MATEMATIK 2 - OPVARMNING 8

a) Hvordan vil du definere begreberne stabilitet og asymptotisk stabilitet for en n'te ordens differentialligning.

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$?

Sol

Et system af n'te orden vil have n rødder i dets karakteristiske polynomium $P(\lambda)$.

- Et system er ustabilt hvis bare én rod λ har Positiv realdel: $Re(\lambda) > 0$ $\Rightarrow$ ustabilitet.

- Et system uden rødder med $Re(\lambda) > 0$ men med bare én rod $Re(\lambda) = 0$ så er systemet marginalt stabilt.

- Et system med alle rødders realdel mindre end 0 er asymptotisk stabilt: $Re(\lambda) < 0$ for alle rødder

  $\Rightarrow$ Asymptotisk stabilitet.

OPG B

Afgør stabiliteten af følgende:

i) Et 4. ordens system med løsninger: $x_1(t)=e^t$, $x_2(t)=e^{-t}$

$x_3(t)=\cos(t)$, $x_4(t)=\sin(t)$

Sol

systemet er ustabilt da $x_1(t)=e^t \to \infty$ for $t\to\infty$.

Det karakteristiske polynomium har i øvrigt rødderne

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=i$, $\lambda_4=-i$.

ii) Et system med $P(\lambda)=(\lambda+2+i)(\lambda+2-i)(\lambda+3)$

Sol

Rødderne: $\lambda_1=-2+i$, $\lambda_2=-2-i$, $\lambda_3=-3$

systemet er asymptotisk stabilt da $Re(\lambda)<0$ for alle λ.

iii) Differentialligningen $\ddot{x}(t)+x(t)=0$

Sol

Karakterligningen: $\lambda^2+1=0 \iff \lambda=\pm i$

Systemet er marginalt stabilt.

iv) Et 4. ordens system med løsninger: $x_1(t)=e^{-t}\sin(2t)$,

$x_2(t)=e^{-3t}$, $x_3(t)=e^{-t}\cos(2t)$

Sol

Rødderne er: $\lambda_1=-1-2i$, $\lambda_2=-1+2i$, $\lambda_3=-3$, $\lambda_4=?$

Stabiliteten kan ikke afgøres da den sidste rod ikke kendes.

OPG C

Hvad kan siges om stabilitet for følgende tilfælde:

i) $x(t) = e^{-t}$ er en løsning.

Sol

$x(t) \to 0$ for $t \to \infty$ asymptotisk stabilt

ii) $x(t) = e^{t}$ er en løsning.

Sol

$x(t) \to \infty$ for $t \to \infty$ ustabil

iii) $x(t) = t$ er en løsning.

Sol

$x(t) \to \infty$ for $t \to \infty$ ustabil.