MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 2

OPG 1

Undersøg om talfølgerne er konvergente eller divergente.

i) $x_n = \frac{n^2+1}{n}, \, n \in \mathbb{N}$

Sol

$$x_n = \frac{n^2+1}{n} = \frac{\cancel{n}(n+\frac{1}{n})}{\cancel{n}} = n + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n + \frac{1}{n} = \infty \quad \approx \underline{\text{Divergent}}.$$

ii) $x_n = \frac{1}{\ln(n)+1}, \, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)+1} = 0 \quad \approx \underline{\text{konvergent}}$$

iii)

$$x_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n^2)} = \log_{n^2}(n) = \frac{1}{2} \quad \approx \underline{\text{konvergent}}$$

iv) $x_n = \frac{3n^4 + 45n^2 + 217n - 1015}{4n^4 + 300000n + 5}, \, n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \frac{\cancel{n^4}(3 + 45n^{-2} + 217n^{-3} - 1015n^{-4})}{\cancel{n^4}(4 + 300000n^{-3} + 5n^{-4})}$$

$$x_n = \frac{3 + 45n^{-2} + 217n^{-3} - 1015n^{-4}}{4 + 300000n^{-3} + 5n^{-4}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{4} \quad \approx \underline{\text{konvergent}}$$

OPG 2

Undersøg om de uegentlige integraler er konvergente.

Sol

i) $\int_1^{\infty} x^2 \, dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^t = \infty$ ≈ Divergent

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}x^3 = \infty$

ii) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \, dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_1^t = 0 - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}$ ≈ Konvergent

iii) $\int_0^{\infty} \sin(x) \, dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\cos(x)\right]_0^{\infty}$ ≈ Divergent

$\lim_{x\to\infty} -\cos(x) \in [-1, 1]$ (et interval, ikke et tal).

<u>OPG 3</u>

Lad b være en konstant og definér en talfølge

$$a_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n \ , n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

i) Vis at $(1-b)a_n = 1 - b^{n+1}$ og brug det til at skrive en formel for a_n når $b_n \neq 1$.

<u>sol</u>

Gang (1) med b.

$$ba_n = b + b^2 + \dots + b^{n+1} \quad (2).$$

Træk: (2) fra (1).

$$a_n - ba_n = (1 + b + b^2 + \dots + b^n) - (b + b^2 + \dots + b^{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$a_n(1-b) = 1 + b^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$a_n = \frac{1 + b^{n+1}}{1-b} \ , \ b \neq 1$$

ii) Vis at a_n er konvergent for $|b| < 1$ og bestem grænseværdien.

<u>sol</u>

Hvis $|b| < 1$ så vides

$$\lim_{n \to \infty} 1 + b^{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 - b = 1 - b$$

Derfor:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{1-b} \quad \text{når } |b| < 1.$$

iii) Vis at a_n er divergent for $|b| \geq 1$.

Sol

Hvis $|b| \geq 1$ er der 2 tilfælde:

$|b| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+b^{n+1}}{1-b} = \infty \approx \underline{\text{Divergent}}$$

$b = 1$

$$a_n = 1 + 1 + 1^2 + \ldots 1^n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \approx \underline{\text{Divergent}}$$

$b = -1$

$$a_n = 1 - 1 + 1^2 + \ldots + 1^n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \approx \underline{\text{Divergent}}$$

For konvergens kræves $|b| < 1$.

@ En godhjertet DTU-studerende