MATEMATIK 2 - OPVARMNING 7

a) Hvad gælder om c_n og d_n såfremt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ for alle $x \in]-1,1[$. Hvad gælder

hvis $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ for $x=0$?

Sol

Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ for $x \in]-1,1[$ så gælder jo at

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots$$

Hvis ligningen skal være sand kræves

$$c_0 = 0, \quad c_1 = d_1, \quad c_2 = d_2, \quad \dots \quad c_n = d_n$$

Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ for $x=0$ kan man ikke

konkludere noget om hverken c_n eller d_n.

$$c_0 \cdot 0^0 + c_1 \cdot 0^1 + c_2 \cdot 0^2 + \dots = d_0 \cdot 0^0 + d_1 \cdot 0^1 + d_2 \cdot 0^2 + \dots$$

c_n og d_n er arbitrære.

b) Kan en løsning $\vec{x}$ til et lineært homogent differentialligningssystem $\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x}$ være nul til et tidspunkt ($\vec{x}(t_1) = \vec{0}$) og forskellig fra nul til $\vec{x}(t_2) \neq \vec{0}$ hvor $t_1 \neq t_2$.

<u>Sol</u>

Eksistens- og entydighedssætningen siger:

"For ethvert t_0 og enhver vektor $\vec{v}$ findes præcis én løsning til $\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x} + \vec{u}$ for hvilken der gælder

$$\vec{x}(t_0) = \vec{v}$$ "

$\vec{0}$ er en løsning til $\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x}$, og løsningen er $\vec{0}$ for alle $t_1 \in \mathbb{R}$.

Eksistens- og entydighedssætningen siger da at $\vec{x} = \vec{0}$ er den eneste løsning for hvilken der gælder

$$\vec{x}(t_1) = \vec{0}$$

Da der ikke eksisterer nogen <u>anden</u> løsning $\vec{x}$ som opfylder dette, så er der <u>ingen</u> løsninger for hvilken det gælder at $\vec{x}(t_1) = \vec{0}$ og $\vec{x}(t_2) \neq \vec{0}$.

c) Lad $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ være et sæt af løsninger til $\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x}$. Kan vi have at $(\vec{x}_1(t_1), \dots, \vec{x}_k(t_1))$ er lineært afhængige og at $(\vec{x}_1(t_2), \dots, \vec{x}_k(t_2))$ er lineært uafhængige for $t_1 \neq t_2$?

<u>sol</u>

Hvis sættet af løsninger skal være lineært afhængige til $t = t_1$ skal ligningen

$$c_1 \vec{x}_1(t_1) + \dots + c_k \vec{x}_k(t_1) = \vec{0}$$

have løsninger <u>udover</u> den trivielle $c_1 = \dots = c_k = 0$.

Men et sæt af løsninger der er lineært uafhængige til ét tidspunkt er også lineært uafhængige til alle andre tidspunkter $t \in \mathbb{R}$.

så svaret er: <u>Nej</u>.