博弈论入门

Introduction to Game Theory

四个石头

公开课系列
Open Course Serise

第二讲· Lecture Two

扫描二维码，关注公众号"呓语种地"并获取更多资讯。
Scan the QR code to follow us.

今日内容

- 作业讲解
- 混合策略纳什均衡
- 纳什存在定理
- 零和游戏与最小最大值定理
- Homework Review
- Mixed Strategy Nash Equilibrium
- Nash Existence Theorem
- Zero-Sum Games and Minimax Theorem

作业讲解

Homework Answer

第一题

(P_1, P_2)	L	R
T	(4,-2)	(3,4)
B	(2,2)	(7,0)

图: 找出上图中的纯策略纳什均衡[1]

答案 Answer

没有纯策略纳什均衡。

如果P_1选T的话，P_2会选择R。而现在P_1知道P_2选R，那么P_1就会改选B。但是P_2知道P_1改选B，那么P_2就会改选L。于是P_1知道P_2改选L的话，就会再改，选T。此时P_2知道P_1选T的话，就会从选L换成选R，于是成为一个循环，没有稳定的最优回应。所以没有纯策略纳什均衡。

第二题

仿照剪刀石头布的例子，画一画四川传统划拳游戏棒棒鸡的得分图，并看看有没有纳什均衡。
分别有四种东西，老虎、棒棒，鸡，虫，规定棒棒胜老虎，老虎吃鸡，鸡吃虫，虫钻棒，两人相对，手拿筷子或其他类似的棒状物敲桌面，口中喊"棒棒，棒棒"然后同时喊出以上四个东西里面的一种，输的人罚酒，如果两人喊的相同，或者同时喊出棒和鸡，虫和虎则不分胜负;

答案 Answer

	棒	鸡	虎	虫
棒	(0,0)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
鸡	(0,0)	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
虎	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(0,0)
虫	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(0,0)

和游戏剪刀石头布一样，没有纯策略纳什均衡。

思考题

假设让所有人从1到100选一个数，那么所有数的和的平均数的2/3是多少？

答案 Answer

请参考视频：猜2/3

混合策略(Mixed Strategy)

混合策略σ是以某种概率选择策略集合中的不同的策略。
例子：假设策略集合$\mathbf{S}=\{S_1,S_2,S_3\}$。

1. 纯策略$\sigma^1_{甲}$：甲的策略是只选择S_1，选择其他策略的概率为0，即$P_{\sigma^1_{甲}}(S_1)=1, P_{\sigma^1_{甲}}(S_2)=P_{\sigma^1_{甲}}(S_3)=0$。
2. 混合策略$\sigma^2_{甲}$：甲的策略是有一半概率选择S_1，一半概率选择S_3，即$P_{\sigma^2_{甲}}(S_1)=P_{\sigma^2_{甲}}(S_3)=1/2, P_{\sigma^2_{甲}}(S_2)=0$。
3. 混合策略$\sigma^3_{甲}$：甲的策略是选择每个策略的概率各是1/3，即$P_{\sigma^3_{甲}}(S_1)=P_{\sigma^3_{甲}}(S_2)=P_{\sigma^3_{甲}}(S_3)=1/3$。
4. 纯策略也是一种混合策略；
5. 甲的（混合）策略$\sigma_{甲}$代表甲的任意一个的策略:$\sigma^1_{甲},\sigma^2_{甲},\ldots$;
6. 所有参与者的策略组合(strategy profile)，$\Sigma=\{\sigma_{甲},\sigma_{乙},\ldots\}$。

混合策略纳什均衡(Mixed Strategy Nash Equilibrium)

没有人能通过改变自己的**混合策略**，获得更好的结果（得分、效用或者收益）。即在混合策略纳什均衡下，参与者i无法通过改变自己的组合策略而获利：

$$u(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

1. σ_i是指参与者i的任何策略，σ_i^*是指参与者i在混合策略纳什均衡下的策略，σ_{-i}^*是指除i参与者外，其他参与者在混合策略纳什均衡下的策略。等号在参与者i选择σ_i^*时成立。
2. ***有策略集合S，n个参与者和j在混合策略纳什均衡下的策略σ_j^*, i的效用是:
$$\mathbb{E}(\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})) = \sum_{\mathbf{S}} \pi_i(\mathbf{S}) \cdot \mathbb{P}(\mathbf{S}) = \sum_{\mathbf{S}} \pi_i(S_i, \mathbf{S}_{-i}) \cdot \mathbb{P}(S_i, \mathbf{S}_{-i})$$
$$= \sum_{\mathbf{S}} (\pi_i(S_i, \mathbf{S}_{-i}) \cdot \prod_{j=1}^{n} p_j(S_j))$$
3. ***混合策略组合，$\Sigma = \{\sigma_{甲}, \sigma_{乙}, ...\}$组成一个纳什均衡，有且仅有当$\sigma_i^*$是对于其他玩家的策略$\sigma_{-i}$的最优响应，$\sigma_i^* = \text{argmax}_{\sigma_i} \mathbb{E}(\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})), \forall i$。

下面我们回到小鸡游戏的例子：

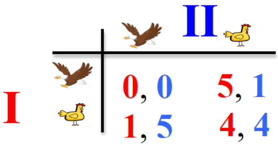

图: 小鸡游戏(The Chicken Game)[1]

假设甲(**I**)有两个**混合策略**。

- 第一个混合策略($\sigma_{甲}^{1}$)是1/4的概率选鹰，3/4的概率选鸡;
- 第二个混合策略($\sigma_{甲}^{2}$)是2/3的概率选鹰，1/3的概率选鸡;
- 混合策略纳什均衡下的策略($\sigma_{甲}^{*}$)是p的概率选鹰，$1-p$的概率选鸡。

那么乙(**II**)该如何应对甲的策略呢？

		II	
			
I		0, 0	5, 1
		1, 5	4, 4

甲的策略组合：$\Sigma_{甲} = \{\sigma^1_{甲}, \sigma^2_{甲}, \sigma^*_{甲}\}$：

$\sigma^1_{甲}$:$P_{\sigma^1_{甲}}(选鹰) = 1/4, P_{\sigma^1_{甲}}(选鸡) = 3/4$;

$\sigma^2_{甲}$:$P_{\sigma^2_{甲}}(选鹰) = 2/3, P_{\sigma^2_{甲}}(选鸡) = 1/3$;

$\sigma^*_{甲}$:$P_{\sigma^*_{甲}}(选鹰) = p, P_{\sigma^*_{甲}}(选鸡) = 1-p$。

1 甲(**I**)用$\sigma^1_{甲}$的策略时，乙(**II**)的收益（效用）是：

$$\begin{aligned}
u_{乙}(选鸡) = \mathbb{E}_{乙}[选鸡, \sigma^1_{甲}] &= P_{\sigma^1_{甲}}(选鹰)\cdot\pi_{乙}(选鸡) + P_{\sigma^1_{甲}}(选鸡)\cdot\pi_{乙}(选鸡)\\
&= 1/4\cdot 1 + 3/4\cdot 4 = 13/4\\
u_{乙}(选鹰) = \mathbb{E}_{乙}[选鹰, \sigma^1_{甲}] &= P_{\sigma^1_{甲}}(选鹰)\cdot\pi_{乙}(选鹰) + P_{\sigma^1_{甲}}(选鸡)\cdot\pi_{乙}(选鹰)\\
&= 1/4\cdot 0 + 3/4\cdot 5 = 15/4\\
u_{乙}(选鸡) &< u_{乙}(选鹰)
\end{aligned}$$

所以，乙在甲选用$\sigma^1_{甲}$时，会有更高的概率选鹰。

		II	
			
I		0, 0	5, 1
		1, 5	4, 4

甲的策略组合：$\Sigma_{甲} = \{\sigma^1_{甲}, \sigma^2_{甲}, \sigma^*_{甲}\}$：

$\sigma^1_{甲}$:$P_{\sigma^1_{甲}}(选鹰) = 1/4, P_{\sigma^1_{甲}}(选鸡) = 3/4$;

$\sigma^2_{甲}$:$P_{\sigma^2_{甲}}(选鹰) = 2/3, P_{\sigma^2_{甲}}(选鸡) = 1/3$;

$\sigma^*_{甲}$:$P_{\sigma^*_{甲}}(选鹰) = p, P_{\sigma^*_{甲}}(选鸡) = 1 - p$。

2 甲(**I**)用$\sigma^2_{甲}$的策略时，乙(**II**)的收益（效用）是：

$$
\begin{aligned}
u_{乙}(选鸡) = \mathbb{E}_{乙}[选鸡, \sigma^2_{甲}] &= P_{\sigma^2_{甲}}(选鹰) \cdot \pi_{乙}(选鸡) + P_{\sigma^2_{甲}}(选鸡) \cdot \pi_{乙}(选鸡) \\
&= 2/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 4 = 6/3 \\
u_{乙}(选鹰) = \mathbb{E}_{乙}[选鹰, \sigma^2_{甲}] &= P_{\sigma^2_{甲}}(选鹰) \cdot \pi_{乙}(选鹰) + P_{\sigma^2_{甲}}(选鸡) \cdot \pi_{乙}(选鹰) \\
&= 2/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 5 = 5/3 \\
u_{乙}(选鸡) &> u_{乙}(选鹰)
\end{aligned}
$$

所以，乙在甲选用$\sigma^2_{甲}$的策略时，会有更高的概率选鸡。

小鸡游戏的混合策略纳什均衡

Mixed Strategy Nash Equilibrium for Chicken Game

		II	
I			
		0, 0	5, 1
		1, 5	4, 4

甲的策略组合：$\Sigma_{\text{甲}} = \{\sigma^1_{\text{甲}}, \sigma^2_{\text{甲}}, \sigma^*_{\text{甲}}\}$：

$\sigma^1_{\text{甲}}: P_{\sigma^1_{\text{甲}}}(\text{选鹰}) = 1/4, P_{\sigma^1_{\text{甲}}}(\text{选鸡}) = 3/4$;

$\sigma^2_{\text{甲}}: P_{\sigma^2_{\text{甲}}}(\text{选鹰}) = 2/3, P_{\sigma^2_{\text{甲}}}(\text{选鸡}) = 1/3$;

$\sigma^*_{\text{甲}}: P_{\sigma^*_{\text{甲}}}(\text{选鹰}) = p, P_{\sigma^*_{\text{甲}}}(\text{选鸡}) = 1 - p$。

3 甲(**I**)用$\sigma^*_{\text{甲}}$的策略时，乙(**II**)的收益（效用）是：

$$
\begin{aligned}
u_{\text{乙}}(\text{选鸡}) = \mathbb{E}_{\text{乙}}[\text{选鸡}, \sigma^2_{\text{甲}}] &= P_{\sigma^2_{\text{甲}}}(\text{选鹰}) \cdot \pi_{\text{乙}}(\text{选鸡}) + P_{\sigma^2_{\text{甲}}}(\text{选鸡}) \cdot \pi_{\text{乙}}(\text{选鸡}) \\
&= p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 4 = 4 - 3p \\
u_{\text{乙}}(\text{选鹰}) = \mathbb{E}_{\text{乙}}[\text{选鹰}, \sigma^2_{\text{甲}}] &= P_{\sigma^2_{\text{甲}}}(\text{选鹰}) \cdot \pi_{\text{乙}}(\text{选鹰}) + P_{\sigma^2_{\text{甲}}}(\text{选鸡}) \cdot \pi_{\text{乙}}(\text{选鹰}) \\
&= p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 5 = 5 - 5p
\end{aligned}
$$

		II	
			
I		0, 0	5, 1
		1, 5	4, 4

甲的策略组合：$\Sigma_{甲} = \{\sigma^1_{甲}, \sigma^2_{甲}, \sigma^*_{甲}\}$:

$\sigma^1_{甲}$:$P_{\sigma^1_{甲}}(\text{选鹰}) = 1/4, P_{\sigma^1_{甲}}(\text{选鸡}) = 3/4$;

$\sigma^2_{甲}$:$P_{\sigma^2_{甲}}(\text{选鹰}) = 2/3, P_{\sigma^2_{甲}}(\text{选鸡}) = 1/3$;

$\sigma^*_{甲}$:$P_{\sigma^*_{甲}}(\text{选鹰}) = p, P_{\sigma^*_{甲}}(\text{选鸡}) = 1 - p$。

3 (Cont.) 在纳什均衡下，乙并不会因为选鹰而获得更好的结果，同样也不会因为选鸡而获利。意味着,

$$u_{乙}(\text{选鸡}) = u_{乙}(\text{选鹰})$$

$$4 - 3p = 5 - 5p$$

$$\text{解出得，} p = 1/2, u_{乙}(\text{选鸡}) = u_{乙}(\text{选鹰}) = 2.5$$

在混合策略纳什均衡下，甲的策略$\sigma^*_{甲}$，是选鸡和选鹰的概率各一半，此时乙的收益为2.5。

小鸡游戏的混合策略纳什均衡

Mixed Strategy Nash Equilibrium for Chicken Game

现在，我们来考虑下乙(**II**)在混合策略纳什均衡下的策略$\sigma^*_{乙}$。

		II	
I		0, 0	5, 1
		1, 5	4, 4

$\sigma^*_{乙}$:$P_{\sigma^*_{乙}}(选鹰) = q, P_{\sigma^*_{乙}}(选鸡) = 1 - q$

乙(**II**)用$\sigma^*_{乙}$的策略时，甲(**I**)的收益（效用）是：

$$\begin{aligned} u_{甲}(选鸡) = \mathbb{E}_{甲}[选鸡, \sigma^*_{乙}] &= P_{\sigma^*_{乙}}(选鹰) \cdot \pi_{甲}(选鸡) + P_{\sigma^*_{乙}}(选鸡) \cdot \pi_{甲}(选鸡) \\ &= q \cdot 1 + (1 - q) \cdot 4 = 4 - 3q \\ u_{甲}(选鹰) = \mathbb{E}_{甲}[选鹰, \sigma^*_{乙}] &= P_{\sigma^*_{乙}}(选鹰) \cdot \pi_{甲}(选鹰) + P_{\sigma^*_{乙}}(选鸡) \cdot \pi_{甲}(选鹰) \\ &= q \cdot 0 + (1 - q) \cdot 5 = 5 - 5q \end{aligned}$$

在纳什均衡下，甲选鹰和选鸡的效用是一样的。意味着，$u_{甲}(选鸡) = u_{甲}(选鹰)$，解出得，$q = 1/2, u_{甲}(选鸡) = u_{甲}(选鹰) = 2.5$。在混合策略纳什均衡下，乙的策略$\sigma^*_{乙}$，是选鸡和选鹰的概率各一半，此时甲的收益为2.5。

小鸡游戏的混合策略纳什均衡

甲和乙的混合策略都是选鸡和选鹰的概率各一半，收益均为2.5。小鸡游戏的混合策略纳什均衡是：$(p, q) = (0.5, 0.5)$。

第一个游戏：剪刀、石头、布

The First Game: Rock, Paper, Scissor

假设玩家一在混合策略纳什均衡下的策略$\sigma^*_{\text{玩家一}}$中，出剪刀、石头、布的概率各为$\mathbb{P}_{\text{玩家一}} = \{p_{\text{剪刀}}, p_{\text{石头}}, p_{\text{布}}\}$，

玩家二 / 玩家一			
	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

图: 剪刀、石头、布游戏收益（得分、效用）表[2]

通过计算玩家二的收益，你能找出玩家一的混合策略纳什均衡吗？

$$u_{\text{玩家二}}(\text{出剪刀}) = u_{\text{玩家二}}(\text{出石头}) = u_{\text{玩家二}}(\text{出布})$$

假设玩家一在混合策略纳什均衡下的策略$\sigma^*_{\text{玩家一}}$中，出剪刀、石头、布的概率各为$\mathbb{P}_{\text{玩家一}} = \{p_{\text{剪刀}}, p_{\text{石头}}, p_{\text{布}}\}$，通过计算玩家二的收益，来找出玩家一的策略$\sigma^*_{\text{玩家一}}$。

$$u_{\text{玩家二}}(\text{出剪刀}) = \mathbb{E}[\text{出剪刀}] = 0 \cdot p_{\text{剪刀}} + -1 \cdot p_{\text{石头}} + 1 \cdot p_{\text{布}}$$
$$u_{\text{玩家二}}(\text{出石头}) = \mathbb{E}[\text{出石头}] = 1 \cdot p_{\text{剪刀}} + 0 \cdot p_{\text{石头}} + -1 \cdot p_{\text{布}}$$
$$u_{\text{玩家二}}(\text{出布}) = \mathbb{E}[\text{出布}] = -1 \cdot p_{\text{剪刀}} + 1 \cdot p_{\text{石头}} + 0 \cdot p_{\text{布}}$$
$$u_{\text{玩家二}}(\text{出剪刀}) = u_{\text{玩家二}}(\text{出石头}) = u_{\text{玩家二}}(\text{出布})$$

解得$p_{\text{剪刀}} = p_{\text{石头}} = p_{\text{布}} = \frac{1}{3}$，且$u_{\text{玩家二}}(\text{出剪刀}) = u_{\text{玩家二}}(\text{出石头}) = u_{\text{玩家二}}(\text{出布}) = 0$。

同理，假设玩家二在混合策略纳什均衡下的策略$\sigma^*_{\text{玩家二}}$中，出剪刀、石头、布的概率各为$\mathbb{P}_{\text{玩家二}} = \{q_{\text{剪刀}}, q_{\text{石头}}, q_{\text{布}}\}$，通过计算玩家一的收益，来找出玩家二的策略$\sigma^*_{\text{玩家二}}$。

$$u_{\text{玩家一}}(\text{出剪刀}) = \mathbb{E}[\text{出剪刀}] = 0 \cdot q_{\text{剪刀}} + -1 \cdot q_{\text{石头}} + 1 \cdot q_{\text{布}}$$
$$u_{\text{玩家一}}(\text{出石头}) = \mathbb{E}[\text{出石头}] = 1 \cdot q_{\text{剪刀}} + 0 \cdot q_{\text{石头}} + -1 \cdot q_{\text{布}}$$
$$u_{\text{玩家一}}(\text{出布}) = \mathbb{E}[\text{出布}] = -1 \cdot q_{\text{剪刀}} + 1 \cdot q_{\text{石头}} + 0 \cdot q_{\text{布}}$$
$$u_{\text{玩家一}}(\text{出剪刀}) = u_{\text{玩家一}}(\text{出石头}) = u_{\text{玩家一}}(\text{出布})$$

解得$q_{\text{剪刀}} = q_{\text{石头}} = q_{\text{布}} = \frac{1}{3}$，且$u_{\text{玩家一}}(\text{出剪刀}) = u_{\text{玩家一}}(\text{出石头}) = u_{\text{玩家一}}(\text{出布}) = 0$。

通过前面的计算得知，玩家一和玩家二的混合纳什均衡的策略是出剪刀、石头和布的概率都是1/3，且

$$u_{\text{玩家一}}(\text{出剪刀}) = u_{\text{玩家一}}(\text{出石头}) = u_{\text{玩家一}}(\text{出布}) = 0$$

$$u_{\text{玩家二}}(\text{出剪刀}) = u_{\text{玩家二}}(\text{出石头}) = u_{\text{玩家二}}(\text{出布}) = 0$$

玩家二 / 玩家一	 1/3	 1/3	 1/3
 1/3	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
 1/3	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
 1/3	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

图: 剪刀、石头、布游戏收益（得分、效用）表[2]

纳什存在定理

Nash Existence Theorem

Nash Existence Theorem 纳什存在定理 (1950)

任何有限游戏都有一个混合策略纳什均衡。
Any finite game has a (mixed) Nash Equilibrium.

证明.

*** [a] 请参考：纳什存在定理证明。
关键词[1]：

1. 布劳威尔不动点定理(Brouwer fixed-point theorem)；
2. 握手引理与斯珀纳引理(Sperner’s Lemma)；
3. 图的着色问题(Legal Coloring)。 □

---

[a] “That’s trivial, you know. That’s just a fixed point theorem.” - Von Neumann（冯·诺伊曼）.

双人正则形式零和游戏 2 People Zero-Sum Normal Form Games

假设玩家一的收益（效用）矩阵是A，那么玩家二的收益（效用）矩阵$B=-A$。也就说，玩家二的收益就是玩家一的负收益（损失）。例：剪刀、石头、布游戏中的得分矩阵是 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $B=-A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

- 一般来说，零和游戏中是没有纯策略纳什均衡。
- ***设A为$m\times n$的收益（效用）矩阵，行策略为$\mathbf{x}$，列策略为$\mathbf{y}$，那么行玩家和列玩家的期望收益是，

$$u(\text{行玩家})=-u(\text{列玩家})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i\cdot y_i\cdot a_{ij}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

- ***混合策略纳什均衡是$(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$，[2]
  - $(\mathbf{x}^*)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^*\geq\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^*$，对于所有的行混合策略$\mathbf{x}$；
  - $(\mathbf{x}^*)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^*\leq(\mathbf{x}^*)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$，对于所有的列混合策略$\mathbf{y}$。
- ***最小最大值定理（Minimax Theorem)：对于所有双人正则形式零和游戏，

$$\max_{\mathbf{x}}\left(\min_{\mathbf{y}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}\right)=\min_{\mathbf{y}}\left(\max_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}\right)$$

(P_1,P_2)	L	R
T	(4,-2)	(3,4)
B	(2,2)	(7,0)

1. 找出左图中的混合策略纳什均衡[1]
2. 分析游戏棒棒鸡的混合策略纳什均衡。

思考题[1]：现在有一个扑克游戏，只有三张牌：A，K和Q，且大小顺序是$A > K > Q$。此时有甲、乙两个玩家，在开始前，甲、乙需要分别向下注50元。开局后甲、乙各摸一张牌。假设甲永远是先手，且甲在看牌之后，可选的策略有看牌或加注。

- 如果甲看牌，则甲、乙出示卡牌，按照牌面大小决定输赢。
- 如果甲加注，那么甲需要加注50元，然后进入乙的回合，策略有弃牌或跟注。
  - 如果乙弃牌, 那么甲直接赢50元。
  - 如果乙跟注, 那么乙再下注50元，然后甲、乙出示卡牌，按照牌面大小决定输赢。获胜者将赢池中的钱，即100元。

问题[1]：

1. 如果甲第一轮加注，而乙的牌是A或者是Q，乙该弃牌还是跟注;
2. 如果甲是一张A或者K，甲该看牌还是加注;
3. 如果甲是一张Q,并且甲有p的概率会加注。如果此时乙的牌是K,且有q的概率会跟注,请找出这里的（混合）纳什均衡和甲、乙的收益。

“As far as I can see, there could be no theory of games without that theorem···I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved.”

The Origins of Game Theory
Von Neumann

Merci!

扫描二维码，关注公众号“呓语种地”并获取更多资讯。
Scan the QR code to follow us.

联系方式：1343214384@qq.com

引用 Reference

1. A. Vetta, McGill University, Fall 2019, Comp/Math 553.
2. C. Wei, McGill University, Fall 2014, Comp/Math 553.
3. R. Tim, Stanford University, *Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory.*