MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 11

OPG A

i) Find overføringsfunktionen hørende til $\dot{y}(x) + y(x) = u(x)$ for $u(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$.

Sol

Hvis påvirkningen er en eksponentialfunktion så er svaret det også.

$$\frac{d\,(e^{st})}{dt} = se^{st}$$

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$y(t)(s+1) = u(t) \iff$$

$$H(s) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{1}{s+1}$$

ii) Find det stationære svar for $u(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ og opskriv den fuldstændige komplekse løsning.
Vis at den stationære løsning er den eneste som er periodisk.

Sol

Indsæt $s = in$ i overføringsfunktionen.

$$H(in) = \frac{1}{in+1} = \frac{1-in}{1+n^2}$$

Det stationære svar: $H(in) \cdot u(in) = \frac{1-in}{1+n^2} e^{inx}$

Den homogene løsning: $\dot{y}(x) + y(x) = 0 \Rightarrow y_{hom}(x) = c_1 e^{-x}$

Den fuldstændige komplekse løsning er

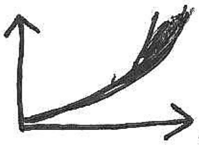
$$y(x) = \frac{1-in}{1+n^2} e^{inx} + c_1 e^{-x}$$

Det stationære svar er svaret til påvirkningen e^{inx}.

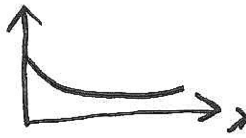
Det er det eneste svar som er periodisk.

Generel påvirkning: $e^{st} = e^{(\sigma + in)x} = e^{\sigma x} \cdot e^{inx}$

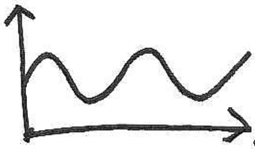
Hvis $\sigma > 0 \Rightarrow$ Ustabilt svar



Hvis $\sigma < 0 \Rightarrow$ Asymptotisk stabilt svar:



Hvis $\sigma = 0 \Rightarrow$ Marginalt stabilt svar:



iii) Definér afsnitssummen $u_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{1+n^2} e^{inx}$.

Brug dit svar i ii) til at skrive den stationære løsning y_N med $u(x) = u_N(x)$ som

$$y_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

Bestem hvert c_n. Vis at y_N er reel for alle $x \in \mathbb{R}$ dvs. $c_{-n} = \overline{c_n}$.

<u>sol</u>

Systemet er asymptotisk stabilt da alle rødder i det karakteristiske polynomium har negativ realdel

$H(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow s = -1$ er en rod i karakterisk polynomie.

Lemma 7.7 siger da, at enhver påvirkning på formen $S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ giver svaret $y_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n H(in) e^{int}$.

I vores tilfælde var $u_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{1+n^2} e^{int}$, og $H(in) = \frac{1-in}{1+n^2}$

$$y_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{1+n^2} \cdot \frac{1-in}{1+n^2} \cdot e^{int} \Leftrightarrow$$

$$y_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1-in}{(1+n^2)^2} e^{int}$$

$$c_n = \frac{1-in}{(1+n^2)^2}$$

$c_{-n} = \frac{1+in}{(1+n^2)^2} = \overline{c_n}$, så y_N er reel for alle x.

iv) Betragt nu Fourierrækken $y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Bestem de reelle Fourierkoefficienter.

Sol

$a_n = 2\text{Re}(c_n) = \frac{2}{(1+n^2)^2} \Rightarrow a_0 = 2$

$b_n = -2\text{Im}(c_n) = \frac{2n}{(1+n^2)^2}$

Reel Fourierrække: $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

$$y(x) = f \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(1+n^2)^2} \cos(nx) + \frac{2n}{(1+n^2)^2} \sin(nx)$$

v) Vis at $y(x)$ løser $\dot{y}(x) + y(x) = u(x)$ med

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} e^{inx}.$$

Hint: Brug sætning 5.35 til at vise at $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(1+n^2)^2}\cos(nx) + \frac{2n}{(1+n^2)^2}\sin(nx)$

Kan differentieres ledvist. Indsæt dernæst (5) i (I).

Sol

Sætning 5.35 siger at $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n'(x)$ hvis

1) $y_n(x)$ er veldefineret: $\frac{2}{(1+n^2)^2}\cos(nx) + \frac{2n}{(1+n^2)^2}\sin(nx)$ ✓

og kontinuerte

2) $y(x)$ er veldefineret.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} y_n'(x)$ har en konvergent majorantrække.

$$y_n'(x) = -\frac{2n\sin(nx)}{(1+n^2)^2} + \frac{2n^2\cos(nx)}{(1+n^2)^2}$$

$$\left|\frac{-2n\sin(nx) + 2n^2\cos(nx)}{(1+n^2)^2}\right| \leq \left|\frac{2n+2n^2}{(1+n^2)^2}\right| = \left|\frac{2n(n+1)}{(1+n^2)^2}\right| = \left|\frac{2n^2+2n}{n^4+2n^2+1}\right|$$

$$= \left|\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{2+\frac{2}{n}}{n^2+2+\frac{1}{n^2}}\right| = \left|\frac{2+\frac{2}{n}}{n^2+2+\frac{1}{n^2}}\right| \leq \frac{2}{n^2}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2n\sin(nx) + 2n^2\cos(nx)}{(1+n^2)^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ er en konvergent

majorantrække er $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2n\sin(nx) + 2n^2\cos(nx)}{(1+n^2)^2}$

Det er nemmere at beholde $y(x)$ på kompleks form:

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1-in}{(1+n^2)^2} e^{inx}$$

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in(1-in)}{(1+n^2)^2} e^{inx}$$

$$\dot{y}(x) + y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in(1-in)}{(1+n^2)^2} e^{inx} + \frac{1-in}{(1+n^2)^2} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{inx}$$

Husk at $u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} e^{inx}$

$$\dot{y}(x) + y(x) = u(x)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} e^{inx}$$

Ligningen er sand.

$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1-in}{(1+n^2)^2} e^{inx}$ er løsning til differentialligningen.

OPG 223

i) Vis at Fourierrækken for den 2π-periodiske funktion

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{for } -\pi \le t \le 0\\ 1 & \text{for } 0<t<\pi\end{cases} \quad \text{er givet ved } f \sim \frac{1}{2}-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n \text{ ulige}}}^{\infty} \frac{i}{n\pi} e^{int}.$$

Sol

Find Fourierkoefficienterne:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt=\frac{\sin(n\pi)}{n\pi}=0 \quad \text{for alle } n\neq 0 \in \mathbb{Z}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt=\frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi}=\begin{cases}\frac{2}{n\pi} & \text{for ulige } n\\ 0 & \text{for lige } n\end{cases}$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2i}{\pi n}=-\frac{i}{n\pi}$$

$$c_0=\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{2}$$

Fourierrækken: $f \sim \frac{1}{2}-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n \text{ ulige}}}^{\infty} \frac{i}{n\pi} e^{int}$

Generelt: $c_0+\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$

ii) Find ved hjælp af Parsevals sætning summen af ⑦

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

<u>Sol</u>

Parsevals sætning: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$

Lad os evaluere:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 = \frac{1}{4}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{for ulige } n \\ 0 & \text{for lige } n \end{cases} \Rightarrow b_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$$

Indsæt i Parsevals ligning:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \text{QED.}$$

iii) kan "$\sim$" erstattes med "$=$"?

Sol

Nej. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -\pi \le t \le 0 \\ 0 & \text{for } 0 < t < \pi \end{cases}$ er ikke kontinuert.

Derfor konvergerer Fourierrækken ikke uniformt mod $f(t)$, kun punktvist.

OPG 320

i) Bestem overføringsfunktionen for $y^{(4)}+6y^{(2)}+25y=\dot{u}+3u$.

Sol

Gæt på $u(t)=e^{st}$ og indsæt:

$$y(t)(s^4+6s^2+25)=u(t)(s+3) \Leftrightarrow$$

$$H(s)=\frac{y(t)}{u(t)}=\frac{s+3}{s^4+6s^2+25}$$

ii) Bestem svaret til påvirkningen $u(t)=e^{-t}$.

Sol

$s=-1$ når $u(t)=e^{st}=e^{-t}$.

Svaret er: $y(t)=H(s)u(t)=\frac{-1+3}{(-1)^4+6(-1)^2+25}e^{-t}=\frac{1}{16}e^{-t}$

iii) Bestem svaret på påvirkning $u(t)=e^{t}\cos(t)$.

Hint: $e^{t}\cos(t)=Re(e^{(1+i)t})$.

Sol

$s=1+i$ når $u(t)=Re(e^{(1+i)t})$: $H(1+i)=\frac{(1+i)+3}{(1+i)^4+6(1+i)^2+25(1+i)}=\frac{32}{195}-i\frac{3}{65}$

$$y(t)=H(1+i)u(t)=Re\left\{\left(\frac{32}{195}-i\frac{3}{65}\right)e^{(1+i)t}\right\}$$

$$=e^{t}\cdot Re\left\{\frac{32}{195}\cos(t)+\frac{32}{195}\sin(t)-i\frac{3}{65}\cos(t)-i^2\cdot\frac{3}{65}\sin(t)\right\}$$

$$=\left(\frac{32}{195}\cos(t)+\frac{3}{65}\sin(t)\right)e^{t}$$

OPG 325

Find samtlige reelle løsninger til $x^{(6)} - x = e^t \cos(t)$.

Hint: $e^t \cos(t) = Re(e^{(1+i)t})$

Sol

Først findes overføringsfunktionen:

$$x^{(6)} - x = u(t) \Leftrightarrow$$

$$x(t)(s^6 - 1) = u(t) \Leftrightarrow$$

$$H(s) = \frac{1}{s^6 - 1}$$

$s = 1+i$ når $u(t) = e^t \cos(t)$: $H(1+i) = \frac{1}{(1+i)^6 - 1}$

Svaret til påvirkningen:

$$x_0(t) = H(1+i)u(t) = Re\left\{\frac{1}{(1+i)^6-1} e^{(1+i)t}\right\} = -e^t\left(\frac{1}{65}\cos t + \frac{8}{65}\sin t\right)$$

Systemet har disse rødder i det karakteristiske polynomie

$$s^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow s = 1,\ s = -1,\ s = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},\ s = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De medfører løsningerne:

$$x_{hom}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t} + c_5 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_6 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Samtlige reelle løsninger er da: $x(t) = x_0(t) + x_{hom}(t)$.