MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 5

OPG 112

i) Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, $x \in]-1,1[$.

Sol

Ihukom kvotientrakken: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$

Benyt sætning 5.17 og differentiér begge sider.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , x \in]-1,1[$$

Gang med x på begge sider.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

ii) Vis, med samme procedure at $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$, $x \in]-1,1[$.

Sol

Bemark: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Differentiér begge sider.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Gang med x på begge sider.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

iii) Bestem vha. resultaterne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Sol

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ matcher $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, $x=\frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ matcher $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$, $x=\frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 6$$

OPG 509

i) Bestem konvergensradius ρ for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n(n^2+1)}$.

Sol

$$a_n = \frac{x^{2n}}{3^n(n^2+1)}$$

Benyt kvotientkriteriet.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} \cdot \frac{3^n(n^2+1)}{3^{n+1}((n+1)^2+1)}\right| = \left|x^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(n^2+1)}{((n+1)^2+1)}\right| = \left|\frac{x^2}{3}\right| \text{ for } n \to \infty.$$

For absolut konvergens kræves $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to C$ for $n \to \infty$ og $C < 1$.

$$\left|\frac{x^2}{3}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{x^2}{3} < 1$$

$$-3 < x^2 < 3$$

$$|x^2| < 3$$

$$|x| < \sqrt{3}$$

Konvergensradius $\rho = \sqrt{3}$.

ii) Vis at potensrækken er konvergent for $x = \pm\rho$. (4)

Sol

$x = \sqrt{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Sammenligningskriteriet siger rækken er konvergent for $x = \sqrt{3}$.
Samme resultat opnås for $x = -\sqrt{3}$.

iii) Med et $x \in [-\rho, \rho]$ lades $S(x)$ betegne potensrækkens sum. Vis med sætning 4.33 at $\frac{\pi}{4} \leq S(\sqrt{3}) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.
Brug dernæst korollar 2 $(N=0)$ i "integral_kriteriet.pdf" til at vise $\frac{\pi}{4} \leq S(\sqrt{3}) \leq \frac{\pi}{2}$.

Sol

Sætning 4.33: $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1)$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{og} \quad f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq S(\sqrt{3}) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Korollar 2: $\displaystyle\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(x)\,dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{og} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq S(\sqrt{3}) \leq \frac{\pi}{2}.$$

S.4.33 sætter øvre og nedre grænser for den sande sum.
Metode 2 sætter øvre og nedre grænser for $|S - S_N|$.

OPG 115

Bestem værdier af x der gør potensrækken konvergent og bestem rækkens sum.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$

Sol

Det er en kvotientrække: $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$, $x \in]-1,1[$.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

Sol

Det er også en kvotientrække:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in]-1,1[.$$

OPG 136

i) Bestem konvergensradius for $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.

Sol

Benyt kvotientkriteriet: $a_n = x^n \cdot \frac{2^n}{n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot n}{2^n \cdot (n+1)}\right| = \left|x \cdot 2 \cdot \frac{n}{(n+1)}\right| = |2x| \text{ for } n \to \infty.$$

For absolut konvergens kræves:

$$|2x| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{2}$$

Konvergensradius $\rho = \frac{1}{2}$.

ii) Find et funktionsudtryk for den afledede funktion $f'(x)$.

Sol

Benyt sætning 5.17: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$, $x \in]-\rho, \rho[$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\cancel{n}} \cdot x^{n-1} \cdot \cancel{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{n-1} x^{n-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

Ihukom: $\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}$, $|b| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}, \quad x \in]-\rho, \rho[$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{2}{1-2x}, \quad x \in]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[$$

OPG 146

Undersøg konvergensstatus for følgende rækker.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^{n+3}}$

Sol

Benyt kvotientkriteriet: $a_n = \frac{n}{4^{n+3}}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n} \cdot \frac{4^{n+3}}{4^{n+4}}\right| = \left|\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}} \cdot \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{4} \text{ for } n \to \infty$$

Da $c = \frac{1}{4} < 1$ er potensrækken absolut konvergent.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$

Sol

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2 = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ n'te-ledskriteriet siger divergent.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvor $a_n = \begin{cases} e^{e^{e^{n^3}}} & \text{for } n = 1, 2, \dots, 10000 \\ \frac{(-1)^n}{n^3} & \text{for } n \geq 10001 \end{cases}$

Sol

Vi skal kun bekymre os om $\sum_{n=10001}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^3}$ ($\sum_{n=1}^{10000} e^{e^{e^{n^3}}}$ er bare et tal).

Brug tjek for absolut konvergens.

$$\sum_{n=10001}^{\infty} \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n^3}\right| \leq \sum_{n=10001}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Sammenligningskriteriet siger absolut konvergent.

OPG 636 ⑧

Betragt funktionerne $f(x)=\frac{1}{1-x}, x\in[0,1[$, $f_n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}, x\in[0,1[$

i) Vis at $|f(x)-f_n(x)|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ for alle $x\in[0,\frac{1}{2}]$.

Sol

$$|f(x)-f_n(x)|=\left|\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right|=\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|$$

$\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|$ er størst når $x=\frac{1}{2}$ (fordi så er tælleren størst

og nævneren mindst).

$$x=\tfrac{1}{2}:\ \left|\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right|=2\left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right|=\left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}\right|=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}$$

Fordi $x=\frac{1}{2}$ var det tilfælde fejlen mellem $f(x)$ og $f_n(x)$ var størst

kan vi med sikkerhed sige:

$$|f(x)-f_n(x)|\le\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

Bemærk dette resultat viser at $f_n(x)$ konvergerer uniformt mod $f(x)$ på intervallet.

Vi kan altid vælge et $n=N_0\in\mathbb{N}$ som gør fejlen $\varepsilon=|f(x)-f_n(x)|$ så lille vi kunne ønske for alle $x\in[0,\frac{1}{2}]$

Dette kan lade sig gøre, fordi der er et værste tilfælde "worst case scenario" og at x tilhører et lukket interval.

ii) Plot f, f_2, f_5, f_{10}.

Sol