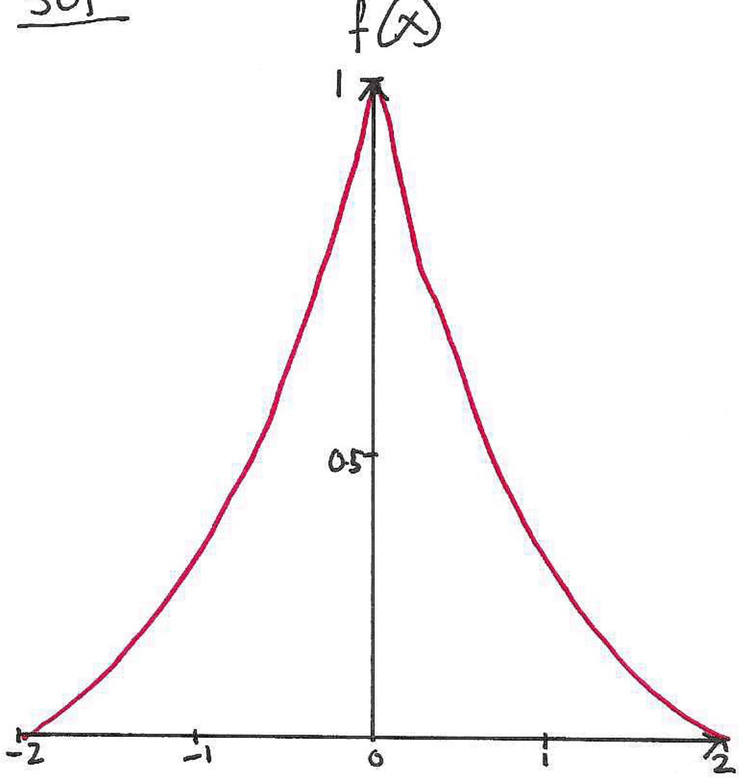
MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 13

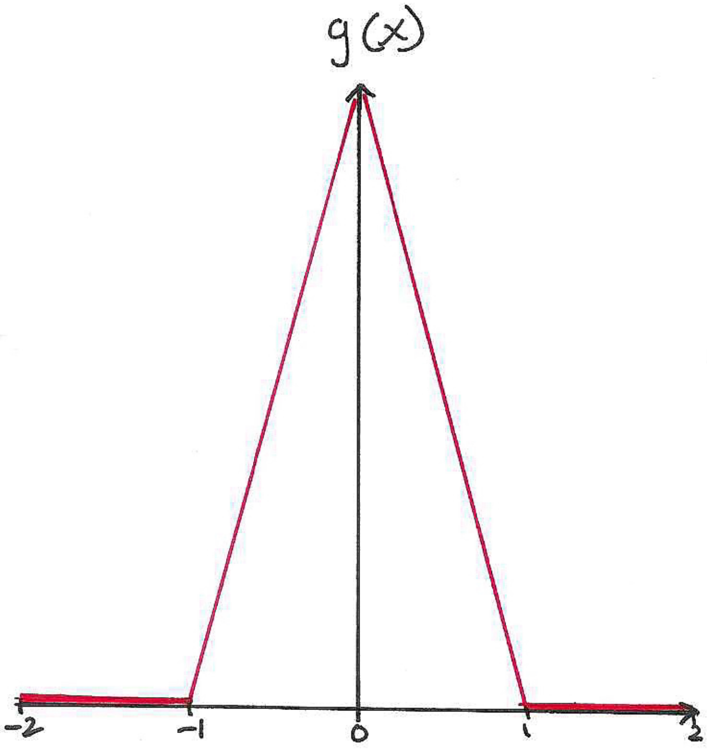
OPG A

Givet $f(x) = e^{-|x|}$ og $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -1 \\ 1+x & \text{for } x \in [-1,0[\\ 1-x & \text{for } x \in [0,1[\\ 0 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$.

Skitsér funktionerne, vis at de er L^1-funktioner og bestem deres Fouriertransformerede.

Sol





For at være L^1-funktioner skal de opfylde Dirichlet-betingelsen.

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = 2 < \infty \\ &\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx = 1 < \infty \end{aligned}\right\} \text{Begge } L^1\text{-funktioner}$$

$$\left.\begin{aligned} &F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x\omega}\, dx = \frac{2}{4\pi^2\omega^2 + 1} \\ &G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i x\omega}\, dx = \frac{1-\cos(2\pi\omega)}{2\pi^2\omega^2} = \frac{\sin^2(\pi\omega)}{\pi^2\omega^2} \end{aligned}\right\} \text{Maple-udregninger}$$

ii) Betragt differentialligningen $\ddot{y}(t) \cancel{+} y(t) = f(t)$. ②

Bestem den Fouriertransformerede af løsningen.

Sol

Først findes overføringsfunktionen for systemet.

$$\ddot{y}(t) - y(t) = f(t)$$

$$y(t)(s^2-1) = f(t)$$

$$H(s) = \frac{y(t)}{f(t)} = \frac{1}{s^2-1}$$

Der gælder at $Y(\omega) = H(s)\,F(\omega)$, hvor $s = 2\pi i\omega$.

$$Y(\omega) = \frac{-1}{4\pi^2\omega^2+1} \cdot \frac{2}{4\pi^2\omega^2+1}$$

$$= \frac{-2}{(4\pi^2\omega^2+1)^2}$$

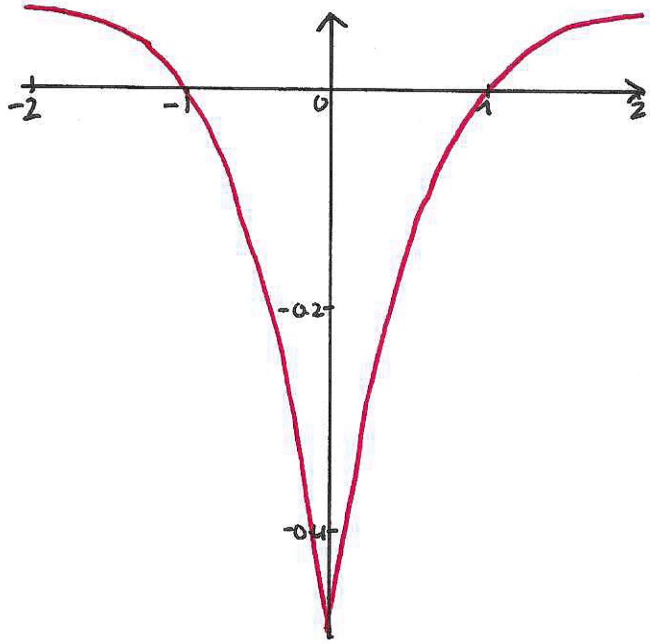
iii) Anvend den inverse Fouriertransformation til at at finde en løsning. Plot grafen på $[-2,2]$.

Sol

~~L~~Løsningen i tidsdomænet findes med den inverse transform.

$$\left.\begin{aligned} &\text{assume } (x>0): \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega = -\tfrac{1}{2} e^{-x}(x+1) \\ &\text{assume } (x<0): \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega = \tfrac{1}{2} e^{x}(x-1) \end{aligned}\right\} y(t) = \tfrac{1}{2} e^{-|x|}(|x|-1)$$

Plot af $y(t)$.



iv) Opskriv den fuldstandige løsning.

Sol

Vi har den inhomogene løsning: $y_0(t) = \frac{1}{2}e^{-|x|}(|x|-1)$.

Den homogene løsning: $\ddot{y}(t) - y(t) = 0 \Rightarrow y_{hom}(t) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

Den fuldstandige løsning:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-|x|}(|x|-1) + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

OPG B

Bestem den Fouriertransformerede af $f(x)=e^{-cx^2}$.

Hvilken værdi skal c have for at $F(\omega)=f(x)$?

Sol

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\omega}\,dx = e^{\frac{-\pi^2\omega^2}{c}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c}}$$

Hvis $f(x)=e^{-\pi x^2}$ og $F(\omega)=e^{-\frac{\pi^2\omega^2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$

↑

$C=\pi$, så

Så for $c=\pi$ haves $f(x)=F(x)=e^{-\pi x^2}$.