MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 7

OPG A

i) Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\ddot{y} + x^2\dot{y} + xy = 0 \quad \text{og} \quad y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1.$$

Vis med 5.17 og 7.6 at

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n-1)n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

sol

Benyt sætning 5.17 og find at:

$$\ddot{y} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

$$x^2\dot{y} = x^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n+1}$$

$$xy = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

Ved indsættelse haves nu det ønskede

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

ii) Bring alle led på venstresiden på formen $\sum d_n x^n$ og 2

vis at (3) kan skrives som

$$2a_2 + (a_0 + 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_{n-1}\right)x^n = 0$$

<u>Sol</u>

(3) er jo $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$

Først, vil vi have alle eksponenter til n.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

Nu haves

$$2a_2 + (a_0 + 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}}_{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+1) x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}(n) x^n} = 0$$

Endeligt:

$$2a_2 + (a_0 + 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_{n+2}(n+2)(n+1) + n a_{n-1}\right)x^n = 0$$

iii) Vis med korollar 5.21 og begyndelsesbetingelserne at ③ løsningen kan skrives som $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{3k+1}$, hvor

$b_k = a_{3k+1}$, $b_0 = 1$, $b_k = -\frac{3k-1}{3k(3k+1)} b_{k-1}$ for alle $k \geq 1$.

Sol

Vi har jo $y(0)=0$ og $\dot{y}(0)=1$, og det betyder at

$a_0 = y(0) = 0$ og $\dot{y}(0) = a_1 = 1$.

Rækken var jo $2a_2 + (a_0+6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n+2}(n+2)(n+1) + na_{n-1})x^n = 0$

Korollar 5.21 kræver da at

$2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$

$a_0 + 6a_3 = 0 \Leftrightarrow a_3 = 0$

$(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_{n+2}(n+2)(n+1) = -na_{n-1}$

$a_{n+2} = -\frac{n}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}$

$a_4 = -\frac{2}{4\cdot 3} \cdot a_1 = -\frac{1}{6}$ $\quad (n=2)$

$a_5 = -\frac{3}{5\cdot 4} \cdot a_2 = 0$ $\quad (n=3)$

$a_6 = -\frac{4}{6\cdot 5} \cdot a_3 = 0$ $\quad (n=4)$

$a_7 = -\frac{5}{7\cdot 6} \cdot a_4 = \frac{5}{252}$ $\quad (n=5)$

$\vdots$

Kun koefficienterne $a_{3n+1} \neq 0$.

Kald $k = 3n+1$ og definér $b_k = a_{3n+1}$.

Det er da hensigtsmæssigt kun at kigge på koefficienterne a_{3n+1}.

Vi havde rekursionsformlen fra før:

$$a_{n+2} = -\frac{n}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}$$

For at gå fra a_{n+2} til a_{3n+1} ganger vi n med 3 ved alle optrædelser og trækker 1 fra.

$$a_{3n+1} = -\frac{3n-1}{(3n+1)3n} a_{3n-2}$$

Husk vi havde kaldt $b_k = a_{3n+1}$, så vi får nu

$$b_k = -\frac{3k-1}{3k(3k+1)} b_{k-1} \quad , \; b_0 = a_1 = 1 \qquad (b_{k-1} = a_{3(n-1)+1} = a_{3n-2})$$

Vi havde jo gættet på løsningen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, så i vores tilfælde fås

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{3k+1}$$

iv) Bestem konvergensradius for rækken.

Sol

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{3k+1} \quad , b_k = -\frac{3k-1}{3k(3k+1)} b_{k-1} \text{ for alle } k \geq 1.$$

Benyt kvotientkriteriet:

$$\left| \frac{b_{k+1} x^{3(k+1)+1}}{b_k x^{3k+1}} \right| = \left| -\frac{3(k+1)-1}{3(k+1)(3(k+1)+1)} \cdot \frac{b_{\cancel{k-1+1}}}{\cancel{b_k}} \cdot \frac{x^{3k+4}}{x^{3k+1}} \right|$$

$$= \left| -\frac{(3k+2)}{3(k+1)(3k+4)} x^3 \right| \longrightarrow 0 \text{ for } k \to \infty.$$

Konvergensradius er $\rho = \infty$.

v) Find Taylorpolynomiet $P_7(x)$ som approksimerer løsningen omkring $x=0$.

Sol

Det kræver kun 3 led.

$$P_7(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{3k+1} = b_0 x + b_1 x^4 + b_2 x^7$$
$$= x - \frac{1}{6} x^4 + \frac{5}{252} x^7$$

Vi har da brugt sætning 5.20 der siger at $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

for udviklingspunkt i $x=0$.

OPG 409 ⑥

Find en fundamentalmatrix hørende til

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 3\\ 9 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Sol

Vi finder egenværdierne og egenvektorerne med Maple

$$\lambda_1 = -4 \text{ og } \vec{V_1} = \begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 8 \text{ og } \vec{V_2} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

Løsningerne:

$$\vec{x_1} = c_1 e^{8t}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x_2} = c_2 e^{-4t}\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\text{Fundamentalmatrix: } \underline{\Phi} = \begin{bmatrix}e^{8t} & -1e^{-4t}\\ e^{8t} & 3e^{-4t}\end{bmatrix}$$

OPG 411

i) Find den fuldstændige komplekse løsning til systemet

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_3$$

$$\dot{x}_3 = -x_1$$

Sol

I matrixnotation $\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer og egenværdier for $\underline{A}$.

$\lambda_1 = i \;,\; \lambda_2 = -i \;,\; \lambda_3 = 0$

$$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} -i \\ -2+i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{V_2} = \begin{bmatrix} i \\ -2-i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{V_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den fuldstændige komplekse løsning:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{it} \cdot \begin{bmatrix} -i \\ -2+i \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-it} \cdot \begin{bmatrix} i \\ -2-i \\ 1 \end{bmatrix} \;,\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

ii) Find den fuldstændige reelle løsning.

Sol

Løsningen $c_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er allerede på reel form såfremt $c_1 \in \mathbb{R}$.

Det er nok at konvertere $c_2 e^{it} \cdot \begin{bmatrix} -i \\ -2+i \\ 1 \end{bmatrix}$ til reel form grundet lineær afhængighed.

$$e^{it}\cdot\begin{bmatrix}-i\\-2+i\\1\end{bmatrix}=(\cos(t)+i\sin(t))\begin{bmatrix}-i\\-2+i\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i\cos(t)+\sin(t)\\-2\cos(t)-2i\sin(t)+i\cos(t)-\sin(t)\\\cos(t)+i\sin(t)\end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}\sin(t)\\-2\cos(t)-\sin(t)\\\cos(t)\end{bmatrix}}_{Re}+i\underbrace{\begin{bmatrix}-\cos(t)\\\cos(t)-2\sin(t)\\\sin(t)\end{bmatrix}}_{Im}$$

Den fuldstændige reelle løsning:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\sin(t)\\-2\cos(t)-\sin(t)\\\cos(t)\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-\cos(t)\\\cos(t)-2\sin(t)\\\sin(t)\end{bmatrix},\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$$

OPG 414

i) Find egenværdier og egenvektorer for systemet nedenunder. Fører egenværdimetoden til den fuldstændige løsning?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Sol

Egenvektorerne findes med Maple.

$\lambda = -1$ (am $=2$)

$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Egenværdimetoden fører ikke til den fuldstændige løsning fordi am $\neq$ gm.

Men vi ved i det mindste at løsningen vil have formen

$\vec{x} = \vec{u}e^{-t} + \vec{v}te^{-t}$ (dobbeltrod), og at $\vec{x_1} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ii) Find en løsning af formen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{u}e^{-t} + \vec{v}te^{-t}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Sol

Vi gætter på at $\vec{x} = \vec{u}e^{-t} + \vec{v}te^{-t}$ er en løsning.

$\vec{\dot{x}} = -\vec{u}e^{-t} + \vec{v}e^{-t} + (-t\vec{v}e^{-t})$

Ved indsættelse i ligningen $\vec{\dot{x}} = \underline{A}\vec{x}$ fås så

$(-\vec{u}e^{-t} + \vec{v}e^{-t} - t\vec{v}e^{-t}) = e^{-t}(\underline{A}\vec{u} + t\underline{A}\vec{v}) \Leftrightarrow$

$-\vec{u} + \vec{v} - t\vec{v} = \underline{A}\vec{u} + t\underline{A}\vec{v}$

$-\vec{u} + \vec{v} - t\vec{v} = \underline{A}\vec{u} + t\underline{A}\vec{v}$

Koefficienterne på begge sider skal matche.

$-\vec{u} + \vec{v} = \underline{A}\vec{u}$ og $-t\vec{v} = t\underline{A}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = -\underline{A}\vec{v}$.

Vi ser at $\vec{v}$ er en egenvektor med egenværdien $\lambda = -1$.

Den egenvektor fandt vi jo med Maple: $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kig igen på $-\vec{u} + \vec{v} = \underline{A}\vec{u} \Leftrightarrow$

$\vec{v} = \underline{A}\vec{u} + \vec{u} \Leftrightarrow$

$\vec{v} = (\underline{A} + \underline{E})\vec{u}$, som ved indsættelse giver

$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \vec{u}$, hvoraf en løsning let aflæses: $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Så har vi fundet en løsning.

[redacted] $= e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{-t}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{x_2}$

iii) opskriv den fuldstændige løsning.

$$\vec{x} = c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2}$$

$$= c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

OPG B

i) Betragt differentialligningen $x^2\ddot{y} + x\dot{y} - \lambda y = x^2$.

Indsæt $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ at der gælder

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2-\lambda) a_n x^n + a_1(1-\lambda)x - \lambda a_0 = x^2$$

Sol

$$x^2\ddot{y} = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n$$

$$x\dot{y} = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$$

$$\lambda y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda x^n$$

Nu haves

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -a_n \lambda x^n = x^2$$

Vil gerne have samme summationsindeks

$$-a_0\lambda + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n-\lambda) x^n = x^2$$

$$-a_0\lambda + (1-\lambda)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n n(n-1) + a_n(n-\lambda)\right) x^n = x^2$$

$$-a_0\lambda + (1-\lambda)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n(n^2 - \cancel{n} + \cancel{n} - \lambda)\right) x^n = x^2$$

Vi får det vi ønsker:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2-\lambda) a_n x^n + a_1(1-\lambda)x - \lambda a_0 = x^2$$

ii) Antag at $\lambda \notin \{0, 1, 4, \ldots, k^2, \ldots\}$, $k \in \mathbb{N}$. Vis at der findes en entydig potensrækkeløsning. 12

Opskriv denne og bestem konvergensradius.

Sol

Ligningen: $\sum_{n=2}^{\infty} (n^2-\lambda) a_n x^n + a_1(1-\lambda)x + (-\lambda a_0) = x^2$

Ifølge identitetssætningen må der gælde:

$a_0 = 0$ (ingen konstant på HS)

$a_1 = 0$ (ingen x på HS)

$(2^2-\lambda)a_2 = 1$ (1 x^2 på HS)

$\Updownarrow$ $a_2 = \frac{1}{4-\lambda}$

$a_n = 0$ for $n > 2$.

Løsningen er da $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \underbrace{\frac{1}{4-\lambda}}_{a_n} x^2$

kvotientkriteriet:

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$ behøves ikke

Vi ved jo at løsningen er $y(x) = \frac{1}{4-\lambda} x^2$.

Dette er ikke en række og bliver derfor aldrig "divergent".

Så $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{4-\lambda} x^2 < \infty$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

$\rho = \infty$.

(Tror jeg).

iii) Hvad sker der for $\lambda \in \{1, 4, \dots, k^2\}$, $k \in \mathbb{N}$?

<u>sol</u>

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n^2-\lambda)x^n + a_1(1-\lambda) - \lambda a_0 = x^2$$

Hvis $\lambda = 1$ er a_1 arbitrær.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \frac{1}{4-\lambda} x^2$$ ($a_1(1-1)=0$ afslører intet om a_1)

Hvis $\lambda = k^2$, $k>1$ er a_k arbitrær ($k \neq 2$)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{4-\lambda} x^2 + a_k x^k$$ ($a_k(k^2-k^2)$ afslører intet om a_k)

Hvis $\lambda = 4$ er der ingen potensrækkeløsning.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n^2-4)x^n + a_1(1-4) - 4a_0 \neq x^2$$ for alle $n \in \mathbb{N}$.