MATEMATIK 2 - OPVARMNING 2

Definer talfølgerne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ og $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ der begge er reelle. Afgør om følgende påstande er sande.

ØPG 1

Hvis x_n og y_n er konvergente så er

a) $x_n + y_n$ altid konvergent.

Sand. Fx $x_n \to 2$ for $n \to \infty$ og $y_n \to 3$ for $n \to \infty$. så vil $x_n + y_n \to 5$ for $n \to \infty$ og være konvergent.

b) $x_n y_n$ altid konvergent.

Sand. Samme årsag som før $x_n y_n \to 6$ for $n \to \infty$.

c) Hvis $x_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ så er $\frac{1}{x_n}$ altid konvergent!

Falsk: Fx er $x_n = \frac{1}{n}$ konvergent og forskellig fra 0.

Men $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1/n} = n \to \infty$ for $n \to \infty$ (divergent).

OPG 2

Hvis x_n er konvergent og y_n er divergent så er

d) $x_n + y_n$ altid divergent.

Sand: Fx $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ for $n \to \infty$ og $y_n = n \to \infty$ for $n \to \infty$.

$x_n + y_n \to \infty$ for $n \to \infty$.

e) $x_n y_n$ er altid divergent.

Falsk: $x_n = \frac{1}{n}$ er konvergent, $y_n = n$ er divergent.

$x_n y_n = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \to 1$ for $n \to \infty$ (konvergent.)

OPG 3

Hvis x_n og y_n er divergente så er

f) $x_n + y_n$ altid divergent.

Falsk: $x_n = \cos(n\pi) \to [-1,1]$ for $n \to \infty$ (divergent) og

$y_n = -\cos(n\pi) \to [-1,1]$ for $n \to \infty$ (divergent).

Men $x_n + y_n = 0 \to 0$ for $n \to \infty$ (konvergent).

g) $x_n y_n$ er altid divergent.

Falsk: $x_n = \cos(n\pi)$ og $y_n = \frac{1}{\cos(n\pi)}$ er divergente men

$x_n y_n = \frac{\cos(n\pi)}{\cos(n\pi)} = 1 \to 1$ for $n \to \infty$ (konvergent).