MATEMATIK 2 – OPVARMNING 9

a) Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og definér

$$f_+(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)), \quad f_-(t) = \frac{1}{2}(f_+(t) - f(-t))$$

Hvilken funktion er lige/ulige?

Sol

Per definition: $f_+(t)$ er lige og $f_-(t)$ er ulige.

b) Lad $f(x) = e^x$. Hvad er de tilsvarende $f_+(t)$ og $f_-(t)$?

Sol

$$f_+(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh(t) \quad \text{(cosinushyperbolicus)}$$

$$f_-(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh(t) \quad \text{(sinushyperbolicus)}$$

c) Lad f være en 2π-periodisk funktion med en konvergent Fourierrække $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

Hvad er Fourierrækkerne for f_+ og f_-?

Sol

$\cos(nt)$ er en lige funktion mens $\sin(nt)$ er ulige.

a_0 repræsenterer middelværdien af f, så a_0 er også lige.

$$f_+(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \quad \Big\} \text{ Lige Fourierrække}$$

$$f_-(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \quad \Big\} \text{ Ulige Fourierrække}$$

d) Hvad er Fourierrækken for $f(t) = 4 + 2\cos(3t) - 3\sin(2t)$

Sol

$f(t)$ er 2π-periodisk, så:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 8$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{4(n^2-18)\sin(n\pi)}{\pi n(n^2-9)} = \begin{cases} 2 & \text{for } n=3 \text{ (særtilfælde)} \\ 0 & \text{for resten} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = -\frac{12\sin(n\pi)}{\pi(n^2-4)} = \begin{cases} -3 & \text{for } n=2 \text{ (særtilfælde)} \\ 0 & \text{for resten} \end{cases}$$

Fourierrækken: $f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$

$$f(t) = 4 + 2\cos(3t) - 3\sin(2t)$$

Så $f(t)$ var faktisk i forvejen angivet som Fourierrække.

Bemærk: Særtilfældene $n=2$ og $n=3$ er de værdier for n hvor nævneren i hhv. b_n og a_n er 0.

Disse værdier af n skal derfor undersøges separat.

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(3t)\,dt = 2$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(2t)\,dt = -3.$$