1 KF 公式推导

假设一离散线性动态系统的模型如下所示，

$$x_k = A * x_{k-1} + B * u_k + w_{k-1} \qquad (1)$$

$$z_k = H * x_k + v_k \qquad (2)$$

其中，x_k为系统状态矩阵，z_k为系统状态的观测矩阵，A为系统转移矩阵，B为控制输入矩阵，H为状态观测矩阵，w_{k-1}为过程噪声且其协方差为Q，v_k为测量噪声且其协方差R。

对于状态估计算法，可以获取状态量的三个值，真实值x_k，状态预测值$\hat{x}_k^-$也称先验状态估计值，状态最优估计$\hat{x}_k$也称后验状态估计值。卡尔曼滤波器的原理是利用卡尔曼增益来修正状态预测值，使其逼近真实值。

接下来本文将在此基础上推导卡尔曼滤波器。

状态预测值$\hat{x}_k^-$可通过状态预测方程可得，

$$\boldsymbol{\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k} \qquad \mathbf{(3)}$$

状态最优估计值$\hat{x}_k$可通过状态更新方程可得，

$$\boldsymbol{\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K * (z_k - H * \hat{x}_k^-)} \qquad \mathbf{(4)}$$

通过该方程可知，卡尔曼增益K实际上表征了状态最优估计过程中模型预测误差与量测误差的比重。即$K \in [0,1]$，当$K = 0$时，预测误差为 0，系统的状态值等于预测值，也即$\hat{x}_k = \hat{x}_k^-$；当$K = 1$时，即测量误差为 0，系统状态完全取决于测量值，式中$z_k - H * \hat{x}_k^-$称为测量创新(measurement innovation)，或者残差，反应了测量值与预测值之间的差异，若为 0 则意味着两者一致，测量误差为 0。

因此，可令，

$$\mathrm{e}_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \qquad (5)$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \qquad (6)$$

$$P_k^- = E[\mathrm{e}_k^- * \mathrm{e}_k^{-T}] \qquad (7)$$

$$P_k = E[e_k * e_k^T] \qquad (8)$$

其中，e_k^-为先验状态误差，e_k为后验状态误差，P_k^-真实值与预测值之间的协方差，P_k真实值与最优估计值之间的协方差。

由(2)(4)可知，

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + KHx_k - KH\hat{x}_k^- + Kv_k$$

$$\hat{x}_k - x_k = \hat{x}_k^- - x_k + KH(x_k - \hat{x}_k^-) + \mathrm{K}v_k \qquad (9)$$

联立(5)(6)(9)可得，

$$e_k = (I - KH)\mathrm{e}_k^- - Kv_k$$

由(8)可得，

$$P_k = E[e_k * e_k^T] = (I - KH)P_k^-(I - KH)^T + \mathrm{KR}K^T$$

$$P_k = P_k^- - KHP_k^- - P_k^- H^T K^T + K(HP_k^- H^T + R)K^T \qquad (10)$$

卡尔曼滤波的估计原则就是使最优状态估计的协方差 [公式] 最小，使其越来越逼近于真实值。因此，其目标函数为，

$$\mathrm{J} = \sum_{min} P_k$$

对卡尔曼增益矩阵K求偏导，可得，

$$\frac{\partial P_k}{\partial \mathrm{K}} = -2(P_k^- H^T) + 2K(HP_k^- H^T + R) = 0$$

最优估计条件下的卡尔曼增益矩阵K的表达式，

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}} \qquad \textbf{(11)}$$

联立(9)(10)可得真实值与预测值之间的协方差矩阵为，

$$\boldsymbol{P_k = (I - KH)\, P_k^-} \qquad \textbf{(12)}$$

由(5)可知，

$$\mathrm{e}_{k+1}^- = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- = (Ax_k + Bu_k + w_k) - (\mathrm{A}\hat{x}_k + \mathrm{B}u_k)$$

$$\mathrm{e}_{k+1}^- = A(x_k - \hat{x}_k) + w_k = Ae_k + w_k$$

由(7)可知，

$$P_{k+1}^- = E[\mathrm{e}_{k+1}^- * \mathrm{e}_{k+1}^-{}^T] = E[(Ae_k + w_k)(Ae_k + w_k)^T]$$

$$P_{k+1}^- = E[(Ae_k)(Ae_k)^T] + E[w_k w_k{}^T]$$

$$\boldsymbol{P_{k+1}^- = AP_kA^T + Q} \qquad \textbf{(13)}$$

至此卡尔曼滤波器 5 条公式均已推出，分别为(3)(4)(11)(12)(13)。

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

$$P_k = (I - KH)\, P_k^-$$

对其进行归纳可分为两个阶段，状态预测与状态修正

状态预测包括，

$$\boldsymbol{\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k}$$

$$\boldsymbol{P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q}$$

状态修正包括，

$$\boldsymbol{K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}}$$

$$\boldsymbol{\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)}$$

$$\boldsymbol{P_k = (I - KH)\, P_k^-}$$

一个工作中的卡尔曼滤波器流程示意图如 Figure 1 所示。

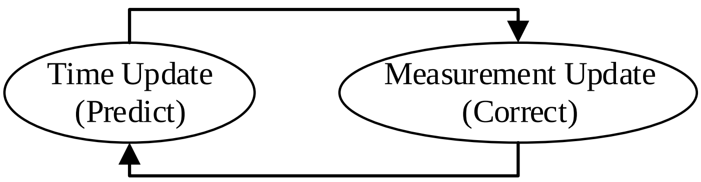

Figure 1 卡尔曼滤波器工作流程

2 小车轨迹预测案例

这里本文用一个小车轨迹追踪的案例介绍下卡尔曼滤波器如何应用。

假设有一辆小车，其正在t时刻的位置为P_t(假设其为一维直线运动，其位置可用一个值来表示)，速度为v_t，t时刻小车的状态可用向量表示为，

$$x_t = \begin{bmatrix} p_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

假设车上传感器可获得小车的加速度为u_t，则该小车系统的状态预测方程可确定，

$$p_t = p_{t-1} + v_{t-1} \triangle t + u_t \frac{\triangle t^2}{2}$$

$$v_t = v_{t-1} + u_t \triangle t$$

其矩阵形式为，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p_t} \\ \boldsymbol{v_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \triangle \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p_{t-1}} \\ \boldsymbol{v_{t-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \triangle \boldsymbol{t^2}/\mathbf{2} \\ \triangle \boldsymbol{t} \end{bmatrix} \boldsymbol{u_t}$$

其中，

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & \triangle t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \triangle t^2/2 \\ \triangle t \end{bmatrix}$$

其协方差预测方程也可确定，

$$\boldsymbol{P_t^-} = \boldsymbol{A P_{t-1} A^T + Q}$$

同时在 GPS 或北斗导航系统的帮助下，可以拿到位置的观测信息z_t，

$$\boldsymbol{K_t} = \boldsymbol{P_t^- H^T (H P_t^- H^T + R)^{-1}}$$

$$\boldsymbol{\hat{x}_t} = \boldsymbol{\hat{x}_t^-} + \boldsymbol{K_t(z_t - H \hat{x}_t^-)}$$

$$\boldsymbol{P_t} = \boldsymbol{(I - KH)\, P_t^-}$$

其中我们假设，观测矩阵H为，

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因为此系统中，我们仅观测位置信息，所以观测噪声的协方差为常熟，假设其为

$$R = 1$$

初始状态x_0为，

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵协方差P_0为，

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

过程噪声协方差Q定义为，

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

根据以上信息可以编写 Matlab 程序进行仿真，源码如 Figure 2 所示。

```matlab
%卡尔曼滤波(小车[速度,位置]例子)
clc,clear,close all
%% 传感器观测
%-----------------------------------------------------------------------------
%Z = H * X + v
%X为t-1时刻实际状态
%Z为t-1时刻实际观测数据
%H为测量系统的参数,即观察矩阵
%v为观测噪声,其协方差矩阵为R
%-----------------------------------------------------------------------------
t=(1:100);
ut = 0;%accelertor
v0 = 2;%velocity
Z = v0*t + 1/2 * ut * t.^2;%理想观测值 (汽车的位置,也就是我们要修改的量)
noise=randn(1,100); %在理想观测值上叠加方差为1的高斯噪声
Z=Z+noise;%模拟的实际观测值
H=[1,0];%传感器提供的观测矩阵
R=1;%传感器的观测噪声协方差矩阵
%% 初始状态(均值)和状态协方差
%基于高斯分布建立状态变量需要均值和协方差(即X和P)
X=[0;0]; %初始状态 X=[位置;速度]
P=[1 0;0 1]; %状态协方差矩阵
%% 状态转移矩阵(表示如何由上一状态推测当前状态),它同时作用与X和P来预测下一时刻的X和P
A=[1 1;0 1]; %在速度例题中为[1 delta(t);0 1]
B=[0.5;1];%[delta(t)^2/2, delta(t)]
%% 外部干扰用状态转移协方差矩阵Q表示
Q=[0.001,0;0 , 0.001];
%% 卡尔曼滤波
figure;
hold on;
for i = 1:length(Z) %迭代次数
%% 预测
X_ = A*X + B*ut;%基于上一状态预测当前状态  X_为t时刻状态预测(这里没有控制)
P_ = A*P*A' + Q;%更新协方差  Q系统过程的协方差
%% 计算卡尔曼增益
K = P_*H'/(H*P_*H'+R);
%% 更新
X = X_+K*(Z(i)-H*X_);% 得到当前状态的最优化估算值  增益乘以残差
P = (eye(2)-K*H)*P_;%更新K状态的协方差
%% 绘图
figure(1)
subplot(2,2,1)
set(0,'defaultfigurecolor','w')
scatter(t(i), X(1));
xlabel('Time'),ylabel('Position')
grid on
hold on
subplot(2,2,2)
set(1,'defaultfigurecolor','w')
scatter(t(i), X(2));
xlabel('Time'),ylabel('Vector')
grid on
hold on
subplot(2,2,3)
set(1,'defaultfigurecolor','w')
scatter(t(i), abs(X(1) - Z(i)));
xlabel('Time'),ylabel('Position Error')
grid on
hold on
subplot(2,2,4)
set(1,'defaultfigurecolor','w')
scatter(t(i), abs(X(2) - (v0 + ut*t(i))));
xlabel('Time'),ylabel('Vector Error')
grid on
hold on
end
subplot(2,2,1)
plot(v0*t + 1/2 * ut * t.^2, 'r','LineWidth',1)
subplot(2,2,2)
plot(v0 + ut*t, 'r','LineWidth',1)
```

Figure 2 卡尔曼滤波器在小车轨迹追踪中使用(Matlab)

其仿真结果如下,

$$v_0 = 2, u_t = 0$$

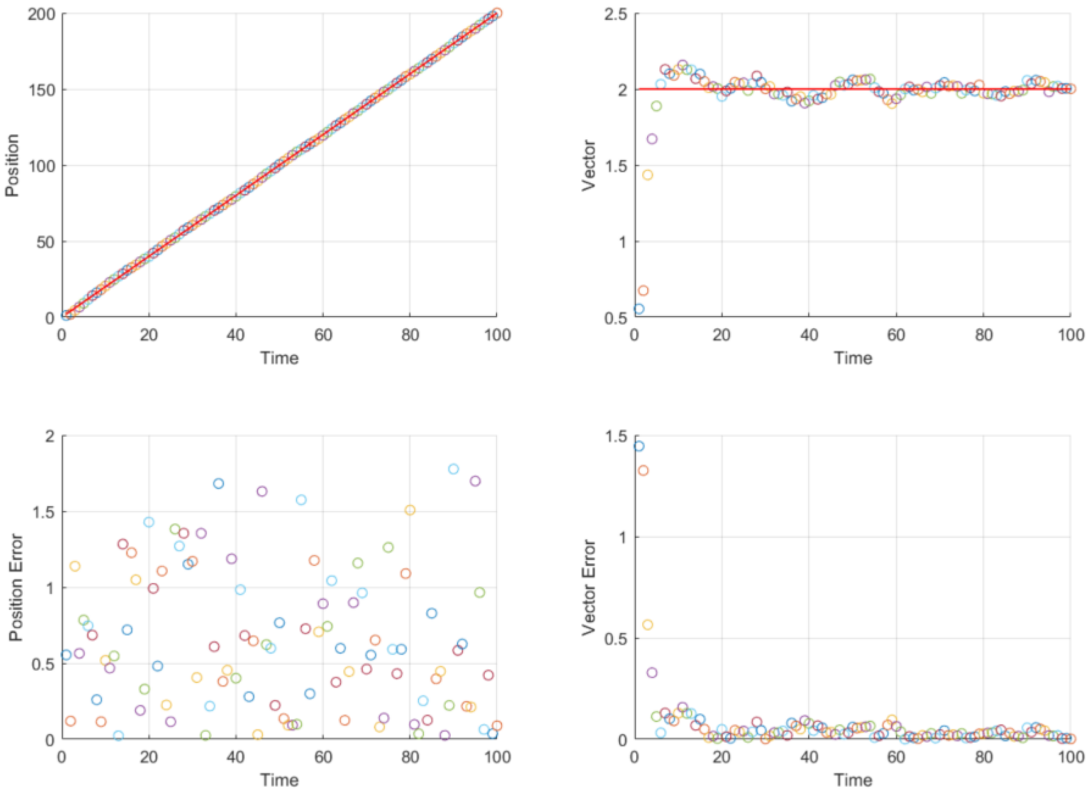

Figure 3 v_0=2,u_t=0 时仿真结果

$$v_0 = 0, u_t = 1$$

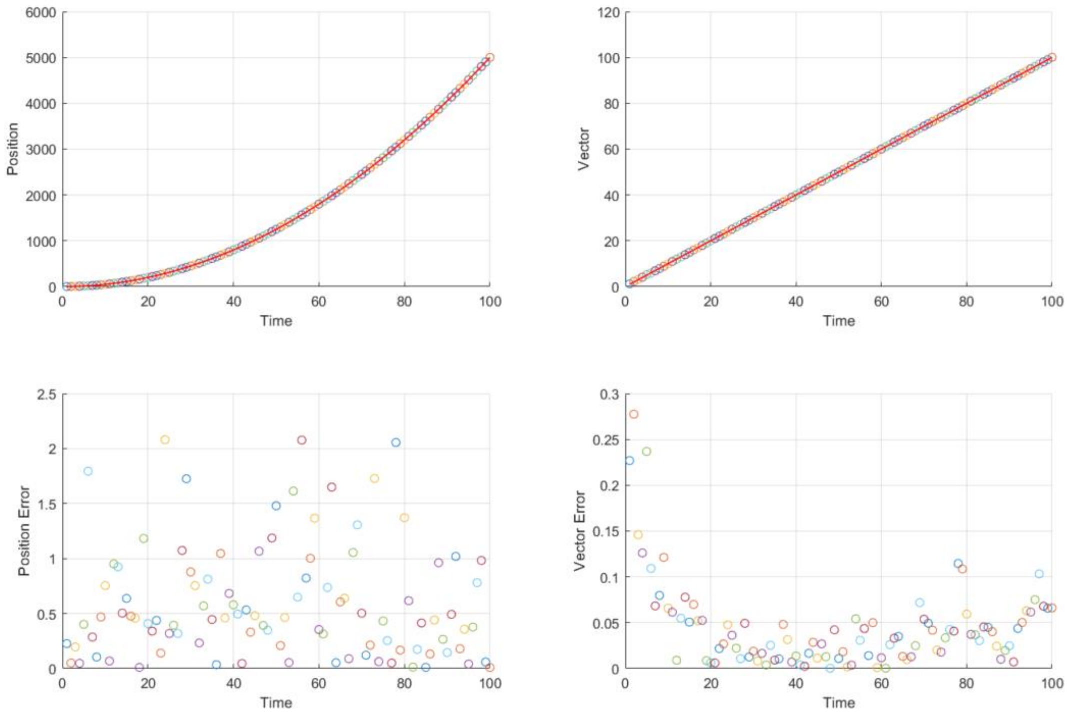

Figure 4 v_0=0,u_t=1 时仿真结果

$$v_0 = 0, u_t = 10$$

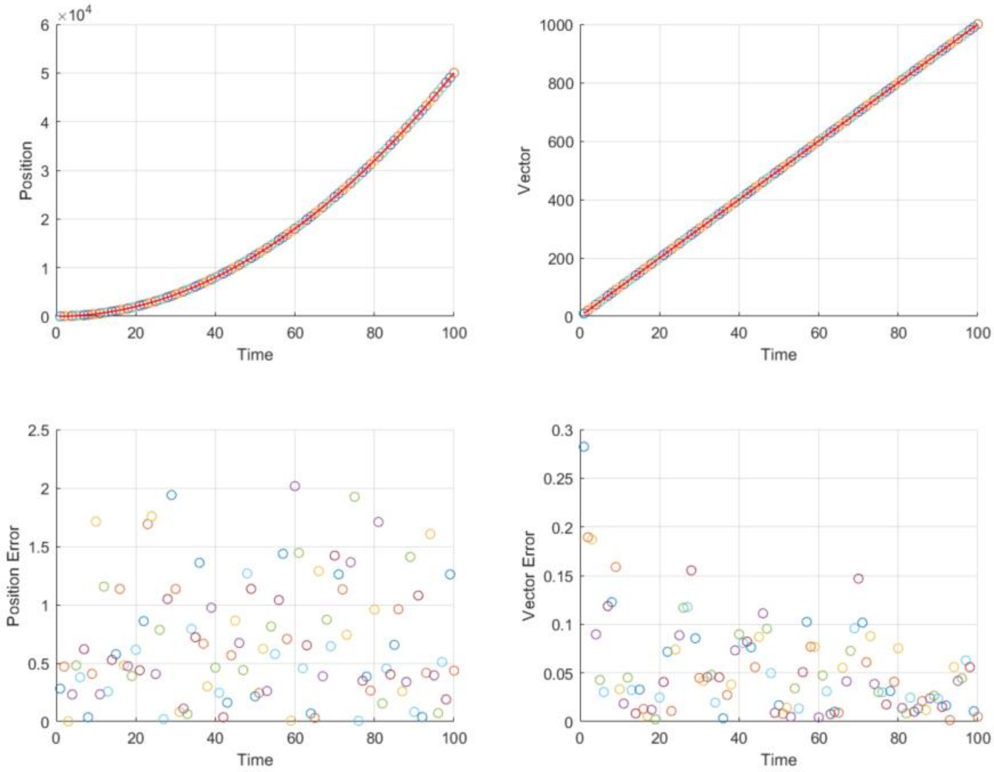

Figure 5 v_0=0,u_t=10 时仿真结果