MATEMATIK 2 – OPVARMNING 6

Kan du give eksempler på?

a) En uniform konvergent række $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, som ikke er punktvis konvergent?

Sol

Nej. Hvis rækken opfylder betingelserne for uniform konvergens opfylder den også betingelserne for punktvis konvergens.

b) En uniformt konvergent række $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ som har en konvergent majoranträkke?

Sol

Ja: Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ har den konvergente majorant-række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Altså $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ og rækken er da uniformt konvergent på $x \in \mathbb{R}$.

c) En række $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ af differentiable funktioner hvor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ er uniformt konvergent men $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ er divergent?

<u>sol</u>

<u>Ja.</u> Kald $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x+1}$, så er $f_n'(x) = -\dfrac{1}{(n+x+1)^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+x+1} = \infty \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R} \text{ (divergent)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+x+1)^2} = -0.644 \quad \text{for } x=1 \text{ og konvergent for alle}$$

$x \in \mathbb{R}$ (Maple).

d) En punktvis konvergent række $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I$, som ikke er uniform konvergent.

<u>sol</u>

Ja. Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in]-1,1[$ er punktvis konvergent på intervallet, men ikke uniform konvergent.

e) Betragt $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$, $x\in[0,1]$. Angiv rækkens sum. ③

<u>Sol</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^n-x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n - x\sum_{n=1}^{\infty}(-1x)^n$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{1+x}-1\right)-x\left(\frac{1}{1+x}-1\right) \quad \text{for } x\in[0,1[$$

$$f(x)=0 \quad \text{for } x=1.$$

Hvor vi har benyttet $\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}$, $|b|<1$

Vis at $f(x)$ er kontinuert.

<u>Sol</u>

Der er ingen diskontinuiteter, dvs. for ethvert $c\in[0,1]$ gælder $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$.

Dette gælder iøvrigt kun i $[0,1]$.

Så $f(x)$ er kontinuert på $[0,1]$.

Hvorfor har $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$, $x\in[0,1]$ ikke nogen konvergent majorantrække. ④

Sol

Vi skal finde k_n således at $\left|(-1)^n x^n(1-x)\right|\leq k_n$ for alle $x\in[0,1]$ og $n\in\mathbb{N}$.

$$\left|(-1)^n x^n(1-x)\right| = x^n(1-x) \quad \text{for } x\in[0,1]$$

Vi finder det værste tilfælde, dvs det x der gør $x^n(1-x)$ størst.

$$\frac{d}{dx}\left(x^n(1-x)\right)=0 \iff x=\frac{n}{n+1}$$

Så vi sætter $x=\frac{n}{n+1}$ og forsøger at finde k_n.

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\leq k_n \iff$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)\leq k_n$$

Bemærk: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\longrightarrow\frac{1}{e}$ for $n\to\infty$

Så k_n skal i hvert fald opfylde

$$\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)\leq k_n$$

Men $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n+1}\right)=\infty$ (divergent), så $\sum_{n=1}^{\infty}k_n$ kan ikke være konvergent. Der findes ingen <u>konvergent</u> majorantrække.