MATEMATIK 2 - OPVARMNING 11

a) Blev løst i sidste seddel.

b) Hvis $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ og $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ er uniformt konvergente og

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ for alle x, hvad er så $c_n - d_n$?

sol

Fordi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ konvergerer uniformt mod (en eller anden)

funktion $f(x)$ gælder

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{for alle } x$$

Samme argument benyttes for $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} \quad \text{for alle } x$$

Så $f(x) = \ldots + c_{-1} e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + \ldots$ og

$g(x) = \ldots + d_{-1} e^{-ix} + d_0 + d_1 e^{ix} + d_2 e^{2ix} + \ldots$

Da $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ for alle x, må det medfører

at $f(x) = g(x) \iff$

$$\ldots + c_{-1} e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + \ldots = \ldots d_{-1} e^{-ix} + d_0 + d_1 e^{ix} + \ldots$$

Der kræver at $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, ... $c_n = d_n$

Altså er $c_n - d_n = 0$, for alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ og $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nx) + d_n\sin(nx)$ ②

er uniformt konvergente og at

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nx) + d_n\sin(nx)$ for alle x

hvad er $a_n - c_n$ og $b_n - d_n$?

<u>Sol</u>

Samme argument som i b).

Hvis rækkerne er uniformt konvergente har vi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = a_1\cos(1x) + b_1\sin(1x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + \dots$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nx) + d_n\sin(nx) = c_1\cos(x) + d_1\sin(x) + c_2\cos(2x) + d_2\sin(2x) + \dots$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nx) + d_n\sin(nx)$ gælder

$f(x) = g(x)$ som medfører

$$a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + \dots =$$
$$c_1\cos(x) + d_1\sin(x) + c_2\cos(2x) + d_2\sin(2x) + \dots$$

Ligningen kræver da at $a_1 = c_1$, $b_1 = d_1$, ..., $a_n = c_n$, $b_n = d_n$.

Altså $a_n - c_n = 0$ og $b_n - d_n = 0$.

d) Hvis $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er en funktion hvor $\int_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty$ (3)

hvad er da $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ udtrykt ved c_n?

Sol

Parsevals sætning siger at der for en funktion der er 2π-periodisk gælder:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \iff$$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$