博弈论入门

Introduction to Game Theory

四个石头

公开课系列
Open Course Serise

第一讲· Lecture One

扫描二维码，关注公众号“呓语种地”并获取更多资讯。
Scan the QR code to follow us.

今日内容
Today's Lecture

- 讲师与课程介绍
- 什么是博弈论
- 简单的小鸡博弈
- 纯策略纳什均衡
- Introduction to instructor and course
- What is Game Theory?
- A simple chicken game
- Pure strategy Nash Equilibrium

介绍讲师与课程

Introduction to instructor and course

自我介绍 Self Introduction

- 加拿大麦吉尔大学计算机系的在读研究生；
- 对本课程内容感兴趣和有问题的朋友，可以关注我们的公众号呓语种地，或者发送邮件：1343214384@qq.com。

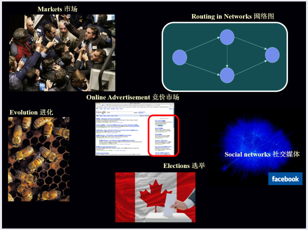
课程介绍 Course Introduction

- 课程为线上公开课，总计10次。
- 课程主要是介绍博弈论中的一些基本的概念:纳什均衡、囚徒困境、零和游戏、VCG、竞价排名等。
- 本课程需要有基本的高中数学知识。

博弈论的定义 General Definition of Game Theroy

博弈论考虑游戏中的个体的行为，并研究它们的**策略**。
Game Theory are thought experiments to help us learn how to predict (rational) behavior of agents.

什么是游戏 What is Game?



游戏是两个及以上的参与者之间的互动行为（且他们的目标不相同）。
A game is any interaction between two or more agents (with nonidentical objectives).[2]

偏好 Preference

每一个参与游戏的个体都会有一个偏好关系(preference relation)，我们用$\succ_i$来表示i的在潜在结果的集合$O=\{a,b,c,...\}$的偏好。
例：假设有一个结果集合$O=\{a,b,c\}$，且$\succ_i = a \succ b \succ c$。
意味着参与者i在a与b中，更偏好a，在b与c中，更偏好b。

偏好的性质 Properties of Preference

1. 完整性(Completeness)：每个参与者i在对比结果时，有且只有一种偏好。
2. 传递性(Transitivity)：假设结果集$O=\{a,b,c\}$如果有$a \succ b$以及$b \succ c$，那么$a \succ c$

效用函数 Utility Function

一般，在对比结果的偏好时，我们通常需要做定量分析的时候，我们就会采用效用函数。假设有一个效用函数$u_i : O \rightarrow \mathbb{R}$，意味着，我们将结果集中的每一个结果，与一个收益payoff（效用utility）对应，通常为实数。

偏好与效用 Utility and Preference

$$u_i(a) > u_i(b) \iff a \succ_i b \quad \forall a, b \in O$$

游戏策略与收益矩阵
Game Strategy and Utility Matrix

策略集合 Strategy Set

策略集合是由玩家能够施行的策略所组成的集合。
例：游戏剪刀、石头、布的策略集合是{出剪刀,出石头,出布}

收益矩阵 Utility Matrix

玩家在游戏中，每一个策略所对应的收益所组成的矩阵例：游戏剪刀、石头、布的收益矩阵为：

$$\text{玩家一的收益} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{玩家二的收益} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

第一个游戏：剪刀、石头、布

The First Game: Rock, Paper, Scissor

我们把收益矩阵放在下表当中：

玩家二 / 玩家一			
	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

图: 剪刀、石头、布游戏收益（得分、效用）表

你平时会采用什么样的策略？你会总结对手的出剪刀、石头、布的频率吗？

双人正则形式博弈(2-People Normal-Form Game)

正则形式博弈采用矩阵来陈述博弈的效用（得分、收益）。

例如：假设有小明(I)和小刚(II)两位参与者，我们假设他们的得分矩阵分别为：

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathrm{II} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

为了更清楚的理解得分矩阵的含义，我们接下来把这两个得分矩阵放在一张表里。

游戏组成与解决方案

Game Formulations and Solution Concepts

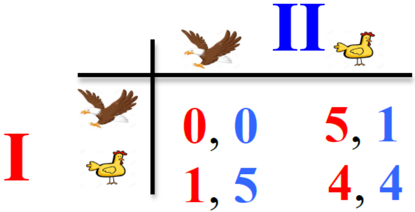


图: 小鸡游戏(The Chicken Game)[1]

- 小明和小刚的策略集合都是{选鸡,选鹰}。
- 显然，这个游戏最好的结果是小明(I)和小刚(II)同时选择“鸡”。这样，他们两人都可以得4分。
- 但是，如果小明选“鸡”的话，小刚就应该选“鹰”，这样他可以得5分而不是4分。我们把小刚当他知道小明“选鸡”的时候“选鹰”，称为他的一个最优策略，反之亦然。

纳什均衡 Nash Equilibrium

在博弈中，如果每个参与者在已知其他参与者的策略的情况下，采用最优策略来应对，那么我们就达到了一个纳什均衡，或者找到了一个纳什均衡解，同时也意味着没有人能通过改变自己的策略，获得更好的结果（得分、效用或者收益）。
If every agent plays a best response to the other agents’ strategies then we are at a Nash Equilibrium.

	II	
I	0, 0	5, 1
	1, 5	4, 4

图: 小鸡游戏(The Chicken Game)[1]

- 在小鸡游戏(The Chicken Game)中，明显(鸡,鹰)和(鹰,鸡)是纳什均衡。

策略集合与纯策略纳什均衡
Strategy Set and Pure Strategy Nash Equilibrium

纯策略纳什均衡下，参与者只能使用策略集合中的一条策略。

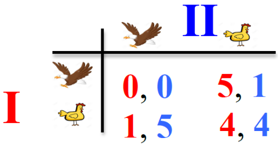


图: 小鸡游戏(The Chicken Game)[1]

- （纯）纳什均衡可以存在多个，也可能不存在。
- 以小鸡游戏为例，对于小明和小刚来说，他们分别的策略集合只包含了{选鸡,选鹰}两个策略。在纯策略纳什均衡下，他们只使用中其中一条策略，即：选鸡或选鹰。

纳什均衡

Nash Equilibrium

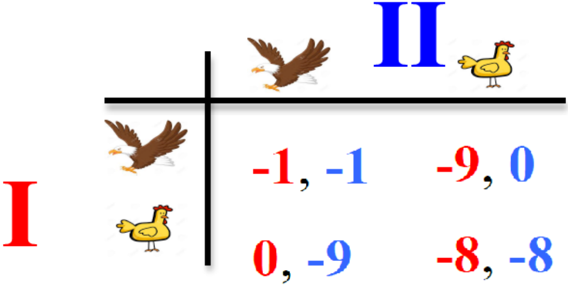


图: 小鸡游戏修改版(The Revised Chicken Game)[1]

你能找修改版小鸡游戏的纯策略纳什均衡吗？

囚徒困境
Prisoner’s Dilemma

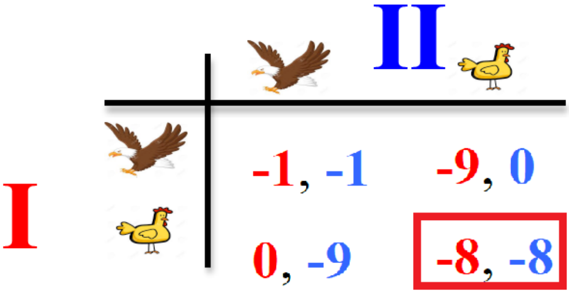


图: 小鸡游戏修改版(The Revised Chicken Game)中的纯策略纳什均衡[1]

每一个玩家选鸡的得分都大于其选鹰的得分。
Every entry in the chicken row is bigger than the corresponding entry in the hawk row.

占优策略纳什均衡

Dominant Strategy Nash Equilibrium

	抗拒	招供
抗拒	-1, -1	-9, 0
招供	0, -9	-8, -8

图: 囚徒困境(Prisoner’ s Dilemma)[1]

占优策略(Dominant Strategy)

在选择策略时，有一个策略的效用总是大于其他所有策略的效用时，我们把这类策略称为占优策略(Dominant Strategy)。

占优策略纳什均衡(Dominant Strategy Nash Equilibrium)

当所有参与者的最优回应是选择他们的占优策略时，这时达到的纳什均衡称为**占优策略纳什均衡**(Dominant Strategy Nash Equilibrium)。

Revisit第一个游戏：剪刀、石头、布

The First Game: Rock, Paper, Scissor

玩家二 / 玩家一			
	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

图: 剪刀、石头、布游戏收益（得分、效用）表[2]

你能找出纯策略纳什均衡吗？

第一个游戏：剪刀、石头、布

The First Game: Rock, Paper, Scissor

玩家二 / 玩家一			
	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

图: 剪刀、石头、布游戏收益（得分、效用）表[2]

没有纯纳什均衡的解，你会发现最优解似乎是循环的，你出石头，别人出布，你就会出剪刀，那么对手会出石头，似乎永远都没有结束。

第一个游戏：剪刀、石头、布
The First Game: Rock, Paper, Scissor

玩家二 \ 玩家一			
	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

图: 剪刀、石头、布游戏收益（得分、效用）表[2]

玩家一与二的策略集合是{剪刀,石头,布}，假设玩家一出剪刀、石头、布的概率各是$\frac{1}{3}$，那你怎么办？

作业

Homework

1. 找出下图中的纯策略纳什均衡[1]

(P_1, P_2)	L	R
T	(4,-2)	(3,4)
B	(2,2)	(7,0)

2. 仿照剪刀石头布的例子，画一画四川传统划拳游戏棒棒鸡的得分矩阵，并看看有没有纳什均衡。分别有四种东西，老虎、棒棒，鸡，虫，规定棒棒胜老虎，老虎吃鸡，鸡吃虫，虫钻棒，两人相对，手拿筷子或其他类似的棒状物敲桌面，口中喊"棒棒，棒棒"然后同时喊出以上四个东西里面的一种，输的人罚酒，如果两人喊的相同，或者同时喊出棒和鸡，虫和虎则不分胜负;
3. 思考题：假设让所有人从0到100选一个数，那么所有数的和的平均数的$\frac{2}{3}$是多少？

Merci Beaucoup!

扫描二维码，关注公众号“呓语种地”并获取更多资讯。
Scan the QR code to follow us.

联系方式：1343214384@qq.com

引用 Reference

1. A. Vetta, McGill University, Fall 2019, Comp/Math 553.
2. C. Wei, McGill University, Fall 2014, Comp/Math 553.