past exam

ytakayama

2025 年 05 月 06 日

Contents:

Add your content using `reStructuredText` syntax. See the reStructuredText documentation for details.

第1章　埼玉大学

第2章　東京都立大学

2.1 xx 試験 (xxxx 年 x 月)

問題は以下である。

2.2 夏季試験 (2024 年 8 月)

問題は以下である。

- 数学・物理学 I (3 問,135 分): https://www.phys.se.tmu.ac.jp/wp-content/uploads/2025/02/2025Scover_new_FV_tot.pdf
- 物理学 II (2 問,100 分): https://www.phys.se.tmu.ac.jp/wp-content/uploads/2025/02/2025Scover_new_FV_totdown.pdf

2.2.1 準備

複素関数のイメージ

実数値の関数のグラフは、これまで意識することなく描いてきたように、(1 変数関数であれば) xy 平面上にグラフ $f(x)$ を描画することができる。しかし、これと異なり、複素数値の関数のグラフは一つの平面上に表すことはできない。複素関数 $f(z) \quad (z = x + iy)$ は二つの変数 x, y で表され、変換後の値 (複素数) $w = f(z)$ も二つの変数 $u(x, y), v(x, y)$ で表されるので、4 次元となるため、一つの平面上でグラフを表現することは難しい。なので、通常は変換前の複素数平面 z と変換後の複素数平面 w を考え、もとの平面上の座標や図形がどのように変換されるかを追うことで、関数について知ることができる。

例えば、次の関数 (変換) により、座標や図形がどのように変換されるかを考えてみる。

$$w = z + \frac{1}{z}$$

座標や図形としては、 z 平面上で半径 1 の円、半径 r の円、および x 軸上の線分を対象にすることとする。

まず、 x 軸上の線分について調べてみる。z 平面上の x 軸上の点 (1, 0) を考えると、これは $z = 1$ なので w は $w = 1 + \frac{1}{1} = 2$ となる。なので、w 平面上では点 (2, 0) に移ることとなる。

次に x 軸上で $x > 1$ の半直線を調べよう。このとき $z = x$ なので $w = x + \frac{1}{x}$ に移る。$x > 1$ を考えているので $w > 2$ である。微分すると $\frac{dw}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} > 0(x > 1)$ なので、z 平面上で x が大きくなる方向へ移動すると、w 平面上でも u が大きくなる方向へ移動することがわかる。

次に半径 1 の半円を調べてみる。半径 1 の半円は $z = e^{i\theta}, (0 \leq \theta \leq \pi)$ と表せる。なので $w = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ となり、取りうる値の範囲は $-2 \leq w(= 2\cos\theta) \leq 2$ である。したがって、 z 平面上での半円は w 平面上では x 軸上の線分に移る。z 平面上で θ が 0 のとき w 平面上では x が最大となり、θ が大きくなるにつれて x は小さくなる方向に移動していくことがわかる。

最後に半径 r_0 の半円がどのように移るかを考えよう。この半円は $z = r_0 e^{i\theta}$ と表せるので、$w = r_0 e^{i\theta} + \frac{1}{r_0 e^{i\theta}}$ となる。これは次のように変形できる。

$$\begin{aligned} w &= r_0 e^{i\theta} + r_0^{-1} e^{-i\theta} \\ &= (r_0 + r_0^{-1}) \cos\theta + i(r_0 - r_0^{-1}) \sin\theta \\ &= a\cos\theta + ib\sin\theta \quad (a = r_0 + r_0^{-1}, b = r_0 - r_0^{-1}) \\ (\frac{u}{a})^2 + (\frac{v}{b})^2 &= 1 \end{aligned}$$

これは焦点が $w = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm 2$ の楕円である。

以上のように、各座標や図形について関数 $f(z)$ によってどのように変換されるかを調べることで、その関数の概要を知ることが可能である。

注釈

楕円の式

楕円とは、2 定点からの距離の和が一定となるような平面上の点の軌跡である。この定点のことを焦点という。楕円の中心を原点としたデカルト座標 X, Y では楕円は次のように表される。

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

これは以下のようにして導かれる。まず、2 つの焦点を X 軸上におき、$F(c, 0), F'(-c, 0) \quad (c > 0)$ とする。点 P の座標を (X, Y) とすると

$$\begin{aligned} PF + PF' &= const. = 2a \quad (\text{これは楕円の定義より}) \\ \sqrt{(X-c)^2 + Y^2} + \sqrt{(X+c)^2 + Y^2} &= 2a \\ (X+c)^2 + Y^2 &= \{2a - \sqrt{(X-c)^2 + Y^2}\}^2 \\ &= 4a^2 - 4a\sqrt{(X-c)^2 + Y^2} + (X-c)^2 + Y^2 \\ \sqrt{(X-c)^2 + Y^2} &= a - \frac{c}{a}X \\ (X-c)^2 + Y^2 &= a^2 - 2cX + \frac{c^2}{a^2}X^2 \\ (1 - \frac{c^2}{a^2})X^2 + Y^2 &= a^2 - c^2 \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2 - c^2} &= 1 \end{aligned}$$

ここで $b^2 = a^2 - c^2$ とおけば

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

となり、楕円の式を得る。

注釈

$\epsilon - \delta$ 論法

（TBD）

コーシー・リーマンの方程式

複素関数における重要な式の一つに、コーシー・リーマンの方程式がある。これは関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が微分可能であるとき、u,v の偏導関数の間に成り立つ関係を述べたものである。この方程式は関数 $f(z)$ の微分可能性ともかかわっている。

コーシー・リーマンの方程式は次である。関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が $z_0=x_0+iy_0$ で微分可能であるとき、次の関係をコーシー・リーマンの方程式という。

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)$$
$$u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$$

これは以下のようにして導くことができる。いま、 $f(z)$ が $z_0=x_0+iy_0$ で微分可能としているので、次の極限が存在する。

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

複素数の極限が存在するとき、実部、虚部それぞれで極限をとったものと同値なので、

$$\mathrm{Re}f'(z_0)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\mathrm{Re}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$
$$\mathrm{Im}f'(z_0)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\mathrm{Im}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

が成り立つ。そして次の変化量を計算する。

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

極限はただ一つなので、いかなる方向から $\Delta z\to 0$ としても常に一つの値 $f'(z_0)$ が定まる。同様に $Ref'(z_0),Imf'(z_0)$ の式についてもどのような向きから極限をとっても値は一つ（$Ref'(z_0),Imf'(z_0)$）に定まる。そこで、特に $\Delta y=0$ とし、 $\Delta x\to 0$ としても極限の値は変わらないから、上式で $\Delta y=0$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}&=\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)+iv(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}\\&=\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}f'(z_0)&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\mathrm{Re}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}\\&=u_x(x_0,y_0)\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}f'(z_0)&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\mathrm{Im}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}\\&=v_x(x_0,y_0)\end{aligned}$$

よって、

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

が成り立つ。先ほどは $\Delta y=0$ としてが、 $\Delta x=0$ とすることで、同様の方法で次の関係式が導かれる。

$$f'(z_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$

$f'(z_0)$ はただ一つの値なので、次の関係式、つまり、コーシー・リーマンの方程式が成り立つ。

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)$$
$$v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0)$$

注釈

合成関数の微分

はじめに 1 変数関数の連鎖律を見る。$z=f(x,y)$ が全微分可能で $x=x(t),y=y(t)$ が微分可能であるとき、合成関数 $z=f(x(t),y(t))$ は t の関数として微分可能で次が成り立つ。

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2 変数関数も同様に考えることができる。 $z=f(x,y),x=x(u,v),y=y(u,v)$ のとき、

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

（参考）https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/12/biseki1213b.pdf

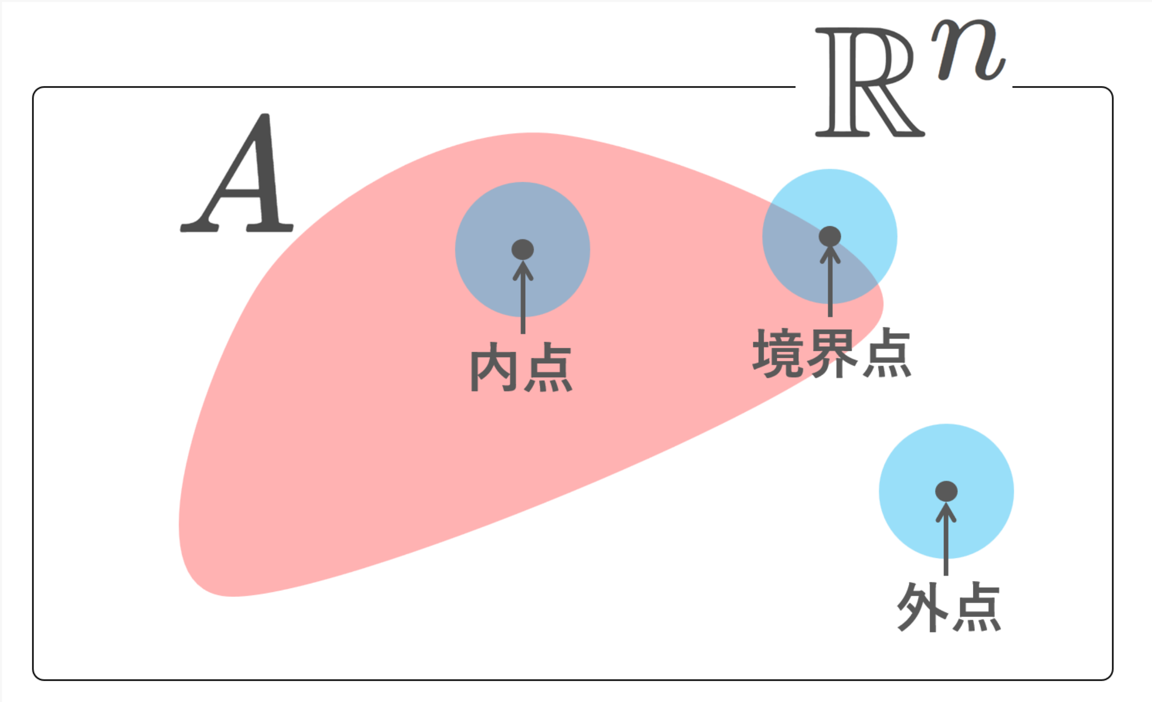
正則関数

点 z_0 のみならず z_0 のある近傍の各点において $f(z)$ が **微分可能** であるとき、$f(z)$ は z_0 で **正則** であるという。

注釈

内点、外点、境界と開集合、閉集合

- 点 z_0 を中心として半径 ε の円の内部の点全体 $|z-z_0|<\varepsilon$ を z_0 の ε 近傍という。
- 点 z_0 のある近傍が集合 S の点のみを含むとき、 z_0 は S の **内点** という。
- 点 z_0 の近傍で S の点を含まないものがある場合、 z_0 を S の **外点** という。
- 点 z_0 が S の内点でも外点でもない場合、 z_0 は S の **境界点** という。
- S の境界点全体を S の **境界** という。



- 境界点を含まない集合を **開集合** という。
- 境界点をすべて含む集合を **閉集合** という。

複素積分

複素数 z の複素数値関数 $f(z)$ の積分について考える。積分路を表す曲線 C を次の関数で定める。

$$C : z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

このとき、C に沿う $f(z)$ の線積分を次で定義する。

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$
$$z'(t)dt = \frac{dz}{dt}dt = dz$$

上式の右辺は次のように展開できる。

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \int_a^b (u+iv)(x'+iy')dt \\
&= \int_a^b (ux'-vy')dt + i\int_a^b (vx'+uy')dt \\
&= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy = \int_C f(z)dz
\end{aligned}$$

これは $f(z) = u+iv, dz = dx+idy$ とおいて、次のように形式的な計算を行ったものと同じ形をしている。

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) \\
&= \int_C (udx-vdy) + i(vdx+udy) \\
&= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy
\end{aligned}$$

次の例を考える。C_1 が 2 点 $z=0$ と $z=2+i$ を結ぶ線分であるとき、積分 $I_1=\int_{C_1} z^2dz$ の値を求める。

C_1 は直線 $y=x/2$ 上にあるから、 $y=t$ とおくと $x=2t$ だから

$$C_1: z=z(t)=2t+it \quad (0\leq t\leq 1)$$
$$z'(t)=2+i$$

C_1 上における z^2 の値は

$$z^2=(x+iy)^2=(2t+it)^2=(2+i)^2t^2=(3+4i)t^2$$
$$I_1=\int_0^1(3+4i)t^2(2+i)dt=(3+4i)(2+i)\int_0^1 t^2dt$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$$

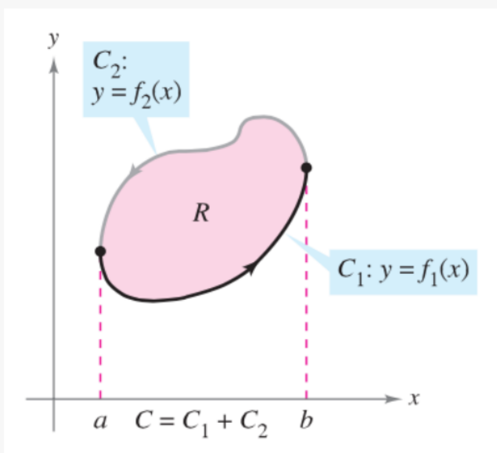
コーシーの積分定理

注釈

グリーンの定理

xy 平面で単一閉曲線（ジョルダン曲線） C で囲まれた領域を R とする。二つの関数 $M(x,y),N(x,y)$ が C と R を含む領域で連続な偏導関数をもっているとする。また、閉曲線 C には図のような向きがついているとする。このとき次の等式が成り立つ。

$$\int_C(Mdx+Ndy)=\int\int_R(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})dxdy$$



次のように示すことができる。まず、閉曲線 C を二つの部分 C_1,C_2 に分け、これらの曲線（弧）の方程式をそれぞれ $y=Y_1(x),\quad y=Y_2(x)$ とする。まず次の計算をする。

$$\int\int_R\frac{\partial M}{\partial y}dxdy=\int_a^b\int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)}\frac{\partial M}{\partial y}dydx$$
$$=\int_a^b[M(x,y)]_{y=Y_1(x)}^{y=Y_2(x)}dx$$
$$=\int_a^b M(x,Y_2(x))dx-\int_a^b M(x,Y_1(x))dx$$
$$=-\int_{BFA}Mdx-\int_{AEB}Mdx$$
$$=\int_C Mdx$$

同様にして、$\int\int_R \frac{\partial N}{\partial x}dxdy = \int_C Ndy$ となる。それぞれ足し合わせることでグリーンの定理の式となる。

R 全体で正則な関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ に対する C に沿う線積分は、次式となる。

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

これは $dz = dx + idy$ と形式的に計算することで得られる。$f(z)$ が R で連続ならば u, v は R で連続であり、また、$f'(z)$ が R で連続ならば u, v の 1 階偏導関数は連続である。よって、グリーンの定理を使用することができ、上式は次のようになる。

$$\int_C f(z)dz = \int\int_R (-v_x - u_y)dxdy + i\int\int_R (u_x - v_y)dxdy$$

ところで、 $f(z)$ は正則なので、コーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ が成り立つので、右辺の値は 0 となる。

したがって、次の重要な定理 コーシーの積分定理 を得る。

区分的に滑らかなジョルダン曲線 C の上と内部で

$$f(z) \text{ が正則}, f'(z) \text{ が連続ならば } \int_C f(z)dz = 0$$

ジョルダン曲線、つまり、積分を単一閉曲線を一周すると 0 となる。

$f(z)$ が正則でなければコーシー・リーマンの定理が成り立たず、また、$f'(z)$ が連続でなければグリーンの定理が成り立たないので、いずれも必要である。(が、実は、グルサーの定理で示されるように $f'(z)$ の連続性を取り除いてもこの式は成り立つのである。)

$\int_C f(z)dz = 0$ であるとき $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z) = 0$ であるから、コーシーの積分定理における C の向きは本質的ではなくなる。すなわち、正の向きでも負の向きでも無関係に積分の値は 0 である。

コーシー・グルサーの定理

区分的に滑らかなジョルダン曲線 C の上と内部で $f(z)$ が正則ならば、$\int_C f(z)dz = 0$ である。これをコーシー・グルサーの定理という。

$f'(z)$ の連続性を取り除くことができることには重要な意味がある。この定理から、次の定理が成り立つことになる。

C_1, C_2 が単連結領域 D 内の 2 点を結ぶ区分的になめらかな曲線であるとき、$f(z)$ が D で正則ならば $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ である。

これは、単連結領域における正則関数に対しては、積分路は無関係に端点のみで積分の値が定めることを示している。

多重連結の場合も、コーシー・グルサーの定理が成り立つ。多重連結の場合は、曲線 C とその内部にある曲線 $C_j (j = 1, 2, ..., n)$ を考える。各曲線はすべて滑らかなジョルダン曲線で、 C_j はすべて C の内部にあり、しかも、 C_j の内部の点は互いに共通点を持たないとする。R は C の内部から C_j の内部の点を除いた部分と C 上の点からなる集合とする。また、 R の内部が左にあるように C と C_j に向きをつけた R の境界を B とする。このとき $f(z)$ が R で正則ならば

$$\int_B f(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z)dz = 0$$

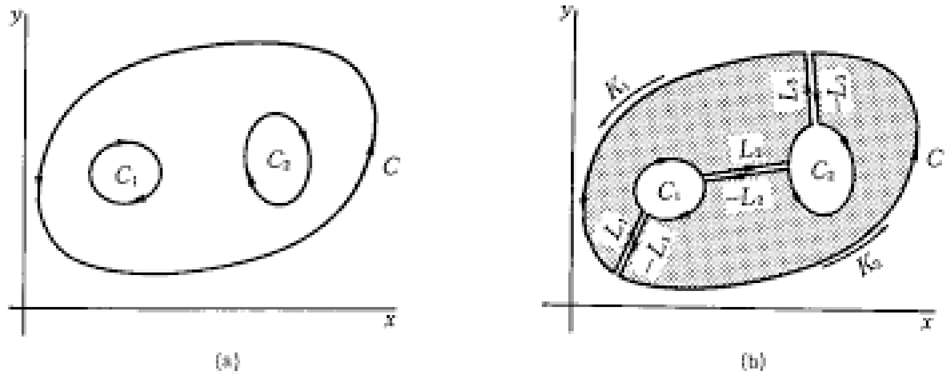
である。$C, C_1, C_2, ..., C_n$ の向きがすべて同じであるとすると

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z)dz$$

である。特に、 C の内部に C_1 のみがある場合

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$

となり、これは積分路の変形原理と呼ばれる。 C_1 を連続的に変形して C に近づけていっても、積分の値は常に不変であることを示している。



コーシーの積分公式

次の式が成り立つ（コーシーの積分公式）

正の向きを持った区分的に滑らかなジョルダン曲線 C の上と内部で $f(z)$ は正則であるとする。z_0 が C の内部の任意の点のとき、

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

が成り立つ。この定理は、C の内部の点 z_0 における関数の値 $f(z_0)$ が C の上の点 z における $f(z)$ の値で定まる、ことを示す。また、次のように書き直すと、曲線 C に沿う線積分の値を求める場合に応用することができる。

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

2.3 xx 試験 (xxxx 年 x 月)

問題は以下である。

2.4 xx 試験 (xxxx 年 x 月)

問題は以下である。

2.5 xx 試験 (xxxx 年 x 月)

問題は以下である。

2.6 xx 試験 (xxxx 年 x 月)

問題は以下である。

第3章　東京科学大学