以下の理由で  $J(T'(I,J))$  と交わることはない。  $R(S', Y)$  は仮説により  $R(S'', L)$  と交差せず、  $R(Y, J)$  は構成により  $R(S'', L)$  と交差しない  $R(S, J)$  のサブパスとなる。 レンマ6.10.7により、  $IJ_{KL} - IL_{JK} = 0$  は  $G$  によって線形に含意されない。

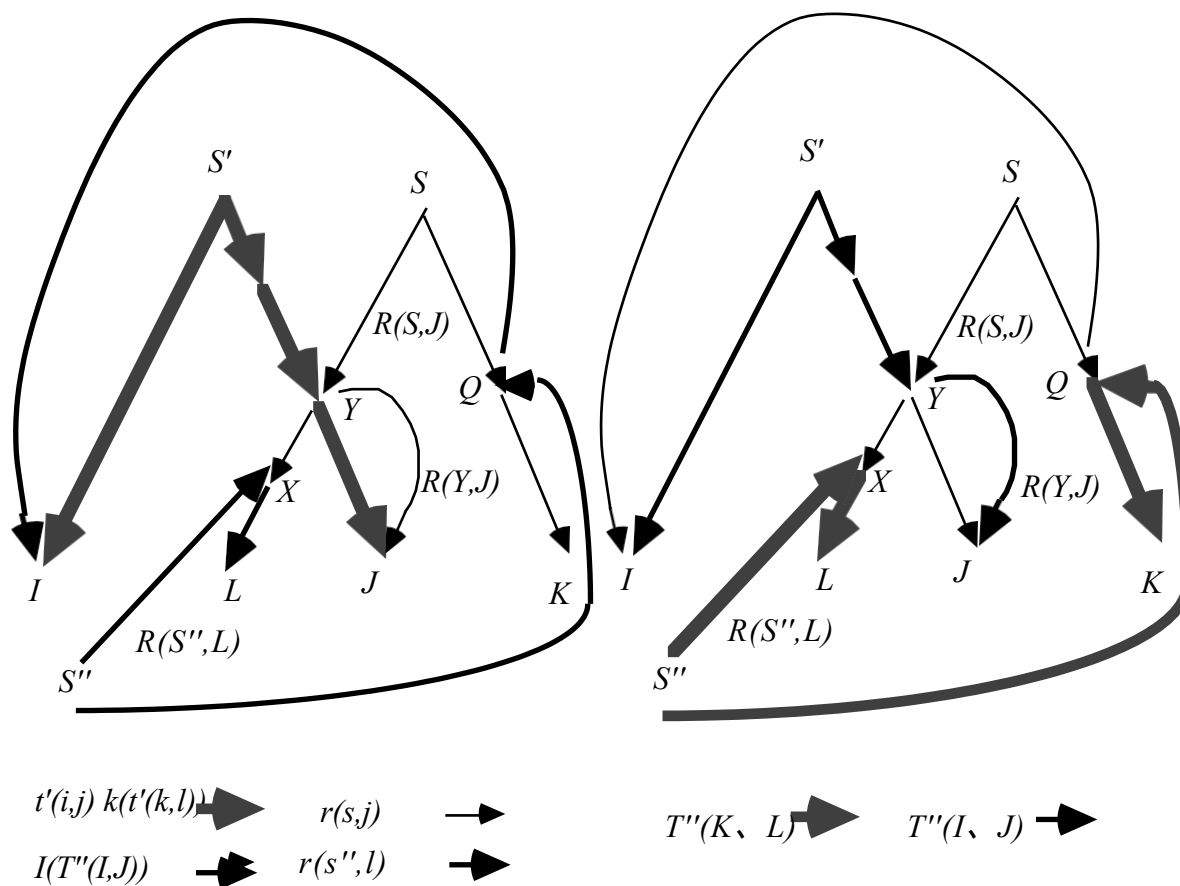


図17

3.  $J(T(I,J))$ と交差しない $L(T''(K,L))$ が存在するか、 $L(T(K,L))$ と交差しない $J(T''(I,J))$ が存在するか、いずれかです。ソース $S''(I,J)$ を持つ $J(T''(I,J))$ が $L(T(K,L))$ と交差しないと仮定するw.l.g.です。2つのケースがある。

a.  $I(T''(I,J))$ が頂点で $I(T''(I,J))$ と交差する前に $K(T''(K,L))$ と交差しなかったとする。

X. 図18を参照してください。

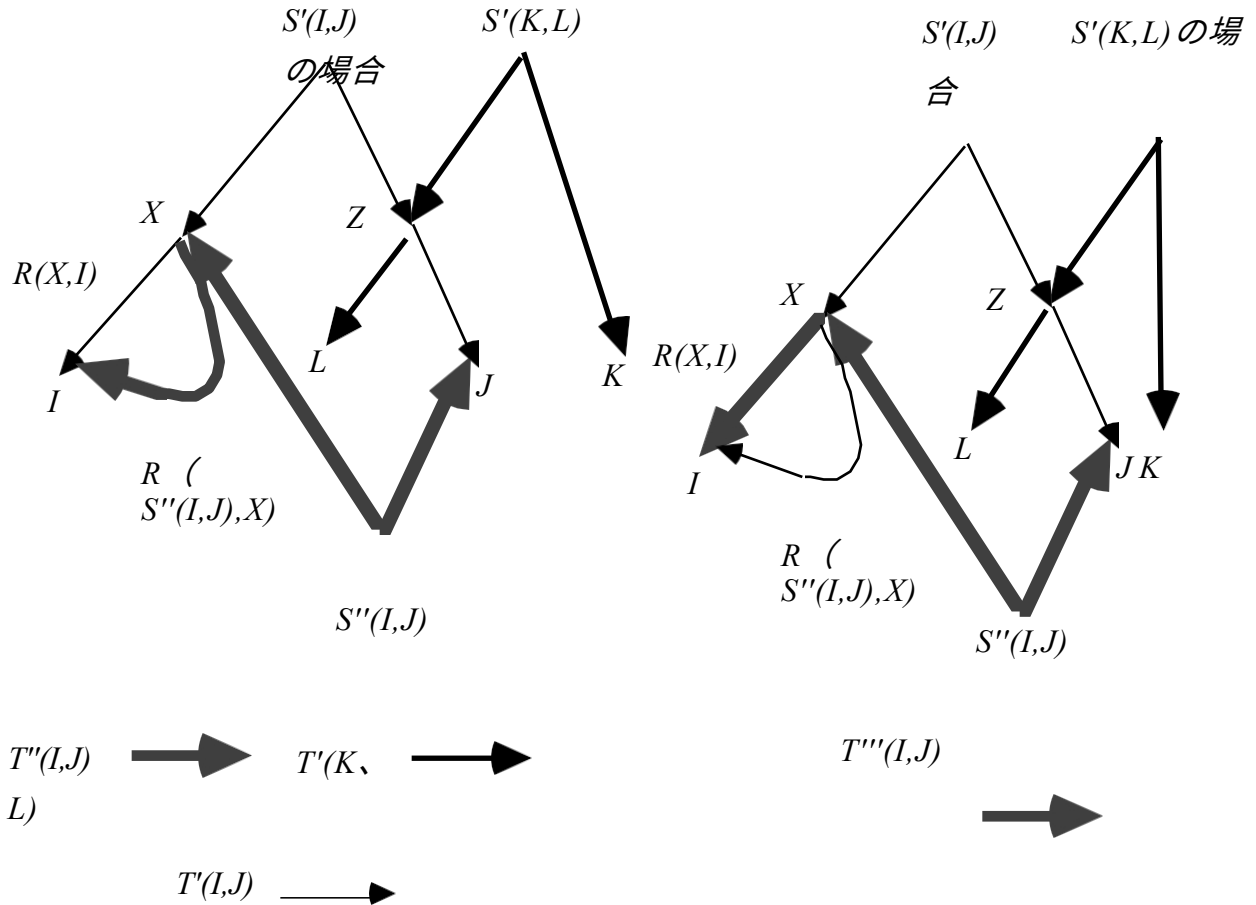


図18

$R(X,I)$ を $I(T(I,J))$ の最終セグメント、 $R(S''(I,J),X)$ を $I$ の初期セグメントとする。

$I(T''(I,J))$ である。トレック $T''(I,J)$ は、次のように形成することができる。 $J(T'''(I,J)) = J(T''(I,J))$  かつ  $I(T'''(I,J))$  とする。

$= R(S''(I,J),X) \& R(X,I)$ となる。 $R(S''(I,J),X)$ は $K(T(K,L))$ と交差しない。なぜなら、仮説により $X$ は $K(T(K,L))$ と交差する前に $I(T''(I,J))$ 上に発生するから。 $R(X,I)$ は $K(T(K,L))$ と交差しないが、それは $I(T''(I,J))$ のサブパスであり、仮説により $K(T(K,L))$ とは交差しない。したがって、 $I(T'''(I,J))$ は $K(T(K,L))$ と交差していない。

)  $J(T'''(I,J)) = J(T''(I,J))$ は仮説により $L(T(K,L))$ と交わることはない。レンマ6.10.7により、 $IJKL - ILJK = 0$ は、 $G$ によって線形に暗示されることはない。

b.  $I(T''(I,J))$ が $X$ で $I(T(I,J))$ と交わる前に $Y$ で $K(T(I,J))$ と交わったとする。 $J(T(I,J))$

ブル

と  $L(T(K,L))$  の最初の交点を  $Z$  とする。(このような頂点が存在しない場合、 $J(T(I,J))$  と  $L(T(K,L))$  は交差せず、 $I(T(I,J))$  と  $K(T(K,L))$  は仮説により交差せず、レンマ 6.10.7  $IL_{JK} - IL_{JK} = 0$  は  $G$  により線形暗示しない。)  $R(S'(I,J), Z)$  を  $I(T(I,J))$  の初期セグメントとし、 $R(Z, L)$  を  $L(T(K,L))$  の最終セグメントとする。の2つの場合がある。

1.  $J(T'(I,J))$  が  $R(S'(I,J), Z)$  と交差していないとする。図19を参照してください

。

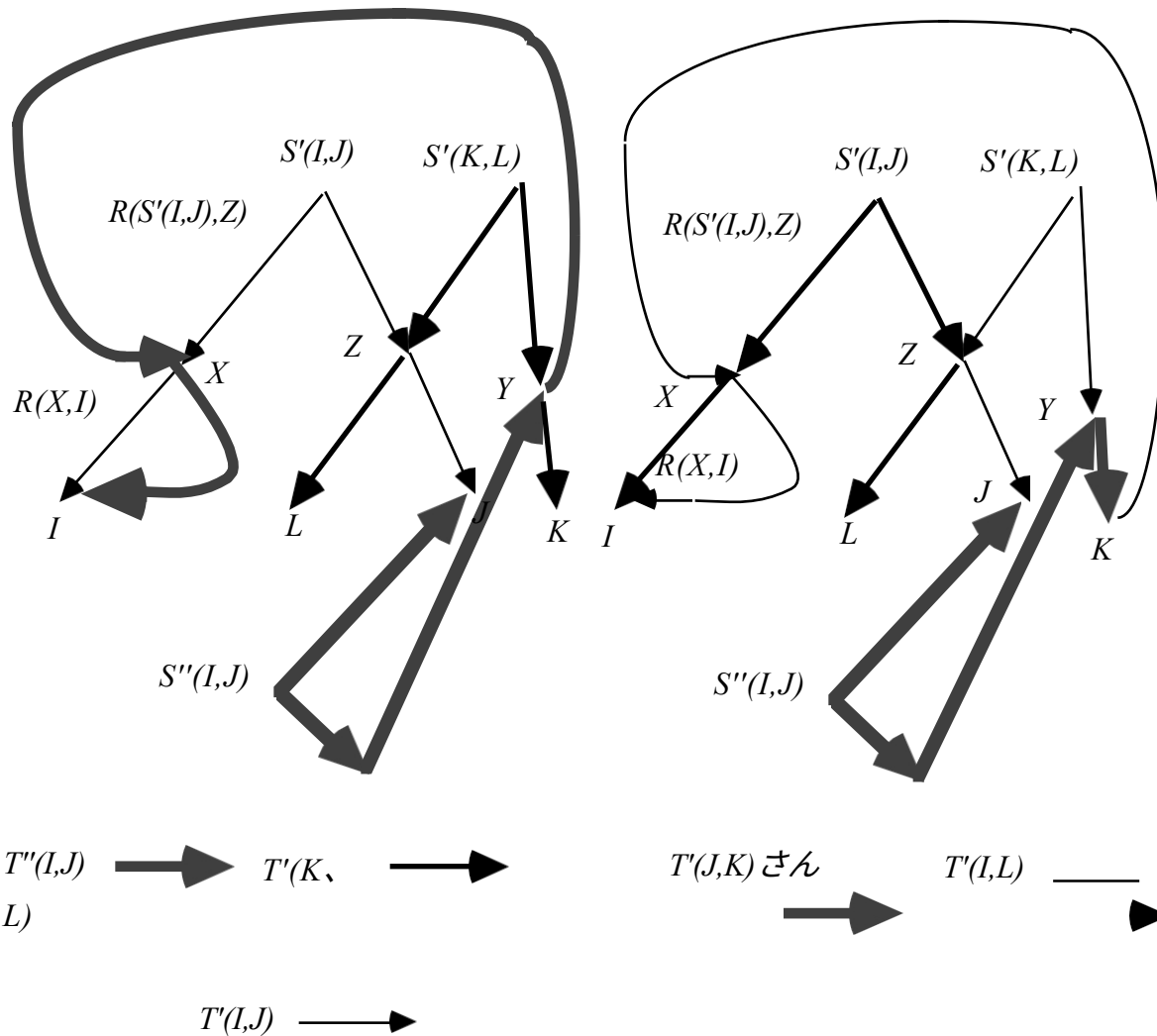


図19

$K(T(K, L))$  の最終セグメントを  $R(Y, K)$ 、その初期セグメントを  $R(S''(I, J), Y)$  とする。

$I(T''(I, J))$  とする。  $J(T(J, K)) = J(T'(I, J))$ 、  $K(T(J, K)) = R(S''(I, J), Y) \& R(Y, K)$ 、  $I(T(I, L)) =$  としておく。

$i(T(I, J))$ 、  $L(T'(I, L)) = R(S'(I, J), Z) \& R(Z, L)$  について、  $I(T(I, L))$  と  $K(T(J, K))$  は交わることはない。

は、次のような理由である。仮説により、  $I(T(I, J))$  は  $I(T(I, J))$  と交差する前に  $Y$  で  $K(T(K, L))$  と交差しているため、  $I(T'(I, L))$  は  $R(S''(I, J), Y)$  とは交差しない。  $I(T(I, L)) = I(T(I, J))$  であり、  $R(Y, K)$  は  $K(T(K, L))$  のサブパスであり、仮説により  $I(T(I, J))$  と

ブル

交<sub>二</sub>わることはないため  $I(T(I,L))$  と  $R(Y,K)$  とは交わることはない。  $J(T(J,K))$  は以下の理由で  $L(T(I,L))$  と交わることはない。  $J(T(J,K))$  が  $R(S(I,J),Z)$  と交差しないのは、 $J(T(J,K)) = J(T'(I,J))$  が、仮説により  $R(S(I,J),Z)$  と交差しない。  $J(T(J,K))$  は  $R(Z,L)$  と交差しないが、これは  $J(T(J,K)) = J(T'(I,J))$  が仮説により  $L(T(K,L))$  (これは  $R(Z,L)$ ) と交わることはない。 レンマ6.10.7により、 $IJ_{KL} - IL_{JK} = 0$  は、 $G$  によって線形に暗示されることはない。



2.  $J(T''(I,J))$ が $R(S'(I,J),Z)$ と交わり、最初の交点が $M$ だとする(図20参照。)。  $J(T''(I,J))$ は $Z$ を含む $L(T(K,L))$ と交差しないので $M \neq Z$ である。  $R(S'(I,J),M)$ を $J(T''(I,J))$ の初期セグメントとし、 $R(M,J)$ を $J(T''(I,J))$ の最終セグメントとする。)  $I(T'''(I,J)) = I(T(I,J))$ ,  $J(T'''(I,J)) = R(S'(I,J),M) \& R(M,J)$  とする。 $I(T'''(I,J))$ は、以下のようにならない。

は、仮説により $K(T(K,L))$ と交差する。 $J(T'''(I,J))$ は以下の理由で $L(T(K,L))$ と交わることはない。 $M$ は $J(T(I,J))$ 上で $Z$ の前にあり、 $J(T(I,J))$ と $L(T(K,L))$ の最初の交点は $Z$ なので $R(S'(I,J),M)$ は $L(T(K,L))$ とは交差していません。 $R(M,J)$ は $L(T(K,L))$ と交差しないが、これは仮説により $L(T(K,L))$ と交差しない $J(T(I,J))$ のサブパスである。レンマ 6.10.7により、 $IJ KL - IL JK = 0$ は $G$ によって線形に含意されない。

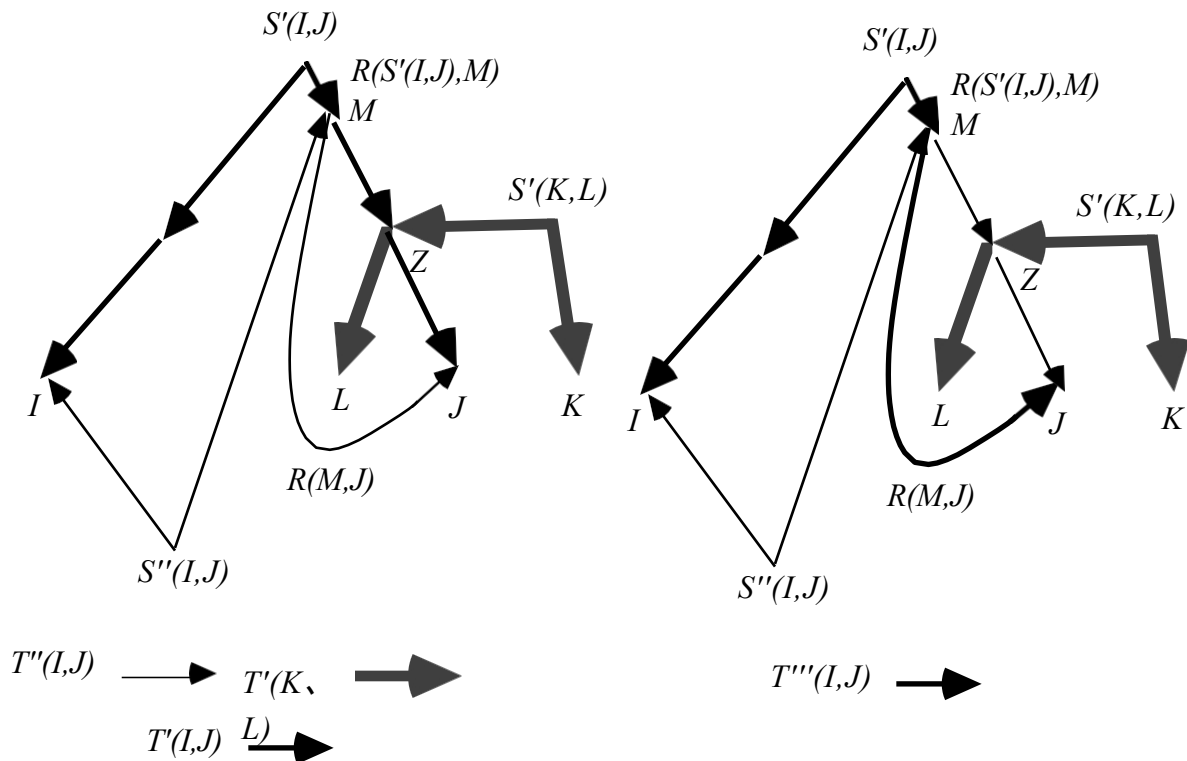


図20

**Lemma 6.10.17:** 非周期的LCF  $G$ において、 $LJ(T(I,L), T(J,K))$  チョークポイント

プル  
トがなく、 $IK(T(I,L), T(J,K))$  チョークポイントがない場合、 $IJKL - ILJK = 0$ は $G$   
二フ  
により線形暗示されない。

証明する。証明はレンマ6.10.16の証明と同じで、インデックスを順列化したものである。  
。

**レンマ 6.10.18:** 非周期的LCF  $G$ において、 $G$ が ${}_{IJ}KL - {}_{IL}JK = 0$ を線形に含意する場合、 $LJ(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントおよび $LJ(T(I,L), T(J,K))$  チョークポイントのいずれか、または $IK(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントと  $IK(I,L, T(J,K))$  チョークポイントになるものが存在しています。

**証明する。**  $G$ が ${}_{IJ}KL - {}_{IL}JK = 0$ を線形に含意すると仮定する。レンマ6.10.16と6.10.17により、 $G$ が ${}_{IJ}KL - {}_{IL}JK = 0$ を線形に含意する場合、 $LJ(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントか $IK(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントが存在し、 $LJ(T(I,L), T(J,K))$  チョークポイントか $IK(T(I,L), T(J,K))$  チョークポイントが存在する。 $LJ(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントと $LJ(T(I,L), T(J,K))$  チョークポイントがある場合、または $IK(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントと $IK(T(I,L), T(J,K))$  チョークポイントがある場合は証明が完了します。次に、 $LJ(T(I,J), T(K,L))$  のチョークポイントと $IK(T(I,L), T(J,K))$  のチョークポイントはあるが、 $IK(T(I,J), T(K,L))$  のチョークポイントと $LJ(T(I,L), T(J,K))$  のチョークポイントはないものと仮定します。 $(LJ(T(I,L), T(J,K)))$  チョークポイントと $IK(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントは存在するが $LJ(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントはなく $IK(T(I,L), T(J,K))$  チョークポイントはない場合、インデックスが順接されているが本質的に同じである)

レンマ6.10.9から6.10.14により、 $LJ(T(I,L), T(J,K))$ のチョークポイントが存在しない場合、 $L(T(I,L), T(J,K))$ と交わることがないトレック  $T(I,L)$  and  $T(J,K)$  pair is there or  ${}_{IJ}KL - {}_{IL}JK = 0$  not linearly implied by  $G$ . 後者の可能性は我々の仮説と矛盾するので、 $L(T(I,L), T(J,K))$ と交差しないようなトレックのペア $T(I,L)$ と $T(J,K)$ が存在するとする。2つのケースがある。

$I(T(I, L))$  が  $K(T(J, K))$  と交差しない場合、レンマ6.10.7により、 $G$ は線形に含意しない。

フル  
 $I_{JK}^0$ 。  $I_{JK}^0 = 0$  となり、仮説に反します。次に、 $I(T(I,L))$ が以下のように交差してい  
 るとする。

$K(T(J,K))$ を頂点 $Y$ に置く（図21参照）。

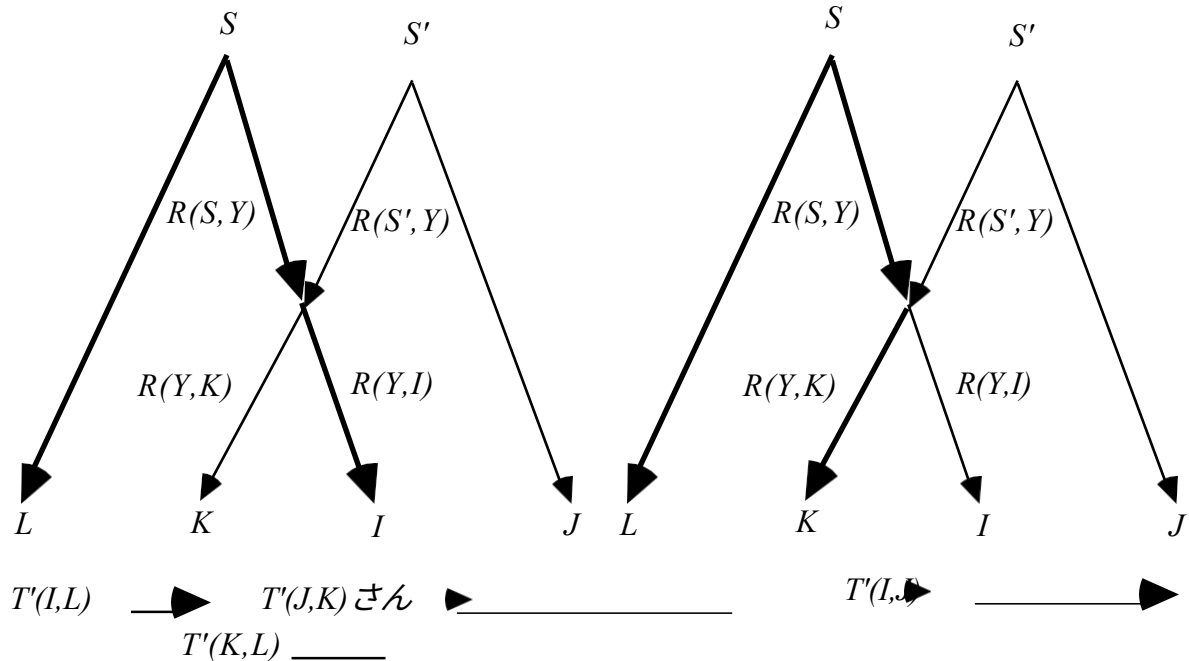


図21

$S$ を $T(I, L)$ のソース、 $S'$ を $T(J, K)$ のソース、 $R(S, Y)$ を初期セグメントとする。  
 $I(T(I, L))$ ,  $R(Y, K)$   $K(T(J, K))$  の最終セグメント,  $R(S', Y)$   $K(T(J, K))$  の初期セグメント、  
 $R(Y, I)$   $I(T(I, L))$ ,  $I(T(I, J)) = R(S', Y) \& R(Y, I)$ ,  $J(T(I, J)) = J(T(J, K))$  の最終セグメントです、  
 $K(T(K, L)) = R(S, Y) \& R(Y, K)$ 、 $L(T(K, L)) = L(T(I, L))$ 。しかし、 $J(T(I, J)) =$ であることから

$J(T(J, K))$ が $L(T(K, L)) = L(T(I, L))$ と交差しないので、仮説に反して $LJ(T(I, J), T(K, L))$ チョークポイントは存在しない。

**Lemma 6.10.19:** 非周期的LCF  $G$ において、 $G$ が $_{LJ} \rho_{KL} - \rho_{JK} = 0$ を線形に意味する場合、 $LJ(T(I, J), T(K, L), T(I, L), T(J, K))$ のチョークポイントが存在するか、 $IK(T(I, J), T(K, L), T(I, L), T(J, K))$ チョークポイントが存在するか、いずれかです。

**証明する。** レンマ6.10.18により、 $_{LJ} \rho_{T(I, J), T(K, L)} = \rho_{T(I, L), T(J, K)}$ チョークポイントと $LJ(T(I, L), T(J, K))$ チョークポイントが存在するか、 $IK(I(J), K(L))$ チョークポイントと $IK(I(L), J(K))$ チョークポイントが存在します。仮に、前者である

ブル

とする。ある  $LJ(T(I,J), T(K,L))$  チョークポイントが  $LJ(T(I,L), T(J,K))$

チョークポイントでもあれば、証明は完了です。次に、 $LJ(T(I,J), T(K,L))$  のチョークポイントが  $LJ(T(I,L), T(J,K))$  のチョークポイントでもないことを仮定してみる。Cを  $LJ(T(I,J), T(K,L))$  のチョークポイントとする。仮説により、Cは  $LJ(T(I,L), T(J,K))$  のチョークポイントではないので、 $L(T(I,L))$  と  $J(T(J,K))$  がCで交差しない、それぞれソースSとS'のトレック  $T(I,L)$ ,  $T(J,K)$  が存在します（図22参照）。

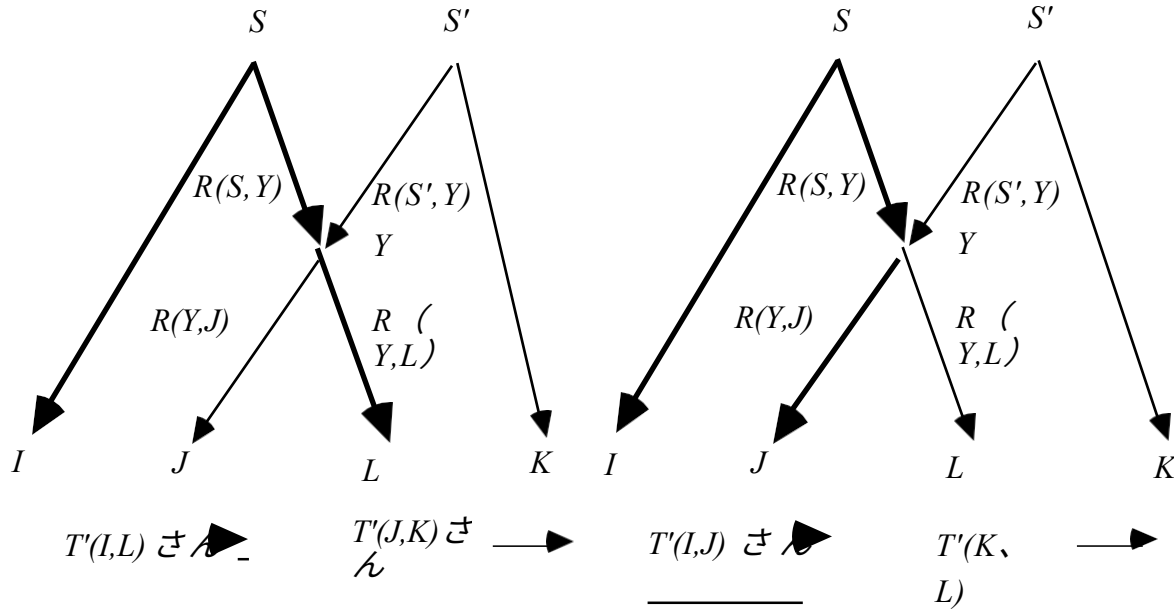


Figure 22

したがって、 $L(T(I, L))$ と $J(T(J, K))$ の一对の経路には、 $C$ の出現が多くても1つである。  $LJ(T(I, L), T(J, K))$  のチョークポイントがあるので、 $L(T(I, L))$  と  $J(T(J, K))$  は点  $Y$  で交差する。 $L(T(I, L))$  の初期セグメントを  $R(S, Y)$ 、 $J(T(J, K))$  の最終セグメントを  $R(Y, J)$  とすると、 $R(S', Y)$  は

$J(T(J, K))$  の初期セグメント、 $R(Y, L)$   $L(T(I, L))$  の最終セグメント、 $I(T(I, J)) = I(T(I, L))$ 、 $J(T(I, J)) = R(S, Y) \& R(Y, J)$ 、 $K(T(K, L)) = K(T(J, K))$ 、 $L(T(K, L)) = R(S', Y) \& R(Y, L)$ 。

$L(T(K, L))$ と $J(T(I, J))$ は $J(T(J, K))$ と $L(T(I, L))$ の頂点の並べ替えなので、 $L(T(K, L))$  と  $J(T(I, J))$  の任意の頂点の発生個数は  $J(T(J, K))$   $L(T(I, L))$  における頂点の登場数以下

となり、その頂点の登場個数に等しくなります。 $C$ は $J(T(J, K))$ と $L(T(I, L))$ に多くとも1回出現するので、 $L(T(K, L))$ と $J(T(I, J))$ にも多くとも1回出現する。したがって、 $L(T(K, L))$ と $J(T(I, J))$ は $C$ で交差せず、 $C$ が $LJ(T(I, J), T(K, L))$ チョークポイントであるという仮説に反し、交差していない。

**Lemma 6.10.20:** 確率変数  $\mathbf{W}$  の集合に対する任意の確率分布について、 $I_{U, \mathbf{P}} K_{L, \mathbf{P}} - I_{L, \mathbf{P}} J_{K, \mathbf{P}} = 0$  となる  $\mathbf{V}$  の部分集合  $\mathbf{P}$  が存在し、 $\mathbf{P}$  内のすべての変数  $U$  と  $U_{\mathbf{P}}$  を含まない  $\mathbf{P}$  のすべての部分集合  $\mathbf{V}$  について、 $I_{U, \mathbf{V}} = 0$  かつ  $K_{U, \mathbf{V}} = 0$ 、または  $J_{U, \mathbf{V}} = 0$  かつ  $L_{U, \mathbf{V}}$  のいずれか

ブル  
であれば  
二つ

$= 0$  であれば、 $IJ \cdot KL \cdot IL \cdot JK = 0$  となる。

**証明する。**証明は、**P**のカーディナリティに対する帰納法によって行う。

基本ケース：**P**のカーディナリティが0であるとすると、このとき、 $IJ \cdot KL - IL \cdot JK = 0$  は  
 $IJ \cdot P \cdot KL \cdot P - IL \cdot P \cdot JK \cdot P = 0$  と等価である。



帰納的ケース：レンマが、カーディナリティ $n$ 以下のすべての集合に対して真であるとする。 $\rho$   $\rho$   $\rho$   $\rho$   
 $\mathbf{P}$ のカーディナリティが $n+1$ であるとする。 $IJ.P\ KL.P - IL.P\ JK.P = 0$ と仮定する。  
 。

$\mathbf{P}$ の変数を $Y$ とし、 $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \{Y\}$ とする。 $\rho_{IJ.P}\rho_{KL.P} - \rho_{IL.P}\rho_{JK.P}$ であるから、偏相関の再帰式により、

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\rho_{IJ.P'} - \rho_{IY.P'}\rho_{JY.P'}}{\rho} \frac{\rho_{KL.P'} - \rho_{KY.P'}\rho_{LY.P'}}{\rho}}{\rho} \frac{\rho_{IL.P'} - \rho_{IY.P'}\rho_{LY.P'}}{\rho}}{\rho} \frac{\rho_{JK.P'} - \rho_{JY.P'}\rho_{KY.P'}}{\rho}}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho_{IY.P'}^2}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{\rho_{JY.P'}^2}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{\rho_{KY.P'}^2}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{\rho_{LY.P'}^2}{\rho}}}{\frac{\sqrt{1 - \frac{\rho_{IY.P'}^2}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{\rho_{JY.P'}^2}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{\rho_{KY.P'}^2}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{\rho_{LY.P'}^2}{\rho}}}} =$$

L.H.S.の分母はR.H.S.の分母に等しいので、L.H.S.の分子はR.H.S.の分子になります。

l.h.s.はr.h.s.の分子に等しく、各辺の分子を展開する、

$$\rho_{ij.p'}\rho_{kl.p'} - \rho_{ij.p'}\rho_{ky.p'}\rho_{ly.p'} - \rho_{kl.p'}\rho_{iy.p'}\rho_{jy.p'} - \rho_{iy.p'}\rho_{jy.p'}\rho_{ky.p'}\rho_{ly.p'} = \rho_{il.p'}\rho_{jk.p'} - \rho_{il.p'}\rho_{jy.p'}\rho_{ky.p'} - \rho_{jk.p'}\rho_{iy.p'}\rho_{ly.p'} - \rho_{iy.p'}\rho_{jy.p'}\rho_{kl.p'}\rho_{ly.p'}$$

両辺の第4項が等しい。仮説により、 $IY.P' = KY.P' = 0$ のどちらか、 $\rho$ または $\rho_{JY.P'}$  = 0 ใดの場合も、両辺の第2項と第3項は0に等しい。 $IJ.P'\ KL.P' - IL.P'\ JK.P' = 0$ となり、 $\mathbf{P}'$ は $\mathbf{P}$ より1人少ないので帰納仮説により、 $IJ\ KL - IL\ JK = 0$ となる。

**Lemma 6.10.21:** 非周期的LCF  $G$ において、 $LJ(T(I,J), T(K,L), T(I,L), T(J,K))$   $\neq \emptyset \Rightarrow$  クポイントまたは $IK(T(I,J), T(K,L), T(I,L), T(J,K))$  チョークポイントが存在すれば、 $G$ は $IJ\ KL - IL\ JK = 0$ を直線的に意味します。

**証明する。**  $X$ が最後の $LJ(T(I, J), T(K, L), T(I, L), T(J, K))$ のチョークポイントであると仮定する。2つのケースがある。

まず、IとJ、KとLのペアの少なくとも1つの間にトレックがなく、IとL、JとKのペアの少なくとも1つの間にトレックがない場合を考える。この場合、IJとKLの少なくとも1つは0に等しく、ILとJKの少なくとも1つは0に等しいことがわかる。したがって、 $IJKL - ILJK = 0$ となる。

次に、トレック $T(I,J)$ と $T(K,L)$ が存在すると仮定する。ここでは、 $IJKL$ -を証明する。

$\rho_{IJ, Q'KL, Q'}$ -となるような変数の集合 $Q'$ が存在することを証明すること、 $ILJK = 0$ となる。

$\rho_{IL, Q'} \rho_{K, Q'} = 0$ であり、 $Q'$ のすべての変数 $U$ と $U$ を含まない $Q'$ のすべての部分集合 $V$ について、以下のいずれかである。

$\rho_{IU, V} = 0$ かつ $\rho_{KU, V} = 0$ 、または  $\rho_{JU, V} = 0$ かつ $\rho_{LU, V} = 0$ とし、レンマ6.10.20を適用する。

$Q = \{X \text{ と } J, \text{ または } X \text{ と } L \text{ の間のトレックのソース}\}$ とする。 $X$ は $J(T(I, J))$ と $L(T(K, L))$ 上にあり、定義により $J(T(I, J))$ の流しは $J$ であり、 $L(T(K, L))$ の流しは $L$ なので、 $R(X, J)$ と $R(X, L)$ があり、したがって $X$ は $Q$ 内に存在する。 $I$ と $J$ の間のすべての無向パスが、 $V$ から $Q$ のどの頂点への有向パスの元でもないコライダーである頂点 $V$ を含むか、あるいは $Q$ のコライダーでない頂点を含むことを示すことで、 $Q$ が与えられたときに $I$ と $J$ が $d$ -separatedであることを証明することになる。

まず、 $I$ と $J$ の間のコライダーのない無向きの経路を考える。 $I$ と $J$ の間に $X$ を含まないコライダーのない無向パスがあれば、 $I$ と $J$ の間には $X$ を含まないトレックが存在する。しかし、 $X$ はチョークポイントであるため、すべての $T(I, J)$ は $X$ を含む。したがって、 $I$ と $J$ の間に $X$ を含まないコライダーのない無向きの経路は存在しない。 $X$ は $Q$ にあるので、コライダーを含まない無向きのパスはすべて $Q$ の頂点を含んでいる。

ここで、コライダーを含む $I$ と $J$ の間の無向きのパスを考える。ある頂点 $W$ がコライダーであり、 $W$ から $Q$ のある頂点への有向パスの始点でない場合、その証明は完了である。 $J$ から $I$ への任意の無向パス $R(J, I)$ を例にして考える。仮説により、 $U$ を $Q$ の頂点とする有向パス $R(Z, U)$ が存在する。 $J$ から $Z$ への無向パスはコライダーを含まないので、有向パス $R(S, J)$ と $R(S, Z)$ の組の元となる頂点 $S$ が存在する。 $Z$ はそれに向けられた辺を持つので、 $S \neq Z$ となる。2つのケースがある。

a.  $S = J$ である。図23を参照。有向パス $R(J, Z)$ が存在する。有向パス $R(Z, U)$ がある。 $U$ は $X$ と $J$ の間のトレックの発生源なので、有向パス $R(U, X)$ が存在する。有向パス $R(X$

ブル

、が存在することは既を示した。したがって、循環パス $R(J,Z) \& R(Z,U) \& R(U,X) \& R(X$

、が存在することになる。

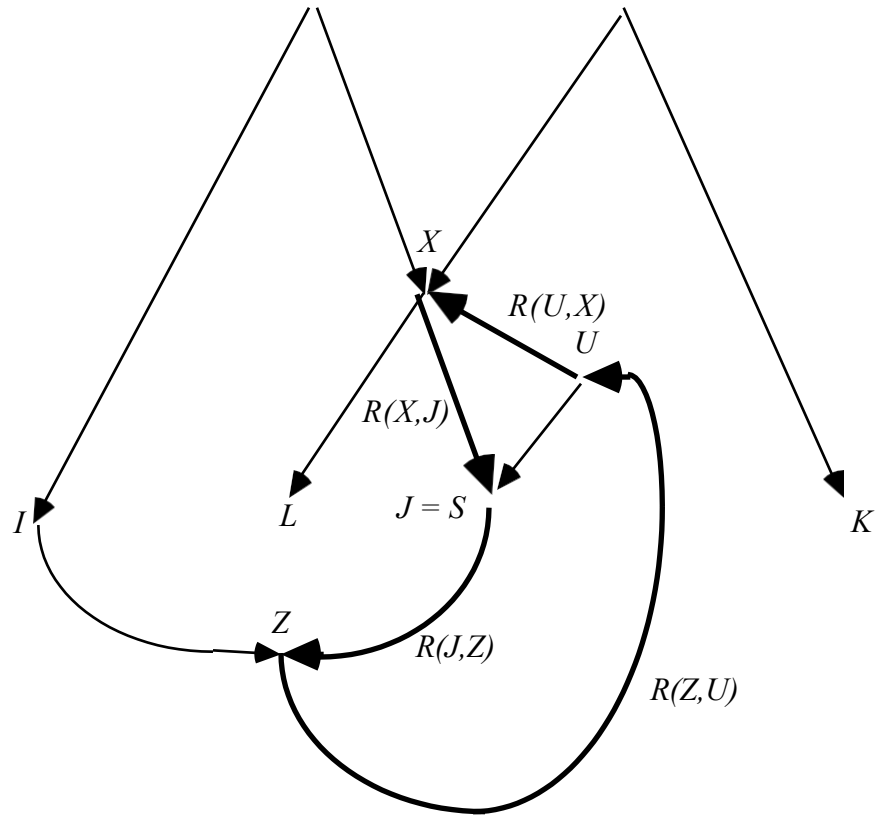


図23

b.  $S \neq J$ であり、図24を参照。有向パス $R(S, J)$ と有向パス $R(S, Z) \& R(Z, U) \& R(U, X)$ が存在する。レンマ6.10.2により、ソース $M$ を持つトレック $T(J, X)$ があり、 $M$ は $R(S, J)$ と $R(S, Z) \& R(Z, U) \& R(U, X)$ の最後の交点、 $J(T(J, X))$ は $R(S, J)$ のサブパスとなる。 $M$ は $R(S, J)$ 上にあり、 $S$ は $R(J, I)$ 上の $Z$ の前に発生するので、 $M$ は $R(J, I)$ 上の $Z$ の前に発生する。したがって、 $R(J, I)$ の $M$ には衝突がない。また、 $M$ は $X$ と $J$ の間のトレックの発生源なので $Q$ にあり、無向パス $R(J, I)$ には $Q$ の中に衝突者でない頂点が含まれる。

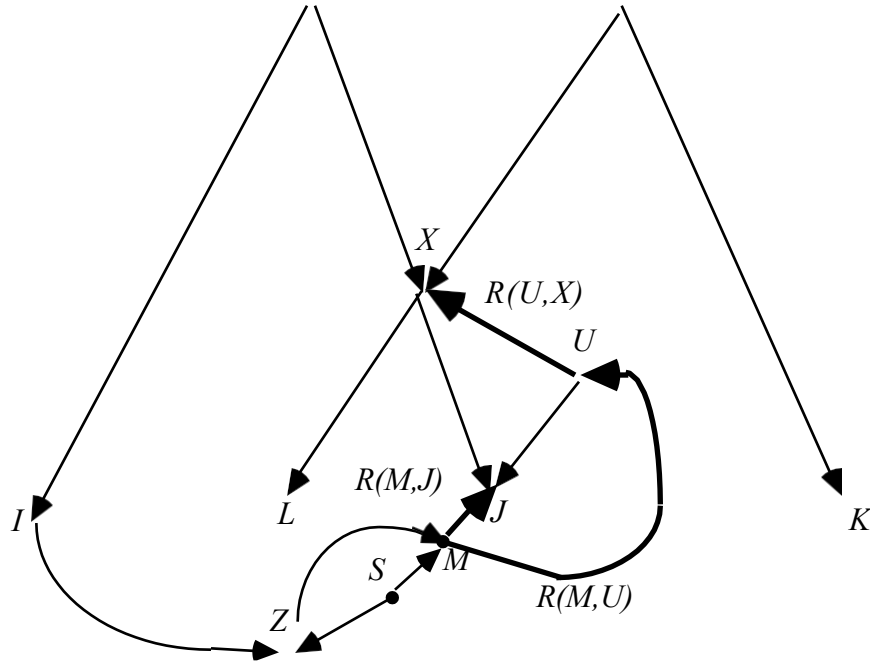


図24

いずれの場合も、 $Q$ は $X$ と $Y$ を $d$ 分離するので、 $\perp\!\!\!\perp_{Q,I} Q$ となる。同様に、次のように示すことができる。

$K \perp\!\!\!\perp_{Q,I} L \mid \begin{matrix} L / \\ QJ \end{matrix} K \mid Q$ である。 $I, Q=0$ であることがわかる、 $KL, Q=0$ となる、 $IL, Q=0$ 、および  $JK, Q=0$ とする。

$Q' = Q - \{X\}$ となる。偏相関の再帰式により、 $IL, Q' = IX, Q' \rho_{JX, Q'}$ ,  $KL, Q' = \rho$   $\rho$   
 $\rho_{KX, Q'} \rho_{LX, Q'}$ ,  $IL, Q' = IX, Q' \rho_{LX, Q'}$   $\rho$   $JK, Q' = JX, Q' \rho_{KX, Q'}$ である。したがって、 $IL, Q' \rho_{KL, Q'}$ となる。  
 $\rho_{IX, Q'} \rho_{X, Q'} \rho_{KX, Q'} \rho_{LX, Q'} \rho_{IX, Q'} \rho_{LX, Q'} \rho_{JX, Q'} \rho_{KX, Q'} = IL, Q' \rho_{JK, Q'} \cdot \rho$   $\rho$   $\rho$

次に、 $Q'$ の各変数 $U$ と、 $U$ を含まない $Q'$ の各分割集合 $V$ について、 $I$ と $U$ が $V$ を与えられたときに $d$ 分離することを示すことによって、 $I$ と $U$ の間のすべての無向パスが、 $W$ から $V$ のどの頂点への有向パスの元でもないコライダーである頂点 $W$ を含むか、 $V$ のコライダーでない何らかの頂点を含むかを示すことにより、 $V$ を与えられたときに $d$ 分離であることを示すことにしよう。

$Q'$ 内の $U$ について、コライダを含む任意の無向パス $R(I, U)$ を考える。 $I$ 以降の $R(I, U)$ で

コライダである最初の点を $Z$ とし、 $R(I,Z)$ を $R(I,U)$ の初期区間とする。 $Z$ が $Q'$ のある頂点 $M$ へのパスの元でないなら、 $I$ と $U$ は $Q'$ を与えられて $d$ 個に分離され、証明は完了である。次に、 $Q'$ 内のある $M$ への有向パス $R(Z,M)$ が存在するとする。 $R(I,Z)$ にはコライダが存在しないので、 $R(I,Z)$ 上には有向パス $R(S,I)$ と $R(S,Z)$ の元となる頂点 $S$ が存在することになる。したがって、 $S$ は $I$ と $M$ への有向パス、 $R(S,I)$ と $R(S,M) = R(S,Z) \& R(Z,M)$ をそれぞれ生成する源となる。 $(R(I,U))$ がコライダを含まない無向きのパスである場合、やはり $R(I,U)$ 上の頂点 $S$ が有向パス $R(S,I)$ の元となることであり

$\overline{R}(S, U)$ である。)  $M$ は $X$ と $J$ の間のトレッキングの元か、 $X$ と $L$ の間のトレッキングの元であると仮定します (w.l.g.)。仮説により $M$ は $X$ と等しくない。したがって、 $R(M, J)$ は $X$ を含まない。 $R(M, J)$ は $J$ と $X$ の間のトレックの枝であり、トレックの2つの枝は $M$ でのみ交差しているからである。 $R(S, M)$ は $X$ を含まない、さもなければサイクルが存在する。 $R(S, I)$ は $X$ を含むか含まないかどちらかである。

a.  $R(S, I)$ が $X$ を含まない場合、 $R(S, I)$ と $R(S, Z) \& R(Z, M) \& R(M, J)$ という $X$ を含まない経路の組が存在することになる。図25を参照。したがって、 $I$ と $J$ の間には、 $X$ を含まないトレックが存在する。これは、 $X$ が $LJ$  ( $T(I, J)$ ,  $T(K, L)$ ,  $T(I, L)$ ,  $T(J, K)$ ) のチョークポイントであるという仮定と矛盾する。

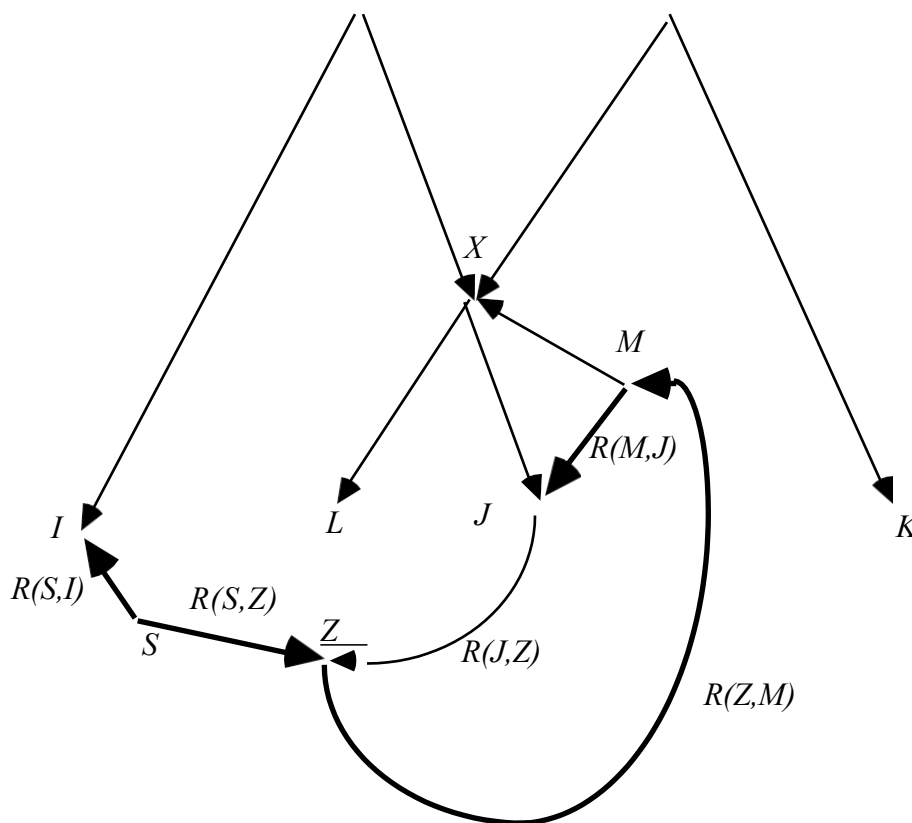


図25

b.  $R(S, I)$ が $X$ を含むとする。図26を参照。すると、 $R(S, I)$ のサブパスである有向パス



$R(S, X)$ が存在する。また、 $R(S, M) = R(S, Z) \& R(Z, M) \& R(M, J)$  という有向パスが存在する。したがって、 $X$ と $J$ の間には、 $R(S, I)$ のサブパスである $R(S, X)$ 上にソース $S'$ が存在するトレックが存在する。 $S'$ は、 $X$ と $J$ の間のトレックの発生源なので、 $Q'$ にある。

$\overline{R}(S,I)$ のサブパスである。 $S'$ は $R(I,U)$ 上の最初のコライダである $Z$ の前に発生するので、 $S'$ は $R(S,I)$ 上のコライダではありません。したがって、 $R(S,I)$ は $Q'$ にコリヤーでない頂点を含む。

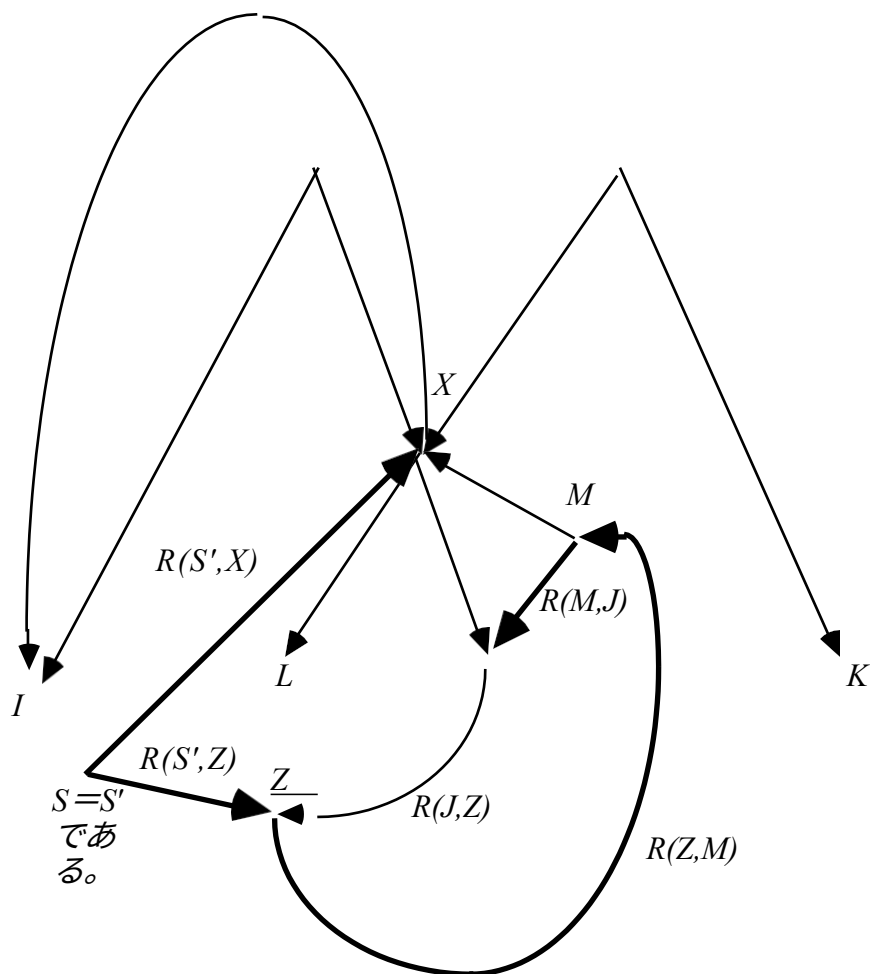


図26

レンマ6.10.20により  $\rho_{ij} \rho_{kl} \rho_{il} \rho_{jk} = 0$  となる。

# テトラッド

## 表現方法 定理

6.10: 非周期的なLCF  $G$ において、以下の

ものが存在する。

$LJ(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョークポイントか $JK(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョーク

$G$  が線形に  $IJ KL - IL JK = 0$  を意味する場合、点。

証明する。これはレンマ6.10.19とレンマ6.10.21から直接導かれる。

定理6.10.1: 非周期的LCF  $G$ が非周期的LCF  $G$ の部分グラフであり、 $G$ が $IJKL - ILJK = 0$ を線形に含意する場合、 $G'$ は $IJKL - ILJK = 0$ を線形に含意します。

証明する。 $G$ が線形に含意する場合 $IJKL - ILJK = 0$ であるとき、レンマ6.10.21により、 $G$ は次のいずれかを持つ。

$LJ(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョークポイントか $IK(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョーク

の点である。 $G$ が $LJ(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョークポイントか $IK(T(I,J),T(I,L),T(J,K))$ のチョークポイントかを持っているとします、とすると、 $G'$ は、 $LJ(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョークポイントか $IK(T(I,J),T(I,L),T(J,K))$ のどちらかがある。

点である。レンマ6.10.21により、 $G'$ は $IJKL - ILJK = 0$ を線形に含意する。

## 13.26 定理6.11

定理6.11: 非周期的LCF  $G$ が $IJKL - ILJK = 0$ を線形に含意するのは、 $IJ$ または $KL = 0$ 、 $IL$ または $JK = 0$ のいずれか、あるいは $IJ.Q = KL.Q = IL.Q = JK.Q = 0$ のように $G$ の確率変数の(空の可能性がある)集合 $Q$ が存在するときのみ。

証明する。定理6.10により、 $G$ が線形に含意する場合は $IJKL - ILJK = 0$ となる場合、以下のどちらかが存在する。

$LJ(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョークポイントか $IK(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョーク

が存在することをレンマ6.10.21の証明で示しましたが、これは $G$ の点です。

$LJ(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョークポイントか $IK(T(I,J),T(K,L),T(I,L),T(J,K))$ のチョーク

点であれば、 $I$ または $KL=0$ 、 $IL$ または $JK=0$ のいずれか、または $IL.Q=0$ 、 $KL.Q=0$ 、 $\rho_{IL.Q}=0$ 、 $\rho_{JK.Q}=0$ となる確率変数の集合 $Q$ が存在することになります。

### 13.27 定理7.1

$G$ を変数 $V \sqcup W$ の集合にかかる有向非周期グラフとすると、 $W$ は以下の点に関して外生的である。

$G$ の $V$ 、 $Y$ と $Z$ は $V$ の不連続部分集合、 $P(V \sqcup W)$ はマルコフを満たす分布。

の条件を満たし、 $\text{Manipulated}(W) = X$  であれば、 $P(Y|Z)$  は、 $P(Y|Z, W = w_1) = P(Y|Z, W = w_2)$  のときだけ、 $G$  における  $X$  を  $w_1$  から  $w_2$  に変更する直接操作に対して **不変であり**、両者が定義されているところであればよい。

**定理7.1:**  $G\text{Comb}$  が  $V \boxtimes W$  上の有向無サイクルグラフで、 $W$  が  $G\text{Comb}$  の  $V$  に関して外生的、 $Y$  と  $Z$  が  $V$  の不連続部分集合、 $P(V \boxtimes W)$  が  $G\text{Comb}$  のマルコフ条件を満足する分布である場合、 $X \cap Z$  のメンバが  $G\text{Unman}$  の  $\text{IP}(Y, Z)$  のメンバでなく、 $X \setminus Z$  のメンバが  $G\text{Unman}$  の  $\text{IV}(Y, Z)$  のメンバでないとき、 $P(Y | Z)$  は  $G\text{Comb}$  の  $X$  を直接操作する際に  $W$  を  $w_1$  から  $w_2$  に変更しても不変である。

**証明する。**  $G\text{Comb}$  が  $V \boxtimes W$  上の有向非循環グラフであり、 $W$  は以下のように外生的であるとする。

**$V$  に対する  $G\text{Comb}$  の部分グラフ、 $G\text{Unman}$  は  $V$  に対する  $G\text{Comb}$  の部分グラフ、 $P(V \boxtimes W)$  は  $G\text{Comb}$  のマルコフ条件を満たす分布、 $X = \text{Manipulated}(W)$ 、 $P(Y | Z, W = w_1) \neq P(Y | Z, W = w_2)$   $W$  の値を  $w_1$  から  $w_2$  へ変えて  $G\text{Comb}$  を操作したとき、 $Y$  と  $Z$  は  $V$  の不連続部分集合であり、 $X \cap Z$  のメンバは  $G\text{Unman}$  の  $\text{IP}(Y, Z)$  のメンバでなく、 $X \boxplus Z$  のメンバは  $G\text{Unman}$  の  $\text{IV}(Y, Z)$  のメンバではないが、 $X$  が操作されても  $P(Y | Z)$  は変化しない。したがって、 $G\text{Comb}$  には  $W$  のある  $R$  と  $Z$  を与えられた  $Y$  のある  $Y$  を d-connect する無向きの経路  $U$  が存在する、**

$U(W, Y)$  は  $Z \setminus \{W, Y\} = Z$  で  $W$  と  $Y$  を d-connect している。=  $U(W, Y)$  は  $W$  以外の  $W$  のメンバーを含まないので、 $U(W, Y)$  の  $W$  を含まないすべてのサブパスは  $G\text{Unman}$  の無向パスとなる。 $U(W, Y)$  は  $W$  と  $Y$  の間の無向パスなので、 $\text{Manipulated}(W)$  のある変数  $X$  を含む。 $X$  が  $Z$  に含まれる場合と含まれない場合の2通りがある。

$T$  は  $U$  上のコライダではないので、 $T$  は  $Z$  ではなく、 $Z \setminus \{T\} = Z$  である。 $T$  が  $Y$  にある場合、 $X$  は  $\text{IP}(Y, Z)$  にあり、我々の仮定に反している。 $T$  が  $Y$  にない場合、 $U(T, Y)$  は  $T$  と  $Y$

をd-connectし、 $Z\{T,Y\}$ が $G_{Unman}$ にある。 $G_{Unman}$ では $Z = \mathbf{Z}$ である。 $T$ は $G_{Unman}$ の $\mathbf{Z}$ に子孫 ( $X$ ) を持つので、 $T$ は $G_{Unman}$ の $IV(Y,\mathbf{Z})$ にある。しかし、そうすると $X$ は $G$ の $IP(Y,\mathbf{Z})$ に入ることになり、我々の仮定に反する。

$X$ が $\mathbf{Z}$ にない場合、 $U(X,Y)$ は $Z\{X\}$ が与えられた $Y$ と $X$ をd-connectする。 $= \mathbf{Z}$  in  $G_{Unman}$ となる。 $X$ が $\mathcal{U}$ 上のコライダであれば、 $X$ は $G_{Unman}$ の $\mathbf{Z}$ に子孫を持つ。 $X$ が $\mathcal{U}$ 上のコライダーでない場合、 $U(X,Y)$ は $X$ が $\mathcal{W}$ の子であるため、 $X$ から外れる。

が  $G_{Comb}$  の  $\mathbf{Z}$  のメンバーの祖先である場合、または  $U(X,Y)$  が  $Y$  への有向パスである場合、 $G_{Comb}$  の  $\mathbf{Y}$  のメンバーの祖先である。もし  $X$  が  $G_{Comb}$  の  $\mathbf{Z} \sqcap \mathbf{Y}$  に子孫を持つなら、 $X$  は  $G_{Unman}$  の  $\mathbf{Z} \sqcap \mathbf{Y}$  に子孫を持つ。

ーフ

V.したがって、 $X$ は $G_{Unman}$ の $Y \sqcup Z$ に子孫を持つ。このことから、 $X$ は我々の仮定に反して、 $G_{Unman}$ の $IV(Y, Z)$ に存在することがわかる。

## 13.28 定理7.2

**定理7.2:**  $P(O)$ を $V$ 上の $G$ に忠実な分布のマージン、 $O$ 上の $G$ の部分指向誘導パスグラフ、 $Ord$ を $O$ 上の部分指向誘導パスグラフで許容できる $O$ 内の変数の順序とすると、 $P(O)$ の最小Iマップ  $G_{Min}$ に、**Definite-SP** ( $Ord, X$ ) inが含まれている。 $\pi$

で**Possible-SP**( $Ord, X$ )に含まれる**Parents**( $G_{Min}, X$ )。 $\pi$

**証明する。**  $GIP$ が $O$ 上の誘導経路グラフで、部分的に方向づけられた誘導経路グラフを持つものとする。 $\pi$   
 レンマ6.2.4により、 $GIP$ が $O$ 上の誘導パスグラフであり、 $Ord$ が $GIP$ にとって許容できる変数の総順序であるならば、**Predecessors**( $Ord, X$ ) \ **SP**( $Ord, GIP, X$ )は**SP**( $Ord, GIP, X$ )が与えられた $X$ からd分離する。したがって、**Parents**( $G_{Min}, X$ ) = **SP**( $Ord, GIP, X$ ) ならば、 $G_{Min}$ は $P(O)$ のI-写像である。

ここで、 $G_{Min}$ のサブグラフが $P(O)$ のI-mapになることを示そう。 $G_{Sub}$ において**Parents**( $G_{Sub}, X$ )が**Parents**( $G_{Min}, X$ )に正しく含まれ、したがって**SP**( $Ord, GIP, X$ )にも正しく含まれるとする。 $V$ を**Parents**( $G_{Min}, X$ ) \ **Parents**( $G_{Sub}, X$ )のある変数とする。 $V$ は**SP**( $Ord, GIP, X$ )に含まれるので、 $V$ と $X$ の間には $GIP$ の無向パス $U$ があり、その上の終点以外の頂点はすべてコライダーであり、 $Ord$ では $X$ より先である。 $U$ 上の $X$ に最も近いが $X$ に等しくない頂点で、**Parents**( $G_{Min}, X$ ) \ **Parents**( $G_{Sub}, X$ )にあるものを $W$ とする。 $U(W, X)$ は $W$ と $X$ の間の $GIP$ の無向パスで、 $U(W, X)$ 上の終点を除くすべての頂点がコライダーであり、**Parents**( $G_{Sub}, X$ )にあることがわかります。したがって、 $W$ は**Predecessors**( $Ord, X$ ) \ **Parents**( $G_{Sub}, X$ )にあり、 $GIP$ の**Parents**( $G_{Sub}, X$ )から $X$ にd-connectedである。したがって、 $W$ は $G$ の**Parents**( $G_{Sub}, X$ )を与えられた $X$ にd-connectedであり、 $P(V)$ は $G$ に忠実なので、 $W$ と $X$ は**Parents**( $G_{Sub}, X$ )を与えられて従属である。したがって、 $P(O)$ は $G_{Sub}$ のマルコフ条件を満たさない。

部分配向誘導経路グラフと順序 $Ord$ が許容される場合、 $V$ は、 $V \neq X$ であり、 $V$ と $X$ の間  
 $\pi$



に、 $U$ 上の $X$ 以外のすべての頂点が $Ord$ における $X$ の先行者であり、 $U$ 上の終点以外の頂点が $U$ 上の確定非結合者である無向パス $U$ が存在する場合にのみ**Possible-SP** ( $Ord$ ,  $X$ ) にある。部分配向誘導経路グラフと $Ord$ が許容できる場合、 $V$ が**Definite-SP**( $Ord, X$ )にあるのは、 $V \neq X$  の場合のみである。

ーフ  
を除く  $U$  上のすべての頂点が  $V$  と  $X$  の間に存在するような無向きの経路  $U$  が存在する。

$X$  は  $Ord$  における  $X$  の前身であり、端点を除く  $U$  上のすべての頂点が、コライダー

$U$ 。これらの定義と部分配向誘導経路グラフの定義から、**Definite-SP**( $Ord, X$ ) は **Parents**( $G_{Min}, X$ ) に含まれ、それは **Possible- SP**( $Ord, X$ ) に含まれることがわかります

。

### 13.29 定理7.3

**定理7.3:**  $G$  が  $V \rightarrow W$  上の有向無サイクルグラフ、 $W$  が  $G$  の  $V$  に関して外因性、 $O$  が  $V$  に  
含まれる、 $G_{Unman}$  が  $V$  上の  $G$  のサブグラフ、 $G_{Unman}$  の  $O$  上の FCI 部分指向誘導パスグ  
ラフ、 $Y$  と  $Z$  が  $O$  に含まれる、 $X$  が  $Z$  に含まれる、 $Y$  と  $Z$  は分離、 $X$  の  $X$  も **Possible-IP** ( $Y, Z$ ) in  
には存在しないとすると、 $P(Y | Z)$  は不変であり

の値を  $w_1$  から  $w_2$  に変更することで、 $G$  の  $X$  を直接操作することができる。

$A$  および  $B$  が  $Z$  になく、 $A \neq B$  である場合、 $O$  上の部分配向誘導パスグラフにおける  
 $A$  および  $B$  間の無向パス  $U$  は、 $U$  上のすべてのコライダーが  $Z$  のメンバーへの半指  
向パスのソースであり、すべての確定非コライダーが  $Z$  がない場合にのみ、 $Z$  を  
与えられた  $A$  および  $B$  の可能性のある d-連結パスとなります。

**レンマ7.3.1:**  $G$  を有向無サイクルグラフとしたとき、 $U$  は  $Z$  を与えて  $V$  と  $Y$  を d-connect す  
るパスである、

$X$  が  $Z$  にあり、 $X$  が  $U$  にあるとき、 $Z \setminus X$  が与えられた  $X$  と  $Y$  を d-connect する経路があり、  
それは into である。

$X$  への有向パス上にある辺のみを含み、 $U(X, Y)$  のサブパスを含むものである。証明

する。 $G$  が有向無サイクルグラフで、 $U$  が  $Z$  を与えられた  $V$  と  $Y$  を d-connect するパスで

、 $X$ が $Z$ にあり、 $X$ が $U$ 上にあるとする。 $X$ は $Z$ と $U$ 上にあるので、 $X$ は $U$ 上のコライダーであり、したがって $U(X, Y)$ が $X$ に入ることが分かる。端点以外の $U(X, Y)$ 上の非コライダーは $Z$ にないので、端点以外の $U(X, Y)$ 上の非コライダーは $Z \setminus X$ にない。 $U(X, Y)$ 上の全てのコライダーが $Z$ に子孫を持ち、 $U(X, Y)$ 上の全てのコライダーが $Z \setminus X$ に子孫を持つ場合、 $Z \setminus X$ を与えられた $U(X, Y)$ は $X$ と $Y$ をd-接続する。ここで、 $U(X, Y)$ 上のあるコライダーが $X$ を子孫に持ち、 $Z$ の他のメンバーを子孫に持たないとし、 $U$ 上のそのようなコライダーで $Y$ に最も近いものを $C$ とする。 $U(C, Y)$ は、 $C$ が $Z \setminus X$ になく、 $U(C, Y)$ 上の全てのコライダーが $Z \setminus X$ に子孫を持ち、 $U(C, Y)$ 上の非コライダーが $Z \setminus X$ にないので、 $Z \setminus X$ を与えられた $C$ と $Y$ をd-connectする。 $Z \setminus X$ のメンバーを含まない $C$ から $X$ への有向パスが存在する。したがって、レンマ3.3.3により、 $X$ は、 $X$ への有向パスと $U(X, Y)$ のサブパス上にある辺のみを含むパスで $Z \setminus X$ が与えられた $Y$ にd-接続される。

**Lemma 7.3.2:**  $G$ が $\mathbf{O}$ 上の $G$ の誘導パスグラフで、 $X$ と $Y$ が $\mathbf{O}$ にあり、 $\mathbf{Z}$ が $\mathbf{O}$ に含まれ、 $G$ に $\mathbf{Z}$ を与えられた $X$ と $Y$ を $d$ 接続するパス $U$ があるとき、 $G$ に $\mathbf{Z}$ を与えられた $X$ と $Y$ を $d$ 接続するパス $T$ があり、 $U$ が $G$ で $X$ に入っていれば、 $G$ に $T$ が入っていて、 $U$ が $G$ で $Y$ に入っていれば $G$ に $T$ が入っているようにする。

**証明する。** 誘導パスグラフ $G$ を持つ $G$ において、 $U$ が $\mathbf{Z}$ を与えられた $X$ と $Y$ を結ぶパス $d$ であるとする。以下のアルゴリズムを用いて、Ancestorと $D$ -Pathという2つの頂点列を構築する。(実際には無向パス $D$ -pathにのみ興味があり、Ancestorは $D$ -pathを構築するための装置としてのみ使用する)。 $D$ -Pathの頂点は常に観測されるが(すなわち $\mathbf{O}$ の頂点)、 $U$ 上にない場合もある。 $U$ 上の任意の頂点列 $R$ に対して、 $R(n)$ は $R$ の $n$ 番目の頂点を指す。 $U$ 上の任意の変数 $V$ と $W$ の組に対して、 $V$ が $U$ 上の $W$ と $X$ の間にある場合、または $V=X$ の場合に、 $W$ は $U$ 上の $V$ の後にあるということにする。

### アルゴリズム D-Path

$Ancestor(0) = \langle X \rangle$  です。

$D-path(0) = \langle X \rangle$  です。

$n = 0$ .

くり返す

if  $Ancestor(n) = D-path(n)$  then

は、 $Ancestor(n)$ と $U$ 上の次の観測変数 $V$ との間にコライダが存在しない場合、

$Ancestor(n+1) = D-path(n+1) = V$ となる;

else  $Ancestor(n+1) = Ancestor(n)$ 以降の $U$ 上の最初のコライダー、 $D-path(n+1) =$

$Ancestor(n+1)$ から $\mathbf{Z}$ のメンバーへのパス上の最初の観測変数です;

else if  $Ancestor(n) \neq D-path(n)$  then.

$U$ において、 $Ancestor(n)$ の後に、 $C$ から $\mathbf{Z}$ のメンバーへの有向パスの最初の観測

変数として $D-path(n)$ を持つコライダー $C$ が存在しない場合、 $Ancestor(n+1)$

$= D-path(n+1) = Ancestor(n)$ の後に $U$ 上で最初に観測された

変数 else

$c_2$ から $Z$ のメンバーへの有向パスの最初の観測変数として $D\text{-path}(n)$ を持つ、 $Y$ に最も近いコライダを $C_2$ とする；

の $c_2$ と $c_2$ 以降に観測された最初の変数の間にコライダーがない場合、 $U$ とすると、 $Ancestor(n+1) = D\text{-path}(n+1) = U$ 上の $c_2$ 以降の最初の観測変数となる；  
else  $C_1$ を $c_2$ の後の最初のコライダとし、 $Ancestor(n+1) = C_1$ 、 $D\text{-path}(n+1)$ とする。

$= c_1$ から $Z$ のメンバーへの有向パス上で最初に観測された変数; else

$n = n + 1$ .

$Y$ が $D\text{-path}$ に入るまで。

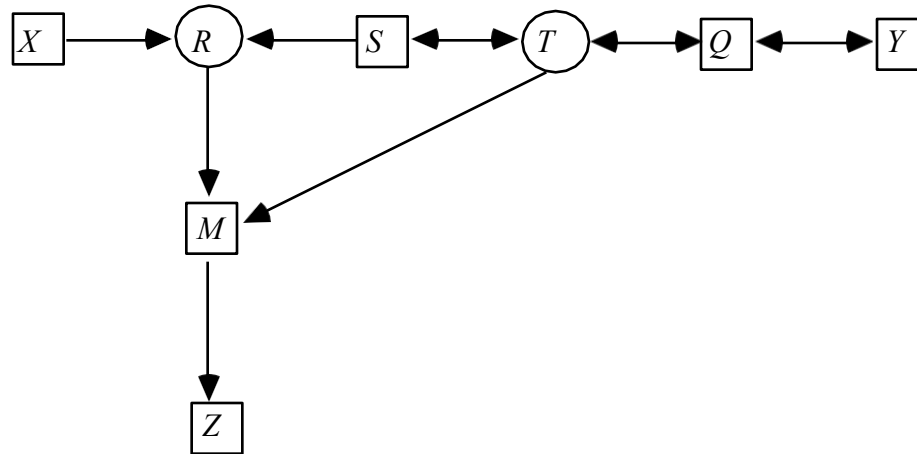


図27

例えば、図27のグラフ（丸で囲んだ頂点は観測されない）にアルゴリズムを適用した場合、 $U = \langle X, R, S, T, Q, Y \rangle$  について、 $Ancestor = \langle X, R, Q, Y \rangle$  と  $D-path = \langle X, M, Q, Y \rangle$  という結果になります。

ここで、 $G'$ の $Z$ が与えられた $X$ と $Y$ を $D-path$ がd-connectするか、または $G'$ の他のパスがd-connectすることを示す。

$G'$ は $Z$ が与えられると $X$ と $Y$ をd-connectする。

$D-path$ の頂点はすべて観測変数であり、したがって $G'$ に含まれる。 $D-path$ の構築方法によって、 $D-path$ の隣接する各頂点 $A$ 、 $B$ のペアは、終点を除いて観測変数を含まないトレック $T(A,B)$ によって $G$ 内で接続される。もし $A$ と $B$ が共に $U$ 上にあるならば、 $T(A,B)$ は $U(A,B)$ の辺を含み、もし $A$ が $U$ 上にあり $B$ が $U$ 上になければ、 $T(A,B)$ は $U(A, Ancestor(B))$ と $Ancestor(B)$ から $B$ への有向パスにおける辺を含みます； $A$ が $U$ 上になく、 $B$ が $U$ 上にある場合、 $T(A,B)$ は、 $Ancestor(A)$ から $A$ への有向パスと $U(Ancestor(A), B)$ からなり、どちらも $U$ 上でない場合、 $T(A,B)$ には $Ancestor(A)$ から $A$ 、 $U(Ancestor(A), Ancestor(B))$ 、 $Ancestor(B)$ から $B$ への有向パス中のエッジを含みます。 $T(A,B)$ は $U$ のサブパスと、 $U$ 上のコライダーから $Z$ の頂点への有向パスのサブパス

から構成され、 $G$ における誘導パスであり、したがって $D\text{-path}$ の各隣接頂点ペアは $G'$ において隣接する。 $D\text{-path}$ の構成方法から、 $D\text{-path}$ は非周期的である。このことから、 $D\text{-path}$ は $G'$ において $X$ から $Y$ に至る非周期的無向パスであることがわかる。

$W$ が $D\text{-path}$ 上であるが、 $D\text{-path}$ 上のコライダではない場合、 $W$ は $G$ の $U$ 上であり、かつ $U.W$ は $Z$ にないことがわかる。

ここで、 $D\text{-path}$ を、 $D\text{-path}'$ 上の全てのコライダー $B$ が $G$ 中の $Z$ に子孫を持つような $G'$ 中の経路 $D\text{-path}'$ に変換できることを示す。 $D\text{-path}$ 上のコライダーでありながら $G$ 中の $Z$ に子孫を持たない $X$ に最も近い頂点を $B$ 、 $D\text{-path}$ 上の $B$ の前任者を $A$ 、 $B$ の後任者を $C$ とする。 $G$ において $T(A,B)$ と $T(B,C)$ がともに $B$ に入る場合、 $D\text{-path}$ の構成により、 $B$ は $G$ において $Z$ に子孫を持つ。一般性を損なわずに、 $T(A,B)$ と $T(B,C)$ は $G$ において少なくとも一方が $B$ から外れると仮定し、また $B$ が $D\text{-path}$ 上 $X$ - $C$ 間にある場合、 $T(C)$ が $G$ において $B$ から外れ、かつ、 $D\text{-path}$ 上 $X$ - $C$ 間にあるとする。さらに、 $G'$ では $B$ に矢尻があるので、 $B$ と $C$ の間には $B$ と $C$ に入る誘導パスがある。レンマ6.6.2により、 $D\text{-path}(X,C)$ 上に頂点 $V$ があり、 $V$ と $C$ 間の辺が $G$ にあり、 $D\text{-path}(V,C)$ に置き換え可能であるような頂点が存在する。 $D\text{-path}'$ を $D\text{-path}(X,V)$ と $V$ - $C$ 間の辺の連結とする。レンマ6.6.2により、 $D\text{-path}$ が $X$ である場合、 $D\text{-path}'$ は $X$ に入る。 $D\text{-path}'$ 上のすべてのコライダーは $D\text{-path}$ 上のコライダーであり、 $D\text{-path}'$ 上のすべての非コライダーは $D\text{-path}$ 上の非コライダーである。さらに、 $D\text{-path}'$ は、 $G$ において $Z$ に子孫を持たない頂点 $B$ を含まない。修正 $D\text{-path}$ 上の、 $G$ において $Z$ に子孫を持たないすべての頂点がパスから取り除かれるまで、この作業を繰り返す。この結果を $D\text{-path}'$ と呼ぶ。

ここで、 $D\text{-path}'$ 上のあるコライダー $B$ が $G$ 内の $Z$ に子孫を持つが、 $G'$ には持たないとする。ここで、 $D\text{-path}'$ を、 $G'$ においてすべてのコライダーが $Z$ の子孫を持つ経路に変換する方法を示す。 $G'$ において、 $P$ を $B$ から $Z$ のメンバーであるある $Z$ に至る $G$ 中の有向パスとし、 $P'$ を、 $P$ 上の観測変数を出現順に並べた $B$ から $Z$ への無向パスとする。 $G'$ において、 $P$ 上の任意の2つの観測変数間の有向パスが誘導パスであるため、 $P'$ は $G'$ の無向パスである。 $G'$ において $B$ から $S$ への有向パスが存在しないような、 $P'$ 上の $Z$ に最も近い頂点を $S$ とする。また、 $P'$ 上の $S$ の前任者を $R$ とする。 $P'(B,R)$ が $B$ から $R$ への有向パスでない場合、 $G'$ の $B$ から $R$ への有向パスを $P'$ の $P'(B,R)$ に置き換えて、 $P''$ を形



成する。 $P''(B, S)$  は  $B$  から  $S$  への有向パスではなく、 $P''(B, R)$  は  $B$  から  $R$  への有向パスなので、 $G'$  において  $R \leftrightarrow S$  が成立することになる。

ここで、 $G'$  にエッジ  $B \leftrightarrow S$  が存在することを証明します。 $B = R$  であれば、先ほど示したことが成り立つ。次に、 $R \neq B$  であるとする。その場合、 $P''$  上の  $R$  の先行者を  $Q$  とする。 $P''(B, R)$  は  $B$  から  $R$  への有向パスであるから、 $G'$  では  $Q \rightarrow R$  となる。レンマ 6.6.2 により、 $P''(B, R)$  上には、 $E$  と  $S$  の間に  $S$  に入る辺が存在し、 $P''(B, S)$  において  $P''(E, S)$  と置換可能な頂点  $E$  が存在することになる。 $E$  と  $S$  の間の辺が  $E$  の外にある場合、仮定に反して、 $G'$  には  $B$  から  $S$  への有向パスが存在することになる。しかし、 $P''(B, R)$  は  $B$  から  $R$  への有向パスであるため、もし  $E$  と  $S$  の間のエッジが  $E$  に入るなら

$\overline{S}$ が $E$ に入る場合、 $E$ と $S$ の間のエッジは、 $E=$ でない限り、 $P''(B,S)$ の $P''(E,S)$ に置換できない。

$B$ すると、 $G'$ において $B \leftrightarrow S$ が成立することになる。

ここで、 $X$ と $Y$ の間の経路 $D\text{-path''}$ を以下の反復によって形成し、反復の各段階における頂点 $B$ と $S$ は上記のように定義する。第 $0$ 段の $D\text{-path''}$ を $D\text{-path'}$ に等しいとする。 $S$ が $n-1$ 段目の $D\text{-path''}(X,B)$ 上にある場合、 $n$ 段目の $D\text{-path''}(X,S)$ は $n-1$ 段目の $D\text{-path''}(X,S)$ に等しいとする。 $S$ が $n-1$ 段目の $D\text{-path''}(X,B)$ 上にない場合、 $V$ は $n-1$ 段目の $D\text{-path''}(X,B)$ と $B \leftrightarrow S$ を連結したものとする。レンマ6.6により、 $2V$ 上に $B$ に等しくなく $S$ に等しくない頂点 $E$ があり、 $E$ から $S$ に入る辺が存在し、 $V(X,E)$ と $E$ と $S$ の間の辺との連結上のコライダーである場合にのみ、 $V$ 上のコライダーである。第 $n$ 段の $D\text{-path''}(X,S)$ を、 $V(X,E)$ と $E$ と $S$ の間の辺の連結に等しいとする。同様に、第 $n$ 段の $D\text{-path''}(Y,S)$ を形成する。第 $n$ 段の $D\text{-path''}(X,S)$ は、 $S$ を含む辺を除いて、 $S$ で交差しないパスのサブパスであるから、第 $n$ 段の $D\text{-path''}(Y,S)$ と交わることはない。第 $n$ 段 $D\text{-path''}(X,S)$ と $D\text{-path''}(Y,S)$ を結合させたものを、第 $n$ 段 $D\text{-path}$ とする。 $S$ が $G'$ の $Z$ に子孫を持たない場合、 $P'$ 上の頂点 $M$ で $G'$ の $Z$ に子孫を持つものが $D\text{-path''}$ に乗るまでこの処理を繰り返す。図28を参照。 $D\text{-path'}$ は $\langle X,E,B,F,Y \rangle$ で、 $D\text{-path''}$ は太字のエッジからなる。

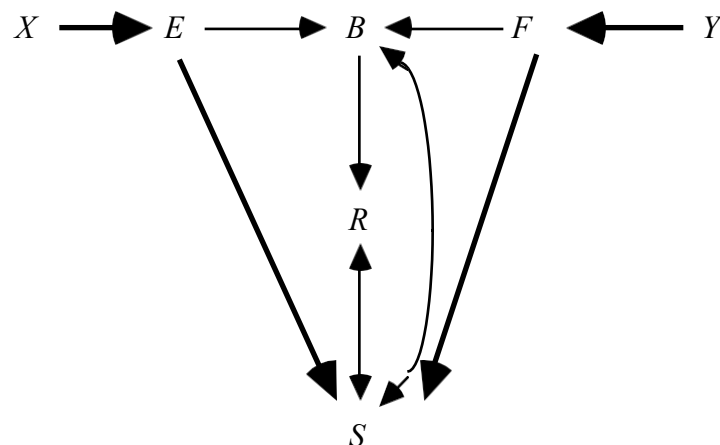


図28

第 $n$ 段のDパス"は、第 $n-1$ 段のDパス"があれば $X$ に、第 $n-1$ 段のD-パス"があれば $Y$ に入る。  
 。さらに、第 $0$ 段のDパス" ( $D-path'$ ) は、 $U$ がいれば $X$ に入り、 $U$ がいれば $Y$ に入る。 $n$   
 段目の $D-path''$ 上のすべての非結合者は、 $n-1$ 段目の $D-path''$ 上の非結合者である。 $D-path'$   
 上のすべての非結合員は $Z$ に存在しないので、 $n$ 段目の $D-path''$ 上のすべての非結合員は以下に存在しない。

$Z.M$ の可能な例外を除いて、 $n$ 段目の $D-path''$ 上のすべてのコライダーが

$n-1$ 段目の $D-path''$ 、つまり $D-path'$ 上のコライダーである。 $M$ は $n$ 番目のステージの $D-path''$ 上のコライダーである、

しかし、それは $Z$ に子孫を持つ。 $Z$ に子孫を持たない $n$ 段目の $D\text{-path}$ 上のコライダーは、 $D\text{-path}'$ 上のコライダーよりも少なくとも1つ少ない（ $D\text{-path}'$ には $B$ があり、 $n$ 段目の $D\text{-path}'$ にはないため）。このプロセスは、 $D\text{-path}$ のすべてのコライダーが $Z$ に子孫を持ってまで繰り返すことができます。

**Lemma 7.3.3:**  $G$ が $V$ 上の有向無サイクルグラフであり、 $\pi O$ 上の $G$ のFCI部分配向誘導パスグラフであり、 $\pi G$ のあるパス $U$ が $Z$ を与えられた $X$ と $Y$ を $d\text{-connect}$ する場合、その中に $Z$ を与えられた $X$ と $Y$ を $d\text{-connect}$ するパス $U''$ がある。さらに $U$ が $X$ に入っていれば、 $U''$ は $X$ から外れない。

**証明する。** レンマ7.3.2により、 $G'$ には $Z$ が与えられたときに $X$ と $Y$ を $d\text{-connect}$ する経路 $U$ が存在し、 $U$ が $X$ に入るなら $U'$ は $X$ に入る。 $G'$ における $U$ に対応する経路を $U''$ とする。 $R$ が $U''$ 上のコライダーであれば、部分配向誘導パスグラフの定義により、 $R$ は $U$ 上のコライダーとなる。 $R$ は $U$ 上のコライダーであり、 $U$ は $Z$ が与えられた $X$ と $Y$ を $d\text{-connect}$ するので、 $R$ は $G'$ において $Z$ に子孫を持つ。定理6.6により、 $R$ から $Z$ のメンバーへの半指向性パスが $G'$ に存在する。 $R$ が $U''$ 上の確定的非コライダーであれば、部分配向誘導パスグラフの定義により、 $R$ は $U$ 上の非コライダーとなる。したがって、 $U''$ は $Z$ が与えられたときに $X$ と $Y$ を結ぶ $d\text{-connecting path}$ である可能性がある。さらに、 $U$ が $X$ に入るなら、部分配向誘導経路グラフの定義により、 $U''$ は $X$ から外れない。

が $O$ 上の $G$ の部分配向誘導経路グラフである場合、 $X$ が $Z$ になく、 $X$ と $Z$ を与えられた $Y$ のある $Y$ との間に $d\text{-connecting path}$ が存在し、 $X$ から $Y \rightarrow Z$ のメンバーへの半指向性パスが存在する場合にのみ、 $X$ はPossibly-IV ( $Y, Z$ ) 内に存在することになる。が $O$ 上の $G$ の部分配向誘導経路グラフであるとき、 $X$ がPossibly-IP( $Y, Z$ )にあるのは、 $Y$ と $Z$ が不連続で、 $X$ が $Z$ 内にあり、 $X$ と $Z \setminus X$ を与えられた $Y$ のある $Y$ との間に、 $X$ から

外れないd-connecting pathがある場合に限られる。が $\mathbf{O}$ 上の $G$ のFCI部分配向誘導経路グラフであるとき、 $X$ が**Definite-Non-Descendants**( $Y$ )にあるのは、 $Y$ の任意のメンバーから $X$ への半有向経路が $\pi$ に存在しない場合に限られる。

**Lemma 7.3.4:**  $X$ が有向無サイクルグラフ $G$ の $IV(Y,Z)$ にあり、 $Y$ と $Z$ が $\mathbf{O}$ の不連続部分集合で、 $X$ が $\mathbf{O}$ にあり、 $\mathbf{O}$ 上の $G$ のFCI部分配向誘導経路グラフであれば、 $X$ は**Possibly-IV** ( $Y,Z$ ) にある。

**証明する。**  $X$ は $G$ の $IV(Y,Z)$ にあり、 $Y$ と $Z$ は $\mathbf{O}$ の不連続部分集合であり、 $X$ は $\mathbf{O}$ にあり、 $\mathbf{O}$ 上の $G$ のFCI部分配向誘導パスグラフであるとする、

$X$ は $G$ の $Y \square Z$ に子孫を持つ。したがって、定理6.6により、以下の半直接パスが存在する。

ーフ

の $Y \sqcup Z$ のメンバに $X$ を接続する経路が存在する。また、 $G$ の $Z$ を与えられた $X$ と $Y$ を $d$ -connectするパスが存在する。したがって、レンマ7.3.3により、 $X$ と $Z$ を与えられた $Y$ のメンバー $Y$ をpossibly-iv  $(Y, Z)$  in で $d$ -connectするパスが存在する。定義により、 $X$ は、possibly-iv  $(Y, Z)$  in にある。

**Lemma 7.3.5:**  $X$ が有向無サイクルグラフ $G$ の $IP(Y, Z)$ にあり、 $Y$ と $Z$ が $O$ の不連続部分集合で、 $O$ 上の $G$ のFCI部分配向誘導経路グラフであれば、 $X$ はのPossibly-IP  $(Y, Z)$  にあります。

**証明する。**  $X$ は $G$ の $IP(Y, Z)$ にあり、 $Y$ と $Z$ は $O$ の不連続部分集合であり、 $O$ 上の $G$ のFCI部分配向誘導パスグラフであるとする。 $X$ は $G$ の $IP(Y, Z)$ にあるので、 $G$ のある変数 $T$ は $X$ の親であり $IV(Y, Z)$ が $Y$ にある。 $T$ が $Y$ にあれば、 $Z \setminus X$ が与えられ $T$ と $X$ とを結ぶ $Y$ のメンバー $T$ から $X$ への有向パスが存在する。 $X$ が $U$ 上の場合、 $X$ は $U$ 上のコライダーであり、 $U(X, Y)$ は $X$ に入る；さらに、レンマ7.3.1により、 $X$ と $Y$ を $Z \setminus X$ で $d$ -connectする無向きのパスが $X$ に入る。 $X$ が $U$ 上にない場合、 $T$ から $X$ と $U$ への辺の連結は、 $Z \setminus X$ を与えられた $X$ と $Y$ を $d$ -connectする経路であり、 $X$ に入る。したがって、レンマにより

7.3.3  $Z \setminus X$  in で $X$ と $Y$ を $d$ -connectする可能性がある経路で、 $X$ から外れないものがある。  
定義により、 $X$ はPossibly-IP  $(Y, Z)$  in にある。

**定理7.3:**  $G$ が $V \sqcup W$ 上の有向無サイクルグラフ、 $W$ が $G$ の $V$ に関して外因性、 $O$ が $V$ に含まれる、 $G_{Unman}$ が $V$ 上の $G$ のサブグラフ、 $G_{Unman}$ の $O$ 上のFCI部分指向誘導パスグラフ、 $Y$ と $Z$ が $O$ に含まれる、 $X$ が $Z$ に含まれる、 $Y$ と $Z$ は分離、 $X$ の $X$ もPossible-IP  $(Y, Z)$  in には存在しないとすると、 $P(Y | Z)$  は不変であり

$G$ の $X$ を直接操作して、 $W$ の値を $w_1$ から $w_2$ に変更することで、 $W$ の値を変更する。

**証明する。**  $G$ は $V \sqcup W$ 上の有向非周期グラフ、 $O$ は $V$ に含まれ、 $W$ は $G$ の $V$ に関して外

因性、 $G_{Unman}$ は $V$ 上の $G$ のサブグラフ、 $G_{Unman}$ の $O$ 上のFCI部分配向誘導路、 $Y$ と $Z$ は $O$ に含まれ、 $X$ は $Z$ に含まれ、 $Y$ と $Z$ は不一致、 $X$ 中の $X$ はPossibly-IP ( $Y, Z$ ) inにないと仮定します。 $P(Y|Z)$ が不変でない場合

$W$ の値を $w_1$ から $w_2$ に変えることによって $X$ が操作されるとき、 $W$ は $G$ 中の $Z$ が与えられた $Y$ にd-connectedであるとする。 $W$ の他のメンバーを含まない $G$ 中の無向パス $U$ によって $Y$ 中のある $Y$ にd-connectedである $W$ のメンバーとする。 $U$ 上の非コライダーは $Z$ 内になく、 $U$ 上のすべてのコライダーは $Z$ 内に子孫を持つ。

$R$ と $N$ が $V$ にあり、 $R$ が $G$ の $N$ の子孫である場合、 $R$ は $G_{Unman}$ の $N$ の子孫であることに注意してください。 $X$ は $Z$ にあるので、 $X$ は $U$ 上のコライダーであり、 $U(X, Y)$ は $X$ に入る。 $G$ のレンマ7.3.1により、 $Z \setminus X$ が与えられたときに $X$ と $Y$ をd-connectし、 $X$ に入り、 $X$ への有向パスと $U(X, Y)$ のサブパス上にある辺のみを含む無向パス $M$ が存在する。したがって、 $M$

は $\overline{F}$  $_{GUnman}$ の無向パスであり、 $M$ 上の非コライダーは $Z\{X\}$ ではなく、 $M$ 上のすべてのコライダーは $G$ の $Z\{X\}$ に子孫があり、したがって $GUnman$ にある。 $M$ が $X$ と $Y$ をd-connectするのは $GUnman$ の $Z\{X\}$ が与えられるからである。 $M$ 上で $X$ に隣接する頂点を $T$ とすると、 $T=Y$ なら $X$ は $GUnman$ の $IP(Y, Z)$ 内にある。 $T \neq Y$ であれば、 $T$ は $GUnman$ で $Z$  (即ち $X$ ) に子孫を持つ。また、 $T$ は $U(X, Y)$ 上のコライダーではないので、 $Z$ にはない。レンマ3.3.2により、 $T$ は $Y$ にd-connectedであり、 $Z\{T\} = Z$  in  $GUnman$ が与えられた。 $T$ は $GUnman$ の $IV(Y, Z)$ にあり、従って $X$ は $IP(Y, Z)$ にあることがわかる。

$GUnman$ である。いずれの場合も、 $X$ は $GUnman$ の $IP(Y, Z)$ にあり、レンマ7.3.5により、 $X$ は我々の仮定に反してPossibly-  $IP(Y, Z)$  in  $\pi$ にある。

### 13.30 定理7.4

**定理7.4:**  $G$ が $V \square W$ 上の有向無サイクルグラフ、 $W$ が $G$ の $V$ に関して外因性、 $O$ が $V$ に含まれる、 $GUnman$ が $V$ 上の $G$ のサブグラフ、 $GUnman$ の $O$ 上のFCI部分指向誘導パスグラフ、 $X, Y, Z$ が $O$ に含まれる、 $X, Y, Z$ がペア的に $\pi$ 一致、 $X$ 中のどの $X$ もPossible-IV  $(Y, Z)$  inに存在しなければ、 $P(Y | Z)$ には不変である。

の値を $w_1$ から $w_2$ に変更することで、 $G$ の $X$ を直接操作することができる。

**証明する。**  $G$ は $V \square W$ 上の有向無サイクルグラフ、 $W$ は $G$ の $V$ に関して外生的、 $O$ は $V$ に含まれる、 $GUnman$ は $V$ 上の $G$ の部分グラフ、 $GUnman$ の $O$ 上のFCI部分配向誘導路、 $Y$ と $Z$ は $O$ に含まれる、 $X, Y$ と $Z$ は対で不連続、 $X$ の $X$ もPossibly-IV $(Y, Z)$ には入らないものと仮定します。 $W$ の値を $w_1$ から $w_2$ に変えて $X$ を操作しても $P(Y|Z)$ が変化しない場合、 $W$ は $G$ 中の $Z$ を与えられた $Y$ にd-connectedであり、 $W$ の他のメンバーを含まない $G$ 中の無向パス $U$ によって $Z$ を与えられた $Y$ 中のある $Y$ にd-connectedである $W$ のメンバーであるとする。



$U$ は $Z$ を与えられた $W$ と $Y$ をd-connectするので、 $U$ 上のnon-colliderは $Z$ に存在せず、 $U$ 上のすべてのcolliderは $Z$ に子孫を持つ。 $U$ は $X$ にある $X$ を含む。 $U(X, Y)$ は $W$ のメンバーを含まないので、 $G_{Unman}$ には $G$ の $U(X, Y)$ と同じエッジを持つパス $U'(X, Y)$ が存在することになり、 $U'(X, Y)$ の非コライダーは

$Z$ 。 $G$ では、 $U(X, Y)$ 上のすべてのコライダーは $Z$ に子孫を持つ。したがって、 $U'(X, Y)$ 上のすべてのコライダーは $G_{Unman}$ では $Z$ に子孫を持つ。したがって、 $U(X, Y)$ は $G_{Unman}$ で $Z$ が与えられた $X$ と $Y$ をd-connectする。レンマ7.3.3により、 $X$ と $Y$ のある $Y$ の間には、 $G_{Unman}$ の $Z$ が与えられたときにd-connectingなパスが存在する可能性がある。

ここで、 $X$ が $G_{Unman}$ の $Y \sqcap Z$ に子孫を持つことを示す。 $X$ が $U$ 上のコライダーである場合、次のようになる。

$X$ は $G$ の $Z$ に子孫を持ち、従って $G_{Unman}$ に子孫を持つ。ここで、 $X$ が次のようなコライダーでないとする。

$\bar{U} \cup \bar{V}$ 上の $W$ から $X$ への辺は $X$ に入るので、 $U(X, Y)$ 上の $X$ を含む辺は $X$ から外れる。 $U(X, Y)$ にコライダーがない場合、 $Y$ は $X$ の子孫である。もし $U(X, Y)$ にコライダーがあれば、 $U(X, Y)$ 上の $X$ に最も近いコライダーは $X$ の子孫であり、 $Z$ のメンバーの祖先であることになります。

このことから、 $X$ は $G_{Unman}$ の $IV(Y, Z)$ の中にあり、したがって、レンマ7.3.4により、 $X$ は我々の仮定に反して、**Possibly-  $IV(Y, Z)$** の中にあると言える。

### 13.31 定理7.5

**定理7.5:**  $G$ が $V \boxtimes W$ 上の有向無サイクルグラフ、 $W$ が $G$ 中の $V$ に関して外因性、 $G_{Unman}$ が $V$ 上の $G$ のサブグラフ、 $P_{Unman}(W)(V) = P(V \mid W = w_1)$ が $G_{Unman}$ に忠実、 $W$ の値を $w_1$ から $w_2$ へ変えることが $G$ 中の $X$ を直接操作する場合、Prediction Algorithmは正しいことになります。

**証明する。**操作されたグラフを $G_{Man}$ 、与えられた変数の順序 $Ord$ に対するアルゴリズムによって構築された $P_{Unman}(W)(V)$ の最小I-mapを $F$ とする。ステップA)は些細なことである。ステップB)は定理6.4により正しい。ステップC1)は定理7.2により正しい。ステップC2)では、レンマ3.3.5により、因数分解の条件分布が定義されている $V$ のすべての値について、以下ようになる、

$$P_{Unman}(W)(Y|Z) = \frac{\sum_{\substack{\mathbf{y}, \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \in \mathbf{iv}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \cap \mathbf{iv}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \cap \mathbf{ip}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \cap \mathbf{y}}} \prod P_{Unman}(W)(V \mid \mathbf{Parents}(F, V))}{\sum_{\substack{\mathbf{y}, \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \in \mathbf{iv}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \cap \mathbf{y} \in \mathbf{iv}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \cap \mathbf{ip}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \cap \mathbf{y}}} \prod P_{Unman}(W)(V \mid \mathbf{Parents}(F, V))}$$

は、 $PMan(\mathbf{z}) \neq 0$ となるような $\mathbf{Z}$ のすべての値 $\mathbf{z}$ について。

$GMan$ は $GUnman$ のサブグラフなので、 $F$ が $PUnman(\mathbf{w})(\mathbf{V})$ のI-mapであれば、 $F$ は $PMan(\mathbf{w})(\mathbf{V})$ のI-mapである。したがって、 $PMan(\mathbf{w})(\mathbf{V})$ は $F$ のマルコフ条件を満たし、レンマ3.3.5により

$$\begin{aligned}
 & \text{一フ} \\
 (1) \quad & P_{Man}(W) = \frac{\sum_{\mathbf{y} | \mathbf{z}} \prod_{V \in \mathbf{y}} P_{Man}(W)(V | \mathbf{Parents}(F, V))}{\sum_{\mathbf{y}} \prod_{V \in \mathbf{y}} P_{Man}(W)(V | \mathbf{Parents}(F, V))}
 \end{aligned}$$

は、 $P_{MAN}(\mathbf{z}) \neq 0$ となるような $\mathbf{z}$ のすべての値 $\mathbf{z}$ について、また因数分解の条件分布が存在するすべての値についてである。

$P_{Man}(W)(V)$  は仮説により  $G_{Man}$  のマルコフ条件を満足する。したがって  $P_{Man}(W)(V)$  において  $X \notin \mathbf{Parents}(G_{Man}, X)$  が与えられた  $G_{Man}$  においてその非親の非孫から独立であることがわかる。仮説により  $Ord$  における  $X$  の前任者は **Definite-Non-Descendants**( $X$ ) 内か、あるいは

この場合、それらは **Non-Descendants**( $G_{Unman}, X$ ) に含まれるか、**Parents**( $G_{Man}, X$ ) に含まれることになります。  $G_{Man}$  は  $G_{Unman}$  のサブグラフなので、  $G_{Unman}$  で  $X$  の非下位である頂点は、  $G_{Man}$  でも  $X$  の非下位である。したがって、  $Ord$  における  $X$  の各前任者は、  $G_{Man}$  における  $X$  の非後任者である。このアルゴリズムは、 **Parents**( $G_{Man}, X$ ) が **Predecessors**( $Ord, X$ ) に含まれることを保証している。  $P_{Man}(W)(V)$  の **Parents**( $G_{Man}, X$ ) が **Predecessors**( $Ord, X$ ) \ **Parents**( $G_{Man}, X$ ) が  $X$  から独立しているような **Predecessors**( $Ord, X$ ) の部分集合であることが分かる。したがって、  $F$  の **Parents**( $G_{Man}, X$ ) を **Parents**( $F, X$ ) に置き換えても、レンマ 3.7.1 により、結果のグラフは  $P_{Man}(W)(V)$  の I-map となる。したがって、(1) では  $P(X | \mathbf{Parents}(G_{Man}, X))$  を  $P(X | \mathbf{Parents}(F, X))$  に置き換えることができる。仮定により、アルゴリズムは各  $V \neq X$  に対して  $P_{Man}(W)(V | \mathbf{Parents}(F, V)) = P_{Unman}(W)(V | \mathbf{Parents}(F, V))$  の場合にのみ値を返すので、(1) で  $P_{Man}(W)(V | \mathbf{Parents}(F, V))$  に  $P_{Unman}(W)(V | \mathbf{Parents}(F, V))$  を置き換えればよい。

**定理9.1**  $P(S)$ が $G(S)$ に忠実であり、 $X$ と $Y$ が $G(S)$ において $S$ を含まない変数の集合であるとき、 $X$ が $G(S)$ において $Y$ と $S$ をd分離する場合にのみ、 $P(Y \mid X) = P(Y \mid X, S)$ とする。

**証明する。** これは定理3.3から導かれる。

### 13.33 定理9.2

**定理9.2:** グラフ $G$ に忠実な結合分布 $P$ について、

$$\perp\!\!\!\perp \langle YX \mid$$

$Z; Y \rangle$ のうち正確に1つだけ

$\perp\!\!\!\perp X \mid Z \sqcup \{S\} \rangle$ が $P$ において真であるのは、対応するメンバとそのメンバのみである場合のみである。

$\langle Z \text{ d-separates } X; Y; Z \sqcup \{S\} \text{ d-separates } X, Y \rangle$ は $G$ において真である。

**証明する。**これは定理3.3から導かれる。

### 13.34 定理10.1

**定理10.1:**  $G$ が $V \sqcup T \sqcup C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に十分であり、 $T$ の各潜在変数が少なくとも二つの測定指標を持つ場合、測定指標が $J$ と $L$ をそれぞれ含む潜在変数 $T_1$ と $T_3$ が、測定指標が $I$ と $K$ を含む潜在変数 $T_2$ からd分離される場合、 $G$ が線形になるときのみ  
は、 $J \perp\!\!\!\perp L \mid \neg T_2 \cdot K \mid \neg J \perp\!\!\!\perp L$ を意味する。

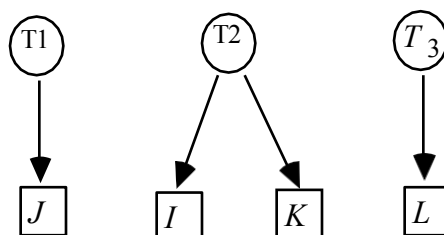


図29

測定された変数のうち、不純物の種類が共通原因不純物だけである場合、測定モデルがほぼ純粋であると言う。ほぼ純粋な潜在変数グラフとは、測定モデルがほぼ純粋であるグラフのことである。

**Lemma 10.1.1:**  $G$ が $V \sqcup T \sqcup C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に

十分であり、 $T$ の各潜在変数が少なくとも二つの測定指標を持ち、潜在変数が

測定指標が $J$ と $L$ をそれぞれ含む $T_1$ と $T_3$ は、測定指標が $I$ と $K$ を含む潜在変数 $T_2$ が与え  
 $\rho$   $\rho$

られたとき、 $\rho_{G'}$ は $JL_{LK} = JL_{KI} = JK_{IL}$ を線形に意味する。

**証明する。**  $G$ を $G'$ の純粋な潜在変数部分グラフとし、共通の原因不純物を作るすべてのトレックの原因を取り除くことによって形成される。 $T_1$ と $T_2$ が $G'$ 内の $T_2$ が与えられたときにd分離されるなら、 $G$ 内の $T_2$ が与えられたときにd分離される。 $I$ と $K$ は $G$ 内の $T_2$ の純粋指標であり、したがって子供

のみで、 $T_2$ はIと他の指標、Kと他の指標の間のすべての無向パス上で非共役である。  
したがって、JとIは $T_2$ が与えられたときにd分離し、KとLは $T_2$ が与えられたときにd分離し、KとIは $T_2$ が与えられたときにd分離している。

$T_1$ と $T_3$ は $T_2$ が与えられればd-separatedであり、またJとLはそれぞれ $T_1$ と $T_3$ の子供だけであるから、JとLは $T_2$ が与えられればd-separatedである。XとZは、 $G$ が $XZ.Y=0$ を線形に含意する場合にのみ、Yが与えられてd-separatedである。したがって、 $G$ は $IJ.T_2=0$ を線形に含意し

$\rho_{ij} = \rho_{it_2} \times \rho_{jt_2}$ となる。同様に、 $G$ は次のことを線形に意味する。 $\rho_{kl} = \rho_{kt_2} \times \rho_{lt_2}$ 、  
 $\rho_{JL} = \rho_{JT_2} \times \rho_{LT_2}$  および  
 $\rho_{ik} = \rho_{it_2} \times \rho_{kt_2}$ となる。したがって、 $G$ は線形に次のことを意味する。  
 $\rho_{JILK} = \rho_{JT_2} \times \rho_{IT_2} \times \rho_{LT_2} \times \rho_{KT_2} = \rho_{jt_2} \times \rho_{it_2} \times \rho_{kt_2} \times \rho_{lt_2}$ となる。  
 $\rho_{JLKI}$ となる。 $G$ は $G'$ と同じ消失性四分子差を線形に含意するので、 $G'$ は以下を線形に含意する。  
 $JILK = JLKI$ となる。

という証明は  $JLKI = JKIL$ は線形に

$G'$ が意味するものは基本的に同じである。

**Lemma 10.1.2:**  $G$ が $V \boxtimes T \boxtimes C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に十分であり、 $T$ の各潜在変数が少なくとも2つの測定指標を有する場合、測定指標がそれぞれJとLを含む潜在変数 $T_1$ と $T_3$ は、測定指標がIとKを含む潜在変数 $T_2$ からd分離されており、 $G$ が線形に含意するとき

$$\rho_{jik} = \rho_{jlk} \cdot \rho_{ik}$$

**証明する。**  $G$ は $JILK = JLKI$ を線形に含意するが、 $T_1$ 、 $T_3$ は $T_2$ が与えられるとd分離されないと仮定する。

四元代表定理により、 $G$ が $JILK = JLKI$ を線形に含意する場合、 $\mathcal{M}(T(I,J), T(L,K), T(L,J), T(I,K))$  チョークポイントが存在するか、あるいは  
 $JK(T(I,J), T(L,K), T(L,J), T(I,K))$  のチョークポイントです。



まず、 $IL(T(I,J),T(L,K),T(L,J),T(I,K))$ のチョークポイントが存在するとする。 $I(T(I,K))$ の頂点はこれだけなので、チョークポイントは $I$ か $T_2$ のいずれかである。 $I/L$ と $K$ の間のどのトレックにも位置しないので、チョークポイントにはならない。同様に、 $JK$   
 $(T(I,J), T(L,K), T(L,J), T(I,K))$ のチョークポイントがあるとすればそれは $T_2$ である。したがって、どちらの場合も $T_2$ がチョークポイントである。

$T_1$ と $T_3$ が、 $T_2$ が与えられたときにd-separatedにならない可能性は、2通りある。 $T_1$ と $T_3$ の間に $T_2$ を含まないトレックが存在するか、 $T_1$ と $T_3$ の間に、 $T_2$ が $U$ 上のすべてのコライダーの子孫であり、 $T_2$ が $U$ 上の非コライダーでないような無向パス $U$ が存在するかである。

まず、 $T_1$ と $T_3$ の間に、 $T_2$ を含まないトレッキングがあると仮定する。すると、 $J$ と $L$ の間には、 $T_2$ を含まないトレッキングコースが存在する。しかし、その場合、先ほど証明したことに反して、 $T_2$ はチョークポイントではありません。

ここで、 $T_1$ と $T_3$ の間に、 $T_2$ が $U$ 上のすべてのコライダーの子孫であり、 $T_2$ が $U$ 上の非コライダーでないような無向パス $U$ があるとする。この場合、 $U$ は、 $T_2$ が与えられた $T_1$ と $T_3$ をd-connectする。ここでも2つのケースがある。

まず、 $T_2$ が $IL$  ( $T(I, J)$ ,  $T(L, K)$ ,  $T(L, J)$ ,  $T(I, K)$ ) チョークポイントであるとする。無向パス $U$ 上のコライダーで $T_3$ に最も近いものを $C$ とする。(図30参照)。

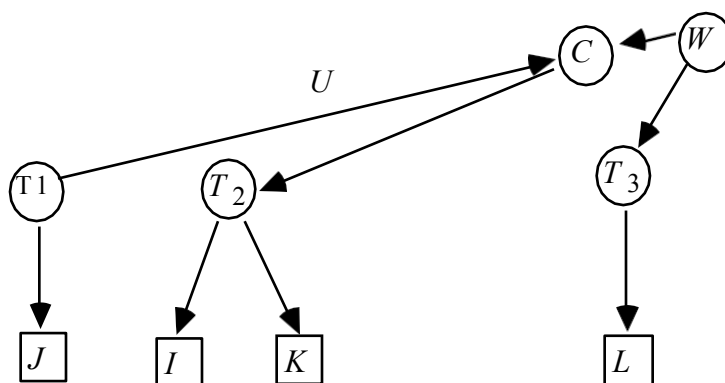


図30

$U(T_3, C)$ は $C$ 以外のコライダーを含まない。 $C$ は $U$ 上で $T_3$ に最も近いコライダーであるため、 $U(T_3, C)$ は $T_3$ と $C$ 間のトレックである。 $W$ は $U$ 上のコライダーではなく、 $C$ はコライダーなので $W \neq C$ となる。したがって、 $U(W, T_3)$ は $U$ 上のコライダーを含まない。 $T_2$ は $U$ 上の非コライダーではないので、 $U(W, T_3)$ は $T_2$ を含まない。したがって、 $K$ と $L$ の間にはトレック $T(K, L)$ があり、 $K$ 枝

は、 $U(W, C)$ 、 $C$ から $T_2$ への有向パス、 $T_2$ から $K$ への辺の連結からなり、 $L$ 分岐は、 $U(W, T_3)$ 、 $T_3$ から $L$ への辺の連結からなります。 $U(W, T_3)$ も $T_3$ から $L$ への辺も $T_2$ を含ま

ないので、 $T_2$  は  $L(T(K,L))$  ではなく、したがって仮説に反して  $IL(T(I,J),T(L,K), T(L,J),T(I,K))$  choke point でもない。

同様の議論により、 $T_1$ - $T_3$ 間に、 $T_2$ が $U$ 上の全てのコライダーの子孫であり、 $T_2$ が $U$ 上の非コライダーでないような無向パス $U$ が存在する場合、 $JK(T(I,J), T(L,K), T(L,J), T(I,K))$ のチョークポイントが存在しないことがわかる。

したがって、 $T_1$ と $T_3$ は $T_2$ が与えられてd分離している。

**定理10.1:**  $G$ が $V \sqcup T \sqcup C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に十分であり、 $T$ の各潜在変数が少なくとも2つの測定指標を持ち、測定指標が $J$ と $L$ をそれぞれ含む潜在変数 $T_1$ と $T_3$ が、測定指標が $I$ と $K$ を含む潜在変数 $T_2$ から $d$ 分離されるとき、 $G$ が線形に以下のように暗示するときだけ、その潜在変数は

$$\rho_{ji} \neq \rho_{jl} \neq \rho_{il} \quad \rho \neq \rho$$

**証明する。** 定理はレンマ10.1.1及び10.1.2から導かれる。

### 13.35 定理10.2

**定理10.2:**  $G$ が $V \sqcup T \sqcup C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に十分であり、 $T$ の各変数が少なくとも2つの測定指標を持ち、MIMBuildへの入力 $G$ によって線形に $\Pi$ 暗示される潜在変数間のすべての消失するゼロおよび1次相関のリストであり、MIMBuildの出力であるとする

A-1)  $X$ と $Y$ が $\text{in}$ で隣接していない $\Pi$ 場合、 $G$ で隣接していないことになります。

A-2)  $X$ と $Y$ が隣接し $\Pi$ 、かつエッジに"? "が付いていない場合、 $X$ と $Y$ は隣接する。

は、 $G$ において隣接している。

O-1)  $X \rightarrow Y$ が $\text{in}$ であれば、 $X$ と $Y$ の間の $G$ のトレックはすべて $Y$ に $\text{in}$ する。

O-2)  $X \rightarrow Y$ が $\Pi$   $\text{in}$ で、 $X$ と $Y$ の間のエッジに"? "がついていない場合、 $X \rightarrow Y$ は $Y$ は $G$ で。

**Lemma 10.2.1:**  $G$ が $V \sqcup T \sqcup C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に十分であり、 $T$ の各変数が少なくとも2つの測定指標を持ち、MIMBuildへの入力 $G$ によって線形に $\Pi$ 暗示される潜在変数間のすべての消失するゼロおよび1次相関のリスト

であり、MIMBuildの出力が、 $X$ および $Y$ が、において隣接しないとき、それらは $G$ で隣接しない。

**証明する。**これは定理3.4から直接導かれる。

**Lemma 10.2.2:**  $G$  が  $V \sqcup T \sqcup C$  上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$  が因果的に十分であり、 $T$  の各変数が少なくとも 2 つの測定指標を持ち、MIMBuild の入力  $G$  が  $\Pi$  線形に暗示する潜在変数間のすべての消失するゼロおよび 1 次相関のリストであり、MIMBuild の出力が  $X \rightarrow Y$  が in、 $X$  と  $Y$  間の  $G$  内トレックは  $Y$  に入るときである。

ーフ  
証明する。  $X \rightarrow Y$  が  $\Pi$  NETにあるとする。証明は、PCアルゴリズムにおけるステップD)の繰り返しループの反復回数に対する帰納法である。

基本ケース:  $G$ において $X$ と $Y$ の間にトレックが存在する。それ以外の場合、 $X$ と $Y$ は  
 $\Pi$   
空集合が与えられるとd分離され、したがって $G$ において隣接しないため。 $X \rightarrow Y$ が  
 $X \rightarrow Y$ のような向きにあるとする。

PCアルゴリズムのステップC)により、 $\leftarrow Z$  (すなわち、 $X$ と $Z$ は $Y$ を含まないある集合  
によってd分離される)  $G$ において、 $X$ と $Y$ の間のトレッキング、および $Y$ と $Z$ の間のト  
レッキングがともに $Y$ に入らない場合、 $X$ と $Z$ の間のトレッキングがあり、したがっ  
 $\Pi$   
て $X$ と $Z$ は空集合が与えられてd分離されない。 $X$ と $Y$ は $G$ の中で隣接しているので、 $W$   
は $G$ の中で $X$ と $Y$ をd-separateすることはない。 $U$ は $Y$ から外れているので、 $U$ と $V$ は $Y$ で  
衝突しない。

したがって、レンマ3.3.1により、 $X$ と $Z$ は、我々の仮定に反して、 $G$ の $W$ が与えられ  
たときにd-連結となる。 $U$ が $W$ を含むなら、 $W$ は $Y$ の子孫であり、レンマ3.3.1により  
、 $X$ と $Z$ は仮定に反して、 $W$ を与えられてd-接続である。したがって、 $X$ と $Y$ の間にあ  
る $G$ のトレックは $Y$ から外れることはない。

帰納的ケース: PCアルゴリズムのステップD)の繰り返しループを $n-1$ 回繰り返した後  
 $\Pi$   
、 $Z \rightarrow X$  in, とすると、 $G$ の $Z$ と $X$ の間のすべてのトレックは $X$ に入ることになる。こ  
 $\Pi$   
のとき、 $Z \rightarrow X - Y$  in となるような頂点 $Z$ があり、 $Z$ が $Y$  inに隣接していないため、 $X \rightarrow$   
 $\Pi$   
 $Y$ の辺が向いているとする。 $X - Y$  in間の辺が $Y$ に向かなかったため、 $X$ と $Z$ は $Y$ からd  
個離れている。で隣接しているので、 $G$ の $X$ と $Y$ の間、 $Y$ と $Z$ の間にはトレックが存在  
する。 $Y$ と $X$ の間に $X$ に入るトレックがあれば、レンマ3.3.1により、 $X$ と $Z$ は仮定に反  
して、 $Y$ が与えられたときにd-connectedである。

$Y$ は、 $X \ast \ast Y \rightarrow Z$ 、または $X \leftarrow Y \ast \ast Z$ が $U$ のサブパスであるか、または $X$ と $Z$ が隣接せず、 $U$ 上で $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ でない場合にのみ、パターン中の無向パス $U$ 上の**確定非コライダー**です。

**Lemma 10.2.3:**  $G$ が $\mathbb{V} \boxtimes \mathbb{T} \boxtimes \mathbb{C}$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に十分であり、 $T$ の各変数が少なくとも2つの測定指標を持ち、MIMBuildへの入力 $G$ によって線形に暗示される潜在変数間のすべての消失するゼロと一次相関のリストであり、MIMBuildの出力であり、 $Y$ が $P$ の無向パス $U$ 上の確定的非コライダー、対応パス $U$ が $G$ 内に存在するなら、 $U$ の非コライダーとする。

**証明する。**  $U$ が、 $X \ast \ast Y \rightarrow Z$ を含む場合、レンマ10.2.2により、対応するパス $U$ が $G$ に存在する場合、 $G$ の $Y$ と $Z$ を結ぶ辺は $Y$ から外れている；したがって、 $Y$ は $U$ 上のコライダーではない。

ーフ  
同様に、 $X \leftarrow Y * Z$  in  $\Pi$ , ならば、 $Y$ は $U$ 上のコライダーではありません。次に、 $X$ と $Z$   
が隣接せず、 $U$  in  $\Pi$ 上で $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ でないとする。での $Y$ を考えると、 $X$ と $Z$ はd分離し  
ていることがわかる。

$G$ したがって、 $X$ と $Y$ の間、 $Y$ と $Z$ の間の辺が $G$ に存在する場合、それらは次の場所で衝突  
しない。

$Y$ .

**Lemma 10.2.4:**  $G$ が $V \rightarrow T \rightarrow C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に  
十分であり、 $T$ の各変数が少なくとも2つの測定指標を持ち、MIMBuildへの入力が $G$   
によって線形に暗示される潜在変数間のすべての消失するゼロおよび1次相関のリス  
トであり、MIMBuildの出力が $X - Y$ または $X \rightarrow Y$ であり、エッジに"?"が付い  
ていない場合、 $X$ と $Y$ は $G$ で隣接している。

**証明する。**  $X - Y$ または $X \rightarrow Y$ が、エッジに"?"がついていないが、 $X$ と  
 $Y$ は $G$ において隣接していない。そして、 $G$ において $X$ と $Y$ をd個分離する集合 $S$ が  
ある。そうでなければ、MIMBuildはゼロまたは1次の部分相関が消失することを  
テストしてそれを見つけたら、そのような $S$ はいずれもカーディナリテ  
ィ2である。 $X - Y$ または $X \rightarrow Y$ は"?"でラベル付けされていないので、(i)  $P$ は空  
か、(ii)  $P$ のすべてのパスがコライダーを含むか、(iii)  $P$ のすべてのパス上で明確に  
非コライダーであるいくつかの頂点 $Z$ があるか、(iv)  $P$ のすべてのパスがいくつかの  
サブパス $\langle A, B, C \rangle$ を含むかのいずれかです。

$P$ が空であるとする。レンマ10.2.1により、inの非隣接性は $G$ の非隣接性であるから、  
inの隣接性は $G$ の隣接性のスーパーセットであり、したがってinの無向経路の集合は  
 $G$ の無向経路のスーパーセットである。

$G$ において、 $X$ と $Y$ の間にもエッジが存在しない場合、 $X$ と $Y$ はd-separatedであることが与  
えられる。

において $X$ と $Y$ の間にエッジがあり、 $G$ の空集合を考える $\Pi$ と $X$ と $Y$ はd分離されていな



いので、 $G$ において $X$ と $Y$ の間にエッジが存在する。

レンマ10.2.1と10.2.2により、 $G$ の $X$ と $Y$ の間のすべてのパスにはコライダが含まれることになる。しかし、この場合、仮定に反して、 $G$ には $X$ と $Y$ の間のエッジが存在しないことになる。

レンマ10.2.1, 10.2.2, 10.2.3から、 $G$ の $X$ と $Y$ の間に辺がない場合、 $Z$ は $G$ の $X$ と $Y$ の間のすべての無向パス上で非共役であることがわかります。

□

$\overline{P}$ のすべてのパスが何らかのサブパス $\langle A, B, C \rangle$ を含むとする。 $G$ において $X$ と $Y$ の間に辺がない場合、 $G$ における $X$ と $Y$ の間のすべての無向きのパスは $\langle A, B, C \rangle$ を含む。この場合、 $X$ と $Y$ は空集合を与えられたときに $d$ 分離されることになる。

□

**Lemma 10.2.5:**  $G$ が $V \sqcup T \sqcup C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に十分であり、 $T$ の各変数が少なくとも2つの測定指標を持ち、MIMBuildへの入力 $G$ によって線形に暗示される潜在変数間のすべての消失するゼロおよび1次相関のリストであり、MIMBuildの出力が $X \rightarrow Y$ であり、かつ辺に"?"が付いていない場合、 $X \rightarrow Y$ は $G$ に含まれる。

**証明する。** レンマ10.2.2、10.2.4から導かれる。

**定理10.2:**  $G$ が $V \sqcup T \sqcup C$ 上のほぼ純粋な潜在変数グラフであり、 $T$ が因果的に十分であり、 $T$ の各変数が少なくとも2つの測定指標を持ち、MIMBuildへの入力 $G$ によって線形に暗示される潜在変数間のすべての消失するゼロおよび1次相関のリストであり、MIMBuildの出力であるとする

A-1)  $X$ と $Y$ が $in$ で隣接していない場合、 $G$ で隣接していないことになります。

A-2)  $X$ と $Y$ が隣接し、かつエッジに"?"が付いていない場合、 $X$ と $Y$ は隣接する。

は、 $G$ において隣接している。

O-1)  $X \rightarrow Y$ が $in$ であれば、 $X$ と $Y$ の間の $G$ のトレックはすべて $Y$ に $in$ する。

O-2)  $X \rightarrow Y$ が $in$ で、 $X$ と $Y$ の間のエッジに"?"がついていない場合、 $X \rightarrow Y$ は $Y$ は $G$ で。

**証明する。** レンマ10.2.1～10.2.5から導かれる。

**定理11.1.**  $G$ が有向無サイクルグラフ  $G'$ の部分グラフである場合、 $G'$ が線形に含意する  $G$ の変数間の四則演算の集合は、 $G$ が線形に含意するものの部分集合となる。

**証明する。**  $G$ が有向無サイクルグラフ  $G'$ のサブグラフである場合、 $G$ のトレックは  $G'$ のトレックのサブセットである。したがって、 $G'$ にチョークポイントがあれば、 $G$ にもチョークポイントが存在する。

代表定理、 $G$ が四分木差分 $t$ が消失することを線形に含意する場合、 $G$ は線形に $t$ が消えることを意味する。



## 用語集

**A:** グラフ $G$ において、 $A(A,B)$ を $A$ または $B$ の祖先の連合とする。

**受容可能である:** グラフ $G$ における変数の全順序 $Ord$ が、 $A \neq B$ で $G$ に $A$ から $B$ への有向パスがあるとき、 $Ord$ において $A$ が $B$ に先行する場合にのみ、 $G$ に対して許容されるとする。

**後である:** グラフ $G$ において、頂点 $X$ が頂点 $Y$ の**後**にあるのは、 $Y$ から次のような有向パスがある場合のみである。

$G$ の $X$ です。

**ほぼ純粋である:** 測定された変数の中で不純物の種類が共通原因不純物だけである場合、測定モデルが**ほぼ純粋である**と言う。**ほぼ純粋な潜在変数グラフは、測定モデルがほぼ純粋であるものである。**

**前である:** グラフ $G$ において、頂点 $X$ が頂点 $Y$ の**前**にあるのは、次のような有向パスが存在する場合のみである。

$G$ で $X$ から $Y$ へ。

**C.F:** 定数係数を参照。

**チョークポイント:** 有向無サイクルグラフ $G$ において、 $T(K,L)$ のすべての $T(K,L)$ と $T(I,J)$ のすべての $T(I,J)$ について、 $L(T(K,L))$  と  $J(T(I,J))$  が頂点 $Q$ で交差していれば、 $Q$ は $LJ(T(I,J), T(K,L))$  **choke point**となる。同様に、 $T(K,L)$  内のすべて

の  $T(K, L)$  と  $T(I, J)$  内のすべての  $T(I, J)$  について、 $L(T(K, L))$  とすべての  $J(T(I, J))$  が頂点  $Q$  で交わり、かつすべての  $T(I, L)$  が  $T(I, L)$  内で、すべての  $T(J, K)$  内で、 $L(T(I, L))$  と  $J(T(J, K))$  も  $Q$  で交わるなら  $Q$  は  $LJ(T(I, J), T(K, L), T(I, L))$  **チョークポイントである**。トレックの定義も参照。

**結合グラフ**：マニピュレーションを参照。

**定数係数**：LCF または LCT  $T$  において、式が  $ce$  と等しく、 $c$  が 0 ではない定数で、 $e$  が正の整数乗に上げた式係数の積である場合、 $c$  は (c.f.)  $ce$  の **定数係数** となる。

**を含む：**有向無周期グラフにおいて、有向パス $R(U,I)$ と $R(U,J)$ が**トレック** $T$ を含むのは、以下の場合である。

$I(T(I,J))$ は $R(U,I)$ の最終セグメント、 $J(T(I,J))$ は $R(U,J)$ の最終セグメントであることを示します。

**D：**有向無サイクルグラフ $G$ が与えられたとき、**D**  $(X_i, X_j)$  は、 $X_i$ から $X_j$ へのすべての有向パスの集合である。

**D-connection (ディー・コネクション)：** D-separationを参照。

**確定判別パス：**部分配向誘導経路グラフにおいて、 $U$ が $B$ を含む $X$ - $Y$ 間の無向パス、 $B \neq X$ 、 $B \neq Y$ 、 $U$ 上の $B$ と終点を除くすべての頂点が $U$ 上のコライダーまたは明確な非コライダーである場合にのみ、 $U$ は $B$ の**明確な差別経路**となる。

(i)  $U$ 上で $V$ と $V'$ が隣接し、 $V'$ が $U$ 上で $V$ と $B$ の間にある場合、 $U$ 上で $V \rightarrow V'$ となります

(ii)  $V$ が $U$ 上の $X$ と $B$ の間にあり、 $V$ が $U$ 上のコライダーである場合、 $\pi V \rightarrow Y$  in , else  $V \leftarrow * Y$

において

(iii)  $V$ が $U$ 上の $Y$ と $B$ の間にあり、 $V$ が $U$ 上のコライダーである場合、 $\pi V \rightarrow X$  in , else  $V \leftarrow * X$

において

(iv) において、 $X$ と $Y$ は隣接しない。

**確定ノンコライダー：**頂点 $B$ が $U$ の終点であるか、 $U$ が $A \leftarrow B \rightarrow C$ 、 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 、 $A \rightarrow B \rightarrow C$ のいずれかの部分経路を含むように頂点 $A$ および $C$ が存在する場合にのみ、頂点 $B$ は無向経路 $U$ の**確定無結合員**である。

**Definite-Non-Descendantの略：**が $O$ 上の $G$ のFCI部分配向誘導パスグラフである場合、 $X$ が**Definite-Non-Descendants**( $Y$ )にあるのは、 $Y$ のどのメンバーから $X$ への半指



向パスが $\pi$ に存在しない場合のみである。

**Definite-SP:**  $O$ 上の部分配向誘導パスグラフで、 $Ord$ が許容できるものに対して、 $V$ が $\text{Definite-SP}(Ord, X)$ にあるのは、 $V \neq X$ で、 $V$ と $X$ の間に、 $U$ 上の $X$ 以外のすべての頂点が $Ord$ における $X$ の先行者であり、 $U$ 上の端点以外のすべての頂点が $U$ 上の衝突者であるという無向パス $U$ がある場合に限る。

**依存性:** LCTまたはLCFSにおいて、 $X_i$ がゼロ次でない場合、変数 $X_i$ は**依存**である。

**Det (デット):**  $\text{Det}(Z)$ は、 $Z$ の任意の部分集合によって決定される変数の集合である。

**決定する：**変数の集合 $Z$ が変数の集合 $A$ を決定するのは、 $A$ のすべての変数が $Z$ の変数の決定論的関数であり、 $A$ のすべての変数が $Z$ の任意の適切な部分集合の決定論的関数でないときである。

**デット・コネクテッド (Det-connected)：**デットセパレーションを参照。

**Det-separatedという：** $G$ が $V$ 上の有向非周期グラフ、 $Z$ が $X$ または $Y$ を含まない $V$ の部分集合、 $X \neq Y$ のとき、 $X$ と $Y$ が $Z$ とDeterministic ( $V$ ) において、Deterministic ( $V$ ) および $Z$ に対するあるMod ( $G$ ) において $Z \sqsubseteq \text{Det} (Z)$ により $d$ 分離されるか、 $X$ または $Y$ が $\text{Det} (Z)$  内にある場合にのみ、**Det-分離**である。そうでなければ、 $X \neq Y$ で $X$ と $Y$ が $Z$ にない場合、 $X$ と $Y$ は $Z$ とDeterministic( $V$ )があれば**det-connected**である。 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ が $V$ における変数の不連続集合であり、 $X$ と $Y$ が空でない場合、 $X$ のすべてのメンバー $X$ と $Y$ のすべてのメンバー $Y$ が $Z$ を与えられたときに不分離である場合にのみ、 $X$ と $Y$ は $Z$ を与えられたときに**不分離**である；その他、 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ が $V$ における変数の不連続集合で、 $X$ と $Y$ が空でない場合、 $X$ と $Y$ は $Z$ と**決定論** ( $V$ ) において**不連結**である。

**判別パス：**誘導経路グラフ $G'$ において、 $U$ は $B$ の判別経路である。  $U$ が $B$ を含む $X$ と $Y$ の間の無向パスであり、 $B \neq X$ 、 $B \neq Y$ 、である場合にのみ、 $B$ の判別パスとなる。

- (i)  $U$ 上で $V$ と $V'$ が隣接し、 $V'$ が $U$ 上で $V$ と $B$ の間にある場合、 $U$ 上で $V \rightarrow V'$ となります、
- (ii)  $V$ が $U$ 上の $X$ と $B$ の間にあり、 $V$ が $U$ 上のコライダーであれば、 $G'$ において $V \rightarrow Y$ 、それ以外は $V \leftarrow *$ 。

$Y$  in  $G'$ です、

- (iii)  $V$ が $U$ 上の $Y$ と $B$ の間にあり、 $V$ が $U$ 上のコライダーである場合、 $V \rightarrow G'$ の $X$ 、それ

以外の場合、 $V \prec^* \cdot$ 。

$G'$ の $X$ です、

(iv)  $X$ と $Y$ は $G'$ で隣接していない。

**分散形式：**式や方程式 $E$ の**分散形**は、 $E$ に加算、減算、除算がなく、すべての乗算を実行した結果であり、方程式に除算がない場合、その分散形は項の和となる。例えば、方程式  $u = (a + b)(c + d)v$  の分散形は  $u = acv + adv + bcv + bdv$  です。

**D-mapである：** $V$ 上の非周期グラフ $G$ が確率分布 $P(V)$ の**D-mapである**のは、 $V$ 中の確率変数の不連続集合であるすべての $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ について、 $G$ 中の $Z$ が与えられたときに $X$ が $Y$ から $d$ 分離されないならば、 $P(V)$ の $Z$ が与えられたときには $X$ は $Y$ から独立ではない場合である。しかし、D-mapをLCTのグラフに適用した場合、定義中の量子子は**非エラー変数の集合にのみ適用される**。

**D-Sep:**  $G'$ を $O$ 上の誘導パスグラフとし、 $A \neq B$ としたとき、 $V \sqsupseteq D-SEP(A, B)$ は、 $A \neq V$ であり、 $U$ 上のすべての頂点が $A$ または $B$ の祖先であり、（端点を除いて） $U$ 上のコライダであるような $A-V$ 間の無向パス $U$ がある場合にのみ成立するとします。

**D-separatedである:**  $G$ が頂点集合 $V$ を持つ有向無サイクルグラフで、 $Z$ が $X$ または $Y$ を含まない頂点集合で、 $X \neq Y$ 、 $X$ と $Y$ が $Z$ にない場合、 $X$ と $Y$ が $Z$ と $Deterministic(V)$ で**D分離**されるのは、 $U$ 上の各コライダーが $Z$ に子孫を持っていて、 $U$ 上の他の頂点が $Det(Z)$ にないように、 $X$ と $Y$ 間の $G$ 中の無向経路 $U$ が存在するときのみ；さもなければ、 $X \neq Y$ で $X$ と $Y$ が $Z$ にない場合、 $X$ と $Y$ は $Z$ と $Deterministic(V)$ があれば**D-connectedである**。同様に、 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ が変数の不連続集合であり、 $X$ と $Y$ が空でない場合、 $X$ と $Y$ のデカルト積における各対 $\langle X, Y \rangle$ が $Z$ と $Deterministic(V)$ を与えられた**D-分離**である場合にのみ、 $X$ と $Y$ は $Z$ と $Deterministic(V)$ を与えられる。それ以外は $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ が不連続で $X$ と $Y$ が空でない場合は $X$ と $Y$ は $Z$ と $Deterministic(V)$ を与えられて**D-接続された**。(小文字の "d" で始まる d-separation や、同じく小文字の "d" で始まる d-connection とは異なることに注意)。

**e:** LCF  $F$ において、 $e(S)$ は $S$ が独立変数であれば $S$ と等しく、 $S$ が独立変数でなければ $S$ への誤差変数と等しくなる。

**E:**  $X$ を確率変数とした場合、 $E(X)$ は $X$ の期待値である。

**Equiv( $G'$ )である:**  $G'$ が $O$ 上の誘導パスグラフである場合、**Equiv( $G'$ )**は $G$ と同じ d-connection を持つ同じ頂点上の誘導パスグラフの集合である。

**E.C.F:** Equation Coefficient Factorを参照。

**方程式係数：**線形因果理論、線形因果形式を参照。

**Equation coefficient factor (方程式係数)：**LCF または LCT  $T$  において、式が  $ce$  と等しく、 $c$  が 0 ではない定数で、 $e$  が正の整数乗に上げた式係数の積である場合、 $e$  は  $ce$  の**式係数** (e.c.f.) となる。

**多項式と等価である：** LCF において、量 (例えば共分散)  $X$  は、各 LCF  $F = \langle \langle R, M, E \rangle, C, V, EQ, L, Err \rangle$  および各 LCT  $S = \langle \langle R, M, E \rangle$  の場合に限り、**外来変数の係数** および**分散の多項式と等価である**。

$\langle \langle R', M', E' \rangle, (\mathcal{P}), EQ', L', Err' \rangle$  が  $F$  のインスタンスである場合、その多項式が存在する。

の線形係数を**C**の対応する変数の値として代入し、 $S$ の外生変数の分散を**V**の対応する変数の値として代入した結果と**X**が等しくなるように、**C**と**V**の変数を代入します。

**誤差変数**：線形因果理論、線形因果形式を参照。

**外因性**： $G$ が変数の集合**V**と**W**に対する有向非循環グラフであり、 $V \cap W = \emptyset$ ある場合、**V**の任意のメンバーから**W**の任意のメンバーへの有向辺が存在しない場合に限る、**W**は**G**における**V**に関して外因性である。

**忠実な区別がつかない** $G$ に忠実なすべての分布が**G**'にも忠実であり、その逆である場合に限る、2つの有向無サイクルグラフ**G**、**G**'は**忠実に区別できない** (f.i.) と言うことにする。

**F.I.**: faithfully indistinguishableを参照。

**最終セグメント**：グラフ**G**において、長さ**n**の経路**U**は、長さ**m**の経路**V**の**最終区間**である

$m \leq n$ のとき、 $1 \leq i \leq n+1$ のとき、**V**の番目の頂点は**U**の  $(m-n+i)$  番目の頂点に等しい。

**I-マップである**：非周期有向グラフ**G** over **V**は、**V**中の確率変数の不連続集合であるすべての**X**、**Y**、**Z**について、**G**中の**Z**が与えられたときに**X**が**Y**から**d**分離されていれば、 $P(V)$ 中の**Z**が与えられたときに**X**が**Y**から独立であるならば、確率分布**P** (**V**) の**Iマップ**となる。しかし、I-mapをLCTのグラフに適用した場合、定義中の量子子は**非エラー変数**の集合にのみ適用される。

**Ind**である：有向無サイクルグラフ**G**に対して、**Ind**は**G**の独立変数の集合である。

*IndaIJ*: *IndaIJ*は、*I*に対する独立方程式における*J*の係数であり、独立方程式も参照。

**独立である**: LCTまたはLCFSにおいて、変数 $X_i$ が**独立**であるのは、 $X_i$ の次数がゼロである場合（すなわち、その変数に向けられたエッジがない場合）である。独立の性質は、統計的独立の関係とは全く異なることに注意してください。文脈によって、この用語がどちらの意味で使われるかが明らかになる。

**独立方程式**: LCF  $\langle \langle R, M, E \rangle, C, V, EQ, L, S \rangle$  において、方程式が**従属変数**  $X_j$  に対して**独立方程式となるのは**、それが EQ によって暗示され、**R** の変数で r.h.s に現れるものが独立で一度でも現れる場合のみである。

**誘導経路である：**  $G$ が変数の集合 $V$ 上の有向無サイクルグラフで、 $O$ が $A$ と $B$ を含む $V$ の部分集合で、 $A \neq B$ の場合、 $A$ と $B$ 間の無向パス $U$ は、終点を除く $U$ 上の $O$ のすべてのメンバーが $U$ 上のコライダーであり、 $U$ 上のすべてのコライダーが $A$ または $B$ のいずれかの祖先である場合にのみ $O$ に対して誘導パスとなります。

**誘導パスグラフ：**  $G'$ は、 $O$ が $G$ の頂点の部分集合であり、 $A$ と $B$ が $O$ にある場合に限り、変数 $A$ と $B$ の間に $A$ に矢尻を持つ辺が存在し、 $O$ に対して $A$ と $B$ の間に $A$ に入る誘導経路が $G$ に存在する場合に限り、有向無サイクルグラフ $G$ の $O$ 上の誘導経路グラフです（第2章の表記を用いて、誘導経路グラフのマークの集合は $\{>, EM\}$ です）。

**初期セグメント：** グラフ $G$ において、長さ $n$ の経路 $U$ は、 $m \leq n$ であり、 $1 \leq i \leq n+1$ のとき、 $V$ の最初の頂点が $U$ の最初の頂点に等しい場合、長さ $m$ の経路 $V$ の初期セグメントとなる。

**イントである：** グラフ $G$ において、 $A$ - $B$ 間の辺が $A$ に入るのは、その辺の $A$ 側のマークが" $>$ "である場合のみである。 $A$ - $B$ 間の無向パス $U$ が $A$ へのエッジを含む場合、 $U$ は $A$ に入る、ということにする。

**不変である：**  $G$ が変数 $V \boxtimes W$ の集合に対する有向非循環グラフであり、 $W$ が $G$ における $V$ に関して外生的であり、 $Y$ と $Z$ が $V$ の不連続部分集合であり、 $P(V \boxtimes W)$ が $G$ のマルコフ条件を満足する分布であるとする、とし、 $\text{Manipulated}(W) = X$  とすると、 $P(Y|Z)$ は、両者が定義されている場所において、 $P(Y|Z, W = w_1) = P(Y|Z, W = w_2)$  の場合に限り、 $W$ を $w_1$ から $w_2$ に変更することによって $G$ 内の $X$ を直接操作しても不変である。



**インスタンスである：** LCT  $S$  は、 $S$  のグラフが  $F$  のグラフと同型である場合にのみ、LCF  $F$  のインスタンスとなる。

**IP：** 有向無サイクルグラフ  $G$  において、 $Y \cap Z = \emptyset$  のとき、 $W$  が  $\text{IP}(Y, Z)$  にある ( $W$  は  $Z$  を与えられた  $Y$  の情報変数である親を持つ) のは、 $W$  が  $Z$  のメンバーであり、 $W$  が  $\text{IV}(Y, Z) \sqcap Y$  に親を持っている場合に限られる。

**IV：** 有向無サイクルグラフ  $G$  において、 $Y \cap Z = \emptyset$  のとき、 $V$  が  $\text{IV}(Y, Z)$  ( $Z$  を与えられた  $Y$  の情報変数) にあるのは、 $V$  が  $Z$  を与えられた  $Y$  に  $d$  接続されており、 $V$  が  $\text{ND}(YZ)$  にない場合のみである。(これは、 $V$  が  $Y \sqcap Z$  にないことを伴います)。

**ラベルです：**線形因果理論、線形因果形式を参照。

**長さ：**グラフ $G$ において、パスの**長さ**は、パスに含まれる頂点の数から1を引いたものに等しい。

**交点の最終点：**有向無サイクルグラフ $G$ において、有向パス $R(U,I)$ と有向パス $R(V,J)$ の**最後の交点**は、 $R(U,I)$ 上の最後の頂点で、 $R(V,J)$ 上にも存在する。なお、 $G$ が有向無サイクルグラフの場合、有向パス $R(U,I)$ と有向パス $R(V,J)$ の最後の交点は、 $R(V,J)$ と $R(U,I)$ の最後の交点と等しく、これは有向環状パスには当てはまらない。

LCF: Linear causal formを参照のこと。

LCT: Linear causal theoryを参照。

**線形因果形 (Linear causal form)：**線形因果形は、推定されていないLCTで、外生変数の線形係数と分散が定数ではなく実数変数である。より正式には、線形因果形(LCF)を $\langle R, M, E \rangle, C, V, EQ, L, Err$ とすると、次のようになる。

- i.  $\langle R, M, E \rangle$ は有向無周期グラフである。 $Err$ は $R$ の部分集合で、**エラー変数**と呼ばれる。各エラー変数は、次数0、外延度1である。 $R$ の各 $X_i$ のインデグリー $\neq 0$ に対して、 $X_i$ へのエッジを持つエラー変数がちょうど1つ存在する。
- ii.  $c_{ij}$ は $X_j$ から $X_i$ へのエッジに関連するユニークな実数変数であり、 $C$ は以下の集合である。  
 $c_{ij} \cdot V$ は変数の集合  
 $\sigma_i$   
 $\sigma_i$   
<sup>2</sup>ここで、 $X_i$ は $\langle R, M, E \rangle$ の外生変数であり  
<sup>2</sup>です  
 は、正の実数の範囲にある変数です。
- iii.  $L$ は、 $E$ 中の各 $e$ に対して、 $head(e) = X_i$  and  $tail(e) = X_j$ ならば、 $L(e) = c_{ij}$ となるような領域 $E$ を持つ関数である。

iv. EQは、**R**の変数における独立同質線形方程式の一貫した集合であり、正の次数を持つ**R**の各 $X_i$ に対して、EQには以下の形式の方程式が存在する。

$$X_i = \left( \text{エックスアイ} \sum_{X_j \sqsubseteq \text{Parents}(X_i)} c_{ij} \right) X_j$$

ここで、各 $c_{ij}$ は $C$ の実数変数、各 $X_i$ は $R$ の実数変数である。

EQ.  $c_{ji}$  は、 $X_i$  の方程式における  $X_j$  の方程式係数である。

線形因果理論：線形因果理論（LCT）を  $\langle R, M, E \rangle, (f, P)$  とする、 $\Omega$

EQ, L, Err> ここで

- i.  $(f, P)$  は確率空間であり、ここで  $\Omega$  はサンプル空間、 $f$  は  $\Omega$  上のシグマフィールド、 $P$  は  $f$  上の確率分布である。
- ii.  $\langle R, M, E \rangle$  は有向無周期グラフである。 $R$  は  $(f, P)$  上の乱数変数の集合である。
- iii.  $R$  の変数は、共同分布を持っている。 $R$  の各変数は、0でない分散を持つ。 $E$  は  $R$  の変数間の有向辺の集合である（ $M$  は有向グラフで発生するマークの集合、すなわち  $\{EM, >\}$  である）。
- iv. EQ は、 $R$  の確率変数における独立同質一次方程式の一貫した集合であり、正の次数を持つ  $R$  の各  $X_i$  に対して、EQ には次のような形式の方程式が存在する。

$$X_i = \left( \text{エックスアイ} \sum_{X_j \in \text{Parents}(X_i)} a_{ij} X_j \right)$$

ここで、各 $a_{ij}$ はゼロでない実数であり、各 $X_i$ は $R$ 内にある。これは、 $R$ 内の正の次数の各頂点 $X_i$ が、その親のすべて、および唯一の線形関数として表現できることを意味する。EQには他の方程式は存在しない。 $a_{ij}$ の非ゼロ値は、 $X_i$ の方程式における $X_j$ の方程式係数である。

- v. 頂点（確率変数） $X_i$ と $X_j$ が外生的である場合、 $X_i$ と $X_j$ は一对一で統計的に独立している。
- vi.  $L$ は、 $E$ 中の各 $e$ に対して、 $\text{head}(e) = X_i$  and  $\text{tail}(e) = X_j$ ならば、 $L(e) = a_{ij}$ となるような領域 $E$ を持つ関数である。 $L(e)$ を $e$ のラベルと呼ぶことにする。拡張すれば、任意の非循環無向パス $U$ の辺のラベルの積を $L(U)$ と表し、 $L(U)$ を $U$ のラベルと呼ぶ。

- vii.  $R$ の $S$ には誤差変数と呼ばれる部分集合があり、それぞれindegree 0、outdegree 0である。 $I$ の誤差変数を含まない任意の変数集合を条件とした内生変数 $I$ の分散は0に等しくないことに注意する。

**線形表現:**  $V$ 上の有向非循環グラフ $G$ が分布 $P(V)$ を線形表現するのは、 $V'$ 上の有向非循環グラフ $G'$ と分布 $P'(V')$ が以下のように存在する場合に限られる。

- (i)  $V$ は $V'$ に含まれる；

- (ii)  $V$  の各内生的（つまり正の次数を持つ）変数  $X$  に対して、 $V \setminus \{X\}$  には、ゼロ次数、正の分散、アウト度が1に等しく、 $X$  から  $X$  への有向辺を持つ固有の変数  $X$  が存在します；
- (iii)  $G$  は  $V$  上の  $G'$  のサブグラフである；
- (iv)  $G$  の各内生変数は、 $G'$  の親の一次関数である；
- (v)  $P'(V')$  では、 $G'$  の任意の2つの外因性変数間の相関はゼロである；
- (vi)  $P(V)$  は、 $P'(V')$  の  $V$  に対するマージンである。

$V \oplus$  のメンバーを**エラー変数**と呼び、 $G$  を**展開グラフ**と呼びます。**線形に含意する**

：有向無サイクルグラフ  $G$  が  $AB.H = 0$  を**線形に含意するのは**、次の場合のみである。

$P_G$  で線形表現されるすべての分布において  $AB.H = 0$  となる(すべての偏相関が分布について定義されていると仮定する)。

**マニピュレートする**：マニピュレーションを参照。

**操作されたグラフ**：マニピュレーションを参照。

**操作する**： $G$  を変数  $V \sqcup W$  の集合にかかる有向非循環グラフとし、 $V \cap W = \emptyset$  とする。

$\square$  の有向辺が存在しない場合に限り、 $W$  は  $G$  の  $V$  に関して**外生的である**。

$G_{Comb}$  が変数  $V \sqcup W$  の集合に対する有向非循環グラフであり、 $P(V \sqcup W)$  が  $G_{Comb}$  のマルコフ条件を満たすとすれば、 $W$  の値を  $w_1$  から  $w_2$  に変えることは、 $W$  が  $V$  に対して外生的である場合に限り、 $V$  に対する  $G_{Comb}$  の**操作**であり、 $P(V | W = w_1) \neq P(V | W = w_2)$  です。  $P_{Unman}(W)(V) = P(V | W = w_1)$ ,  $P_{Man}(W)(V) = P(V | W = w_2)$  と定義し、同様に  $P(V)$  から形成される様々な限界分布と条件付分布についても定義する。 $G_{Comb}$  を**結合グラフ**、 $V$  上の  $G_{Comb}$  の部分グラフを**操作されていないグラフ**  $G_{Unman}$  と呼ぶことにする。 $V$  が  $Children(W) \cap V$  にある場合に限り、 $V$  は **Manipulated(W)** にある（つまり、 $V$  は操作変数の1つから直接影響を受ける変数

である)。

**Manipulated(W)**は、**直接操作されている**。以下、**W**の変数を**政策変数**と呼ぶ。**操作されたグラフ**  $G_{Man}$  は、 $P_{Man}(W)(V)$ がマルコフ条件を満たす  $G_{Unman}$  の部分グラフであり、**Manipulated(W)**のメンバーの親が  $G_{Unman}$  と異なる程度である。

**ミニмумIマップ**: 非周期グラフ  $G$  が確率分布  $P$  の**最小Iマップであるのは**、以下の場合である。

$G$  は  $P$  のI-mapであり、 $G$  のサブグラフが  $P$  のI-mapになることはない。

をLCTのグラフに適用した場合、定義中の量化子は*非エラー*の集合にのみ適用される。変数を使用します。

**Modである：**  $G$ が $V$ 上の有向無サイクルグラフで、 $Z$ が $V$ に含まれる場合、 $G$ が **Deterministic ( $V$ )** および $Z$ に対して**Mod ( $G$ )**にあるのは、 $V$ 中の各 $V$ に対して以下の場合のみである。

- (i)  $Z$ に含まれる頂点のうち、 $G$ における $V$ の子孫でないもので、 $V$ を決定するものが存在する場合、 $\text{Parents}(G', V)=X$ 、ここで $X$ は $Z$ に含まれる頂点のうち、 $G$ における $V$ の子孫でないもので、 $V$ を決定するものの集合である；
- (ii)  $Z$ に含まれる頂点のうち、 $G$ において $V$ の子孫でないもので、 $V$ を決定する集合 $X$ が存在しない場合、 $\text{Parents}(G', V) = \text{Parents}(G, V)$  とする。

**ND：** 有向無サイクルグラフ $G$ において、 $\text{ND}(Y)$ は $Y$ に子孫を持たないすべての頂点の集合である。

**Non-Descendantsの略：** 有向非循環グラフ $G$ において、 $X$ が $\text{Non-Descendants}(Y)$ に入るのは、 $G$ において $Y$ のどのメンバーから $X$ への有向パスが存在しない場合のみである。

**観察される：** 誘導経路グラフ、誘導経路を参照。

**アウト・オブグラフ $G$ において、**  $A$ と $B$ の間の辺は、 $A$ の端点のマークが空マークである場合にのみ、 $A$ の外にある。 $A$ - $B$ 間の無向パス $U$ が $A$ から外れた辺を含む場合、 $U$ は $A$ から外れたとすることにする。

**並列埋込み：** 共通の頂点集合 $O$ を持つ有向無サイクルグラフ $G_1$ 、 $G_2$ は、以下の場合



に限り、 $\mathbf{O}$ を含む共通の頂点集合 $\mathbf{U}$ を持つ有向無サイクルグラフ $H_1$ 、 $H_2$ への**平行埋め込み**を持つ。

- (i)  $G_1$ は $\mathbf{O}$ 上の $H_1$ のサブグラフ、 $G_2$ は $\mathbf{O}$ 上の $H_2$ のサブグラフである；。
  - (ii)  $H_1$ の有向辺で $G_1$ にないものは $H_2$ にあり、 $H_2$ の有向辺で $G_1$ にないものは $H_2$ にある。
- 。  
 $G_2$ が $H_1$ にある。

**パスの形：**  $G$ を有向無サイクルグラフとすると、 $X$ から $Y$ への $G$ 内のすべての有向パスの集合を $P_{XY}$ とする。LCF  $S$ において、**共分散** $_{IJ, KL}$ の**積の経路形**は、以下の分布形である。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline ? & ? \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline ? & ? \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \Sigma L(R) L(R')^2 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline ? & ? & ? \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline \end{array} \quad \Sigma l(r'') l(r''') \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & ? & ? \\ \hline \end{array} \\ \sigma_U \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline \end{array} \quad \sigma_V \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \square u \square u \quad ij \square \square \square p i^{\dagger} \square p u j \\ \square \square \square v \square u \quad kl \square \square \square p \quad v k r'' \square p \vee l \square \end{array}$$

$\check{I}J\check{K}L - \check{I}L\check{J}K$ は、両方の項がパスフォームである場合、**パスフォーム**である。 $IJ\check{K}L - \check{I}LJK$ は**パスフォーム**である。

は、両方の項がパス形式である場合。

**ポリシー変数**: マニピュレーションを参照。

**Possible-D-SEP**( $A, B$ )である: 部分配向誘導経路グラフにおいて $A \neq B$ のとき、 $V$ が $\pi$   
**Possible <sub>$\pi$</sub> D-SEP**( $A, B$ )にあるのは、 $V \neq A$ のときだけで、 $A-V$ 間に無向パス $U$ があり、  
 $U$ のすべてのサブパス $\langle X, Y, Z \rangle$ に対して $Y$ がそのサブパス上でコライダーであるか  
、 $Y$ が $U$ 上で確定非コライダーではなく、 $X, Y, Z$ は三角形を形成するというもので  
、inのときである。

**ポシブルd-コネクティングである**:  $A$ および $B$ が $Z$ になく、 $A \neq B$ である場合、 $\pi$ 上  
の部分配向誘導経路グラフにおける $A$ および $B$ 間の無向パス $U$ は、 $U$ 上のすべての  
コライダーが $Z$ のメンバーへの半有向パスのソースであり、すべての明確な非コライ  
ダーが $Z$ にない場合にのみ、 $Z$ を与えられた $A$ および $B$ のおそらくd-接続パスとなり  
ます。

**Possibly-IP**:  $\pi$ 上の $G$ の部分配向誘導経路グラフであるとき、 $Y$ と $Z$ が不連続で、 $X$ が $Z$   
にあり、 $X$ と $Z \setminus X$ を与えられた $Y$ のある $Y$ との間に $X$ から外れないd-接続経路がある  
場合にのみ、 $X$ は**Possibly-IP** ( $Y, Z$ ) にある。

**Possibly-IV**:  $\pi$ 上の $G$ の部分配向誘導パスグラフである場合、 $X$ が $Z$ になく、 $X$   
と $Z$ を与えられた $Y$ のある $Y$ との間におそらくd-connecting pathがあり、 $X$ から $Y \sqcap Z$ の  
メンバーへの半指向パスがある場合にのみ、 $X$ は**Possibly-IV** ( $Y, Z$ ) に入ってい  
ます。

**Possible-SP**: 部分配向の誘導パス  
 する場合。

$\pi$  グラフで、順序  $Ord$  が許容でき

$\pi V \neq X$  であり、 $V$  と  $X$  の間に、 $U$  上の  $X$  以外のすべての頂点が  $Ord$  における  $X$  の前任者であり、 $U$  上の終点以外の頂点が  $U$  上の確定非結合員であるような無向パス  $U$  が存在する場合にのみ、 $V$  は **Possible-SP** ( $Ord, X$ ) 内にあるとする。

**前任者 (Predecessors)**: 誘導パスグラフ  $G$  と許容可能な全順序  $Ord$  に対して、**Predecessors**( $Ord, V$ ) を  $Ord$  に従って  $V$  に先行する ( $V$  を含まない) すべての変数の集合に等しいとする。

**適切な最終セグメント**: 長さ  $n$  の経路  $U$  は、 $U$  が  $V$  と  $U \neq V$  の最終セグメントである場合、長さ  $m$  の経路  $V$  の適切な最終セグメントとなる。

**適切な初期セグメント：**長さ $n$ の経路 $U$ は、 $U$ が $V$ の初期セグメントであり、 $U \neq V$ である場合、長さ $m$ の経路 $V$ の**適切な初期セグメント**となる。

$PMan(W)(V)$ です： マニピュレーションを参照してください。

$PUnman(W)(V)$ です： マニピュレーションを参照してください。

**純粋な潜在変数グラフ：**純粋な潜在変数グラフは、各測定変数がちょうど1つの潜在変数の子であり、他の変数の親ではない有向無周期グラフである。

**ランダム係数線形因果理論 (Random coefficient linear causal theory)：**ランダム係数線形因果理論の定義は、各線形係数がモデル内の他のすべてのランダム変数の集合から独立したランダム変数であることを除いて、線形因果理論の定義と同じである。

**厳密には統計的に区別がつかない：**有向無サイクルグラフ $G$ と $G'$ が強く統計的に区別できず、 $G$ と $G'$ のあらゆる平行埋め込みが強く統計的に区別できない場合、構造 $G$ と $G'$ は**厳密に統計的に区別できない (r.s.i.)**とする。

**R.S.I.：** Rigidly statistically indistinguishableを参照。

**半向きのこと：**部分配向誘導経路グラフにおける $A$ から $B$ への**半指向経路**とは、 $A$ から $B$ への無向経路 $U$ において、どの辺も $A$ を指す矢尻を含まない、つまり $U$ 上の $A$ には矢尻がなく、 $X$ と $Y$ が経路上で隣接し、 $X$ が経路上の $A$ と $Y$ の間にある場合、 $X$ と $Y$ 間の辺の $X$ 端には矢尻がないものです。

ソースはこちらトレクをご覧ください。

**SP:** 誘導パスグラフ  $G'$  と許容可能な全順序  $Ord$  に対して、 $W$  が  $\mathbf{SP}(Ord, G', V)$  にある（順序  $Ord$  に対して  $G'$  における  $V$  の先行者を分離する）のは、 $W \neq V$  である場合に限り、かつ  $U$  上の  $V$  以外の各頂点が  $Ord$  において  $V$  に先行し、 $U$  上の端点以外のすべての頂点が  $U$  上のコライダーであるという無向パス  $U$  が  $W$ - $V$  間に存在する。

**S.S.I. :** 強く統計的に区別できないを参照してください。

**強く統計的に区別がつかない:** 2つの有向無サイクルグラフ  $G$ 、 $G'$  が同じ頂点集合  $V$  を持ち、 $G$  の最小条件とマルコフ条件を満たす  $V$  上のあらゆる分布  $P$  が  $G'$  の条件を満たす場合、またその逆の場合にのみ、**強く統計的に区別できない**。

**Substituable:**  $X$ - $Y$  間の無向パス  $U$  を含む誘導パスまたは有向無サイクルグラフ  $G$  において、 $V$ - $W$  間のエッジは、 $V$  と  $W$  が  $U$  上にあり、 $V$  が  $U$  上の  $X$ - $W$  間にあり、 $G$  が  $V$ - $W$  間のエッジを含む場合にのみ、 $U$  中の  $U(V, W)$  と置換可能である、 $V$  は  $U(X, V)$  の連結と  $V$  と  $W$  の間の辺が  $U$  上のコライダーである場合にのみコライダーとなり、 $W$  は  $U(Y, W)$  の連結と  $V$  と  $W$  の間の辺が  $U$  上のコライダーである場合にのみコライダーである。

**T:** トレックをご覧ください。

**テルミニ:** トレッキングを参照。

**トレック:** 2つの異なる頂点  $I$  と  $J$  の間の**トレック**  $T(I, J)$  は、ある頂点  $K$  から  $I$  と  $J$  にそれぞれ向かう、 $K$  でのみ交差する非周期有向パスの無順序ペアである。  $I$  と  $J$  は**トレックの終着点**と呼ばれる。  $I$  と  $J$  の間のトレック  $T(I, J)$  があるとき、 $I(T(I, J))$  は  $T(I, J)$  の元から  $I$  へのパスを、 $J(T(I, J))$  は  $T(I, J)$  の元から  $J$  へのパスを示すことになる。しかし、トレックの終端は異なるので、トレック内のパスは1つだけ空になることがある。  $T(I, J)$  は  $I$  と  $J$  の間のすべてのトレックの集合であり、 $T(I, J)$  のトレックを表すことになる。  $S(T(I, J))$  はトレック  $T(I, J)$  のソース(source)を表す。

**無向性である:** グラフ  $G$  において、 $V$  が  $X$  と  $Y$  の間のある無向パス上にある場合に限り、 $V$  を  $\text{Undirected}(X, Y)$  に入れるとする。

**操作されていないグラフ:** マニピュレーションを参照。

$U_X$ : LCF  $S$ において、 $U_X$ は $X$ への有向パスの元となるすべての独立変数の集合である( $X$ が独立である場合、すべての頂点からそれ自身への空パスが存在するため $X \sqsubseteq U_X$ であることに注意)。

$U_{XY}$ : LCF  $S$ において、 $U_{XY}$ は、 $U_X \cap U_Y$ 。

**弱く忠実に区別できない:** 2つの有向無サイクルグラフは、その両方に忠実な確率分布が存在する場合にのみ、**弱く忠実に区別できない** (w.f.i.)。

**弱く統計的に区別がつかない:** 2つの有向無サイクルグラフが**弱く統計的に区別できない** (w.s.i.) のは、両者の最小化条件とマルコフ条件を満たす確率分布が存在する場合のみである。

**W.F.I.:** weakly faithfully indistinguishableを参照。

**W.S.I.:** weakly statistically indistinguishableを参照。



## ビブリオグラフィー

Aigner, D. and Goldberger, A. (1977).社会経済モデルにおける潜在変数.North- Holland, Amsterdam.

エイトキン, M. (1979).分割表モデルの同時検定手順。Appl. Statist. 28, 233-242.

アレン, D. (1974).変数選択とデータ増大の関係と予測方法。Technometrics 17, 125-127.

Anderson, J., and Gerbing, D. (1982).一次元的な構成要素の測定を得るために、測定モデルを再定義するためのいくつかの方法。Journal of Marketing Research.19, 453-60.

アンダーソン, T. (1984).多変量統計解析入門.Wiley, New York.アッシャー, H.

(1976).因果関係モデリング.Sage Publications, Beverly Hills, CA.

Asmussen, S. and Edwards, D. (1983).分割表における折りたたみ可能性と応答変数。Biometrika 70, 567-578.

バゴツツイ, リチャード・P. (1980).マーケティングにおける因果関係モデル(Causal Models in Marketing).Wiley, New York.

バートレット, M. (1935).分割表の相互作用。J. Roy.Statist.Soc. Suppl.2, 248-

252.Bartlett, M. (1954).様々なカイ二乗近似の乗算係数に関する注意点。

J.ロイ Statist.Soc. Ser. B 16, 296-298.

Basmann, R. (1965).相互依存」モデルのクラスに対する「明示的因果連鎖」の統計的  
検定可能性に関するメモ。JASA, 60, 1080-1093.

Beale, E., Kendall, M., and Mann, D. (1967).多変量解析における変数の取捨選択。  
Biometrika 54, 357-366.

ベッカー、G. (1964).人的資本.National Bureau of Economic Research, New York.

Beinlich, I., Suermondt, H., Chavez, R., and Cooper, G. (1989).ALARMモニタリングシステム：信念ネットワークのための2つの確率的推論技法によるケーススタディ。  
Proc. Second European Conference on Artificial Intelligence in Medicine, London, England.247- 256.

ベントラー、P. (1985).EQSの理論と実装：A Structural Equations Program.  
BMDP Statistical Software Inc.、ロサンゼルス。

ベントラー、P. (1980).潜在変数を用いた多変量解析：因果関係モデリング。心理学  
年報 31, 419-456.

Bentler, P. and Bonett, D. (1980).共分散構造の分析における有意性検定と適合度  
.Psychological Bulletin 88, 588-606.

ベントラー、P.、ピーラー、W. (1979).女性のオーガズムのモデル.性行動学研究会 8,  
405-423.

Birch, M. (1963).三元分列表における最尤法。J. Roy.Statist.Soc.  
25, 220-223.

ビショッブ、Y.、フィーンバーグ、S.、ホランド、P. (1975).離散多変量解析.MIT  
Press, Cambridge, MA.

Blalock, H. (1961).非実験的研究における因果関係の推論。University of North Carolina  
Press, Chapel Hill, NC.

ブラロック、H. (1969).理論構築：言語的定式化から数学的定式化へ。  
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

ビブリオグ

ブラロック, H. (1971).社会科学における因果関係モデル(Causal Models in the  
ラファイ

Social Sciences).Aldine-Atherton, Chicago.ブラウ, P.とダンカン, O. (1967).アメリ

カの職業構造.Wiley, New York.

Blum, R. (1984).時間指向の臨床データ・ベースからの因果関係の発見、確認、取り込み：RXプロジェクト。Readings in Medical Artificial Intelligence, Clancey, W. and Shortliffe, E. (eds.).Addison-Wesley, Reading, MA.

Blyth, C. (1972).シンプソンのパラドックスと確実性原理について。JASA 67, 364-

366.Bollen, K. (1989).潜在変数を用いた構造方程式(Structural Equations with Latent Variables).Wiley, New York.

Bollen, K. (1990).外れ値スクリーニングと消失性四分位数に対する無分布検定。社会学的方法と研究 19, 80-92.

Bowden, R. and Turkington, D. (1984).Instrumental Variables.Cambridge University Press, New York.

ブレスロー, N., デイ, N. (1980) . がん研究における統計的方法、第1巻：症例対照研究の分析。IARC, Lyon.

ブラウンリー、K. (1965)."喫煙と健康 "のレビュー。JASA 60, 722-739.

Bunker, J., Forrest, W., Mosteller, F. and Vandam, L. (1969).全米ハロタン研究：米国科学アカデミー医療科学部門麻酔委員会全国ハロタン研究小委員会報告書。National Research Council, Washington, D.C. U.S. Government Printing Office.

Burch, P. (1978).喫煙と肺がん：原因を推論する問題（考察を加えて） . J.ロイStatist.Soc. Ser. A 141, 437-477.

Burch, P. (1983).サージョン・ジェネラルの "因果関係の疫学的基準 "の批評である。慢性疾患学会誌 36, 821-836.

ラフィー

バーチ、P. (1984).外科医総監の "因果関係の疫学的基準"。リリエンフェルドへの返信。Journal of Chronic Diseases, 37, 148-157.

Byron, R. (1972).完全情報を利用した計量システムにおける誤仕様化の検定。  
International Economic Review 28, 138-151.

Callahan, J., and Sorensen, (1992) Using TETRAD II as automated exploratory tool.

社会学の方法と研究秋

キャンベル, D.とスタンレー, J. (1963) . 実験と準実験のデザイン.Rand McNally, Chicago.

キャンベル, D., シュワルツ, R., セクレスト, L., ウェップ, E. (1966) 。

Unobtrusive Measures: 社会科学における非反応的研究。Rand McNally, Chicago.

Caramazza, A. (1986).障害されたパフォーマンスのパターンから正常な認知プロセスの構造について推論することについて: 単一患者研究の場合。脳と認知, 5, 41-66.

カートライト, N. (1983).物理学の法則はいかにして嘘をつくか.オックスフォード大学

出版局, ニューヨーク.カートライト, N. (1989).自然界の能力とその測定.Clarendon Press,

Oxford.

Cavallo, R. and Klir, G. (1979).多次元関係の再構築可能性分析: 多次元関係の再構成可能性分析: 許容されるシステムモデルのコンピュータ支援による決定のための理論的基礎。International Journal of General Systems 5, 143-171.

Cederlof, R., Friberg, L., Lundman, T. (1972).喫煙、環境、遺伝の相互作用と疾病の病因に対するその意味。Acta Med Scand.612 (Suppl).

Chow, C. and Liu, C. (1968).依存性木による離散確率分布の近似。IEEE Trans. on Info.Theory IT-14, 462-467.

ビブリオグ

Chow, C. and Wagner, T. (1973).木に依存する確率分布の推定値の整合性.IEEE Trans.on  
ラフイー  
Info.Theory IT-19, 369-371.

クリステンセン, R. (1990).対数線形モデル.Springer-Verlag, New York.

コールマン, J. (1964).数学的社会学入門.フリープレス、ニューヨーク。

Cooper, G. and Herskovits, E. (1991).データベースからベイジアン信念ネットワークを  
構築するためのベイズ法.人工知能における不確実性についての会議録。LA,  
CA.86-94.



Cooper, G. and Herskovits, E. (1992).データから確率的ネットワークを誘導するための  
ベイズ法.Machine Learning (to appear).

クーパー、G. (1989).信念ネットワークに基づくエキスパートシステムの開発におけ  
る現在の研究。Applied Stochastic Models and Data Analysis 5, 39-52.

コーンフィールド、J.、ヘーンゼル、W.、ハモンド、E.、リリエンフェルド、A.、シ  
ムキン、M.、ウィンダー、E. (1959年)。喫煙と肺がん：最近の証拠といくつか  
の疑問点についての考察。Journal of the National Cancer Institute 22, 173-203.

コストナー、H. (1971).理論、演繹、対応の規則。社会科学における因果モデル、ブ  
ラロック、H. (ed.).Aldine, Chicago.

Costner, H. and Schoenberg, R. (1973).多重指標モデルにおける指標病の診断， in  
Structural Equation Models in the Social Sciences, Goldberger, A. and Duncan, O.  
(eds.).Seminar Press, New York.

Costner, H. and Herting, J. (1985).多重指標モデルにおける再定義，『社会科学におけ  
る因果モデル』第2版，Blalock, H. (ed.), 321-393.Aldine, New York.

コックス、D. (1958).実験の計画.Wiley, New York.

Crawford, S. and Fung, R. (1990).2つの確率的モデル帰納法の分析.Third International  
Workshop on Artificial Intelligence and Statistics, Fort Lauderdale, FL.

Darroch, J., Lauritzen, S., and Speed, T. (1980).分割表のマルコフ場と対数線形相互作用  
モデル。Ann.Stat. 8, 522-539.

ビブリオグ

デイビス, W. (1988). 因果関係の確率論的理論。確率と因果関係、ジェームズ・フェ  
ラフィー

ッツァー編。D. Reidel, Dordrecht.

Dawid, A. (1979). 統計理論における条件付き独立性（考察を含む）. J. Roy.

Statist.Soc. Ser. B 41, 1-31.

デンプスター, A. (1972). 共分散の選択。バイオメトリクス 28, 157-175.

Doll, R.とHill, A. (1952).肺の癌腫の病因に関する研究。Brit.Med.J.  
2, 1271-1286.

ダンカン, O. (1975).構造方程式モデル入門.Academic Press, New York.ダンカン, O., フ  
エザーマン, D., ダンカン, B. (1972).社会経済的背景と  
アチーブメントセミナープレス、ニューヨーク。

エドワーズ, A. (1976).線形回帰と相関への入門.W. H. Freeman, New York.

Edwards, D. and Havranek, T. (1985).多次元分割表におけるモデル探索のための高速手続  
き。Biometrika 72, 339-351.

Edwards, D. and Havranek, T. (1987).大規模なモデル群に対する高速なモデル選択手順。J.  
Amer.Statist.Assoc. 82, 205-211.

Edwards, D. and Kreiner, S. (1983).グラフモデルによる分割表の分析。  
Biometrika 70, 553-565.

Elby, A. (1992) 我々はEPRを因果的に説明すべきか? 科学哲学 59, 16-25.フィーンバ  
ーグ, S. (1977).交差分類されたカテゴリーデータの分析.MIT Press、  
ケンブリッジ、マサチューセッツ州。

ファイン, A. (1982).隠れ変数、合同確率、ベルの不等式。Physical Review Letters 48,  
291-295.

ファイン, T. (1973).確率の理論.Academic Press, New York.

フィッシャー, F. (1966).経済学における同定問題.McGraw-Hill, New York.フィ

ビブリオグ

ツッシャー、R. (1951).実験計画法(The Design of Experiments).Oliver and Boyd,  
ラファイ

Edinburgh.

フィッシャー、R. (1959).スモッキング・ザ・キャンサー・コントロールシーOliver and  
Boyd, Edinburgh.

Flack, V. and Chang, P. (1987).部分集合回帰分析におけるノイズ変数の選択頻度: A simulation study.American Statistician 41, 84-86.

Forbes, H. and Tufte, E. (1968).因果関係のモデル化における注意点。American Political Science Review 62, 1258-1264.

フォックス, J. (1984).線形統計モデルとその関連手法.Wiley, New York.

Freedman, D. (1983a).構造方程式モデル(Structural-Equation Model)のケーススタディ。報告書、カリフォルニア大学バークレー校統計学部。

Freedman, D. (1983b).回帰式のスクリーニングに関する注意点。American Statistician 37, 152-155.

Freedman, D., Navidi, W., and Peters, S. (1986).回帰方程式の適合における変数選択の影響について。モデルの不確実性とその統計的含意について.Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 307, Dijkstra, T. (ed.).Springer-Verlag, Berlin.

フリードマン, M. (1957).消費関数の理論.Princeton University Press, Princeton, NJ.

Fung, R. and Crawford, S. (1990).Constructor: 確率的モデルの帰納のためのシステム。Proceedings of the Eighth National Conference on AI, Boston, AAAI.

ファーニバル, G., ウィルソン, R. (1974).飛躍的な回帰テクノメトリクス 16, 4990-5111

ガイガー, D. (1990).Graphoids: 確率的推論のための定性的枠組み.Ph.D. Thesis, University of California, Los Angeles.

Geiger, D., and Heckerman, D. (1991) Advances in probabilistic reasoning.Proc. Seventh Conference on Uncertainty in AI, B. D'Ambrosio et al. (編) .Morgan Kauman, Los

ビブリオグ  
Angeles, California.  
ラフィー

Geiger, D. and Pearl, J. (1989a). 条件付き独立と質的独立の論理的、アルゴリズム的特性。 Report CSD 870056, R-97-IIL, Cognitive Systems Laboratory, University of California, Los Angeles.

Geiger, D. and Pearl, J. (1989b). 条件付き独立を含む推論のための公理とアルゴリズム。  
。 Report CSD 890031, R-119-I, Cognitive Systems Laboratory, University of California,  
Los Angeles.

Geiger, D., Verma, T., and Pearl, J. (1990) Identifying independence in Bayesian Networks.  
Networks 20, 507-533.

Geisser, S. and Eddy, W. (1979). モデル選択への予測的アプローチ。 JASA 74, 153- 160.

Geweke, J., Meese, R., and Dent, W. (1983). 時間系における因果関係の代替テストを比較する。 Journal of Econometrics 21, 161-194.

グリモア, C. (1983). 社会科学と社会物理学。 行動科学 28, 126-133. グリモア, C., シ

ャインズ, R., スパーツ, P., ケリー, K. (1987). 因果構造の発見。  
Academic Press, San Diego, CA.

グリモア, C., シャインズ, R., スパートス, P. (1989) 。 なぜ飛行士は海軍を去る  
のか: マンパワー研究における人工知能手順の応用。 Naval Personnel Research  
Development Centerへの報告書、1月。

Glymour, C., Spirtes, P., and Scheines, R. (1991a). パラメータ値によって生成される独立  
関係。 哲学トピックス, v. 18, no. 2, Fall.

グリモア, C., スパース P., シャイネス R. (1991b) 。 確率から因果関係へ。  
『哲学研究』 第 64 巻第 1 号, 1-36.

ゴールド, E. (1967). 限界における言語識別。 情報と制御 10, 447-474. ゴールド, E.

ビブリオグ

(1965).再帰の限界.記号論理学研究 30, 27- 48.  
ラフイー

ゴールドバーグ, A., ダンカン, O. (編) (1973) . 社会科学における構造方程式モデル(Structural Equation Models in the Social Sciences).

セミナープレス、ニューヨーク



Goodman, L. (1973a). パネル研究および他の種類の調査から得られたデータの因果分析。  
アメリカJ. Sociol. 78, 1135-1191.

グッドマン, L. (1973b). ある変数が他の変数に対して事後的である場合の多次元分割  
表の分析: 修正パス分析アプローチ。Biometrika 60, 179- 192.

Granger, C. (1969). 計量経済モデルとクロススペクトル法による因果関係の調査。  
Econometrica 37, 424-438.

Greenland, S. (1989). 疫学解析における変数選択のモデル化。American Journal of Public  
Health 79, 340-349.

Griffiths, W., Hill, R., and Pope, P. (1987). プロビットモデル推定量の小標本特性. JASA  
82, 929-937.

ハバーマン, S.J. (1979). 質的データの分析。第2巻. Academic Press.

ハラリー・F・ノーマン・R・カートライト・D. (1965). 構造モデル. 有向グラフの理  
論への入門. Wiley, New York.

Harary, F., and Palmer, E. (1973). Graphical Enumeration. Academic Press, New York. ハウズ

マン, D. (1984). 因果的な優先順位。Nous 18, 261-279.

Havranek, T. (1984). 多次元分割表におけるモデル探索のための手順。  
バイオメトリクス 40, 95-100.

ハイセ, D. (1975). 因果関係分析. Wiley, New York.

ハースコビッツ, E., クーパー, G. (1990) . Kutato: データベースから確率的エキ

ビブリオグ

ラフイー  
サポートシステムを構築するためのエントロピー駆動型システム.Proc. Sixth

Conf.Uncertainty in AI.Association for Uncertainty in AI, Inc., Mountain View, CA.

Herskovits, E. (1992).Computer Based Probabilistic-Network Construction.スタンフォード

大学コンピュータサイエンス学部および医学部博士論文。

Herting, J. and Costner, J. (1985).多重指標モデルにおける再定義。社会科学における因果モデル, Blalock, H. (ed.).Aldine, NY.

Hocking, R. and Leslie, R. (1967).回帰分析における最良の部分集合の選択。  
テクノメトリクス 9, 531-540.

ホランド、P. (1986).統計学と因果関係推論。JASA 81, 945-960.

Holland, P. and Rosenbaum, P. (1986).単調な潜在変数モデルにおける条件付き関連性と一次元性.Ann.Stat. 14, 1523-1543.

Hosmer, D. and Lemeshow, S. (1989).応用ロジスティック回帰.Wiley, New York.Howson, C., and Urbach, P. (1989).科学的推論：ベイズ・アプローチ.開く  
イリノイ州ラサールの裁判所。

Hsiao, C. (1981).自己回帰モデリングとマネーインカム因果関係の演繹。Journal of Monetary Economics 7, 85-106.

ジェームズ, L., ムライク, S., ブレット, J. (1982) . 因果関係分析：前提、モデル、データ。  
Sage Publications, Beverly Hills, CA.

ジェフリーズ, H. (1957).科学的推論.ケンブリッジ大学出版局, ニューヨーク.

ヨレスコグ, K. (1973).線形構造方程式を推定するための一般的な方法。社会科学における構造方程式モデル, Goldberger, A., and Duncan, O. (eds.).Seminar Press, New York.

ヨレスコグ, K. (1978).共分散行列と相関行列の構造分析.Psychometrika 43, 443-447.

ビブリオグ

ヨレスコグ, K. (1981). 共分散構造の解析. *Scandinavian Journal of Statistics* 8, 65-92.  
ラファイ

Joreskog, K. and Sorbom, D. (1984). *LISREL VI ユーザーズガイド*. Scientific Software,  
Inc., Mooresville, IN.

Joreskog, K. and Sorbom, D. (1990). TETRAD II と LISREL によるモデル検索。  
Sociological Methods and Research 19, 93-106.

Kadane, J. and Sedransk, N. (1980). より倫理的な臨床試験に向けて。ベイズ統計学：  
Proceedings of the First International Meeting Held in Valencia (Spain), May 28 to June  
2, 1979, J. Bernardo et al., edited by University Press, 229-238.

Kadane, J. and Sedransk, N. (1992). 臨床試験の結果。Toward a More Ethical Clinical Trial,  
J. Kadane (ed.), John Wiley & Sons, NY, forthcoming.

Kadane, J. and Seidenfeld, T. (1990). ベイズ的観点からのランダム化。Journal of  
Statistical Planning and Inference, 25, North-Holland, 329-345.

Kadane, J. and Seidenfeld, T. (1992). 新しいデザインで収集されたデータの解析におけ  
る統計的問題。Toward a More Ethical Clinical Trial, J. Kadane (ed.), John Wiley &  
Sons, NY, forthcoming.

ケリー、T. (1928). 人間の心における十字路。Stanford University Press, Stanford. ケンド

ール、M. (1948). 統計学の高度な理論。Charles Griffin and Co., ロンドン。ケニー、D.

(1979). 相関と因果関係(Correlation and Causality). Wiley, New York.

キイヴェリ H. (1982). 因果関係モデルへの統一的アプローチ。博士論文, Univ. of  
Western Australia, 準備中.

Kiiveri, H. and Speed, T. (1982). 多変量データの構造分析: A review.

社会学的方法論、ラインハルト、S. (ed.). Jossey-Bass, San Francisco.

ビブリオグ

Kiiveri, H., Speed, T., and Carlin, J. (1984). 再帰的因果モデル. オーストラリア数学会誌  
ラフイー  
36, 30-52.

クライン、L., (1961). イギリスの経済学的モデル. オックスフォード大学、統計研究所  
、オックスフォード。

クラインバウム、D、クッパー、L、モルゲンシュテルン、H. (1982)。

Epidemiologic Research (疫学研究)。Lifetime Learning Publications, Belmont, CA.

Klepper, S. (1988).古典的な変数内誤差モデルに対するレグレッサー診断法。Journal of Econometrics 37, 225-250.

Klir, G., and Parviz, B. (1986).確率論的システムおよび可能性論的システムの一般的な再構成特性。International Journal of Man-Machine Studies 25, 367-397.

Kullback, S. (1959, 1968).情報理論と統計学.Wiley, New York.

Kullback, S. (1967).ばらつきによる識別情報の下界。IEEE Trans.Information Theory 13, 126-127.

Kullback, S. (1968).与えられたマージナルを持つ確率密度.Ann.Math.Statist.39, 79-86.Kohn,

M. (1969).階級と適合性.Dorsey Press, Homewood, IL.

Lauritzen, S., Speed, T., and Vijayan, K. (1978).分解可能なグラフとハイパーグラフ (Decomposable Graphs and Hypergraphs).

Preprint 9, Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen.

Lauritzen, S. and Wermuth, N. (1984).変数間の関連性のためのグラフィカルモデル、そのいくつかは定性的であり、いくつかは定量的である。Ann.Stat. 17, 31-57.

ローリー, D., マックスウェル, A. (1971).統計的手法としての因子分析(Factor Analysis as a Statistical Method).Butterworth, London.

ラザースフェルド, P., ヘンリー, N. (1968) . 潜在構造分析(Latent Structure

Analysis).Houghton Mifflin, Boston.リーマー, E. (1978).仕様検索: 非実験データによ

るアドホック推論、

Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, NY.

ラフィー

Lee, S. (1985). 共分散・相関構造の解析. 計算統計学とデータ解析 2, 279-295.

Lee, S. (1987). 共分散構造モデリングにおけるモデルの等価性。オハイオ州立大学心理学部博士論文。

ルイス、D. (1973). カウンターファクチュアルズハーバード大学出版、ケンブリッジ、マサチューセッツ州。



ルイス、D. (1973).因果関係.ジャーナル・オブ・フィロソフィー 70, 556-572.

リリエンフェルド、A. (1983).サージョン・ジェネラルの "因果関係の疫学的基準"。  
バーチの批評。36, 837-845.

Linthurst, R. A. (1979).Spartina Alternifloraの成長と枯死に影響を与える要因としての  
通気性、窒素、pH、塩分。博士論文、ノースカロライナ州立大学。

Lohmoller, J. (1989).部分最小二乗法による潜在変数パス・モデリング(Latent Variable  
Path Modeling with Partial Least Squares).Physica- Verlag, Heidelberg.

ロング、J. (1983a).社会科学における質的応用。第33巻：確認的工場分析.Sage  
Publications, Beverly Hills, CA.

ロング、J. (1983b).社会科学における質的応用。第34巻：共分散構造モデル  
(Covariance Structure Models).Sage Publications, Beverly Hills, CA.

Luijben, T., Boomsma, A., and Molenaar, I. (1986).共分散構造分析における因子分析モ  
デルの修正。モンテカルロ法による研究。モデルの不確実性とその統計的含意に  
ついて .Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 307, Dijkstra, T.  
(ed.).Springer-Verlag, Berlin.

MacCallum, R. (1986).共分散構造モデリングにおける仕様探索。Psychological Bulletin  
100, 107-120.

マッキー、J. (1974).宇宙のセメント.Oxford University Press, New York.マローズ

、C. (1973).Cp.に関するいくつかのコメントTechnometrics 15, 661-676.

ビブリオグ

マルディア, K., ケント, J., ビビー, J. (1979). 多変量解析. Academic Press, New York.

丸山剛史・マクガーベイ・B. (1980). 因果関係モデルの評価: 構造方程式の最尤解析の応用 (A application of maximum likelihood analysis of structural equations). Psychological Bulletin 87, 502-512.

McPherson, J., Welch, S., and Clark, C. (1977). 政治的効力の安定性と信頼性：政治的効力の安定性と信頼性：パス分析を使って代替モデルを検証する *American Political Science Review* 71: 509-21.

ミラー, R.Jr. (1981)。同時統計推論、第2版。McGraw-Hill, New York. ミラー, W. とストークス, D. (1963). 議会における会派の影響力。 *アメリカン・ポリティカルサイエンス・レビュー* 1963, 45-456.

Miller, J., Slomczynski, K., and Schoenberg, R. (1981). クロスナショナルリサーチにおける測定の比較可能性を評価する：異なる社会文化的環境における権威主義-保守主義。 *Social Psychology Quarterly* 44, 178-191.

Mitchell, T. and Beauchamp, J. (1988). 線形回帰におけるベイズ型変数選択。 *JASA* 83, 1023-1032.

Mitchell, T. (1977). バージョン空間：ルール学習への候補者排除のアプローチ。 *Proceedings Fifth International Joint Conference on AI. IJCAI - 77*, Pittsburgh, PA.

モステラ, F., テューキー, J. (1977). データ解析と回帰、回帰の第二のクーレ。 *Addison-Wesley*, Massachusetts.

MRFIT研究会 (1982)。多重危険因子介入試験：危険因子の変化と死亡率の結果。 *JAMA* 248, 1465-1477.

Neopolitan, R. (1990) *Probabilistic Reasoning in Expert Systems*, Wiley, New York. Neyman,

J. (1935) Statistical problems with agricultural experimentation. *J. Roy. Stat. Soc. Suppl.* 2, 107-180.

オシャソン, D., ストブ, T., ワインスタイン, S. (1986)。 *システム・ザット・ラーン*. MIT Press, Cambridge, MA.

ラフイー

Pearl, J. (1988). インテリジェント・システムにおける確率的推論 (Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems). Morgan and Kaufman, San Mateo.

Pearl, J. and Dechter, R. (1989). データから構造を学習する：サーベイ。Proceedings COLT '89, 30-244.

Pearl, J., Geiger, D. and Verma, T. (1990). インフルエンス・ダイアグラムの論理. インフルエンス・ダイアグラム、ビリーフ・ネット、デシジョン・アナリシス。R. Oliver and J. Smith, editors. John Wiley & Sons Ltd.

Pearl, J. and Tarsi, M. (1986). 因果の木の構造化。ジャーナル・オブ・コンプレキシティ 2, 60-77. Pearl, J. and Verma, T. (1987). 有向グラフによる依存関係の表現論理(The

Logic of Representing Dependencies by Directed Graphs).

Report CSD 870004, R-79-II, University of California at Los Angeles Cognitive Systems Laboratory.

Pearl, J. and Verma, T. (1990). 帰納的因果関係の形式的理論. Technical Report R- 155, Cognitive Systems Laboratory, Computer Science Dept. UCLA.

Pearl, J. and Verma, T. (1991). 推論される因果関係の理論。知識表現と推論の原理：Proceedings of the Second International Conference, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA.

ブラット, J. とシュライファー, R. (1988). 法則の解釈と観測について。Journal of Econometrics 39, 23-52.

パットナム, H. (1965). 試行錯誤述語とMostowskiの問題に対する解答。『記号論理学研究』 30, 49-57.

ローリングス, J. (1988). 応用回帰分析(Applied Regression Analysis). Wadsworth,

Belmont, CA. ライヘンバツハ, H. (1956). 時間の方向性。カリフォルニア大学出版

局、バークレー、カリフォルニア州。

## ビブリオグ

Reiss, I., Banwart, A., and Forman, H. (1975). 婚前避妊具の使用状況: A study and some theoretical explorations. *J. Marriage and the Family* 37, 619-630.

Risannen, J. (1987). 確率的複雑性. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 49, 223-239.

Rindfuss, R., Bumpass, L., and St. John, C. (1980). 教育と生殖能力: 女性が占める役割の意味合い. *American Sociological Review* 45, 431-447.

Rodgers, R. and Maranto, C. (1989).心理学における出版生産性の因果関係モデル。

応用心理学雑誌 74, 636-649.

Rose, G. Hamilton, P. Colwell, L., and Shipley, J. (1982).禁煙アドバイスのランダム化比較試験：10年間の結果。Journal of Epidemiology and Community Health 36, 102-108.

Rosenbaum, P. (1984).観察研究における関連から因果関係へ。JASA 79, 41- 48.

Rubin, D. (1974).ランダム化研究および非ランダム化研究における治療の因果効果の推定。Journal of Educational Psychology 66, 688-701.

Rubin, D. (1977).共変量に基づく治療グループへの割り当て。教育統計学研究 2, 1-26.

Rubin, D. (1978).因果効果のベイズ的推論：ランダム化の役割. Ann.Stat.  
6, 34-58.

Rubin, D. (1986).コメントどのifが因果関係のある答えを持っているか。JASA 81, 396.

サーモン, W. (1980).確率的因果関係.太平洋哲学季報 61, 50-74.サーモン, W. (1984).

科学的説明と世界の因果構造.プリンストン大学

Univ. Press, Princeton, NJ.

サリス, W.とストロンホルスト, H. (1984) . 非実験的研究における因果関係モデリング(Causal Modeling in Nonexperimental Research).

ソシオメトリック・リサーチ・ファウンデーション、アムステルダム。

シャイネス, R. (1988).創造性を自動化する。人工知能の諸相, J. Fetzer (ed.).

Kluwer, Boston.

Scheines, R., and Spirtes, P. (1992).大規模なデータベースにおける潜在変数モデルの発見

International Journal of Intelligent Systems, G. Piatetski-Shapiro, (編) .



Scheines, R., Spirtes, P., Glymour, G., and Sorensen, S. (1990). 海軍新兵の成功および満足の原因。海軍人事研究開発センターへの報告書、サンディエゴ、カリフォルニア州

Scheines, R., Spirtes, P., and Glymour, C. (1990). 因果関係モデリングへの質的アプローチ。Qualitative Simulation Modeling and Analysis, Fishwick, P. and Luker, P. (eds.). Advances in Simulation 5, 72-97. Springer-Verlag, New York.

Sclove, S. (undated). 予測のための回帰式を選択する基準について。Technical Report 28, Department of Statistics, Carnegie-Mellon University.

Sewell, W. and Shah, V. (1968). 社会階級、親の励まし、教育意欲。American Journal of Sociology. 73, 559-572.

サイモン, H. (1953). 因果的順序付けと同定性。経済学的手法の研究. Hood and Koopmans (eds). 49-74. Wiley, NY.

Simon, H. (1954). Spurious correlation: a causal interpretation. JASA. 49, 467-479. サイ

モン, H. (1977). 発見のモデル. D. Reidel, Dordrecht.

シンプソン, C. (1951). 分割表における交互作用の解釈。J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 13, 238-241.

シムズ, C. (1972). 貨幣、所得、因果関係。American Economic Review 62, 540-552. スカイ

ラムス, B. (1980). 因果的必然性: A Pragmatic Investigation of the Necessity of Laws. Yale University Press, New Haven.

ソバー, E. (1987). 共通原因の原理。確率と因果関係、フェッツァー, J. (ed.). D. Reidel, Dordrecht.

ラフィー

Sorbom., D. (1975). 縦断的データにおける相関誤差の検出。英国数理統計心理学雑誌  
28, 138-151.

スピアマン、C. (1904). 一般知能を客観的に決定し測定する。アメリカン・ジャーナ  
ル・オブ・サイコロジー 15, 201-293.

スペンス, M. (1973).雇用市場のシグナリング。季刊経済学雑誌 87, 355-379.

Spiegelhalter, D. (1986).予測型エキスパートシステムにおける確率的推論。Uncertainty in Artificial Intelligence, Kanal, K. and Lemmer, J. (eds.).North-Holland, Amsterdam.

Spiegelhalter, D., and Knell-Jones, R. (1984).臨床判断支援システムに対する統計的および知識ベースのアプローチ。J. Royal Statist.Soc. Ser. A 147, 35-77.

Spirtes, P. (1989a).条件付き独立性が消滅する四分音符の差を暗示するための必要十分条件.技術レポート CMU-LCL-89-3, Laboratory for Computational Linguistics, Carnegie Mellon University, Pgh, PA.

Spirtes, P. (1989b).過同定制約の高速幾何学的計算.Technical Report CMU-LCL-89-3, Laboratory for Computational Linguistics, Carnegie Mellon University, Pgh, PA.

Spirtes, P. (1992).潜在変数が存在する統計データからの因果グラフの構築", Proceedings of the IX International Congress on Logic, Methodology, and the Philosophy of Science, B. Skyrms, ed., Uppsala, Sweden, 1991 に掲載予定.

Spirtes, P. and Glymour, C. (1988).潜在変数、因果関係モデル、過同定制約。Journal of Econometrics 39, 175-198.

Spirtes, P. and Glymour, C. (1990).非測定変数で保存される測定変数間の因果関係構造. Technical Report CMU-LCL-90-5, Laboratory for Computational Linguistics, Carnegie Mellon University.

Spirtes, P., Glymour, C., and Scheines, R. (1990b).確率からの因果関係(Causality from probability).Evolving Knowledge in Natural Science and Artificial Intelligence, Tiles, J. et.al.Pitman, London, 181-199.

## ビブリオグ

Spirtes P., Glymour C., and Scheines, R. (1990c). 確率からの因果関係. 会議録: Advanced  
ラファイ  
Computing for the Social Sciences, Williamsburgh, VA.

Spirtes, P., Glymour, C., and Scheines, R. (1991a). 疎な因果グラフの高速回復のためのア  
ルゴリズム。 Social Science Computer Review, vol.9, 1991, pp.62-72.

Spirtes P., Glymour C., and Scheines, R. (1991b). 確率から因果関係へ。

哲学研究』 64, 1-36.

Spirtes P., Glymour C., Scheines, R., Meek, C., Fienberg, S., and Slate, E. (1992). グラフィカルな因果関係モデルによる予測と実験デザイン. Technical Report CMU-Phil-32, Carnegie-Mellon University, Philosophy Department.

Spirtes, P., Glymour, C., Scheines, R., and Sorensen, S. (1990). 海軍航空管制官訓練生用データのTETRAD研究。 Navy Personnel Research Development Center, San Diego, CA への報告書。

Spirtes, P., Scheines, R., and Glymour, C. (1990a). TETRAD II, EQS, LISREL Programsを用いたコンピュータ支援仕様の信頼性に関するシミュレーション研究. 社会学的方法と研究, 19, 3-66.

Spirtes P., and Verma, T. (1992). 潜在変数を用いた因果モデルの等価性. テクニカルレポート CMU-Phil-33, カーネギーメロン大学哲学部.

Spohn, W. (1983). 決定論的・確率論的な理由と原因. 方法論、認識論、および科学の哲学: Essays in Honour of Wolfgang Stegmüller on the Occasion of his 60th Birthday, C. G. Hempel, H. Putnma, and W.K. Essler (eds.), D. Reidel, Dordrecht, Holland, 371-396.

スポン、W. (1990). 直接原因と間接原因。トポイ, 9, 125-145.

スポン、W. (1991). ライケンバッハの共通因子の原理について。 Proceedings of the First Pittsburgh-Konstanz Colloquium, W. Salmon, G. Walters (eds.).

スポン、W. (1992). 因果律は帰納的スキームの対象化である。確率の理論, J.

ビブリオグ

Dubucs (ed.), Kluwer, Dordrecht, Holland.

ラフィー

Stein, C. (1960).重回帰.Contributions to Probability and Statistics.エッセイズ・イン・オ

ナー・オブ・ハロルド・ホテリング，オルキン，I.（編）．Stanford Univ. Press,  
Stanford, CA.

Stetzl, I. (1986).適合度を変えずに因果関係を変更する：等価なLISRELモデルを生成

するためのいくつかのルール。Multivariate Behavior Research 21, 309-331.

サペス, P. (1970).因果関係の確率論的理論.North-Holland, Amsterdam.

サペス, P.とザノッティ, M. (1981).確率的説明はいつ可能か。Synthese 48, 191-199.

米国外科医総監（1964年）．喫煙と健康．米国政府印刷局(U.S. Government Printing Office).

米国外科医総監（1979年）．喫煙と健康．米国政府印刷局(U.S. Government Printing Office).

Swamy, P. (1971).ランダム係数回帰モデルにおける統計的推論.Springer- Verlag, Berlin.

トムソン、G. (1916).一般因子のない階層構造。英国心理学雑誌 8, 271-281.

トムソン, G. (1935).相関係数の完全な族とそのゼロ四重差への傾向について：能力のサンプリング理論の記述を含む。British Journal of Psychology 26, 63-92.

サーストン, L. (1935).心のベクトル.シカゴ大学出版局、シカゴ。

Timberlake, M. and Williams, K. (1984).依存、政治的排除、政府の抑圧： Some cross-national evidence.American Sociological Review 49, 141-146.

Verma, T. (1987).因果ネットワーク：意味論と表現力。Technical Report R-65-I, Cognitive Systems Laboratory, University of California, Los Angeles.

Verma, T. and Pearl, J. (1990a).因果関係モデルの等価性について.Technical Report R-150, Cognitive Systems Laboratory, University of California, Los Angeles.

Verma, T. and Pearl, J. (1990b).因果関係モデルの等価性と合成.Proc. Sixth Conference

533  
on Uncertainty in AI. Association for Uncertainty in AI, Inc., Mountain View, CA, 220-  
ラズナー



Verma, T. and Pearl J. (1990c). 因果ネットワーク：意味論と表現力。Uncertainty in Artificial Intelligence 4, R. Shacter, T. Levitt, L. Kanal, J. Lemer (eds.) Elsevier Science Publishers, North-Holland.

Verma, T. and Pearl, J. (1991). 因果関係のあるモデルの等価性と合成。Technical Report R-150, Cognitive Systems Laboratory, University of California, Los Angeles.

Wallace, C. and Freeman, P (1987). コンパクトコーディングによる推定と推論。J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 49, 240-265.

ワイズバーク, S. (1985). 応用線形回帰、第2版、Wiley、New York.

Wermuth, N. (1976). 乗法モデル間のモデル探索。Biometrika 32, 253-363. Wermuth, N.

(1980). 線形再帰方程式、共分散選択とパス分析。日本学術振興会  
75, 963-972.

Wermuth, N. and Lauritzen, S. (1983). 分割表のグラフィカルモデルと再帰的モデル。  
Biometrika 72, 537-552.

Wermuth, N. and Lauritzen, S. (1990). 実質的な研究仮説、条件付き独立グラフ、グラフィカル・チェーン・モデルについて。J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 52, 21-50.

Wheaton, B., Muthen, B., Alwin, D., and Summers, G. (1977). パネル・モデルにおける信頼性と安定性の評価。Sociological Methodology 1977, Heise, D. (ed.). Jossey-Bass, San Francisco.

ホイットニー, H. (1957). 実代数多様体の初歩的構造。Ann. Math. 66, 545-556. Whittaker, J.

(1990). 応用多変量統計学におけるグラフィカル・モデル。Wiley, New York.

ビブリオグ

ワイス, D. (1975). 学業成績と職務遂行能力。American Economic Review 65, 350-366.  
ラフイー

ウィシャート、J. (1928). 二要因論におけるサンプリング・エラー。英国心理学雑誌  
』 第19巻、180-187頁。

ライト, S. (1934).パス係数の方法.Ann.Math.Stat. 5, 161-215.Younger, M. (1978).

線形回帰のためのハンドブック(Handbook for Linear Regression).Wadsworth,

California.

ユール, G. (1903).統計学における属性の関連性理論に関するノート。Biometrika 2, 121-134.

ユール, G. (1926).なぜ時系列間の無意味な関係を得ることがあるのか? -- サンプリングと時系列の性質に関する一考察.Journal of the Royal Statistical Socitey, 89, 1-64.

## インデックス

2x2 Foursomes 312-314	Bootstrap Procedures 365
3x1 Foursomes 314	Bouck, L. ii
アクセプタブルオーダー 221	Bowden, R. 2
非周期的パス 29	ブレスロー, N. 164
Adjacency 29	Brownlee, K. 17, 291, 297-298, 302
隣接28	Bumpass, L. 139-140
エイトキン, M.105	バンカー, J.3
ほぼ純粋な潜在変数グラフ 309	Burch, P. 291, 298-300, 301, 302
ほぼ純粋な測定モデル 309, 473	Byron, R. 104
ご先祖様 31	カリファノ, J. 291
アンダーソン, T. 128	Callahan, J. ii.
アスムッセン, S.4	カンベル, D.338
漸近的に信頼できる iv	Carlin, J. i, 40, 162
公理	Cartwright, N. 96
因果マルコフ条件54-55, 57-64	
因果連鎖44	
ステートメント54	因果関係グラフ47
因果最小化条件 55-56	因果推論アルゴリズム181-184 文
章 55	文章 183
忠実度 35-36	因果的マルコフ条件 54-55、 57-64
忠実度条件	文章 54
ステートメント	56Causal Mediary 43
マルコフ	33因果最小条件55-56
バスマン, R. 5,	101Statement 55
ベイズ主義 23, 68, 70, 277-286, 323	因果関係 表象条約 47
検索戦略	109-111因果構造 45

ベル、J.63決定論

的49

Bentler, P. 104, 140-142,

323Generates Probability Distribution 50

、

ビビー、J. 197

54

バーチ、M. 105,

107Generation 45

ビショップ、E. 39純粹に

非決定論的 53

ビショップ、Y.4、105

非決定論的51

Blalock, H. i, 6, 75, 86

同型 45

Blau, P. 142-144リニア

決定論的49

ブライス、C.267リニア

擬似非決定性 52

ボーレン、K. i, 107, 195,

325因果系



- 因果的に十分な45クーパー  
因果関係がある45Cornfield  
因果的に十分な45コストナー  
因果関係共分散  
    互惠的 354Crawford  
    CauseCross-Construct  
ブーリアン43  
    共通 44, 47  
    ダイレクト43  
    インダイレクト  
    表現47  
    Scaled Variable 44  
Cederlof, R. 298  
子ども  
子どもたち 28d-分離  
チョークポイント 196Cyclic  
コードレスサイクル  
クリステンセン, R.  
CI (因果推論アルゴリズム参照)  
CI 部分指向誘導パスグラフ 190  
徒然草31中絶の  
    最大  
コールマン, J. 147-149Alarm  
崩壊性  
    , G. i, 11, 110, 146, 323  
    , J. 291, 293-296  
    , H. i, 86, 338  
構造 104  
    , S. 108, 125  
    Foursomes 314  
クロスコンストラクト・インピュ  
    ア309  
    クロスバリデーション 365  
    サイクル  
        44コードレス 361  
    サイクリング29  
    CyclicDirected Graph354-360  
    36、74、83  
    28D-SEP 176  
    36, 73-75, 82, 83, 113  
    Graph 359  
    361Faithful 113  
    ii, 23, 105, 150Order 316  
DAG-Isomorph 36  
ダロツシュ, J.  
39 データセット  
    意見150  
    31AFQT 243-244  
    Network 11, 145-147  
    3-4アメリカの職業構造 142- (英語

イン  
 コライダー 31, 181  
 デッ  
 組み合わせグラフ78進学  
 グラフ  
 コモンコース 44, 47  
 コモンコース不純 309女性  
 グラフ30Leading  
 コンカチネーション 29数学的  
 条件付き41-42政治的  
 条件付き独立性 32  
 条件付き独立性検定 366138  
 連結グラフ 30ネズミの  
 250-251, 320、  
 非独立 191-193332

145  
 プラン149～150  
 教育と出生率 139-140  
 オーガズム 140-142  
 Crowd 147-149を完成させる。  
 マーク 197-200  
 排除248 -250  
 出版生産性 13-14, 133-。  
 , 166  
 肝臓 252-257  
 制約条件シミュレーション研究 161,  
 , 351



結果154-161ディスカバリー103	-104
サンプル生成	発見問題103-104 スパルテ
イナ草 244-248	Doll, R. 291
娘 29ドゥルーズデル	、M.I.
デイビス, W.61ダンカン	、O.142-144
デイ, N. 164イアマン	、J. ii.
確定d結線 189エッジ	28、29
確定判別パス	181指示28
Definite Non-Collider 180, 224, 319	エッジエンド 28
確定・非確定	221 エンドポイント 28
確定SP223	Into28
ディグリー	29Out of 28
デンプスター、A.104	エッジエンド28
子孫 31エドワーズ	、A 128
子孫33エドワーズ	、D.4、109
Det 83	エンプティパス 29
決定論的83内	生的変数49
決定論的因果構造	49Endpoint 28
決定論的グラフ 38	104, 109, 138, 143, 144, 323 決定論的シ
ステム 38	自動モデル修正 329、
決定論的変数 82	332
直接の原因	43ボールドネス 346
ダイレクトマニピュレーション 78ラグランジェ	乗数統計 331
有向非周期グラフ 30, 32信頼	性 346
DAG-Isomorph	36Equiv 177
I-map 33	エラー

イン  
リニアインプリケーション 196  
デッ  
146  
クス  
ミニマルIマップ34  
  
パーフェクトマップ 36  
  
確率分布を表す 34  
146  
ディレクテッドエッジ  
ヘッド 30  
テール 30多項式  
有向グラフ 25、26、28  
非周期的  
有向独立グラフ 34-35,  
有向パス 25, 29

521  
エッジのコミュケーションの方向  
  
Edge省略の方向 146  
エッジの存在 コミッション146  
エッジの存在 オミッション  
  
28エラー変数 37  
エスティメーション 132  
分布 132  
倫理学  
30実験デザイン 286-290  
111外因性変数 49, 78  
拡張グラフ 37

実験デザイン 17, 23, 277-286Glymour

, C. 86, 200

倫理的 286-290Gold

, M. 162

プロスペクティブ

274Granger Causality 363-365

ランダム化 261Graph

25, 28

レトロスペクティブ

274Adjacent 28

F.I. (「忠実な識別可能性」を参照)

Causal 47

因子分析 107,

198Clique 31

忠実な識別可能性 89~90, 361~。

コンバイン78

363

コンプリート30

誠実さ

36つながり 30

忠実な条件9、22、35、66

Cyclic Directed 354-360

ステートメント56

d-connection 74, 83

高速因果推論アルゴリズム

184d-separation 73,  
83

ステートメント

188Deterministic 38

FCI (高速因果推論アルゴリズム参照)

Directed 25, 26

エフシーアイ パーシャル オ

有向無尽 30, 32

リエンテッド 誘導する パスグラフ

ディレクテッド・インディペンデンス  
34-35, 111

190

フィードバック

354-360Edge 28

フィーンバーク, S. i, 4, 39, 86, 105,

エキスパンド37

106, 147、

忠実な 表現する の D-

237

セパレーション 113

フィッシャー、F.101

誘導経路 25, 174-177

フィッシャー, R. iii, 17, 259, 260, 291,

マニピュレーション78

292-293、

302

イン

子オレスト、W.

3Over 28

クォーサムパラレルエンベッディング 94

クロスコンストラクト

310部分指向性誘導路 25.

イントラコンストラクト 310177

, 181

フォックス、J.238パターン

27、90、113

フリードマン、D.142、

365サブグラフ30

フリベリ、L. 298トレック

97、196

フリードマン、M.126

トレックサム97

機能判定

82トライアングル 31

Fung, R. 108,

125Underlying 37

ガイガー、D. i, 48, 71, 86,

224無指向性 25

世代45、50、

54無指向性独立37～38、108

真に非決定論的な因果構造 53

アンマニピュレーション 78

ヘーンゼル、W. 291

ハモンド、E.	291Intersect 29
ハウズマン、D. iiInto	28, 181
Havranek, T. 109	イントラコンストラクションフォーサム
310-	311
ヘッド30イントラコンストラクトインピュア308、311	
ヘッカーマン、D. 48不変量	208, 461, 486
ハイゼ、D.75、	355IP 208
ヘンリー、N.86イソモフィック	因果構造 45
ハースコビッツ、E.	11, 110, 146, 323IV 208
階層的モデル 106	ジャックナイフ法 365
ヒル、A. 291ジェフリーズ	, H. 162
ヒル、J. iiジョイント・	インディペンデンス 32
ホランド、P. i, 4, 8-9, 39, 105, 164ヨレスコグ	, K. 104, 107, 132
ハウソン、C 260カデー	, J ii, 261, 277~286
アイマップ 33ケリー	, K 86, 200
IGアルゴリズム 124-125Kelly	, T. 164
インプリケーションKendall	, M. 64-66, 67
リニア 37Kent	, J. 197
不純物指標Kiiveri	, H. i, 7, 39, 132, 162
コモンコース 309Klein	, L. 163
クロスコンストラクト 309Kleinbaum	, D. 164
イントラコンストラクト 308, 311Klepper	, S. ii, 126
ラテントメジャー 308Klir	, G. 105
インデグリー 29Kohn	, M. 307, 333
独立32カルバック	, S.106
非決定論的因果構造 51Kupper	, L. 164

イン

非決定性システム 38 ラグランジュ  
デッ

間接的な原因 44 潜在的な  
ファク

識別性

Faithful 361-363

Indistinguishable Cross-Construct Foursome 310 Linearly Faithful 361

Almost Pure 309

Latent Variable Models

Intra-Construct Foursome 310

誘導パスグラフ 25, 26, 174-177 潜在

D分離可能性 176 因果

SP 223

情報提供する親 208 ローリッツェン

情報変数 208 Lazarsfeld

道具変数 101 Leamer

乗数統計量 331

変数グラフ

変数 21, 306

関係 19

ラテントメジャーインピュア 308

, S.i, iv, 7, 37, 39, 111

, P. 86

, E. 109

- リー、S.101
- Lilienfeld, A. 291, 293, 300-301, 302
- 形決定性因果構造 49
- 線形忠実度 74
- リニアインプリケーション 37, 196Mason , S. 355
- リニアモデル 196Maximal Clique 31
- リニア擬似非決定性 39 最大指向性 指向性 部分的 指向性
- 線形疑似非決定論的 因果 誘導パスグラフ180
- 構造 52 最尤法推定線形擬似非決定性
- モデル 307 関数 330
- 線形回帰 101, 108McGarvey , B. 338
- 線形表現 36McPherson J., 333
- 線形統計的識別可能性 94, 99 測定モデル ほぼ純粹
- 線形忠実識別可能 361 309, 473
- Linthurst, R. ii, 16, 244-248 ,C. i,86
- LISREL 104, 107, 109, 143, Meyer, M. ii.
- モデルの自動修正 329- 332 323MIMBuild Algorithm
- ボードネス 346シミュレーション コンプレックス320
- 修飾指数 信頼性320
- 信頼性 スタディ結果 320
- 対数線形モデル 4, 104, 105-107Mitchell 331Minimal I-map 34
- 階層モデル 106, 346MINITAB 240
- コライダーを表現する 106モデル , T. 109
- Lohmoller, J. 132Model 108Mixture 58
- Lundman, T. 298Modification 選択 4
- Specification 365
- Indices 331

イン  
肺がん 291-302  
デッ  
修正PCアルゴリズム165  
ヌメーション 78  
ステートメント 166  
操作されたグラフ 78Morgenstern  
, H. 164  
操作性 7~9、22、78モステラ  
、 F. 3、202、239  
ダイレクト78マルチプルリスクファクター・インターベンション・ティアル  
不変性 208, 461, 486研究  
グループ 301  
操作の定理 9, 75  
-81全国ハロタン研究会 3  
発言79Navidi  
, W. 365  
マラント、C.13、133-138、  
166ND 208  
マルディア、K. 197ネイマン  
, J. 7, 291



子孫を残さない 208

パス

ノードエイシクリック 29

327Adjacency 29

をご覧ください。

ノンコロイダー

31コロイダー

オン31

表記規則

viii 29のコンカテネーション

観測された

173サイクリック 29

OrderDefinite ディスクリミネーション

181

d-separability

316Directed 25, 29

オッサン、D.

162エンプティ29

28のうち、181

Intersect 29

アウトディグリー 29

イント 29

31日に28

Noncolliderを超える

パピノー、D.

iiOut of 29

平行埋め込み

94交点29

パラメータ推定

365無指向性 25, 29

親25、28、

181親31の非シールド型コライダー

ペアレンツ28

パターン

部分指向性誘導経路グラフ 25, 26, 177,

ディフィニット・ノン・コライダー

181

319

出力 146

アクセプタブルオーダリング

221True 146

CI 190Pattern

Graph 27, 90, 113

コライダー

181PC アルゴリズム 116-122

確定d結線

189応用編 132

確定判別パス

181離散分布 147

イン	
デッ	224線形構造方程式モデル
クス	133
FCI 190	潜在変数への応用 316
イント 181コンプレックス 119-120	
最大指向性	180安定性 120-122
Out of 181Statement	117, 118
親	181PC* アルゴリズム 122-123
ポシブルD-SEP	187ヒューリスティック 123-124
可能-SP	223Statement 123
d接続の可能性あり 224Pearl	, J. i, iv, 36, 40, 68, 71, 86, 101, 124、
可能性-IP 224126	、162、200、224、258、260
可能性-IV 224Pearson	, K. 21
半直接パス 30, 190Peeler	, W. 140-142

パーフェクトマップ	36再帰的ダイアグラム111
ピーターズ、S. 365回帰	1-2、238-241、363
PMan	78Logistic 105
交点	29回帰因子の選択 14-17
ポリシーバリアブル	78ステップワイズ 105
政治的排除 248-250ライヒエンバッハ	, H. 6
ポピュレーション	代表的なもの
マニピュレーション	76リニア 36
未操作	76表現 34
ポッシブルD-SEP	187レトロスペクティブデザイン 274
可能-SP 223厳密な	統計的識別可能性 94
D接続の可能性あり 224Rindfuss	, R. 139-140
可能性あり-IP 224ロジャース	, R. 13, 133-138, 166
可能性-IV 224Rose	, G. 300
パワー254Rosenbaum	, P. 164
Pratt, J. i, iv, 8-9, 22, 202, 203-212, 238Rubin	, D. i, iv, vi, 8, 22, 202, 203-212, 237
プレディクタブル213	S.S.I. (参照 強い 統計的
予測アルゴリズム 227	識別可能性 (Indistinguishability
例 227-237サーモン	, W.62- 63
ステートメント221-	222サンプリング272-276
確率	31SAS 245
条件付き独立 32Scheines	, R. 86, 200
独立 32Schlaifer	, R. i, iv, 8-9, 22, 202, 203-212、
インタープリテーション 5	238
確率分布	,R.338 因果構造
によって生成される 50, 54	Scott, D. ii.

イン  
プロスペクティブデザイン  
デッ

擬似非決定論的因果構造 52  
クス

擬似非決定論的システム 38,

擬似相関行列 340統計

PUnman

パットナム, H.162

R.S.I. (参照 リジッド 統計的

識別性)

ローリングス、J.2、16、244-248

再構築可能性解析 105セネカ

274検索アルゴリズム

背景知識を取り入れる 127

39 誤りの確率 130-132

的判断 128

78Variable Selections 125

サーチ・ストラテジー104 -111

セドランスク、N.277-286

サイデンフェルド, T. ii, 261, 277-286

セミディレクテッドパス30、190

、E. ii .

スウェル, W. 149-150G2 129

SGS Algorithm 114-116

Complexity 115

スタビリティ 115X2 129

ステートメント

シャー, V. 149-150 シュテツツル

シムキン, M. 291ストブ

サイモン, H. i, 6, 75, 86強い

シンプソンのパラドックス 64-68, 92, 267,

シンプソン, C. 64, 67-68, 267

連立方程式モデル

Skyrms, B.

スレート, E. i, 86

スレザック, P. iiサブ

喫煙

煙と

サージョン・ゼネラル・レポート 291,

297, 298,

ソバー, E.63テトラッドの

ソルボム, D. 104, 107

Sorensen, S. ii

SP 223Search

スピアマン, C. i, 86, 162, 164,

仕様検索 4Implied-H 326

誤差確率252-257ImpliedH 326

スピード, T. i, iv, 7, 39, 132,

Spirtes, P. 86,

VanishingPartial Correlation128

Vanishing Tetrad Difference 325

114ステップワイズレグレッション 105

、I. 5, 101

、T. 162

統計的識別性 88

273Structural Equation Models 307

識別可能性 5

101測定モデル307

iiStructural Model 307

Subgraph 30

、P. 6, 101, 164

291-302サーゲオンジェネラルレポート 喫

296-健康 291

302テール30

違い 325

バニシング 194

サンプリング分布の分散Source 34

II 10, 127, 132, 138, 144, 146

Procedure 324

200ボールドネス 346

162Limitations 351

200信頼性 346

イン  
セントジョン、C.139-140  
デッ  
実効

統計的識別可能性 21, 87

フェイスフル 89-90

線形

リジッド94

ストロング88

弱90-93トムソン

統計的検定

Degrees of Freedom 129

533

スコアリングプリンシパル324-326

363T-maxscore 327

テトラッド・スコア 326

重量 326

99テトラッド表現定理 22, 196-

197

ステートメント196、315

、G.200

Thurstone,L. 107, 162,198

Timberlake, M. 248-250

時系列 356-358, 363-365 Verma

トレック 34、97、196 200

ソース

トレックサム 97

トライアングル 31

Tukey, J. 202,

ターキントン、D.2

タイプ1エラー

タイプ2エラー

アンダーディテクション

グラフの下敷き 37

無向グラフ 25, 28

無向性独立グラフ 37-38, 108

アルゴリズム 124

無向きのパス 25, 29 Vijayan

アンマニピューレーテッドグラフ

アンシールドコライダー 31

アーバツハ、P.260

ヴァンダム、L.3

バニシング・テトラッド・ディファレンス 194, 310、

314, 315

計識別性 90-93

バリアブルワインスタイン

決定 81 Weisberg

決定論的 82 Wermuth

, T. i, 71, 86, 101, 124, 162, 191、

、224、258、260

34 Version Spaces 109

バーテックス

アネスト 31

239 Child 28

子供 28 歳

254 Daughter 29

254 Degree 29

91 デサント 31

子孫 33

次数 29

アウトデラックス 29

親 28

両親 28

, K. 39

78 Visit 327

W.F.I. (参照 弱い 忠実

識別性 (Indistinguishability)

W.S.I. (参照 ウィーク 統計的

区別がつかない

弱忠実識別性 91 線形含意 196 弱統

、S.162

, S. 252-257

, N. i, iv, 7, 37, 40, 104, 111

イン		
内因性	49Wermuth-Lauritzen	アルゴリズム111- 112
デッ		
クス	エラー37ウィートン	、 B.333
外因性	49Whittaker	, J. 4, 105, 111, 125, 197
機能的に決定される	82Williams	, K. 248-250
インストゥルメンタル	101Wishart	, J. 325
観測された	173Worrall	, J. ii.
ポリシー	78Wright	, S. 6, 75, 86
再定義	99-101Wynder	, E. 291
バリアブルアグリゲーション	125Younger	, M. 2
変数の再定義	99-101Yule	, G. 3, 21
変数選択	271-272Zanotti	, M. 101, 164