MATEMATIK 2 – OPVARMNING 10

a) Kan du give et eksempel på en funktion f, hvis Fourierrække konvergerer uniformt mod f?

sol

Ja, enhver kontinuert 2π-periodisk funktion vil have dette, fx $f(x) = \cos(x)$.

Uniform konvergens af Fourierrækken for f kræver:

- $f(t)$ er periodisk
- $f(t)$ er kontinuert

b) Kan du give et eksempel på en periodisk funktion hvis Fourierrække konvergerer, men ikke mod f?

sol

Ja, en 2π-periodisk funktion med diskontinuiteter.

Fx $f(t) = t$, $t \in [-\pi, \pi[$ som er 2π-periodisk.

I diskontinuiteten $t = \pi$ konvergerer Fourierrækken mod

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

For alle andre t konvergerer Fourierrækken mod $f(t)$.

Så Fourierrækken konvergerer punktvist.

b2) Kan du finde en periodisk funktion, f hvis Fourierrække konvergerer uniformt men ikke mod f? ②

Sol

Nej. Uniform konvergens af en række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ mod en funktion $f(x)$ kræver:

For ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $N_0 \in \mathbb{N}$ således

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in I \text{ og } N \geq N_0.$$

Hvis en række for $f(x)$ i et punkt konvergerer mod noget andet end $f(x)$ så gælder uligheden

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| \leq \varepsilon$$

ikke for ethvert $\varepsilon > 0$, for alle $x \in I$.

C) Hvis $n,m \in \mathbb{Z}$ og $n \neq m$ hvad giver $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx$?

Hvad hvis $n=m$?

sol

$$e^{inx} e^{-imx} = (\cos(nx) + i\sin(nx))(\cos(mx) - i\sin(mx))$$

$$= \cos(nx)\cos(mx) + \sin(nx)\sin(mx)$$
$$+ i(-\cos(nx)\sin(mx) + \sin(nx)\cos(mx))$$

Brug at $\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) = \sin(a-b)$

$$f(x) = \cos(nx)\cos(mx) + \sin(nx)\sin(mx) + i\sin(nx - mx)$$

Hvis $n=m$: $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) + i\sin(0) = 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\, dx = 1$$

Hvis $n \neq m$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(2\pi m - 2\pi n)}{m-n} + i\,\frac{\cos(2\pi m - 2\pi n) - 1}{m-n}\right)$$

Da $n,m \in \mathbb{Z}$ er $\sin(2\pi m - 2\pi n) = 0$ for alle $n,m \in \mathbb{Z}$.

Vi får endeligt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\cos(2\pi m - 2\pi n) - 1}{m-n}$$

Men $\cos(2\pi m - 2\pi n) = 1$ for alle $n,m \in \mathbb{Z}$. Så

$$\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} f(x)\, dx = 0 \quad \text{for } n \neq m \in \mathbb{Z}.$$

d) Lad $k \in \mathbb{N}$. Hvad er de komplekse Fourierrækker for $f(x) = \cos(kx)$ og $f(x) = \sin(kx)$?

Sol

De reelle Fourierkoefficienter er

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = 0 \\ &a_k = 1 \\ &a_n = 0 \quad \text{for } n \neq \pm k \\ &b_n = 0 \quad (\text{lige } f(x)) \end{aligned}\right\} f(x) = \cos(kx)$$

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = 0 \\ &a_n = 0 \quad (\text{ulige } f(x)) \\ &b_k = 1 \\ &b_n = 0 \quad \text{for } n \neq \pm k \end{aligned}\right\} f(x) = \sin(kx)$$

De komplekse Fourierkoefficienter:

$f(x) = \cos(kx)$

$c_0 = 0$, $\quad c_n = c_{-n} = 0$ for $n \neq k$ og $c_k = c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k \pm i b_k) = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2} e^{-ikx} + \frac{1}{2} e^{ikx} = \frac{1}{2}(2\cos(kx)) = \cos(kx)$$

$f(x) = \sin(kx)$

$c_0 = 0$, $\quad c_n = c_{-n} = 0$ for $n \neq k$ og $c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k) = -\frac{i}{2}$, $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k) = \frac{i}{2}$.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{i}{2} e^{-ikx} - \frac{i}{2} e^{ikx} = \frac{1}{2}(2\sin(kx)) = \sin(kx)$$

NB: koefficienter er udregnet med formlerne: (6.3), (6.4), (6.32)