MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 4

OPG 148

Find en tilnærmet værdi for $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ med en fejl på højst 0.02. V.h.a. integralkriteriet.

Sol

Integralkriteriet lyder: "Antag at $f(x)$ er en ikke-negativ og aftagende funktion, og at det uegentlige integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent. Så er $s = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent.

$$s \approx s_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) \qquad \text{og} \qquad |s - s_N| \leq \int_N^{\infty} f(x)\,dx \text{''}$$

Hvis vi skal sikre at fejlen $|s - s_N| \leq 0.02$ så kan det sikres hvis

$$|s - s_N| \leq \int_N^{\infty} f(x)\,dx \leq 0.02 \iff$$

$$\int_N^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx \leq 0.02 \iff$$

$$\left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3}\right]_N^{\infty} \leq 0.02 \iff$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{N^3} \leq 0.02 \iff$$

$$\frac{1}{N^3} \leq 0.06 \iff$$

$$1 \leq 0.06 \cdot N^3 \iff$$

$$\frac{1}{0.06} \leq N^3 \iff \sqrt[3]{N^3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{0.06}} \implies N \geq 2.55 \implies N = 3$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{N=3} \frac{1}{n^4} = 1.0748$$

OPG 102

Afgør konvergensstatus for nedenstående rækker.

Sol

$$\text{i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n)+\cos(n)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$$

Uligheden kan opskrives fordi det største sin(n) og cos(n) kan være er 1.

~~Ækvivalenskriteriet~~ sammenlign siger absolut konvergent.

$$\text{ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\cdot\frac{2}{n+5} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2}{n+5} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{(1+5n^{-1})}$$

Alternerende række, tjek betinget og absolut konvergens.

Absolut konvergens: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{(1+5n^{-1})}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{(1+5n^{-1})}}_{a_n}$

kald $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n}\cdot\frac{2}{1+5n^{-1}} = \frac{2}{1+5n^{-1}} \to 2 \text{ for } n\to\infty.$$

Rækken er ikke absolut konvergent.

Betinget konvergens: • $a_n = \frac{1}{n}\frac{2}{(1+5n^{-1})}$ er positive.

• a_n aftager monotont.

• $a_n \to 0$ for $n\to\infty$

Rækken er betinget konvergent.

$$\text{iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{1}{n^2+7}$$

$$\lim_{n\to\infty}(-2)^n\cdot\frac{1}{n^2+7} = \infty$$

n'te-ledskriteriet siger divergent.

OPG 161

Bestem et $N \in \mathbb{N}$ således, at forskellen mellem $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ og $\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ høist er 0.01.

Sol

Det er en alternerende række.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| \leq b_{n+1}$$

Her er $b_n = \frac{1}{n}$ så $b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Uligheden er gyldig fordi:

- b_n er positive
- b_n aftager monotont
- $b_n \to 0$ for $n \to \infty$

Hvis $\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| \leq 0.01$ medføres hvis

$b_{n+1} \leq 0.01$.

$$b_{n+1} \leq 0.01$$

$$\frac{1}{n+1} \leq 0.01$$

$$1 \leq (0.01)(n+1)$$

$$100 \leq n+1$$

$$N \geq 99 \Rightarrow N = 99$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0.693 \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{99} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0.698$$

OPG 131

Find med Maple $\sum_{n=1}^{31642} \frac{1}{n^{11/10}}$.

Sol

Sum$\left(\frac{1}{n^{11/10}}, n=1..31642\right) \Rightarrow 7.036535692$

ii) Brug korollar 2 i "integral-kriteriet.pdf" til at bestemme en øvre og nedre grænse, for fejlen $S - \sum_{n=1}^{31642} \frac{1}{n^{11/10}}$.

Sol

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/10}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{11/10}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/10}} \approx \text{Fejlen}.$$

Korollar 2 (3):

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \le \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

Øvre grænse: $\int_{31642}^{\infty} \frac{1}{x^{11/10}}\,dx = 3.547918$

Nedre grænse: $\int_{31643}^{\infty} \frac{1}{x^{11/16}}\,dx = 3.547907$

iii) Bestem $N \in \mathbb{N}$ således at $\left| s - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{11/10}} \right| \leq 0.1$.

5

Sol

Hvis afsnitssummen s_N højst må afvige med 0.1 fra den sande sum s benyttes metode 1.

$$|s - s_N| \leq \int_N^\infty f(x)\,dx$$

$$\int_N^\infty \frac{1}{x^{11/10}}\,dx \leq 0.1$$

$$\frac{10}{N^{1/10}} \leq 0.1$$

$$10 \leq 0.1 \cdot N^{1/10}$$

$$100 \leq N^{1/10}$$

$$100^{10} \leq N$$

$$N \geq 10^{20} \Rightarrow N = 10^{20}$$

iv) Kan Maple beregne $\sum_{n=1}^{10^{20}} \frac{1}{n^{11/10}}$?

Sol

Nej.

Maple returnerer singularity error.

v) Redegør hvorfor antallet af led (N) ændres når

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{11/10}}$ udskiftes med $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1.01}}$ eller $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{5}}$. ⑥

sol

Antallet af led stiger jo langsommere talfølgen aftager.

$\frac{1}{n^{1.01}}$ aftager langsommere end $\frac{1}{n^{11/10}}$ $\rightarrow$ større N

$\frac{1}{n^{5}}$ aftager hurtigere end $\frac{1}{n^{11/10}}$ $\rightarrow$ Mindre N.

vi) Benyt metode 2 i "integral_kriteriet.pdf" til at bestemme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/10}}$ med en fejl på 0.1.

sol

Nu skal vi ikke finde en afsnitssum S_N, men i stedet

$$A_N = S_N + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Vi benytter uligheden $|S - A_N| \leq f(N+1)$ til at bestemme N.

$$f(N+1) \leq 0.1$$

$$\frac{1}{(N+1)^{11/10}} \leq 0.1$$

$$1 \leq 0.1 (N+1)^{11/10}$$

$$10 \leq (N+1)^{11/10}$$

$$10^{10/11} \leq N+1$$

$$N \geq 10^{10/11} - 1 = 7.1 \quad \Rightarrow N = 8$$

$$A_N = \sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n^{11/10}} + \int_{9}^{\infty} \frac{1}{x^{11/10}}\, dx = 10.538 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/10}} = 10.584 \quad \checkmark$$