MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 10

OPG 227

i) Vis at Fourierrækken for den 2π-periodiske funktion

$f(x)=|x|$, $x \in [-\pi,\pi[$ er $\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{4}{\pi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$.

sol

Da $f(x)=f(-x)$ er funktionen lige: $b_n=0$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|x|\cdot\cos(nx)\,dx=\frac{2(n\pi\sin(n\pi)+\cos(n\pi)-1)}{\pi n^2}$$

$\sin(n\pi)=0$ og $\cos(n\pi)=\begin{cases}1 & \text{for lige } n\\ -1 & \text{for ulige } n\end{cases} \Rightarrow \cos(n\pi)-1=\begin{cases}0\\ -2\end{cases}$

for $n\in\mathbb{N}$.

Vi kan skrive a_n på denne måde.

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{for lige } n\\ -2\cdot\frac{2}{\pi n^2} & \text{for ulige } n\end{cases}$$

Det giver kun mening at kigge på ulige n: $2n-1$.

$$f\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)$$

$$f\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos((2n-1)t) \Leftrightarrow$$

$$f\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

ii) Forklar hvorfor "$\sim$" kan erstattes med "$=$".

Sol

$f(x) = |x|$ er kontinuert og stykvis differentiabel.

Så Fourierrækken konvergerer uniformt mod $f(x)$ og

$\sim$ erstattes med $=$.

iii) Brug "integral_kriteriet.pdf" til at finde et N, så

$|s - s_N|$ højst er 0.1 og 0.01.

Sol

Vi har uligheden fra integralkriteriet:

$$\left| s(x) - s_N(x) \right| \le \int_N^{\infty} f(x)\,dx \le \varepsilon$$

$$\cancel{\int_{N}^{\infty} |x|\,dx} \le \varepsilon \qquad \text{(forkert integral)}$$

$$\int_N^{\infty} -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}\,dx \le \varepsilon$$

Værste tilfælde er $x = -\pi$, for så er $s(x)$ størst.

$\cos((2n-1)\pi) = -1$

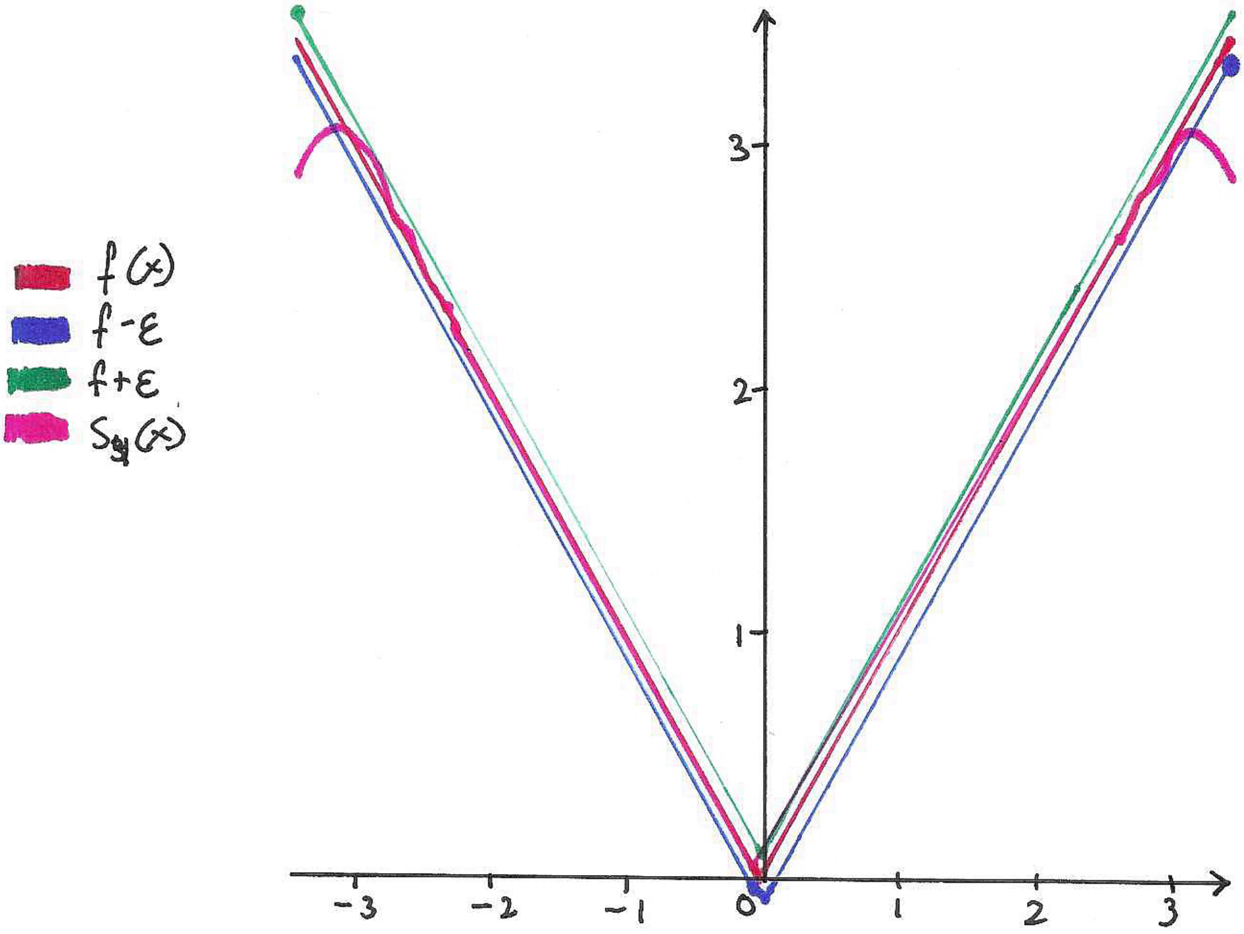
$$\int_N^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}\,dx \le \varepsilon$$

$$\frac{2}{\pi(2N-1)} \le \varepsilon \iff \frac{2}{\pi\varepsilon} \le 2N-1$$

$$N \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\varepsilon}$$

$\varepsilon = 0.1$: $N = 4$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon = 0.01$: $N = 33$

iv) Plot f, $f-\varepsilon$, $f+\varepsilon$ og afsnitssummen for $\varepsilon = 0.1$.
Diskutér forskellen.



Den N'te afsnitssum følger $f(x)$ indenfor én feil ε for alle $x \in [-\pi, \pi]$.

V) Beregn de komplekse Fourierkoefficienter.

Sol

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Reelle koefficienter: $b_n = 0$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = \dfrac{-4}{\pi(2n-1)^2}$

$$c_{2n} = \frac{1}{2}\left(a_{2n} + (-ib_{2n})\right) = 0$$

$$c_{2n-1} = \frac{1}{2}\left(a_{2n-1} \mp i b_{2n-1}\right) = \frac{-2}{\pi(2n-1)^2}$$

$c_n = c_{-n}$ fordi $b_n = 0$.

Så: $c_0 = \dfrac{\pi}{2}$ og $c_{2n-1} = \dfrac{-2}{\pi(2n-1)^2}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.

OPG 225

④

Find Fourierkoefficienterne for den 2π-periodiske funktion $f(x)=1$. Kan "$\sim$" erstattes med "$=$"?

Sol

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2$$

$b_n = 0$ (lige funktion)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1 \cos(nx) \, dx = 0$$

$$f \sim \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

$f(x)$ er kontinuert og stykvis differentiabel.
Derfor konvergerer Fourierrækken uniformt mod $f(x)$ og "$\sim$" erstattes med "$=$".

OPG A

Find alle Fourierkoefficienter c_n, $n \in \mathbb{Z}$, for den 2π-periodiske funktion $f(x) = (1+60i)\cos(60x)$.

Sol

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1+60i)\cos(60x)e^{-inx}\,dx = (60-i)(e^{in\pi} - e^{-in\pi}) \cdot \frac{n}{n^2-3600}$$

Bemærk: $e^{in\pi} - e^{-in\pi} = 2i\sin(n\pi) = 0$ for $n \in \mathbb{Z}$.

Undtagelsespunkt $n=60$: $\frac{60}{60^2-3600} = \frac{60}{0}$?

$n=60$ skal undersøges separat.

$$c_{60} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+60i)\cos(60x)e^{-60ix}\,dx = \frac{(60\pi i + \pi)}{2\pi} = \frac{1+60i}{2}$$

$c_n = 0$ for $n \neq \pm 60$

$c_{-60} = c_{60} = \frac{1+60i}{2}$

OPG 222

$f(t) = t, \; t \in [-\pi, \pi[$ har den reelle Fourierrække

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nt).$$

Find Fourierrækken på kompleks form.

Sol

$a_n = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.

$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = 0$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{n}(-1)^{n+1} = (-1)^n \cdot \frac{i}{n}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n}(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{i}{n}$$

Bemærk $c_{-n} = \overline{c_n}$ som er i overensstemmelse med Lemma 6.23.

OPG 213

i) Find Fourierrækken for $f(t)$ med perioden T

$$f(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,\frac{1}{8}T]\cup[\frac{7}{8}T,T]\\ 0, & t\in]\frac{1}{8}T,\frac{7}{8}T[.\end{cases}$$

sol

$f(t)$ er en lige funktion, så $b_n=0$.

$$a_n=\frac{4}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(nt)\,dt=\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$a_0=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt=\frac{1}{2}$$

Fourierrækken: $f\sim\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$

Bemærk at disse formler er for T-periodiske funktioner.
Hvis $T=2\pi$ opnås de formler vi før har brugt.

ii) Find ved hjælp af Fourierrækken summen af

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$

Hint: Brug Fouriers sætning med $t=\frac{T}{8}$ og $\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$.

sol

$f(t)$ er diskontinuert i $t=\frac{T}{8}$.

$$\text{Fourierrækken}=\frac{f(\frac{T}{8}^+)+f(\frac{T}{8}^-)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

Med Fouriers sætning:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\qquad\text{(brug vinket)}$$

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{2}\cdot\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\cancel{2}n}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

OPG 518

Om en 2π-periodisk, stykvis differentiabel funktion der er kontinuert $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oplyses, at Fourierkoefficienterne er

$a_n = 0$ for alle n

$b_n = \frac{1}{n^3}$ for alle $n \in \mathbb{N}$

Find et N så $|f(x) - S_N(x)| \leq 0.1$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Sol

Fourierrækken er $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)$

Sæt $f(n) = \frac{1}{n^3} \cdot \sin(nx)$.

En majorantrække er $\left|\frac{1}{n^3} \cdot \sin(nx)\right| \leq \frac{1}{n^3}$ og benyt uligheden givet i integralkriteriet.

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \int_N^{\infty} f(n)\, dn \leq \varepsilon$$

$$\int_N^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \varepsilon$$

$$\frac{1}{2N^2} \leq \varepsilon \iff$$

$$N^2 \geq \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$N \geq \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 0.1}} \approx 2.23$$

$N = 3$.