SE. 6. ECUAȚII DIFERENȚIALE CU DERIVATE PARȚIALE 10.11.2009

REZOLVARE EXERCIȚII

④ $$\left(\frac{x}{t}\right)^2+(x')^2=3t\,x''+\frac{2xx'}{t}$$

Plecăm de la $x(t) \longrightarrow y(t) \longrightarrow z(t)$

$\frac{x}{t}=y$ (sch. de var) $y'(t)=z(t)$

$$\frac{x(t)}{t}=y(t) \qquad y'=z.$$

$x=t\cdot y$

$x'=y+ty'$

$x''=(y+ty')'=y'+y'+ty''=2y'+ty''$

$y^2+(y+ty')^2=3t(ty'+ty'')+2y(y+ty')$

$\cancel{y^2}+\cancel{y^2}+\cancel{2yy't}+(ty')^2=6ty'+3t^2y''+\cancel{2y^2}+\cancel{2yy't}$

$ty'^2=6ty'+3t^2y''$

$tz^2=6tz+3t^2z'$

$$z'=\frac{(tz)^2-6tz}{3t^2} \qquad z'=-\frac{6tz}{3t^2}+\frac{(tz)^2}{3t^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$z'=-\frac{2z}{t}+\frac{1}{3}z^2$$

ecuație Bernoulli cu $\alpha=2$.

$\bar{z}'=a(t)\cdot\bar{z}$

$\bar{z}'=-\frac{2}{t}\bar{z}$

$\bar{z}=c\cdot e^{\int-\frac{2}{t}dt}=c\cdot e^{-2\ln|t|}=c\cdot\frac{1}{t^2}$

$$z(t)=\frac{c(t)}{t^2}$$

$$\left(\frac{c(t)}{t^2}\right)'=\frac{-2\frac{c(t)}{t^2}}{t}+\frac{1}{3}\frac{c^2(t)}{t^4}$$

$$\frac{c'(t)\,t^2 - 2c(t)\cdot t}{t^4} = -\frac{2c(t)}{t^3} + \frac{c'(t)}{t^2}$$

$$\frac{c'}{t^2} - \cancel{2\frac{c}{t^3}} = \cancel{-\frac{2c}{t^3}} + \frac{c^2}{3t^2}$$

$$c'(t) = \frac{c^2(t)}{3t^2}$$

staționar

$c = 0 \Rightarrow z(t) = 0 \Rightarrow y'(t) = 0 \Rightarrow y' = c_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = c_1 t\ ,\ c_1 \in \mathbb{R}$.

nestaționar

$c \neq 0$.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{c^2}{3t^2}$$

$$\int \frac{1}{c^2}\,dc = \int \frac{1}{3t^2}\,dt$$

$$-\frac{1}{c} = \frac{1}{3t} - c_1$$

$$c = \frac{3t}{1+3c_1 t}.$$

$$z = \frac{3}{t(1+3c_1 t)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{t(1+3c_1 t)} \Rightarrow y = \int 3\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\frac{1}{3c_1}}\right)dt$$

$$x(t) = t\,y(t) = t\left(3\cdot \ln\left|\frac{t}{t+\frac{1}{3c_1}}\right| + c_2\right),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

PROBLEME CAUCHY PT ECUAȚII DE ORDIN n

$F(t, x, x', \dots x^{(n)})$ tb. să-i asociem pt. a obținem o probl. Cauchy.

$$x(t_0) = x_0$$
$$x'(t_0) = x_0$$
$$x^{(n)}(t_0) = x_0$$

PROBL. 1.
$$\begin{cases} t^2 x x'' - (x' - tx')^2 = 0 \\ x(1) = 1 \\ x'(1) = 0 \end{cases}$$

Nu o putem considera decât de tip Euler.

$F(x, tx', t^2 x)$

Considerăm $|t| = e^s \Rightarrow s = \ln t$

$t_0 > 0, t > 0$

$x(t) = y(s(t)) \Rightarrow x'(t) = y'(s(t)) \cdot s'(t) = y'(s(t)) \cdot \frac{1}{t}$

$\Rightarrow x' = y' \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{t \cdot x' = y'}$

$x''(t) = \left(y'(s(t)) \cdot \frac{1}{t}\right)' = y''(s(t)) \cdot s'(t) \cdot \frac{1}{t} + y'(s(t))\left(-\frac{1}{t^2}\right) \Longrightarrow$

$x''(t) = \frac{1}{t^2}(y'' - y')$

$\Rightarrow \boxed{t^2 x'' = y'' - y'}$

$(y'' - y') + (y - y')^2 = 0$

$F(y, y', y'') = 0$

$y = z,\ y'(s) = z(y(s))$

SCHEMA SCH. DE VAR.

$x(t) \xrightarrow[t = e^s]{} y(s)$

$x(t) = y(\ln t)$

$y(s) \xrightarrow[y' = z]{} z(y)$

$y'(s) = z(y(s))$

$z(y) \xrightarrow[\frac{z}{y} = w]{} w(y)$

$z(y) = y\,w(y)$

$$y' = z(y) \Rightarrow y'' = z'(y(s))\cdot y'(s) = z' \cdot z$$

$$(z'z - z)y - (y-z)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow zz'y - zy - y^2 - z^2 + 2yz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = \frac{zy + y^2 + z^2 - 2yz}{zy} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} + \frac{y}{z} - 1 \quad \text{ec. omogenă}$$

$$\frac{d}{dy}(y \cdot w) = w + \frac{1}{w} - 1 \Rightarrow \cancel{w} + yw' = \cancel{w} + \frac{1}{w} - 1$$

$\Rightarrow w' = \frac{1-w}{w \cdot y}$ ec. cu variab. separab.

$\Rightarrow$ sol. staționară $w = 1$

$\Rightarrow \frac{z}{y} = 1 \Rightarrow z = y \Rightarrow y' = y$ ec. liniară.

$$\Rightarrow y(s) = c \cdot e^{\int \frac{1}{s} ds} = c \cdot e^{s}$$

$$\Rightarrow x(t) = c \cdot e^{\ln t} \underset{t>0}{=} c \cdot t$$

Nu poate fi soluția probl. Cauchy pt. că din condițiile Cauchy $\Rightarrow$ $\begin{matrix} c = 1 \\ c = 0 \end{matrix}$ $\rightarrow$ contradicție.

Dacă $w \neq 1$

$$\frac{dw}{dy} = \frac{1-w}{w} \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{w\,dw}{1-w} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{(w-1+1)dw}{-(w-1)} =$$

$$= \ln|y| + \ln c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow \int\left(1 + \frac{1}{w-1}\right)dw = \ln(c_1 \cdot |y|) \Rightarrow -w \cdot \ln|w-1| = \ln(c_1 \cdot |y|)$$

$$\Rightarrow -\left(\ln e^{w} + \ln|w-1|\right) = \ln c_1|y|$$

$$\ln\left(\frac{1}{e^{w}(w-1)}\right) = \ln c_1|y| \Rightarrow \frac{1}{e^{w}(w-1)} = c_1 y$$

Trebuia să obs. că ec. în y se împarte la x^2

$$\frac{y''}{y} - \frac{y'}{y} - \left(1 - \frac{y'}{y}\right)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ Mergem pe schimbarea: $y(s) \xrightarrow[\frac{y'}{y} = v]{} v(s)$

$$\frac{y'(s)}{y(s)} = v(s)$$

$\Rightarrow y''(s) = y'(s)v(s) + y(s)v'(s) \; / : y$

$$\frac{y''}{y} = v^2 + v'$$

$$v^2 + v' - v - (1-v)^2 = 0.$$

$\Rightarrow \cancel{v^2} + v' - v - 1 + 2v - \cancel{v^2} = 0.$

$$\frac{dv}{ds} = 1 - v$$

sol. staționară $v = 1 \Rightarrow y' = y \Rightarrow y = c \cdot e^{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = ct$ nu e soluție

nestaționar:

$$\frac{dv}{1-v} ds = -\ln(v-1) = s + \ln(c_1),\ c_1 > 0$$

$$\frac{1}{|v-1|} = c_1 e^{s}$$

$$v - 1 = \frac{1}{c_1 e^{s}} \Rightarrow v = \frac{1}{c_1 e^{s}} + 1$$

$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{c_1} e^{-s} + 1\right) y \to y(s) = c_2 e^{\int y'} = c_2 \cdot e^{-\frac{1}{c_1} e^{-s} + s}$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x(t) = c_2 \cdot e^{-\frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{t} + \ln t}$$

$$x(t) = c_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{t \cdot c_1}}, \quad c_1 \neq 0,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$x(1) = 1 \iff 1 = c_2 \cdot e^{-\frac{1}{c_1}}$$

$$x'(t) = c_2 \cdot e^{-\frac{1}{c_1 t}} + \cancel{c_2 t} \cdot e^{-\frac{1}{c_1 t}} \cdot \frac{1}{c_1 t^2}$$

$$x'(1) = 0 \Rightarrow c_2 \cdot e^{-\frac{1}{c_1}} + \frac{c_2}{c_1} e^{-\frac{1}{c_1}} = 0 \quad / : e^{-\frac{1}{c_1}}$$

$$c_2\left(1 - \frac{1}{c_1}\right) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow 1 = 0 \text{ F}$$

$$c_1 = -1 \Rightarrow 1 = c_2 \cdot e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{e} t \cdot e^{\frac{1}{t}} = t \cdot e^{\frac{1}{t} - 1}$$

$\boxed{\text{EX.}}$ ① . Fie $a(\cdot)$ și $b(\cdot) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ continue și care definesc ec. $x' = -a(t)\cdot x + b(t)$. (1)

Demonstrați că dacă $a(t) \geq c$, $c > 0$, $\forall t \in (0,\infty)$ și dacă $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = 0$, atunci $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$; $\forall \varphi(\cdot)$ soluție ec. (1).

② Fie ecuația $x'' + \sin x = 0$. (2)

Demonstrați că ec (2) are o infinitate de soluții $\varphi_0(\cdot)$ cu proprietatea că $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_0(t) = \pi$.

③ Fie ecuația $x' = \frac{t^2 + (1 + 2t^2)x}{t}$ (3).

Arătați că există o singură soluție φ_0 a.î. $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_0(t) = l \in \mathbb{R}$.

④ Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și $b(\cdot): [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continuă.

$$x' = -\frac{a}{t} \cdot x + \frac{b(t)}{t} \qquad (4)$$

Dacă $a < 0$ atunci $(\exists)$ $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \varphi(t)$ $\forall \varphi(\cdot)$ soluție a ec. (4)

?

Dacă $a > 0$ atunci $(\exists)$ o singură soluție φ_0 a ec. (4) a.î. să $(\exists)$ $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \varphi(t)$.

Comentarii:

④ ec. afină

③ împărțind termenii $\Rightarrow$ ec. afină.

② întâi reducere a ordinului

① ec. afină. $\Rightarrow$ se obține o formă a soluției și se calc. limitele.