MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 8

OPG 507

i) Bestem de værdier af a der gør systemet ~~ustabilt~~ asymptotisk stabilt.

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ a & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Sol

Find egenværdierne:

$$\det\begin{bmatrix} a-\lambda & 2 \\ a & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda(-a-1) - a$$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + \quad a_2$$

Korollar 2.40 siger at systemet er asymptotisk stabilt hvis $a_1 > 0$ og $a_2 > 0$.

$$-a > 0 \Rightarrow a < 0$$

$$-a-1 > 0 \Rightarrow a < -1$$

Systemet er asymptotisk stabilt for $a < -1$.

ii) Undersøg for $a = -1$.

Sol

Karakterligningen: $\lambda^2 + \lambda(-(-1)-1) - (-1) = 0$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \pm i$$

Løsningen har formen: $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$

Løsningen (systemet) er marginalt stabilt (stabilt).

$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$

iii) Undersøg for $a \geq 0$.

Sol

Tjek $a=0$: $\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1$

Løsningen: $x(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{t} = c_1 + c_2 e^{t} \longrightarrow \infty$ for $t \to \infty$

ustabil.

OPG 409

Find den fuldstændige reelle løsning til $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

sol

Det er en inhomogen ligning: $\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x} + \vec{u}$

Egenværdier og egenvektorer for $\underline{A}$.

$\lambda_1 = -4 \,,\; \vec{v_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 8 \,,\; \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Homogen løsning: $\vec{x}_{hom} = c_1 e^{-4t} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{8t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi finder en partikulær løsning ved at gætte at $\vec{x} = e^{4t}\vec{b}$ er en løsning.

$\dot{\vec{x}} = 4e^{4t}\vec{b}$, som ved indsættelse giver

$$4e^{4t}\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} e^{4t}\vec{b} + e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Med $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ fås ligningen

$$\begin{bmatrix} 4e^{4t} \cdot b_1 \\ 4e^{4t} \cdot b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{4t} b_1 \\ e^{4t} b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ -5e^{4t} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4e^{4t} \cdot b_1 \\ 4e^{4t} \cdot b_2 \end{bmatrix} = e^{4t} \cdot \begin{bmatrix} 5b_1 + 3b_2 + 3 \\ 9b_1 - b_2 - 5 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 4b_1 = 5b_1 + 3b_2 + 3 \\ 4b_2 = 9b_1 - b_2 - 5 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} b_1 = 0 \\ b_2 = -1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \vec{x}_{par} = e^{4t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Fuldstændige løsning: $\vec{x} = e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_1 e^{-4t} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{8t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

OPG 422

Undersøg stabiliteten af systemerne:

i) $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}$

Sol

Egenværdierne er: $\lambda_1 = 4.321$ og $\lambda_2 = -5.321$

systemet er ustabilt fordi bare én af egenværdier opfylder $Re(\lambda) > 0$.

ii) $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$

Sol

Egenværdierne: $\lambda_1 = -0.26$ og $\lambda_{2,3} = -0.36 \pm i\ 1.91$.

Asymptotisk stabilt fordi alle egenværdier opfylder $Re(\lambda) < 0$.

iii) $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$

Sol

Egenværdier: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -1$

Marginalt stabilt fordi bare én egenværdi opfylder

$Re(\lambda) = 0$.

Bemærk

Ustabilitet "overpowers" asymptotisk og marginal stabilitet.