MATEMATIK 2 - UGESEDDEL 6

OPG 114

Hvilke af nedenstående rækker har en (konvergent) majorantrække?

i) $1 + x + x^2 + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$.

Sol

Definition 5.31: "Lad funktionerne f_n være definerede på et interval I og betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in I \qquad (1)$$

En række $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ med konstante og positive led k_n er en majorantrække for rækken i (1) på intervallet I hvis der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder at

$$|f_n(x)| \leq k_n \quad \text{for alle } x \in I.$$

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ er konvergent siges den at være en konvergent majorantrække for (1)."

Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$ har ingen majorantrække fordi vi altid kan vælge et x der gør $|f_n(x)| \nleq k_n \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Fx hvis $k_n = 10^n$ kan vi bare vælge $x = 1000$.

$$|f_n(1000)| \nleq k_n$$

$$|1000^n| \nleq 10^n$$

ii) $1 + x^2 + \dots, \ |x| < 1$

sol

Rækken er defineret på et <u>åbent</u> interval. $f_n(x) = x^n, |x|<1$.
Det største tal som $|f_n(x)|$ kan komme tættest på er 1^n.

$$|x^n| \leq 1^n \ , \text{ for alle } |x|<1$$

1^n må da være den mindste majorantrække for $x^n, |x|<1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n \longrightarrow \infty \approx \underline{\text{Divergent}}$$

iii) $1 + x + x^2 + \dots, \ |x| < 0.99$.

sol

Vi bruger samme argument som før og prøver at finde et værste tilfælde. $f_n(x) = x^n, \ |x| < 0.99$.

$$|x^n| \leq 0.99^n \ \text{ for alle } |x| < 0.99$$

0.99^n må være den mindste majorantrække for $x^n, |x|<0.99$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0.99^n = 99 \approx \underline{\text{konvergent.}}$$

0.99^n er en konvergent majorantrække for $x^n, |x|<0.99$.

iv) $\dfrac{\sin(x)}{1} + \dfrac{\sin(3x)}{3} + \dfrac{\sin(5x)}{5} + \dots, \ x \in \mathbb{R}$

sol

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \sum_{n \text{ ulige}}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

$$\max(\sin(nx)) = 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n \text{ ulige}}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ er majorant-}$$

række, men den er <u>divergent.</u>

v) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1^2} + \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} + \dots, \ x\ \mathbb{R}$ ③

Sol

$\max(\sin(nx)) = 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = \sum_{n \text{ ulige}}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n \text{ ulige}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er en konvergent majorantrække for $\sum_{n \cdot \text{ulige}}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

Derfor konvergerer rækken uniformt og sumfunktionen $f(x)$ er kontinuert. (sætning 5.33), fordi $f_n(x)$ er kontinuerte.

Bemærk i øvrigt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

vi) Hvilken sammenhæng er der mellem $f(x)$ og $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^3}$?

Sol

g er f(x)'s stamfunktion.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^3}$$

Fordi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergerer uniformt kan man integrere ledvist (sætning 5.34).

OPG 149

i) Vis at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$ er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$.

Sol

Det største $|\cos(2^n x)|$ kan blive er 1.

Der er altså et "værste tilfælde".

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{3^n} \cdot \cos(2^n x) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bemærk vi kan konkludere at $\left| \frac{1}{3^n} \cos(2^n x) \right| \leq \frac{1}{n^2+1}$ for alle $x \in$ fordi $\max\left(\frac{1}{3^n} \cos(2^n x)\right) = \frac{1}{3^n}$.

ii) Vis at funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$ er kontinuert.

Sol

- $f_n(x) = \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$ er kontinuert på $x \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$ har en konvergent majorantrække, nemlig $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Derfor konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$ uniformt og sumfunktionen $f(x)$ er kontinuert. (sætning 5.33).

iii) Vis at $f(x)$ er differentiabel.

Sol

Benyt sætning 5.35.

- $f_n(x) = \frac{1}{3^n}\cos(2^n x)$ er differentiabel med kontinuerte afledede.

  $f_n'(x) = -\frac{2^n}{3^n}\sin(2^n x)$.

- $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er veldefineret på $x \in \mathbb{R}$ fordi sumfunktionen $f(x)$ er kontinuert.

- Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2^n}{3^n}\sin(2^n x)$ har en konvergent majorantrække, nemlig $\left|-\frac{2^n}{3^n}\sin(2^n x)\right| \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ fordi $\max(\sin(2^n x)) = 1$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \approx$ Konvergent.

Funktionen $f(x)$ er da differentiabel på $x \in \mathbb{R}$ og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

iv) Find $f'(0)$.

Sol

$f_n'(x) = -\frac{2^n}{3^n}\sin(2^n x)$

$f'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2^n}{3^n}\cdot\sin(0) = 0 \qquad (\sin(0) = 0)$.

V) Sammenlign med eksempel 5.26.

Sol

I eksempel 5.26 påstås at $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$ er kontinuert, men ikke differentiabel i noget punkt!

Dette må skyldes at $f_n'(x) = -\frac{3^n}{2^n} \sin(3^n x)$ ikke har en konvergent majorantrække.

Derfor er $f(x)$ heller ikke differentiabel (sætning 5.33).

(Tror jeg).

OPG 151 ⑦

i) Vis at rækkenfremstillingen for $\ln(1+x)$ ikke har en konvergent majorantrække for $x \in]-1,1]$.

Sol

Det viser sig at $\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, $|x|<1$.

Vi er kun interesseret i rækken, hvor $x \in]-1,1]$.

Værste tilfælde $x=1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Den mindste majorantrække må være: $\frac{1}{n+1}$

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Men $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ er divergent.

Og da $\frac{1}{n+1}$ er den mindste majorantrække så har $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, $x \in]-1,1]$ ingen konvergent majorantrække.

ii) Gør rede for at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$, $x \in]-1,1[$ er kontinuert og differentiabel. 8

<u>Sol</u>

Benyt sætning 5.33.

1) $f_n(x) = \frac{1}{n^2} x^n$ er kontinuert.

2) Rækken har en konvergent majorantrække

$$\left| \frac{1}{n^2} x^n \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ for alle } |x| < 1.$$

Rækkens sumfunktion $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$, $x \in]-1,1[$ er da kontinuert.

Differentiabilitet kræver nu blot

3) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ har en konvergent majorantrække.

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} x^n \Rightarrow f_n'(x) = \frac{x^n}{nx} = \frac{x^{n-1}}{n}$$

Vi ved at $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ for $x \in]-1,1[$.

Så der er da en konvergent majorantrække

$$\left| \frac{x^{n-1}}{n} \right| \leq x^{n-1} \text{ for alle } x \in]-1,1[.$$

bel

Så $f(x)$ er differentia~~bilitet~~.

iii) Find en funktionforskrift for $f'(x)$.

Sol

Vi har $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

og vi skal finde $f'(x)$.

Vi husker

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , \quad |x|<1$$

Vi integrerer begge sider

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int x^{n-1} dx = \int \frac{1}{1-x}\, dx \iff$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Husk at $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{n}$, så hvis vi ganger med $\frac{1}{x}$ på begge sider:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

Endeligt haves

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

OPG 508

i) Undersøg om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ er konvergent.

Hint: $\tan(x) > x$ for $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Sol

Det er en alternerende række.

Tjek først absolut konvergens:

Det er indlysende at $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2}$ for $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Fra hintet vides da at

$$\left| (-1)^{n-1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| = \left| \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ er divergent siger sammenligningskriteriet

at $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ <u>ikke</u> er absolut konvergent.

Men $a_n = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

- a_n er positiv
- a_n aftager monotont $(a_1 > a_2 > a_3 \ldots)$
- $a_n \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.

Rækken er betinget konvergent.

ii) Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$ er uniform konvergent på $x \in [-1,1]$.

Hint: $|\sin(x)| \leq |x|$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Sol

For at vise uniform er det nok at finde en konvergent majorantrække.

Med hintet haves

$$\left|\sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \left|\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ for } x \in [-1,1].$$

Vi har nu denne ulighed

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ for } x \in [-1,1]$$

Gang med $\frac{1}{n}$ på begge sider:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n} \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \qquad \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Vi har fundet en majorantrække, men er den konvergent?

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx = 2$$

Integralkriteriet siger ja.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$ er uniform konvergent på $x \in [-1,1]$ ifølge sætning 5.31.