MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 1

OPG 306

i) Find den fuldstændige komplekse løsning til

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$$

Sol

Karakterligningen opskrives direkte

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

Løsningerne: $\lambda = i$ (am =2) og $\lambda = -i$ (am =2).

Løsningen til differentialligningen bliver

$$y(t) = c_1 e^{it} + c_2 t e^{it} + c_3 e^{-it} + tc_4 e^{-it}$$

, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$

ii) Find den fuldstændige reelle løsning.

Sol

Det er nok at kigge på $c_1 e^{it} + c_2 t e^{it}$ på grund af lineær afhænighed.

$$y_0(t) = c_1 e^{it} + c_2 t e^{it}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Ihukom: $e^{it} = \cos t + i \sin t$

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t) e^{it} = (c_1 + c_2 t)(\cos t + i \sin t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Sætning 1.9: Den reelle løsning er $Re(y) + Im(y)$

$Re(y_0) = (c_{1R} + c_{2R}t)\cos t$, $c_{1R}, c_{2R} \in \mathbb{R}$

$Im(y_0) = (c_{1Im} + c_{2Im}t)\sin t$, $c_{1Im}, c_{2Im} \in \mathbb{R}$

Den fuldstændige løsning:

$$y(t) = (c_{1R} + c_{2R}t)\cos t + (c_{1Im} + c_{2Im}t)\sin t \, , \Leftrightarrow$$

$$y(t) = k_1 \cos t + k_2 t \cos t + k_3 \sin t + k_4 t \sin t$$

, $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$.

OPG 347

i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til

$$y^{(4)} + 10y^{(2)} + 169y = 0$$

Sol

Karakterligningen

$$\lambda^4 + 10\lambda^2 + 169 = 0$$

Løsningerne: $\lambda = -2 \pm 3i$ og $\lambda = 2 \pm 3i$

Kompleks konjugerede rødder: $y(t) = e^{\alpha t}(\cos \omega t + \sin \omega t)$, $\alpha = Re(\lambda)$, $\omega = |Im(\lambda)|$

Løsningen til differentialligningen:

$$y(t) = e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) + e^{-2t}(c_3 \cos 3t + c_4 \sin 3t)$$

$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

ii) Vis at differentialligningen har netop én partikulær løsningen $y=f(t)$ hvor ③

$$f(0)=0\,,\; f'(0)=1 \quad \text{og } f(t)\to 0 \text{ for } t\to\infty$$

<u>sol</u>

$$y(t)=e^{2t}(c_1\cos 3t + c_2 \sin 3t) + e^{-2t}(c_3\cos 3t + c_4 \sin 3t)$$

Hvis løsningen $f(t)\longrightarrow 0$ for $t\longrightarrow\infty$ kræves

$c_1=0$

$c_2=0$

$$f(t)=e^{-2t}(c_3\cos 3t + c_4\sin 3t)$$

Hvis $f(0)=0$ kræves $c_3=0$.

$$f(t)=e^{-2t}\cdot c_4 \sin 3t$$

$$f'(t)=-2e^{-2t}\cdot c_4\sin 3t + 3e^{-2t}\cdot c_4\cos 3t$$

$$f'(0)=3c_4=1 \iff c_4=\frac{1}{3} \qquad (c_1=c_2=c_3=0)$$

Endeligt haves partikulærløsningen

$$y=f(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$$

OPG 309

Brug gættemetoden til at finde en løsning til

$$\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = \cos 2t$$

Sol

Gæt: $y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ er en løsning.

$-6y(t) = -6A\cos 2t - 6B\sin 2t$

$5\dot{y}(t) = -10A\sin 2t + 10B\cos 2t$

$\ddot{y}(t) = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$

Nu haves

$$\underbrace{-4A\cos 2t - 4B\sin 2t}_{\ddot{y}} \underbrace{- 10A\sin 2t + 10B\cos 2t}_{5\dot{y}} \underbrace{- 6A\cos 2t - 6B\sin 2t}_{-6y} = \cos 2t$$

Vi samler $\cos 2t$ og $\sin 2t$ leddene.

$$(-4A + 10B - 6A)\cos 2t + (-4B - 10A - 6B)\sin 2t = \cos 2t$$

$$\left.\begin{aligned} -10A + 10B &= 1 \\ -10A - 10B &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= -\frac{1}{20} \\ B &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Så $f(t) = A\cos 2t + B\sin 2t \iff$

$$f(t) = -\frac{1}{20}\cos 2t + \frac{1}{20}\sin 2t$$

iii) Hvordan kan man finde samtlige løsninger til

$$\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = \cos 2t$$

$$\ddot{y} + 5\dot{y} - 6\ddot{y} = \sin 2t$$

<u>sol</u>

$$L_{inhom} = L_{hom} + f(t)$$

Summen af den homogene løsningsmængde og en partikulær løsning giver samtlige løsninger.

iv)

Gør rede for hvordan man kan finde samtlige løsninger til

$$\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = 17 \cos 2t - 121 \sin 2t$$

<u>sol</u>

Benyt superpositionsprincippet. Find partikulære løsninger til:

$$\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = 17 \cos 2t \qquad (f_1(t))$$

$$\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = -121 \sin 2t \qquad (f_2(t))$$

med gættemetoden.

Find også den homogene løsning.

$$L_{inhom} = L_{hom} + f_1(t) + f_2(t)$$

OPG A

Betragt $x'(t) = x(t)$ (2). Antag at (2) har en løsning $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$ og antag at man kan differentiere rækken ledvis. Sæt dette ind i (2) og vis at $a_n = \frac{a_{n-1}}{n} \ \forall \ n > 0$.

Sol

Hvis $x(t) = a_0 + a_1 t + \dots$ så er

$x'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots$

Indsættes dette i (2) fås

$$a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

Ved sammenligning ses

$a_1 = a_0$

$2a_2 = a_1 \iff a_2 = \frac{a_1}{2}$

$3a_3 = a_2 \iff a_3 = \frac{a_2}{3}$

$\vdots$

Generelt: $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$

ii) Find et udtryk for a_n som funktion af a_0.

Sol

$a_1 = a_0$

$2a_2 = a_1 \iff a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$

$3a_3 = a_2 \iff a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{3!}$

$\vdots$

Generelt: $a_n = \frac{a_0}{n!}$

iii) Hvis $x(0)=3$, find så a_0 og opskriv løsningen til (2) som en vendelig række. ⑦

<u>sol</u>

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$$x(0) = a_0 \Rightarrow a_0 = 3$$

Med $a_n = \frac{a_0}{n!}$ genereres resten af koefficienterne.

$$a_1 = \frac{a_0}{1!} = 3$$

$$a_2 = \frac{a_0}{2!} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_0}{3!} = \frac{3}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{4!} = \frac{3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Løsningen: $x(t) = 3 + 3t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{8}t^4 + \dots + \frac{3}{n!}t^n$

@Frederik Justesen