MATEMATIK 2 – UGESEDDEL 12

OPG B

Vis at systemet $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t)$ er asymptotisk

$y = x_1 + 2x_2$

stabilt.

Sol

Find egenværdierne for $\underline{A}$, med Maple.

De er $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) Find overføringsfunktionen hørende til systemet.

Sol

$\underline{A} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, $\vec{d}^T = [1 \quad 2]$

Overføringsfunktionen findes:

$$H(s) = -\vec{d}^T(\underline{A} - s\underline{I})^{-1}\vec{b} = \frac{5 + 3s}{s^2 + s + 1}$$

iii) Lad $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\sin(nx)$ og find en løsning til differentialligningssystemet i form af en Fourierrække.

Sol

Den komplekse Fourierrække for $u(x)$ er

$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = -\frac{i}{2n^3}$

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{i}{2n^3}e^{inx}$$

sætning 7.8 (Fourierrækkemetoden) siger da at en løsning er $y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{inx}$.

$c_n = -\frac{i}{2n^3}$

$$H(in) = \frac{3in+5}{(in)^2 + in + 1} = \frac{3in+5}{1-n^2+in}$$

Løsningen: $y(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} -\frac{i}{2n^3} \cdot \frac{3in+5}{1-n^2+in}$

iv) Lad S_N være den N'te afsnitssum af Fourierrækken i iii). Det oplyses at for alle $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ gælder at

$$\left| \frac{5+3in}{1-n^2+in} \right| < \frac{7}{|n|}$$

Vis at der for alle $N \in \mathbb{N}$ gælder $|y(t) - S_N(t)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{7}{n^4}$.

Sol

$$|y(t) - S_N(t)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} -\frac{i}{2n^3} \cdot \frac{5+3in}{1-n^2+in} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2n^3} \cdot \left| \frac{5+3in}{1-n^2+in} \right|$$

Vi ved jo at

$$\left| \frac{5+3in}{1-n^2+in} \right| < \frac{7}{|n|} \quad \text{, så}$$

$$\frac{1}{2n^3} \cdot \left| \frac{5+3in}{1-n^2+in} \right| \leq \frac{7}{2n^4} \leq \frac{7}{n^4}$$

Vi har da Vist at $|y(t) - S_N(t)| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2n^3} \cdot \left| \frac{5+3in}{1-n^2+in} \right| \leq \frac{7}{n^4}$

for alle N.

vi) Brug integral_kriteriet.pdf og resultatet i iv) til at finde et $N_0 \in \mathbb{N}$ så der for alle $N \geq N_0$ og $t \in \mathbb{R}$ gælder

$$|y(t) - S_N(t)| < 0.01$$

Sol

Fourierrækken har en konvergent majorantrække $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^4}$, så rækken konvergerer uniformt for alle $t \in \mathbb{R}$.

Vi bruger uligheden i integralkriteriet.

$$|y(t) - S_N(t)| \leq \int_{N_0}^{\infty} f(x)\,dx \leq \varepsilon$$

$$\int_{N_0}^{\infty} \frac{7}{n^4}\,dn \leq \varepsilon$$

$$\frac{7}{3N_0^3} \leq \varepsilon$$

$$\frac{7}{\varepsilon} \leq 3N_0^3$$

$$N_0 \geq \sqrt[3]{\frac{7}{3\varepsilon}} = \sqrt[3]{\frac{7}{0.03}} \approx 6.15$$

$$N_0 = 7$$

OPG 417

i) Find overføringsfunktionen for det lineære system

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = 2x_1 - x_2$$

Sol

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = -\vec{d}^T (\underline{A} - s\underline{I})^{-1} \vec{b} = \frac{s}{s^2 - 3s + 5}$$

ii) Find det stationære svar til påvirkningen $u(t) = \cos(t)$.

Sol

$s = i$ for $u(t) = \cos(t) = \mathrm{Re}\{e^{it}\}$.

Svaret: $y(t) = H(i)u(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{i}{(i)^2 - 3i + 5} e^{it}\right\}$

$$y(t) = \mathrm{Re}\left\{\left(-\frac{3}{25} + \frac{4i}{25}\right)e^{it}\right\} = -\frac{3}{25}\cos(t) - \frac{4}{25}\sin(t)$$