MATEMATIK 2 − UGESEDDEL 3

OPG 122

Undersøg om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent når det vides at den N'te afsnitssum er $S_N = \frac{N+1}{\ln(N)+2}$.

Sol

Den N'te afsnitssum er en divergent talfølge.

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{\ln(N)+2} = \infty$$

fordi tælleren vokser hurtigere end nævneren.

N'te-ledskriteriet: Da $a_n \not\to 0$ for $n \to \infty$ så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent.

OPG A

Afgør konvergens af følgende rækker.

Sol

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}+3}{n^{12}+2\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n^{10}}(1+3n^{-10})}{\cancel{n^{10}}(n^{2}+2\ln(n)n^{-10})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3n^{-10}}{n^{2}+2\ln(n)n^{-10}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}+2\ln(n)n^{-10}} + \frac{3n^{-10}}{n^{2}+2\ln(n)n^{-10}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2}$$

Vi ved at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n^2}$ er konvergent uanset k.

Sammenligningskriteriet siger da: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}+3}{n^{12}+2\ln(n)}$ er konvergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+n} \leq \sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$

n	$\frac{1}{5^n+n}$	$\frac{1}{n^2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{1}$
2	$\frac{1}{25+2}$	$\frac{1}{4}$

$\longrightarrow$ Sammenligningskriteriet siger konvergent.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{-n}+n}$, $a_n = \frac{1}{5^{-n}+n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{1}{5^{-n+1}+(n+1)} \cdot \frac{5^{-n}+n}{1}\right| \longrightarrow 1 \text{ for } n \to \infty$$

Kvotientkriteriet fortæller intet.

Kald $b_n = \frac{1}{n}$ og brug ækvivalenskriteriet.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{5^{-n}+n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(5^{-n}n^{-1}+1)} = \frac{1}{5^{-n}\cdot n^{-1}+1} \to 1 \text{ for } n \to \infty$$

Ækvivalenskriteriet siger ! Divergent

OPG 103

Undersøg konvergensstatus for nedenstående rækker.

Sol

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+2}$

Bruger n'te-ledskriteriet: $\frac{n+3}{n+2} = \frac{n(1+3n^{-1})}{n(1+2n^{-1})} = \frac{1+3n^{-1}}{1+2^{n-1}} \to 1$ for $n \to \infty$

$a_n \not\to 0$ for $n \to \infty$. Summen er divergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Det er en kvotientrække med $b = \frac{1}{5}$.

For en sum startende i $n=0$: $\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}$, $|b| < 1$

For en sum startende i $n=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b} - 1$, $|b| < 1$

Så: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 = \frac{1}{\frac{4}{5}} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

Konvergent.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(2+4n^{-1})}$

Brug ækvivalenskriteret: $b_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{(2+4n^{-1})} = \frac{1}{(2+4n^{-1})} \longrightarrow \frac{1}{2}$ for $n \longrightarrow \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent, så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+2)}$ er også divergent.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 1+(-1)^n$

$\lim_{n\to\infty} 1+(-1)^n = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$ n'te-ledskriteriet siger <u>divergent</u>.
$(a_n \not\to 0)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{5}-1)^n$

$\sqrt{5}-1$ er altid større end 1.

$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{5}-1)^n = \infty$ n'te-ledskriteriet siger <u>divergent</u>.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Sammenligningskriteriet siger konvergent.

For at finde summen benyttes partialbrøkopslittelse.

Convert$\left(\frac{1}{(n+3)(n+4)}, \text{parfrac}\right) \Rightarrow \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}$

Den N'te afsnitssum må være:

$S_N = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right) + \ldots$

$= \frac{1}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{4}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ kvotientrække med $b=\frac{1}{e}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = 1.5819$

Konvergent

OPG 150

Afgør om rækkerne er konvergente.

Sol

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Sammenligningskriteriet siger konvergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sin(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+n^{-1}\sin(n))}$

Kald $b_n = \frac{1}{n}$ og anvend ækvivalenskriteriet.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1+n^{-1}\sin(n)} = \frac{1}{1+n^{-1}\sin(n)} \longrightarrow 1 \text{ for } n \to \infty$$

Ækvivalenskriteriet siger divergent.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Brug sammenligningskriteriet med $\frac{1}{n}$.

n	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1
2	$\frac{1}{1.41}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{1.73}$	$\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Sammenligningskriteriet siger divergent.

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(1-n^{-2})}$

Kald $b_n = \frac{1}{n^2}$ og anvend ækvivalenskriteriet.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1-n^{-2}} = \frac{1}{1-n^{-2}} \longrightarrow 1 \text{ for } n \to \infty.$$

Ækvivalenskriteriet siger konvergent.