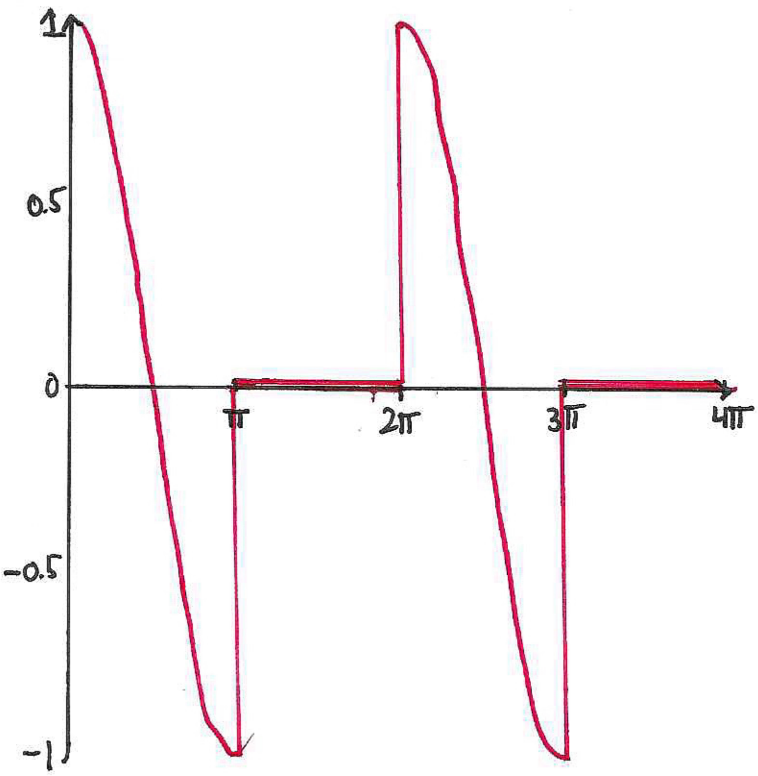
MATEMATIK 2 – UGESEDDEL 9

OPG 228

Skitsér den 2π-periodiske funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{for } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{for } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Sol



→ 2π-periodisk

ii) Gør rede for at at Fourierrækken for f er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$.

Sol

Sætning 6.12: "Hvis f er en stykvist differentiabel funktion så konvergerer Fourierrækken punktvis for alle $x \in \mathbb{R}$."

Er f stykvis differentiabel?

$\cos(x)$ er differentiabel på $x \in [0, \pi]$, og den afledede er kont.

0 er differentiabel på $x \in [\pi, 2\pi]$, og den afledede er kont.

Fourierrækken konvergerer punktvist mod f for alle $x \in \mathbb{R}$.

iii) Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x=0$ ②
og $x=\pi$?

Sol
$f(x)$ er diskontinuert i $x=0$ og $x=\pi$.

$x=0$: Fourierrækken $= \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

$x=\pi$: Fourierrækken $= \frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$

Fordi $f(x)$ ikke er kontinuert konvergerer Fourierrækken ikke uniformt mod $f(x)$.

iv) Beregn a_0

Sol
For 2π-periodiske funktioner:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} 0\,dx\right) = 0$$

Vi kunne også have benyttet andre grænser:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi}\cos(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0\,dx\right) = 0$$

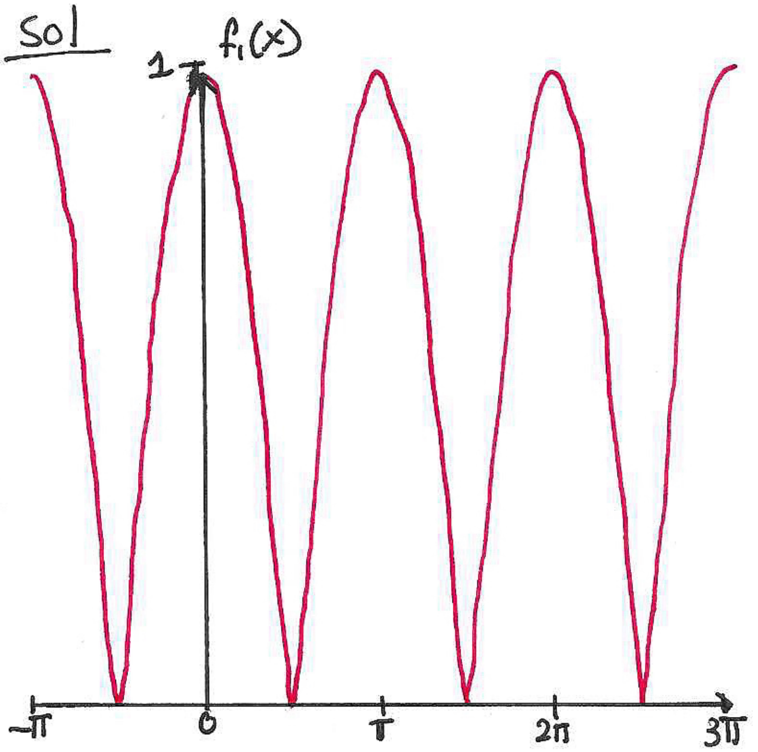
OPG 864

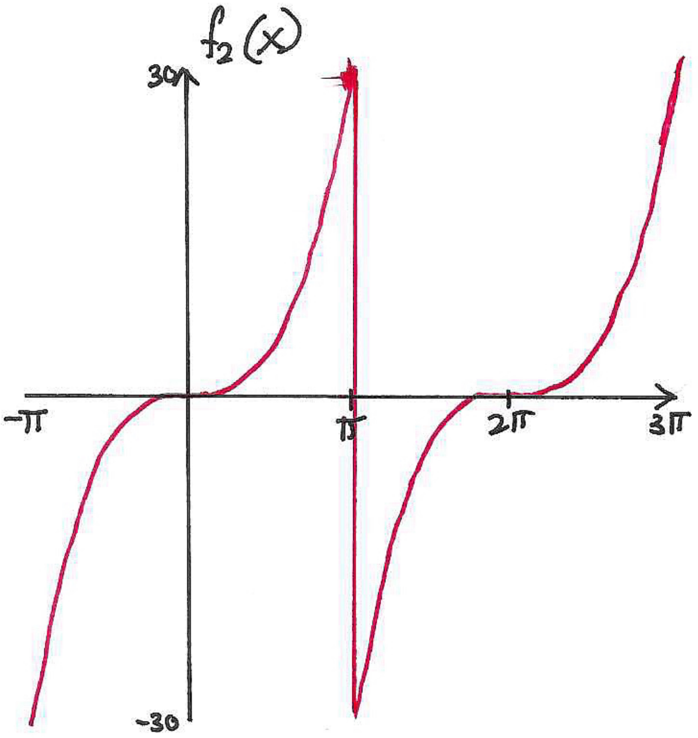
Lav en skitse af funktionerne

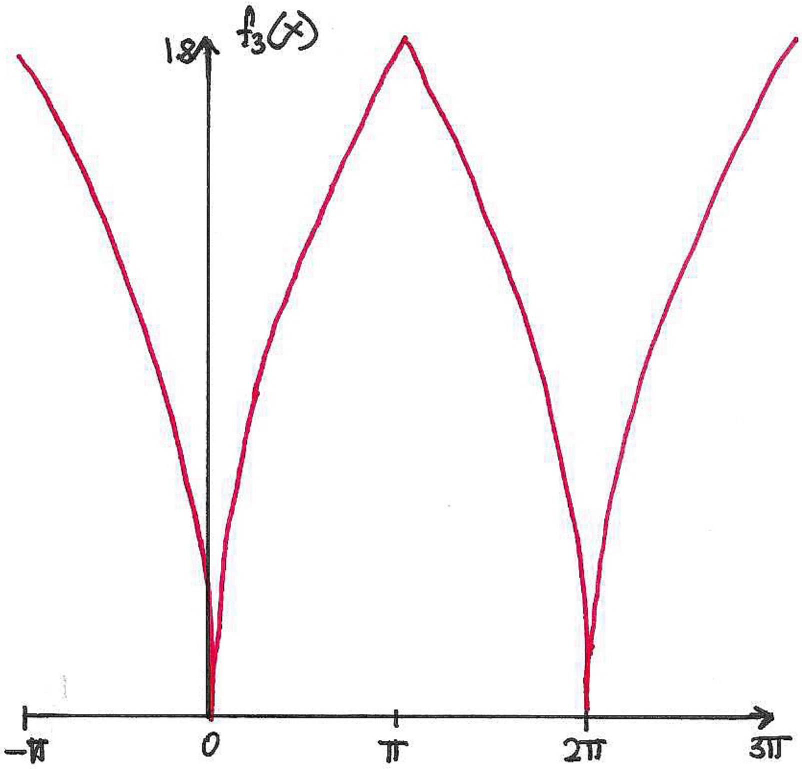
$f_1(x) = |\cos(x)|$, $f_2(x) = x^3$, $f_3(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in [-\pi, \pi[$

og de er 2π-periodiske.

Sol







Alle 2π-periodiske.

ii) Hvilke er differentiable?

Sol

- $\dfrac{df_1}{dx} = \dfrac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$, $x \in [0, \pi[$

$\dfrac{df_1}{dx} = \dfrac{d(-\cos(x))}{dx} = \sin(x)$, $x \in [\pi, 2\pi$

f_1 er stykvis differentiabel.

- $\dfrac{df_2}{dx} = \dfrac{d\,x^3}{dx} = 3x^2$, $x \in [0, 2\pi]$

f_2 er differentiabel og derfor også stykvis differentiabel.

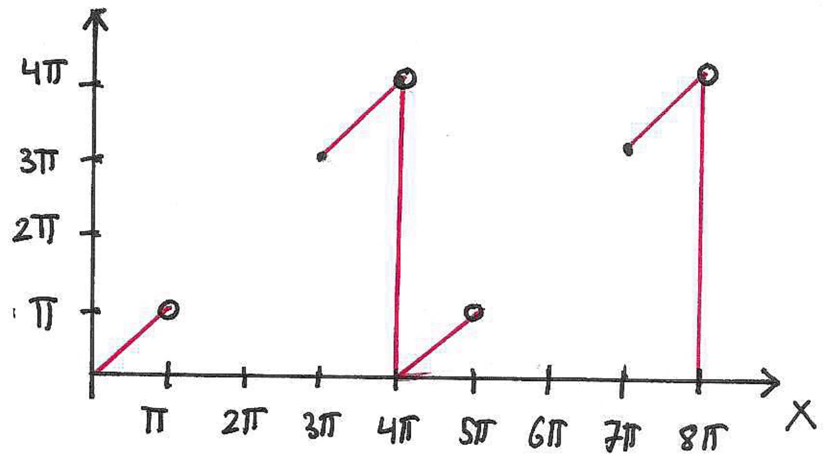
- $\left.\dfrac{df_3}{dx}\right|_{x=0}$ = undefined

Uanset inddeling af interval er $f_3(x)$ ikke stykvis differentiabel

OPG A

i) Skitsér funktionen $f(x) = x$, $x \in [0, \pi[\cup [3\pi, 4\pi[$, der er 2π-periodisk.

Sol



ii) Er f kontinuert?

Sol

Nej. f er diskontinuert i $x = \pi$, $x = 4\pi$ & $x = 3\pi$
$x = 0$

$x = \pi$: $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \pi$ $\lim_{x \to \pi^+} f(x) = 3\pi$

$x = 4\pi$: $\lim_{x \to 4\pi^-} f(x) = 4\pi$ $\lim_{x \to 4\pi^+} f(x) = 0$

$x = 3\pi$: $\lim_{x \to 3\pi^-} f(x) = \pi$ $\lim_{x \to 3\pi^+} f(x) = 3\pi$

$x = 0$: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 4\pi$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

iii). Er Fourierrækken konvergent i $x=0$ og $x=\pi$.

Sol

Ja, $f(x)$ er stykvis differentiabel.

$x = 0$: Fourierrækken $= \dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 2\pi$

$x = \pi$: Fourierrækken $= \dfrac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = 2\pi$

OPG 222

i) Vis at den reelle Fourierrække for den 2π-periodiske funktion $f(t)=t,\ t\in[-\pi,\pi[$ er givet ved

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nt).$$

Sol

$f(t) = -f(-t)$ så f er en ulige funktion $\Rightarrow a_n = 0$.

Find Fourierkoefficienterne:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \cdot \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot \frac{\sin(n\pi) - n\pi\cos(n\pi)}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\pi\cos(n\pi)}{n} = \frac{2}{n}\left(-\cos(n\pi)\right) = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$$

Så Fourierrækken er altså

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt) \iff$$

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\sin(nt).$$

ii) Find ~~med~~ hjælp af den fundne Fourierrække ⑥
summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Hint: Brug Fouriers sætning med $t=\frac{\pi}{2}$.

Sol

Vi havde jo $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$

sættes $t=\frac{\pi}{2}$ fås nu (f er kontinuert i $\frac{\pi}{2}$.)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ for lige n, så vi kigger kun på $n=2k-1$
$k \in \mathbb{N}$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1}\cdot(-1)^{2k}\cdot \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Fra eksempel 6.15 vides at $\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1}\cdot(-1)^{2k}\cdot(-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1}\cdot(-1)^{3k-1}$$

$(-1)^{3k-1} = (-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1}\cdot(-1)^{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \quad \text{QED.}$$

iii) Opskriv for ethvert $t \in [-\pi, \pi[$ summen af Fourierrækken.

Sol

Alle de kontinuerte punkter er Fourierrækken lig funktionsværdien, $f(x)$.

I de diskontinuerte punkter $x = \pm\pi$ er Fourierrækkens sum:

$$x = \pm\pi: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1} \sin(nt) = \frac{f(\pm\pi^+) + f(\pm\pi^-)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

iv) Har Fourierrækken en konvergent majorantrække?

Sol

Nej.

$f(x)$ er ikke kontinuert i alle punkter, så Fourierrækken er ikke uniformt konvergent.

Derfor kan Fourierrækken heller ikke have nogen konvergent majorantrække.

v) Funktionen $f(t)$ er differentiabel for $t \in]-\pi,\pi[$. ⑧

Finder man $f'(t)$ ved at differentiere ledvist i Fourierrækken?

Sol

Vi kan prøve: $f(t) = t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1} \sin(nt)$

$$f'(t) = 1 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(nt)$$

Denne ligning er falsk, så svaret til spørgsmålet er nej.

Det giver også mening mht. sætning 5.35 der siger, at hvis der skal gælde $f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)$ kræver det at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ har en konvergent majorantrække.

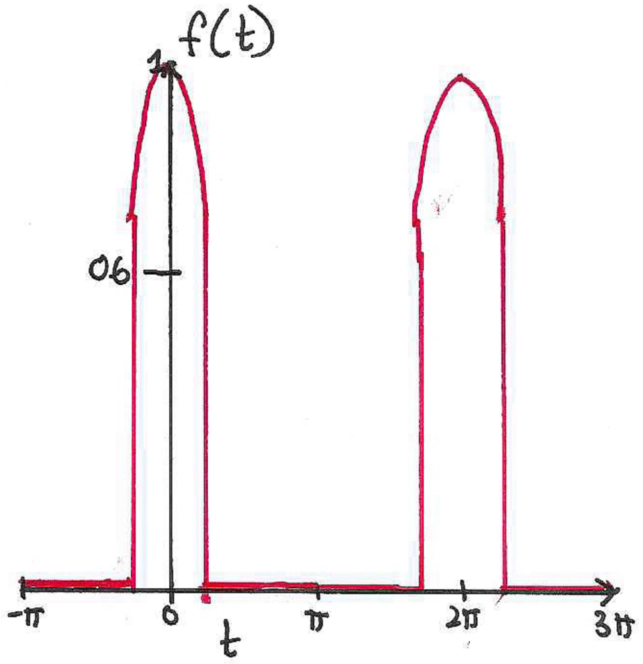
Men vi fandt i iv) at det har den ikke.

OPG 209

i) Skitsér den 2π-periodiske funktion

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{for } -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad , t \in]-\pi, \pi[$$

Sol



ii) Find Fourierkoefficienterne.

Sol

For det første er det en lige funktion: $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right)n + \sin\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)}{\pi(n^2-1)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right)}{\pi(n-1)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)}{\pi(n+1)} \quad , n \geq 2.$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

iii) Konvergerer Fourierrækken for alle $t \in \mathbb{R}$?

Sol

Ja, Fourierrækken konvergerer for alle $t \in \mathbb{R}$ fordi $f(t)$ er stykvis differentiabel.

$I_1 =]-\pi, -\frac{\pi}{4}[$, $I_2 =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ og $I_3 =]\frac{\pi}{4}, \pi[$.

$f_1(t) = 0 \Rightarrow f_1'(t) = 0$, $f_2(t) = \cos(t) \Rightarrow f_2'(t) = -\sin(t)$, $f_3(t) = 0 \Rightarrow f_3'(t) = 0$.

f_1, f_2, f_3 er alle kontinuerte på deres respektive lukkede intervaller.

Derfor er $f(t)$ stykvis differentiable og Fourierrækken konvergerer punktvist for alle $t \in \mathbb{R}$.

I punkterne $x = -\frac{\pi}{4}$ og $x = \frac{\pi}{4}$ er $f(t)$ diskontinuert, så Fourierrækken konvergerer ikke uniformt.

$x = \pm\frac{\pi}{4}$: Fourierrækken $= \dfrac{f(-\frac{\pi}{4}^{+}) + f(-\frac{\pi}{4}^{-})}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

For resten af punkterne på $]-\pi, \pi[$ konvergerer Fourierrækken mod $f(t)$.

iv) Kan tegnet "$\sim$" erstattes med "$=$" i $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \sim f(t)$?

Sol

Nej. Det kræver at Fourierrækken konvergerer uniformt.

V) Har Fourierrækken en konvergent majorantrække?

Sol

Nej. Hvis den havde ville den konvergere uniformt.