1. Transfer ciepła

Rozważmy rozkład temperatury w stanie ustalonym wewnątrz prostokątnej płytki o wymiarach $15\,cm \times 20\,cm$. Rozkład temperatury znajdziemy rozwiązując równanie Laplacea:

$$\nabla^2 T = \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

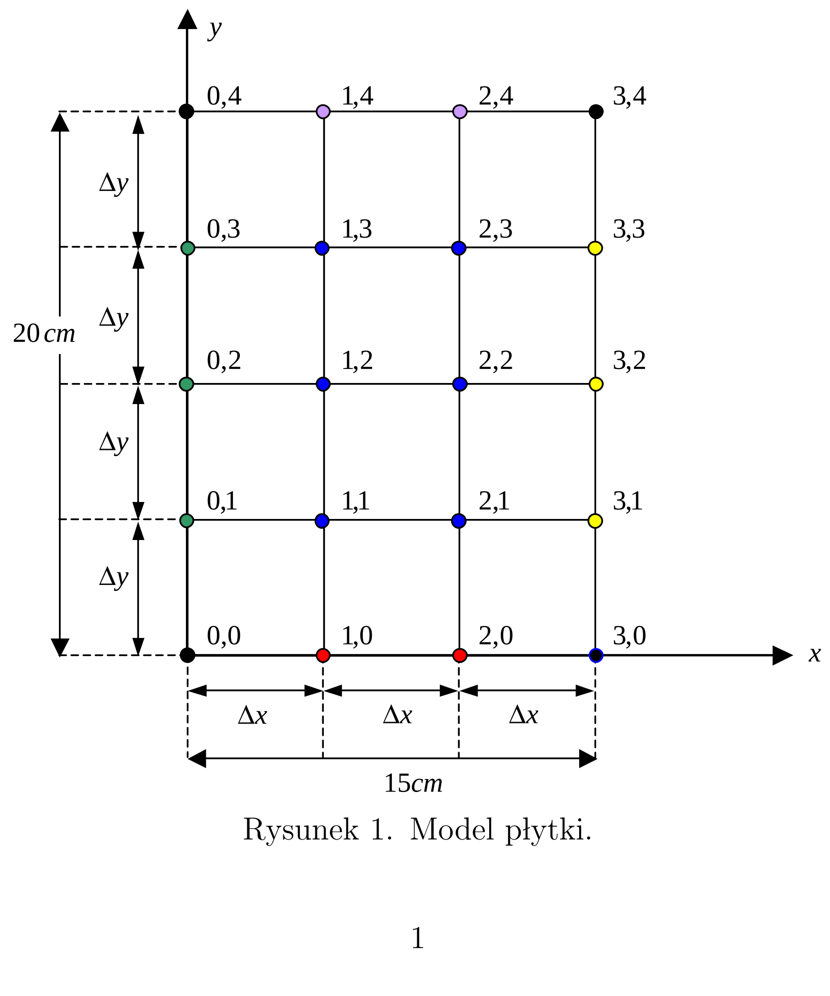
gdzie ∇ to nabla – operator różniczkowy traktowany w operacjach rachunkowych jak symboliczny wektor. Pozwala zapisać operacje różniczkowe na funkcjach w prostej i zwartej formie działań wektorów. W trójwymiarowym, kartezjańskim układzie współrzędnych:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{2}$$

natomiast Δ to operator Laplacea (laplasjan), jest on operatorem różniczkowym drugiego rzędu, szczególnie ważnym elementem klasy operatorów eliptycznych. Znajduje on wiele zastosowań w modelach fizycznych, pojawiając się na przykład w równaniu przewodnictwa cieplnego, modelu propagacji fal. W układzie kartezjańskim operator Laplace'a ma postać:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3}$$

Model płytki przedstawia rysunek.



Rysunek 1. Model płytki.

Gdzie $\Delta x = \Delta y = 5\,cm$. Temperatura na brzegach płytki zadana jest w następujący sposób: $T_{1,0} = T_{2,0} = 150^oC$, $T_{0,1} = T_{0,2} = T_{0,3} = 100^oC$, $T_{1,4} = T_{2,4} = 200^oC$, $T_{3,1} = T_{3,2} = T_{3,3} = 50^oC$.

1.1. Rozwiązanie numeryczne

Równanie rozwiążemy na siatce, gdzie $\Delta x = \Delta y = 5\,cm$. Ponieważ temperatura jest zadana na wszystkich brzegach będziemy aproksymowali równanie (1), tylko wewnątrz siatki. Możemy zapisać aproksymowane rozwiązanie w punkcie (1,1):

$$\frac{T_{0,1} - 2T_{1,1} + T_{2,1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{1,2} - 2T_{1,1} + T_{1,0}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{4}$$

Ponieważ $\Delta x = \Delta y = 5$, $T_{0,1} = 100$, $T_{1,0} = 150$, równanie (4) możemy zredukować do postaci:

$$-4T_{1,1} + T_{1,2} + T_{2,1} + 250 = 0 \tag{5}$$

Aproksymacja rozwiązania w punkcie (2,1):

$$\frac{T_{1,1} - 2T_{2,1} + T_{3,1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{2,2} - 2T_{2,1} + T_{2,0}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{6}$$

Ponieważ $T_{2,0} = 150$, $T_{3,1} = 50$ równanie (6) możemy zredukować do postaci:

$$T_{1,1} - 4T_{2,1} + T_{2,2} + 200 = 0 \tag{7}$$

Aproksymacja rozwiązania w punkcie (1,2):

$$\frac{T_{0,2} - 2T_{1,2} + T_{2,2}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{1,3} - 2T_{1,2} + T_{1,1}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{8}$$

Ponieważ $T_{0,2} = 100$ równanie (8) możemy zredukować do postaci:

$$-4T_{1,2} + T_{2,2} + T_{1,3} + T_{1,1} + 100 = 0 \tag{9}$$

Aproksymacja rozwiązania w punkcie (2,2):

$$\frac{T_{1,2} - 2T_{2,2} + T_{3,2}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{2,3} - 2T_{2,2} + T_{2,1}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{10}$$

Ponieważ $T_{3,2} = 50$ równanie (10) możemy zredukować do postaci:

$$T_{1,2} - 4T_{2,2} + T_{2,3} + T_{2,1} + 50 = 0 \tag{11}$$

Aproksymacja rozwiązania w punkcie (1,3):

$$\frac{T_{0,3} - 2T_{1,3} + T_{2,3}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{1,4} - 2T_{1,3} + T_{1,2}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{12}$$

Ponieważ $T_{0,3} = 100$, $T_{1,4} = 200$ równanie (12) możemy zredukować do postaci:

$$-4T_{1,3} + T_{2,3} + T_{1,2} + 300 = 0 \tag{13}$$

Aproksymacja rozwiązania w punkcie (2,3):

$$\frac{T_{1,3} - 2T_{2,3} + T_{3,3}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{2,4} - 2T_{2,3} + T_{2,2}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{14}$$

Ponieważ $T_{2,4} = 200$, $T_{3,3} = 50$ równanie (14) możemy zredukować do postaci:

$$T_{1,3} - 4T_{2,3} + T_{2,2} + 250 = 0 \tag{15}$$

Równania (5), (7), (9), (11), (13) oraz (15), możemy zapisać w postaci macierzowej, otrzymując układ równań liniowych.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -250 \\ -200 \\ -100 \\ -50 \\ -300 \\ -250 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Rozwiązując układ równań (16) dostaniemy rozkład temperatury w stanie ustalonym w naszej płytce.