MATEMATIK 2 – OPVARMNING 12

a) Betragt systemet $\dot{x} = \lambda x + u_n(t)$ med $u_n(t) = e^{int}$.
Hvad skal der gælde om egenværdien $\lambda \in \mathbb{C}$ for at der findes en løsning af formen $x = H(in)e^{int}$?

Sol

Hvis $x(t) = H(in)e^{int}$ er en løsning, så får man ved indsættelse i differentialligningen

$$in \cdot H(in)e^{int} = \lambda(H(in)e^{int}) + e^{int} \iff$$

$$in \cdot H(in) = \lambda H(in) + 1 \iff$$

$$H(in)(in - \lambda) = 1$$

Hvorfra vi ser at $\lambda \neq in$ hvis der skal være en løsning på formen $x(t) = H(in)e^{int}$.
Med andre ord: $s = in$ må ikke være en rod i det karakteristiske polynomium.

b) Hvilke betingelser skal egenværdierne for $\underline{A}$ opfylde, for at Fourierrækkemetoden kan anvendes på ethvert system $\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}\vec{x}(t) + \vec{b}u(t)$ som ikke er asymptotisk stabilt og hvor $u(t)$ er 2π periodisk, stykvis differentiabel og kontinuert? (2)

Sol

sætning 2.21 siger: sættes $u(t) = e^{st}$ hvor s ikke er rod i det karakteristiske polynomium for $\underline{A}$ er løsningen af formen $x(t) = H(s)e^{st}$.

I Fourierrækkemetoden har løsningen formen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}$$

Da Fourierrækkemetoden udspringer fra sætning 2.21, blot hvor $s = in$, fristes man til at sige, at Fourierrækkemetoden for et ikke asymptotisk stabilt system kræver, at in ikke er en rod i det karakteristiske polynomium for $\underline{A}$.

Altså skal systemet enten være asymptotisk stabilt eller ustabilt for at Fourierrækkemetoden skal kunne anvendes.