MATEMATIK 2 - OPVARMNING 1

1. Rødderne i $(x-1)(x^2-5x+6)$ er 1, 2 og 3, ved brug af nul-reglen.

2. Antag at $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er lineært uafhængige. Hvad betyder det?

sol

Det betyder at $c_1 f(t) + c_2 g(t) + c_3 h(t) = 0 \Leftrightarrow$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

a) kan vi have $f(x) = 2g(x) + 3h(x)$ for et $x \in \mathbb{R}$?

sol

Ja, fx hvis $f(x) = 5$, $2g(x) = 2e^{-x}$, $3h(x) = 3e^{-10x}$

Så gælder ved $x=0$ at

$$5 = 2e^0 + 3e^0 \Leftrightarrow$$

$$5 = 2+3 \quad \text{(sand)}$$

b) Kan vi have $f(x) = 2g(x) + 3h(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$?

sol

Nej. Så er funktionerne jo lineært afhængige.

3. Hvor mange lineært uafhængige løsninger har en homogen n'te ordens differentialligning?

<u>Sol</u>

Sætning 1.5 siger:

„Differentialligningen $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ har løsningen på formen

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

hvor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ er lineært <u>uafhængige</u>."

4. Betragt differentialligningen $y^{(n)} = 0$. opskriv n lineært uafhængige løsninger.

<u>Sol</u>

Kig på konkrete tilfælde først.

$n=1$: $\dot{y} = 0 \Leftrightarrow \int \dot{y}(t)\,dt = \int 0\,dt \Leftrightarrow y(t) = c_1$

$n=2$: $\ddot{y} = 0 \Leftrightarrow \iint \ddot{y}(t)\,dt\,dt = \iint 0\,dtdt \Leftrightarrow y(t) = c_1 t + c_2$

$n=3$: $\dddot{y} = 0 \Leftrightarrow \iiint \dddot{y}(t)\,dt\,dt\,dt = \iiint 0\,dt\,dt\,dt \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t + c_3$

Generelt: $y(t) = \frac{1}{n!}c_1 t^n + \frac{1}{(n-1)!}c_2 t^{n-1} + \ldots + \frac{1}{2}c_{n-2}t^2 + c_{n-1}t + c_n$

5. Kan $y^{(3)} + 2\ddot{y} + a\dot{y} + y = 0, \; a \in \mathbb{R}$ have udelukkende periodiske løsninger? ③

Sol

Nej. En differentialligning af ulige orden vil altid have én løsning af formen $y_k = c_k e^{\lambda t}$.

F.eks. hvis $a=2$ så er løsningen

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{-t}}_{\text{aperiodisk}} + e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_2 \cos(0.866\, t) + c_3 \sin(0.866\, t)\right)$$

6. Det oplyses at for $y^{(4)} + a_1 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_3 y^{(1)} + a_4 y = q(t)$ så er $x_1(t) = \cos(t)$, $x_2 = \sin(t)$, $x_3 = t\cos(t)$, $x_4 = t\sin(t)$ løsninger til det homogene system.

Hvad er den fuldstændige reelle homogene løsning?

Sol

$$y_{hom}(t) = (c_1 + c_2 t)\cos(t) + (c_3 + c_4 t)\sin(t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Det oplyses at $e^{\cos(t)}$ er en løsning til differentialligningen. Hvad er den fuldstændige løsning?

Sol

$$y_{inhom} = y_{hom} + y_0$$

$$y_{inhom} = (c_1 + c_2 t)\cos(t) + (c_3 + c_4 t)\sin(t) + e^{\cos(t)}$$