Introducere

Exemple:

(1) Problema primitivelor

Se dă: $f: I \to \mathbb{R}$, I int $\subset \mathbb{R}$

Se cere: $x: I \to \mathbb{R}$ derivabilă și care să verif. ec:

$$\boxed{x' = f \text{ pe } I} \quad (1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x = \underbrace{\int f\,dt}_{\text{primitivă a lui } x} + c,\ c \in \mathbb{R}} \quad (2)$$

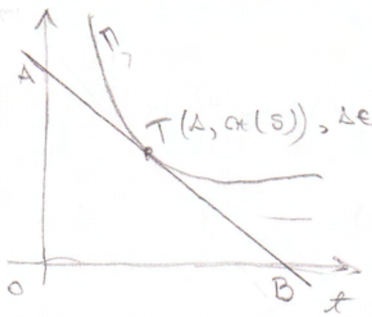
Pb. Cauchy (3) $\begin{cases} x' = f \text{ pe } I \\ x(t_0) = x_0, & t \in \mathbb{R} \text{ fixat} \\ & x_0 \in \mathbb{R} \text{ fixat} \end{cases}$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + c.$$

$$x(t_0) = c = x_0$$

$$\Rightarrow \quad (4) \quad \boxed{x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + x_0}$$

(2) Exemplu geometric



$\underline{AT = TB}$

$\Gamma = \{(t, x(t)),\ t \in I\}$, I int. $\subset (0, \infty)$

$x: I \to (0, \infty)$ deriv., $x' \neq 0$ pe I

$x - x(s) = \underbrace{x'(s)}_{\text{panta unei drepte}} \cdot (t - s)$ (ec. dr. AB, tangentă în pct T la curba Γ)

$A: \begin{cases} x = 0 \\ -x(s) = x'(s)(t - s) \end{cases} \Rightarrow t = s - \dfrac{x(s)}{x'(s)}$ ($x'(s) \neq 0$ pt. că dc. panta ar fi 0 at. $AB \parallel OX$).

$$\Rightarrow A\left(s - \frac{x(s)}{x'(s)}, 0\right)$$

$B : \begin{cases} t=0 \\ x = x(s) - s\,x'(s) \end{cases} \Rightarrow \left(B = 0,\ x(s) - s\,x'(s)\right)$

T pt. a fi mijloc tb. să fie media aritmetică a coord. pct A, B.

$T(s, x(s)) \Rightarrow \begin{cases} s = \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{x(s)}{x'(s)}\right) \\ x(s) = \dfrac{1}{2}\left(x(s) - s\,x'(s)\right) \end{cases} \quad s \in I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} s = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x(s)}{x'(s)} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x'}{x} = -\dfrac{1}{s} \ / \text{pe } I} \quad (5)$

ec. diferențială relativă la fct. necunoscută x

(3) Exemplu din mecanică (Evoluția unui pct. material de masă m, $m>0$, sub acțiunea unei forțe F)

$x \in \mathbb{R}, \ x = (x_1, x_2, x_3), \ x_j \in \mathbb{R}, \ j = \overline{1,3}$

Legea a II-a a lui Newton: $F = m \cdot a$ (a = acc. pct. material)

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \ x_j : I \to \mathbb{R}, \ I$ int $\subset \mathbb{R}$

(poz. pct. material la mom. $t \in I$).

x_j de două ori deriv.

deriv. lui x

$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))$ - viteza pct. material

$a(t) = \ddot{x}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))$ - acc. pct. material

$F(t, x(t), \dot{x}(t))$; $F : I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$F = (F_1, F_2, F_3)$, $F_j : I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cont

$F = m \cdot a \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}(t) = \dfrac{1}{m} \cdot F(t, x(t), \dot{x}(t))} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (6) \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = \dfrac{1}{m} F_1(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), x \\ x_2(t) = \dfrac{1}{m} F_2(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t) \\ x_3(t) = \dfrac{1}{m} F_3 \end{cases}$

= cu l =
=21

Cap. I: Ecuații diferențiale de ordin I

Definiție.: Se dă o fcț. $f : D \to \mathbb{R}$, D deschis $\subset \mathbb{R}^2$, $f(t, x)$.
Se cere o fcț. $x : I \to \mathbb{R}$, I int. $\subset \mathbb{R}$, $\Gamma_f := \{(t, x(t)), t \in I\} \subset D$, x deriv. și să verif. egalitatea

(1) $\boxed{x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in I}$

Obs: Orice fcț. x cu propr. de mai sus s.n. soluție a ec. dif.

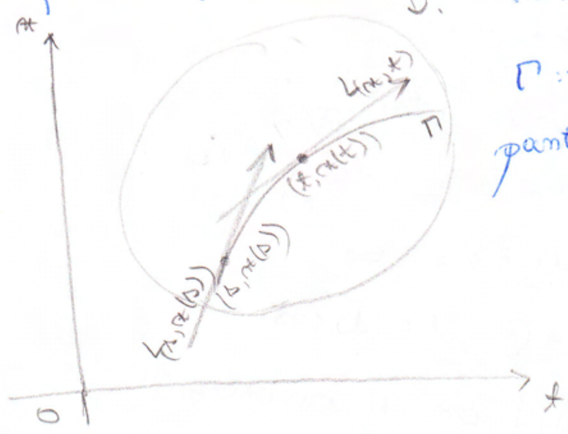
(2) $\boxed{x' = f(t, x)} \longleftrightarrow \boxed{\dot{x} = f(t, x)} \longleftrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = f(t, x)}$

Definiție (Probl. Cauchy): Se cere sol. ec. (2) care verif. cond. suplimentară

(3) $\boxed{x(t_0) = x_0}$, unde $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $(t_0, x_0) \in D$, fixat

Obs: Cond. (3) s.n. condiție inițială / Cauchy.

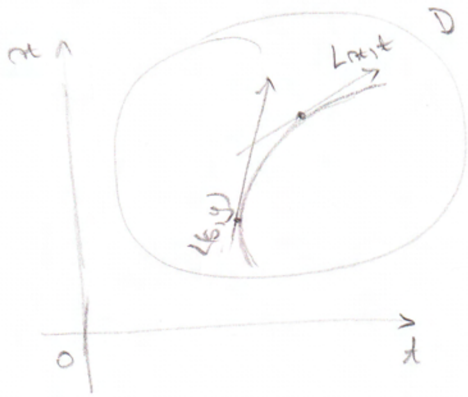
* Interpretare geometrică



$x : I \to \mathbb{R}$ sol. a ec. (2)

$\Gamma := \{(t, x(t)), t \in I\}$.

panta dr. $L_{(x,t)}$ este $x'(t) = f(t, x(t))$



$L_{(x,t)}$ - dr. care trece prin (t, x) și are panta $f(t, x)$.

=cu 1z
=3/ z

* Obiective

1. Ecuații integrabile prin cuadraturi
2. Existența soluțiilor pb. Cauchy
3. Unicitatea soluțiilor pb. Cauchy
4. Dependența continuă a sol. de datele inițiale și param. pb.
5. Metode numerice (aproximative) pt. det. soluțiilor

I.1. Ecuații integrabile prin cuadraturi

① Ecuații cu variabile separabile.

Se dau $g: I_1 \to \mathbb{R}$, $h: I_2 \to \mathbb{R}$ cont, I_1, I_2 int $\subset \mathbb{R}$, $h \neq 0$ pe $I_{(2)}$

Se cere $x: I \to I_2$ deriv, I int $\subset I_1$ a.î. $\boxed{x'(t) = g(t)\cdot h(x(t)) \ \forall t \in I}$

$\Leftrightarrow \boxed{x' = g(t)\cdot h(x)}$ (1)

$f(t,x) = g(t)\cdot h(x)$

$D = I_1 \times I_2$.

pp. că $x: I \to I_2$ este sol a ec. (1) $\Leftrightarrow x'(t) = g(t)\cdot h(x(t))$ $t \in I$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t), t \in I$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ not. cu H o primitivă a lui $\frac{1}{h}$

G o primitivă a lui g

$(H \circ x)'(t) = G'(t), t \in I$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H(x(t)) = G(t) + C$, $t \in I$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = H^{-1}(G(t))}$ dc. H inversabilă.

$H: I_2 \to I_2'$, $I_2' = H(I_2)$ int $\subset \bar{\mathbb{R}}$

$\underline{\text{surj}, \text{inj}}_{H}$

$H' = \frac{1}{h} > 0$; H

$= eu$ 12

$= 41$

I.1 Ecuații dif. integrabile prin cuadraturi

1. Ec. cu variab. separabile.

(1) $\boxed{x' = g(t)\cdot h(x)}$; $g: I_1 \to \mathbb{R}$, $h: I_2 \to \mathbb{R}$ cont
I_1, I_2 intervale $\subset \mathbb{R}$
$h \neq 0$ (putem pp. $h > 0$ pe I_2).

$\Updownarrow$

det. $x: I \to I_2$ deriv., I interval $\subset I_1$ a.î. $x'(t) = g(t)\cdot h(x(t))$, $\forall t \in I$,

$\Updownarrow$

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t), \forall t \in I.$$

G o primitivă a lui g: $G = \int g(t)\,dt$, $G: I_1 \to \mathbb{R}$.

H o primitivă a lui $\frac{1}{h}$: $H = \int \frac{1}{h(x)}dx$; $H: I_2 \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\frac{x'(t)}{h(x(t))}$ admite ca primitivă (pe I) pe $H(x(t))$

$\Rightarrow$ $\frac{x'(t)}{h(x(t))} \Leftrightarrow \int \frac{x'(t)}{h(x(t))}dt = \int g(t)\,dt + C$, $C \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H(x(t)) = G(t) + C$, $t \in I$

$H: I_2 \to \mathbb{R}$ deriv., $H' = \frac{1}{h} > 0 \Rightarrow H$ strict cresc. $\Rightarrow$

$H: I_2 \to I_2'$; $I_2' := H(I_2)$ interval $\subset \mathbb{R}$, este inv. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists H^{-1}: I_2' \to I_2$ deriv. și $\left[H^{-1}(H(x))\right]' = \frac{1}{H'(x)}$, $x \in I_2$.

$\Rightarrow$ $H(x(t)) = G(t) + C$, $t \in I$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x(t) = H^{-1}(G(t)+C),\ t \in I.}$ (2)

Ec. (2) dă soluția generală a ec. (1)

Obs: $C \in \mathbb{R}$ verif. $\boxed{G(I)+C \subset I_2'}$

Obs: ce se întâmplă de. $\exists\, x_0 \in I_2$ a.i. $h(x_0)=0$?

$x' = g(t)\cdot h(x)$

$x = x_0 \Rightarrow x' = 0$, $h(x_0) = 0 \rightarrow \boxed{x = x_0 \text{ este soluție}}$ a ec. (1).

pct. x_0 furnizează soluții particulare ale ec. (1). Întâi aflăm soluțiile particulare ale pb. și apoi continuăm cu sol. gen. pe intervale ce au ca extrem. pct. în care $h(x)$ se anulează.

Obs: Cum se rezolvă problema Cauchy asoc. ec. (1)?

$$\begin{cases} x' = g(t)\cdot h(x) \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I_1,\ x_0 \in I_2 \text{ fixați} \end{cases}$$

$x : I \to I_2$,

$H(x(t)) = G(t) + C$, $t \in I$.

$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$, $t \in I_1$, $G(t_0) = 0$

$H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{h(y)}\, dy$, $x \in I_2$, & $H(x_0) = 0$

$$x(t_0) = x_0 \Rightarrow \underbrace{H(\underbrace{x(t_0)}_{=x_0})}_{=0} = \underbrace{G(t_0)}_{=0} + C \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

Soluția pb. Cauchy este ec. (2) în care $C = 0$, iar $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$ și

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{h(y)}\, dy.$$

Algoritm de rezolvare a ec: $\boxed{\frac{dx}{dt} = g(t)\cdot h(x).}$

1. Separarea variab: $\frac{dx}{h(x)} = g(t)\, dt$.
2. Se integrează: $\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\, dt + C$, $C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow H(x) = G(t) + C$.
3. Se explicitează x: $x = H^{-1}(G(t) + C)$.

Exemple:

(1). $x' = \varepsilon(1+x^2)$, $\varepsilon > 0$.

$g(t) = \varepsilon$, $t \in I_1 = \mathbb{R}$.

$h(x) = 1 + x^2$, $\forall x \in I_2 = \mathbb{R}$.

$$x' = \varepsilon(1+x^2) \xLeftrightarrow{\text{Pas 1.}} \frac{dx}{1+x^2} = \varepsilon\, dt \xLeftrightarrow{\text{Pas 2.}} \operatorname{arctg} x = \varepsilon t + C,\ C \in \mathbb{R},\ t \in I \text{ int} \subset \mathbb{R}.$$

I (și C) se det. a.î. $-\frac{\pi}{2} < \varepsilon t + C < \frac{\pi}{2}$, $\forall t \in I$. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = \operatorname{tg}(\varepsilon t + C)}$$

(2) Sol. pb. Cauchy: $\begin{cases} x' = \varepsilon(1+x^2) \\ x(0) = 0 \end{cases}$. Știm deja soluția generală.

I int, $0 \in I$

Considerăm $t = 0$ în ec: $\operatorname{arctg} x = \varepsilon t + C \to$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{arctg} \underbrace{x(0)}_{=0}}_{=0} = \varepsilon \cdot 0 + C \to \underline{C = 0}.$$

I se det. din cond. $\varepsilon t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow t \in \left(-\frac{\pi}{2\varepsilon}, \frac{\pi}{2\varepsilon}\right) := J$

2. Ecuații omogene.

$\boxed{x' = f(t, x)}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 / t \neq 0\}$.

D = tot planul din care scoatem axa ordonatelor; D = deschis.

f cont.

f omogenă: $f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x)$, $\forall (t,x) \in D$ și $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$

Se det. $x: I \to \mathbb{R}$ deriv., $I \subset \mathbb{R}^*$, I int.

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in I \Leftrightarrow t \cdot y'(t) + y(t) = \underbrace{f(t, t y(t))}_{= f(1, y(t))} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{x(t)}{t} \Leftrightarrow \boxed{x(t) = t \cdot y(t)}$$

$$y: I \to \mathbb{R} \text{ deriv.} \Leftrightarrow y'(t) = \frac{f(1, y(t)) - y(t)}{t} \Leftrightarrow y(t) \text{ sol. a ec. } \boxed{y' = \frac{f(1,y) - y}{t}}$$

= C11 2 =

Algoritm de rezolvare a ec. omogene:

1. Se face schimbarea de fct. necunoscută

$$\boxed{x = t\cdot y}$$

2. Se rezolvă ec. cu variab. sep.:

$$y' = \frac{f(1,y)-y}{t}.$$

3. Se revine la calculul lui $x = ty$.

3. Ecuații liniare.

$\boxed{x' = a(t)x + b(t)}$; $a, b : I \to \mathbb{R}$ cont, I int $\subset \mathbb{R}$.

Fie $x : I \to \mathbb{R}$ deriv.; $x'(t) = a(t)\cdot x(t) + b(t)$, $t \in I \iff$

$$\iff x'(t) - a(t)\cdot x(t) = b(t),\ \forall\, t\in I \ /\cdot e^{-A(t)},\quad A(t) = \int a(t)\,dt,\ t\in I$$

$$\iff e^{-A(t)}\cdot x'(t) - a(t)\cdot e^{-A(t)}\cdot x(t) = e^{-A(t)}\cdot b(t).$$

$$\iff \left[e^{-A(t)} x(t)\right]' = e^{-A(t)}\cdot b(t),\ t\in I \Rightarrow$$

$$\iff e^{-A(t)}\cdot x(t) = \int e^{-A(t)}\cdot b(t)\,dt + C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$\iff \boxed{x(t) = e^{A(t)}\cdot \int e^{-A(t)}\cdot b(t)\,dt + C\cdot e^{A(t)},\ t\in I}$$

Rezolvarea pb. Cauchy: $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0\in I,\ x_0\in\mathbb{R} \text{ fixați} \end{cases}$

Alegem $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$, $t\in I$

$$\Rightarrow \text{Sol. gen.: } x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\cdot \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(r)\,dr}\cdot b(s)\,ds + C\cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \xrightarrow{t=t_0}$$

$$\Rightarrow x_0 = C\cdot e^0 = C \Rightarrow \boxed{C = x_0}$$

= cu 22

= 4 / 62

Explicit soluția pb. Cauchy este:

$$\boxed{x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)\,d\tau} \cdot b(s)\,ds + x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}, \quad t\in I}$$

Algoritm de calcul al soluției:

1. Se grupează termenii care conțin x.
2. Se amplifică cu $e^{-\int A(t)\,dt}$, $A'(t) = a(t)$.
3. Se integrează.
4. Se explicitează $x(t)$

4. Ecuații Bernoulli

$\boxed{x' = a(t)x + b(t)\cdot x^\alpha}$; $a, b : I \to \mathbb{R}$ cont, I int $\subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$: ec. lin. $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

$x : J \to (0,\infty)$ deriv., J int $\subset I$.

$x'(t) = a(t)\cdot x(t) + b(t)\cdot [x(t)]^\alpha \quad \Big| : [x(t)]^\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow [x(t)]^{\alpha}\cdot x'(t) = a(t)\cdot \underbrace{x(t)^{1-\alpha}}_{:=y(t)} + b(t),\ t\in J$; $\quad y(t) := (x(t))^{1-\alpha}$

$y : J \to (0,\infty)$ deriv.

$y'(t) = (1-\alpha)(x(t))^{-\alpha}\cdot x'(t)$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{1-\alpha}\cdot y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y'(t) = (1-\alpha)\cdot a(t)\cdot y(t) + (1-\alpha)\,b(t),\ \forall t\in J. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(t)$ este sol. a ec. liniare $\boxed{y' = (1-\alpha)\,a(t)\cdot y + (1-\alpha)\cdot b(t)}$ ec. lin.

$(x(t))^{1-\alpha} = y(t) \Rightarrow \boxed{x(t) = (y(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}}$

Algoritm de calcul al sol:

1. Se introduce o nouă fct. necunoscută:

$$y = x^{1-\alpha} \iff x = y^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

2. Se rezolvă ec. liniară verificată de y.

3. Se calculează $x = y^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Ecuații dif. integrabile prin cuadraturi (cont).

5. Ecuații Riccati

(1) $\boxed{x' = a(t)x^2 + b(t)\cdot x + c(t)}$, $a, b, c : I \to \mathbb{R}$, I int $\subset \mathbb{R}$.

Obs: $x' = x^2 + t^2 \to$ NU se poate integra prin cuadraturi

Obs: Ec. (1) se poate rezolva prin cuadraturi dc se cunoaște o soluție particulară $x_0 = x_0(t) : J \to \mathbb{R}$, J int $\subset I$

Schimbare de fct. necunoscută: (2) $\boxed{y := x - x_0(t)}$.

x_0 deriv. și $x_0' = a(t)x_0^2 + b(t)x_0 + c(t)$, $t \in J$.

$y := x - x_0(t) \Leftrightarrow x = y + x_0(t) \Rightarrow x' = y' + x_0' \Leftrightarrow$ ec. (1) devine:

$\Leftrightarrow y' + x_0' = a(y + x_0)^2 + b(y + x_0) + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y' + \cancel{x_0'} = \cancel{ax_0^2 + bx_0 + c} + ay^2 + (2ax_0 + b)y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{y' = (2ax_0 + b)y + ay^2}$ (3) ec. Bernoulli

$$\boxed{x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \overset{y = x - x_0}{\Longleftrightarrow} y' = (2ax_0 + b)y + ay^2}$$

• Algoritm de rezolvare:

1. Det. unei sol. particulare x_0.
2. Facem schimbarea de fct. $\boxed{y = x - x_0}$
3. Rezolv. ec. Bernoulli: $z = \frac{1}{y}$, $y \neq 0$.
4. Revenim la ec. Riccati: $x = y + x_0$.

Ex: $\boxed{x' = x^2 + x - 4e^{2t}}$; $a(t) = 1$, $b(t) = 1$, $c(t) = !$

$I = \mathbb{R}$.

1. Căutăm o sol. particulară de forma: $x_0 = \alpha \cdot e^{\beta \cdot t}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$.

$x_0' = \alpha \cdot \beta \cdot e^{\beta t}$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha\cdot\beta\cdot e^{\beta t} = \alpha^2 e^{2\beta t} + \alpha\cdot e^{\beta t} - 4e^{2t} \Big\} \Rightarrow 0 = \alpha^2 e^{2t} + \alpha\cdot e^{t} - 4e^{2t} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\alpha\cdot\beta = \alpha \underset{\alpha\neq 0}{\Longrightarrow} \boxed{\beta = 1}$$

$$\alpha^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = \pm 2}$$

am găsit 2 soluții particulare $\begin{cases} x_{01}(t) = 2e^t \\ x_{02}(t) = -2e^t \end{cases}$

Avem nevoie de o sg sol. part $\Rightarrow$ alegem $\boxed{x_0(t) = 2e^t}$

(2) Schimbarea de fct. necunoscută: $y = x - 2e^t \Longleftrightarrow x = y + 2e^t$

$$y' + \cancel{2e^t} = y^2 + 4ye^t + \cancel{4e^{2t}} + y + \cancel{2e^t} - \cancel{4e^{2t}} \Longleftrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = (4e^t+1)y + y^2} \text{ ec. Bernoulli cu } \alpha = 2.$$

(3) Rezolv. ec. Bernoulli

(a) Reducem ec. Bernoulli la o ec. liniară.

Facem schimb. de fct. necunoscută: $y = \frac{1}{z} \Longleftrightarrow z = \frac{1}{y}$, $y \neq 0$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2} \Rightarrow \text{înloc în ec. Bernoulli} \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = (4e^t+1)\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow z' = -(4e^t+1)z - 1 \quad \text{(ec. liniară)}$$

b). Rezolv. ec. liniare

$$z' + (4e^t+1)\cdot z = -1 \;\Big|\cdot e^{\int(4e^t+1)dt} = e^{4e^t+t} \Longleftrightarrow \left[e^{4e^t+t}\cdot z\right]' = -e^{4e^t+t} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow e^{4e^t+t}\cdot z = -\underbrace{\int(e^{4e^t}\cdot e^t)\,dt}_{=\frac{1}{4}e^{4e^t}} + C \Longleftrightarrow z = -e^{-4e^t-t}\cdot\frac{1}{4}e^{4e^t} + c\cdot e^{-4e^t-t} \Longleftrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = c\cdot e^{-4e^t-t} - \frac{1}{4}e^{-t}}$$ ($z\neq 0$ ne dă restricții asupra lui C și asupra lui I).

(de ex: pt $C \le 0 \Rightarrow I = \mathbb{R}$
$C > 0 \Rightarrow I$ este o semidr. ce tb. calc)

(4) Revenim la ec. Ricatti

$$y = \frac{1}{z},\; x = \frac{1}{z} + 2e^t \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{c\cdot e^{-4e^t-t} - \frac{1}{4}e^{-t}} + 2e^t}$$

= cu 3 =

= 2/5 =

I.2. / I.3 Existența și unicitatea soluției problemei Cauchy.

1. Preliminarii (șiruri de funcții).

Definiție: Fie I int. $\subseteq \mathbb{R}$, $(\varphi_i)_{i\geq 1}$ un șir de funcții.

$\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, $i \geq 1$; $\varphi : I \to \mathbb{R}$.

1. Șirul $(\varphi_i)_{i\geq1}$ este convergent (simplu) către φ pe I ($\varphi_i \xrightarrow{s} \varphi$ pe I) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in I$, $\exists N(\varepsilon, t) \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall i \geq N(\varepsilon, t)$ avem $|\varphi_i(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$

2. Șirul $(\varphi_i)_{i\geq1}$ este convergent uniform către φ pe I ($\varphi_i \xrightarrow{u} \varphi$ pe I) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall i \geq N(\varepsilon)$, $\forall t \in I$ avem $|\varphi_i(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$

3. Șirul $(\varphi_i)_{i\geq1}$ este șir Cauchy pe I $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall i, j \geq N(\varepsilon)$, $\forall t \in I$ avem $|\varphi_i(t) - \varphi_j(t)| \leq \varepsilon$

Lemă: Considerăm un șir Cauchy de fct. cont. pe int. I, $(\varphi_i)_{i\geq1}$ ($I = [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$)

(a) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ cont, a.i. $\varphi_i \xrightarrow{u} \varphi$ pe I.

(b) $\lim\limits_{i\to\infty} \int_I \varphi_i(t)\,dt = \int_I \varphi(t)\,dt$.

Dem: (a) $\forall t \in I$, $(\varphi_i(t))_{i\geq1}$ este șir Cauchy pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists \varphi(t) \in \mathbb{R}$ a.i. $\varphi_i(t) \xrightarrow[i\to\infty]{u} \varphi(t)$

$\Rightarrow$ s-a def. o fct $\varphi : I \to \mathbb{R}$.

1. dem. converg. unif.: $|\varphi_i(t) - \underbrace{\varphi_j(t)}_{\substack{\downarrow j\to\infty \\ \varphi(t)}}| \leq \varepsilon$, $\forall i, j \geq N(\varepsilon)$, $\forall t \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.i. $|\varphi_i(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$, $\forall i \geq N(\varepsilon)$, $\forall t \in I$

$\Rightarrow \varphi_i \xrightarrow{u} \varphi$ pe I. q.e.d.

2. dem. că φ este cont: fie $t_0 \in I$ arbitrar fixat. Studiem cont. în t_0:

$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t) - \varphi_i(t) + \varphi_i(t) - \varphi_i(t_0) + \varphi_i(t_0) - \varphi(t_0)$

$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq |\varphi(t) - \varphi_i(t)| + |\varphi_i(t) - \varphi_i(t_0)| + |\varphi_i(t_0) - \varphi(t_0)|$

Aleg $\varepsilon > 0$ și aleg $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.i. $|\varphi_i(t) - \varphi(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ și fixăm un astfel de i

$\Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \underbrace{|\varphi(t) - \varphi_i(t)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + |\varphi_i(t) - \varphi_i(t_0)| + \underbrace{|\varphi_i(t_0) - \varphi(t_0)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$

Rămâne să dem. că $|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_0)| \le \frac{\varepsilon}{3}$

φ_i cont în t_0 dc. $\forall \varepsilon>0, \delta(\varepsilon)>0$ a.î. $|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_0)| \le \frac{\varepsilon}{3}$ dc. $t \in I$ și $|t-t_0| \le \delta(\varepsilon)$

$\Rightarrow |\varphi(t)-\varphi(t_0)| \le \frac{\varepsilon}{3}$ dc $|t-t_0| \le \delta(\varepsilon)$ $t \in I$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ φ cont în t_0 ales arbitrar $\Rightarrow \varphi$ cont pe I. q.e.d

(6). $\left|\int_I \varphi_i(t)dt - \int_I \varphi(t)dt\right| = \left|\int_a^b [\varphi_i(t)-\varphi(t)]\,dt\right| \le \int_a^b |\varphi_i(t)-\varphi(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{b-a}$ dc. $i \ge N(\varepsilon)$ $\varepsilon>0, t\in I$

$\int_a^b |\varphi_i(t)-\varphi(t)|\,dt \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \int_I \varphi_i(t)dt = \int_I \varphi_i(t)dt.$ q.e.d

Obs: Fie $\varphi: I \to \mathbb{R}$ cont, $I=[a,b] \Rightarrow \exists\, t_m, t_M \in I$ a.i. $\varphi(t_m) \le \varphi(t) \le \varphi(t_M)\ \forall t\in I$

2. Problema Cauchy.

(1) $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

* Ipoteze: i) $f: D \to \mathbb{R}$, D deschis $\subset \mathbb{R}^2$, f cont și $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}$ cont pe I.

ii) $(t_0, x_0) \in D$

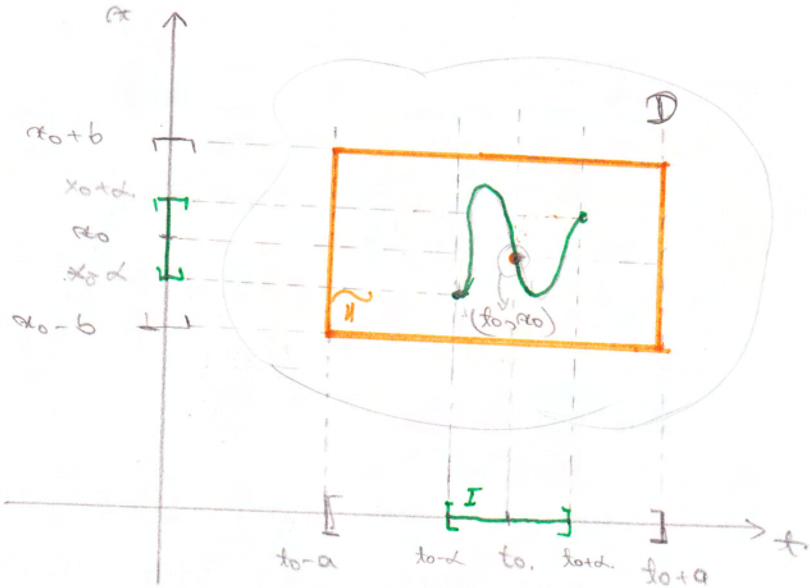
* Cerințele pb:

alegem $a>0, b>0$ a.i.

$\Pi: [t_0-a, t_0+a]\times[x_0-b, x_0+b] \subset D$.

$M := \sup_{\Pi} |f|$, $\alpha := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

$I: [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$



Se cere: $\varphi: I \to \mathbb{R}$ a.î.

(2) $\begin{cases} \Gamma_\varphi := \{(t,\varphi(t)), t\in I\} \subset D \\ \varphi \text{ deriv.} \\ \varphi'(t) = f(t,\varphi(t))\ \forall t\in I \\ \varphi(t_0) = x_0, \end{cases}$

=cu 3=

=4/5=

! Teorema (Cauchy-Picard). : În ipotezele precizate, pb. Cauchy (1) are o unică soluție $\varphi: I \to [x_0-b, x_0+b]$.

Lema 1: În ipotezele date, $\exists L>0$, a.î. $f(t,x_1)-f(t,x_2) \le L|x_1-x_2| \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in \overline{\Pi}$

Dem. lema 1: $f(t,x_1)-f(t,x_2) \overset{\text{th. crești. finite}}{=\!=} \frac{\partial f}{\partial x}(t, c(t,x_1,x_2))\cdot(x_1,x_2)$;

cu $c(t,x_1,x_2) \in [x_1,x_2]$ (d/c $x_1 < x_2$)

$(t, c(t,x_1,x_2)) \in \overline{\Pi}$

$L := \sup_{\Pi} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$

$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \le L|x_1-x_2|$ Q.E.D.

---

th. creșterilor finite (Th. Lagrange) : $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$

f cont. pe $[a,b]$ și deriv. pe (a,b)

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ a.i. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema de existență și unicitate (cont)

(1) $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Ipoteze: $f : D \to \mathbb{R}$, D deschis $\subseteq \mathbb{R}^2$

f cont, $\exists \frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$, cont.

$(t_0, x_0) \in D$

Se cere: $\varphi : I \to \mathbb{R}$ deriv., I int $\subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$

$\Gamma_\varphi := \{(t, \varphi(t)) ; t \in I\} \subset D$

(2) $\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \ t \in I \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$

Notații: $a, b > 0$ a.î. $\widetilde{\Pi} := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset D$.

$M := \sup_{\Pi} |f|$, $\alpha := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

> **Teoremă (Cauchy-Picard)**: În ipotezele precizate, problema (1) admite o singură soluție $\varphi : I \to [x_0 - b, x_0 + b]$.

Lema 1: Există $L > 0$ a.i. să se verif. inegalitatea:

(3) $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$, $\forall (t, x_1), (t, x_2) \in \widetilde{\Pi}$.

Dem: vezi CU 3

Lema 2: Fie $\varphi : I \to [x_0 - b, x_0 + b]$ cont. At. φ este soluție a pb (1)

$\Leftrightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$, $t \in I$ (4)

Dem: "$\Rightarrow$" Dc. φ este sol a pb. (1), φ este deriv. și verif. (2)

$\varphi'(s) = f(s, \varphi(s)), s \in I \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$, $t \in I$

$\Rightarrow \varphi(t) - \underbrace{\varphi(t_0)}_{= x_0} = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \Rightarrow (4)$

"$\Leftarrow$" $s \in I \longmapsto f(s, \varphi(s)) \in \mathbb{R}$ cont $\Rightarrow$ $t \in I \longmapsto \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds \in \mathbb{R}$

derivab. și cu derivata $f(t, \varphi(t))$

$(4) \Rightarrow \varphi$ derivab și $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

$$\varphi(t_0) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))\,ds}_{=0} = x_0. \Rightarrow \varphi \text{ verif. } (2).$$

Dem th:

I. Existența soluțiilor (aprox. succesive):

$(\varphi_i)_{i \geq 0}$, $\varphi_i : I \longrightarrow [x_0 - b, x_0 + b]$, $\varphi_i \xrightarrow{u} \varphi$ pe I, φ sol. a pb. (1)

① Construcția șirului $(\varphi_i)_{i\geq 0}$ (prin recurență)

$\varphi_0 := x_0.$

pp. φ_i deja construit $\Rightarrow \varphi_{i+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds$, $t \in I$.

* φ_{i+1} are propr. necesare.
  - este bine definită: $(s, \varphi_i(s)) \in \Pi \subset D$
  - este o fct cont: (φ_i cont.)
  - $\varphi_{i+1}(t) \in [x_0 - b, x_0 + b]$: $|\varphi_{i+1}(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \varphi_i(s))|}_{\leq M}\,ds\right| \leq$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} M\,ds\right| = M|t - t_0| \leq M\alpha \leq$$

$$\leq M \cdot \frac{b}{M} = b \Rightarrow \varphi_{i+1}(t) \in [x_0 - b, x_0 + b], \forall t \in I$$

② $(\varphi_i)_{i\geq 0}$ șir Cauchy pe I:

* Arăt că $|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \leq M \cdot L^i \cdot \frac{|t - t_0|^{i+1}}{(i+1)!}$, $\forall t \in I$, $\forall i \geq 0$ (5)

Inducție: $i = 0 \Rightarrow |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left|\cancel{x_0} + \int_{x_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\,ds - \cancel{x_0}\right| \leq$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, x_0)|\,ds\right| \leq M \cdot |t - t_0|$$

$i \longrightarrow i+1$: Pp. rel.(5) verif pe i. Arăt pt $i+1$.

$$\left|\varphi_{i+2}(t)-\varphi_{i+1}(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{i+1}(s)) - f(s,\varphi_i(s))ds\right| \le$$

$$\le \underbrace{\left|\int_{t_0}^{t} \left|f(s,\varphi_{i+1}(s)) - f(s,\varphi_i(s))\right| ds\right|} \le \left|\int_{t_0}^{t} M\cdot L^{i+1}\cdot \frac{|s-t_0|^{i+1}}{(i+1)!} ds\right| =$$

Lema 1 $\Rightarrow \le L\left|\varphi_{i+1}(s)-\varphi_i(s)\right| \underset{\text{din ip. ind.}}{\le} M\cdot L^{i+1}\cdot \frac{|s-t_0|^{i+1}}{(i+1)!}$.

$$\overset{t>t_0}{=} \frac{M\cdot L^{i+1}}{(i+1)!}\cdot \underbrace{\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{i+1}ds}_{=\frac{(t-t_0)^{i+2}}{i+2}} = M\cdot L^{i+1}\cdot \frac{|t-t_0|^{i+2}}{(i+2)!}$$

* Arăt că $\left|\varphi_{i+p}(t)-\varphi_i(t)\right| \le M\cdot\alpha\cdot e^{L\alpha}\cdot\frac{(L\alpha)^i}{i!}$, $\forall t\in I$, $\forall i\ge 0$, $p\ge 1$ (6)

$$\left|\varphi_{i+p}(t)-\varphi_i(t)\right| = \left|\sum_{j=0}^{p-1}\left[\varphi_{i+j+1}(t)-\varphi_{i+j}(t)\right]\right| \le \sum_{j=0}^{p-1}\underbrace{\left|\varphi_{i+j+1}(t)-\varphi_{i+j}(t)\right|} \le$$

$$\overset{(5)}{\Longrightarrow} \le M\cdot L^{i+j}\cdot\frac{|t-t_0|^{i+j+1}}{(i+j+1)!}$$

$$\underset{(i+j+1)!\ge(i+1)!\,j!}{\overset{|t-t_0|\le\alpha}{\le}} M\cdot L^i\cdot\frac{\alpha^{i+1}}{(i+1)!}\cdot\underbrace{\sum_{j=0}^{p-1}\frac{L^j\cdot\alpha^j}{j!}}_{=e^{L\alpha}} = M\cdot\alpha\cdot\frac{(L\cdot\alpha)^i}{i!}\cdot e^{L\alpha}.$$

* Arăt că (6) implică șir Cauchy.

$$(6) \Rightarrow \sup_{t\in I}\left|\varphi_{i+p}(t)-\varphi_i(t)\right| \le M\cdot\alpha\, e^{L\cdot\alpha}\cdot\frac{(\alpha L)^i}{i!} \xrightarrow{i\to\infty} 0 \quad \forall p\ge 1.$$

$$\frac{(\alpha L)^i}{i!} \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

(3) Existența soluției ec (4)

$(\varphi_i)_{i\ge 0}$ șir Cauchy pe $I \Rightarrow \exists\, \varphi: I\longrightarrow\mathbb{R}$, cont. a.î. $\varphi_i \xrightarrow{u} \varphi$ pe I,

$\varphi_i(t)\in[x_0-b, x_0+b] \Rightarrow \varphi(t)\in[x_0-b, x_0+b]$, $t\in I$

* Dem. că φ este sol a ec. int. (4).

$\varphi_i \xrightarrow{u} \varphi$ pe $I \Rightarrow f(s,\varphi_i(s)) \xrightarrow{u} f(s,\varphi(s))$ pe $I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\, ds}_{= \varphi_{i+1}(t) - x_0 \to \varphi(t)} \xrightarrow{i \to \infty} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds. \quad \Rightarrow$$

$$|f(s, \underbrace{\varphi_i(s)}_{\in \Pi}) - f(s, \underbrace{\varphi(s)}_{\in \Pi})| \underset{\text{Lema 1}}{\leq} L \cdot |\varphi_i(s) - \varphi(s)| \xrightarrow[i \to \infty]{u} 0 \text{ pe } I$$

$$\Rightarrow \varphi(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \Rightarrow \varphi \text{ verifică } (4)$$

II Unicitatea sol. pb (4).

Fie $\varphi, \psi : I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_0 - b, x_0 + b]$ cont., care verif.:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \\ \psi(s) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\varphi(t) - \psi(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))]\, ds\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, \underbrace{\varphi(s)}_{\in \Pi}) - f(s, \underbrace{\psi(s)}_{\in \Pi})|\, ds\right| \leq L \cdot \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \psi(s)|\, ds\right|$$

$t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha \Rightarrow \lambda'(t) \leq L \cdot \lambda(t) \Rightarrow \lambda(t) - L \cdot \lambda(t) \leq 0. \;/\cdot e^{-Lt} \Rightarrow$

Not: $\theta(t) := |\varphi(s) - \psi(s)|$ cont.

$\lambda(t) := \int_{t_0}^{t} \theta(s)\, ds$, deriv. și $\lambda' = \theta$

$\Rightarrow [\lambda(t) e^{-Lt}]' \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \lambda(t) e^{-Lt} \leq \lambda(t_0) e^{-\lambda t_0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(t) = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t), \; t \in [t_0, t_0 + \alpha]$

O teoremă de existență globală

Ipoteze: $D = [a,b] \times \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$

$f : D \to \mathbb{R}$ cont, $\exists \frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$, cont.

f este cu creștere liniară în x:

(7) $\exists A, B > 0$ a.î. $|f(t,x)| \le A|x| + B$, $\forall (t,x) \in D$

Teoremă. În ipotezele de mai sus, pb. Cauchy (1) are o unică soluție $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\forall (t_0, x_0) \in D$

Dem: I Unicitatea se face la fel ca la Th. Cauchy-Picard.

II Pt. existență, construim la fel, șirul de aprox. succesive $(\varphi_i)_{i \ge 0}$,

$\varphi_0(t) = x_0$; $\varphi_{i+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds$, $i \ge 0$, $t \in [a,b]$.

$\varphi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, cont, $i \ge 0$

(1) $(\varphi_i)_{i \ge 0}$ unif. converg. pe $[a,b]$.

(2) $\varphi_i : [a,b] \to [-k, k]$, $k > 0$, indep. de i

Not: $\Pi := [a,b] \times [-k, k]$

M, L const. din dem. th. Cauchy-Picard coresp. lui Π:

$M := \sup_{\Pi} |f|$,

$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le L \cdot |x_1 - x_2|$, $(t, x_1), (t, x_2) \in \Pi$

Dem. (2): Considerăm $c_1, c_2 > 0$ const: $|\varphi_i(t)| \le c_1 \cdot e^{c_2 |t - t_0|}$ (*), $t \in [a,b]$, $i \ge 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow k = c_1 \cdot e^{c_2 (b-a)}$

dem. (*) prin inducție:

$i = 0$: $\varphi_0(t) = x_0 \Rightarrow c_1 \ge |x_0|$

$i \to i+1$: $\varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds \Rightarrow |\varphi_{i+1}(t)| \underset{(7)}{\le} |x_0| + \int_{t_0}^{t} (A|\varphi_i(s)| + B)\,ds$

pp. $t_0 \le t \le b$.

= cu 4 =

$$\leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} A \cdot c_1 e^{c_2(s-t_0)} \cdot B \, ds = |x_0| + B(t-t_0) + \frac{A \cdot c_1}{c_2}\left(e^{c_2(t-t_0)} - 1\right) \leq$$

$$\leq |x_0| + B(b-a) - \frac{A \cdot c_1}{c_2} + \frac{A \cdot c_1}{c_2} \cdot e^{c_2(t-t_0)} \Big\} \rightarrow$$

Aleg $\boxed{c_2 = A}$, $\boxed{c_1 = |x_0| + B(b-a)}$ $\Big| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x_0| + B(b-a) - \frac{\cancel{A} \cdot (|x_0| + B(b-a))}{\cancel{A}} + \frac{\cancel{A} \cdot (|x_0| + B(b-a))}{\cancel{A}} \cdot e^{A(t-t_0)}$$

$$\leq \left[|x_0| + B(b-a)\right] \cdot e^{A(t-t_0)}$$

$|\varphi_1(t)| \leq c_1 \cdot e^{c_2(t-t_0)}$.

04. 11. 2010

I.4. Dependența continuă a soluțiilor pb. Cauchy de datele inițiale și parametrii

$$(1)\ \begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$(t, x) \in D$ deschis $\subset \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \Lambda = [\lambda_0, \lambda_1]$.

Ipoteze: $\begin{cases} f : D \times \Lambda \to \mathbb{R} \text{ cont} \\ \exists\ \frac{\partial f}{\partial x} : D \times \Lambda \to \mathbb{R} \text{ cont} \\ (t_0, x_0) \in D \end{cases}$

Teorema Cauchy-Picard: $a, b > 0$, $\Pi := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset D$.
$M = \sup_{\Pi \times \Lambda} |f|$, $\alpha := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. $\Longrightarrow$
$\exists!\ \varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) : I \to \mathbb{R}$ sol. a pb (1).
$I := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $I(t_0, x_0, \lambda)$ → I dep. de t_0, x_0, λ.

Teoremă: Pp. verif. cond. de mai sus. Fie $(\bar t_0, \bar x_0) \in D$. At. $\exists\ \alpha > 0$ a.î.
$\forall\ t_0 \in I$, $I := [\bar t_0 - \alpha, \bar t_0 + \alpha]$, $\forall\ x_0 \in J$, $J := [\bar x_0 - \alpha, \bar x_0 + \alpha]$,
$\forall\ \lambda \in \Lambda$, $\exists!\ \varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) : I \times I \times J \times \Lambda \to \mathbb{R}$ sol. a pb. (1).
cont. în raport cu ansamblul variab.

Dem:

Pas. 1: Reducerea pb. (1) la cazul: $t_0 = x_0 = 0$.

Pp. $\bar t_0 = \bar x_0 = 0$ și alegem $\delta > 0$ a.î. $[-2\delta, 2\delta] \times [-2\delta, 2\delta] \subset D$.

Facem translația $s = t - t_0$, $y = x - x_0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (1')\ \begin{cases} y' = f(s + t_0, y + x_0, \lambda) =: g(s, y, \underbrace{t_0, x_0, \lambda}_{=:\mu}) \\ y(0) = 0 \end{cases};\quad s, y \in [-\delta, \delta],\ \mu \in [-\delta, \delta]^2 \times \Lambda$$

Aplic. th. Cauchy-Picard pb. (1') $\Rightarrow$ $M := \sup_{[-\delta,\delta]^2 \times \Lambda} |g|$, $\beta := \min\left(\delta, \frac{\delta}{M}\right)$

$\exists!\ \psi = \psi(s, \mu) : [-\beta, \beta] \times [-\delta, \delta]^2 \times \Lambda \to \mathbb{R}$ sol. a pb. (1').

Pas. 2 : Dem. că ψ cont în rap. cu ansamblul argumentelor.

$$\psi = \lim_{i\to\infty} \psi_i \text{ (limită uniformă)}, \quad \psi_0 = 0, \quad \psi_{i+1}(s,\mu) = \int_0^s g(r, \psi_i(r,\mu), \mu)\, dr, \quad (*)$$
$i \in \mathbb{N}$

Vrem să arăt. că $\forall i$ $\psi_i : [-\beta, \beta] \times [-\delta, \delta]^2 \times \Lambda \to \mathbb{R}$ cont. $(**)$

Se arată ușor prin recurență

Din $(*)$ și $(**)$ $\Rightarrow$ ψ cont.

Pas. 3 : Revenirea la pb. (1)

$t = s + t_0$, $x = y + x_0$ $\Rightarrow \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) := \psi(t - t_0, t_0, x_0, \lambda) + x_0$

$\varphi : [-\alpha, \alpha] \times [-\delta, \delta] \times \Lambda \to \mathbb{R}$ cont, sol a pb. (1)

$\alpha := \dfrac{\beta}{2}$.

Q.E.D.

Obs : Se pp. că $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} : D \times \Lambda \to \mathbb{R}$ cont $\Rightarrow$

φ este derivabilă în raport cu toate argumentele și cu deriv. cont.

I. 5. Metode numerice pt. determinarea soluțiilor

– Metoda lui Euler –

$$(2) \begin{cases} x' = f(t, x), & (t, x) \in D \text{ deschis} \subset \mathbb{R}^2 \\ x(t_0) = x_0, & (t_0, x_0) \in D \end{cases}$$

Ipoteze : $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial t} : D \to \mathbb{R}$ cont

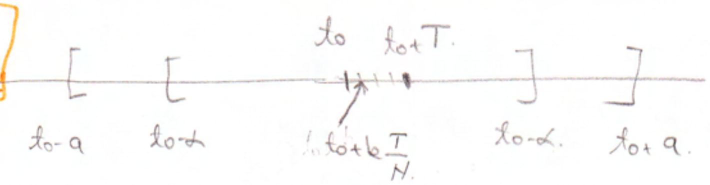
Teorema Cauchy-Picard

$a, b > 0$, $\Pi := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset D$,

$M := \sup\limits_{\Pi} |f|$, $\alpha := \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$

$\Rightarrow \exists!\ \varphi : I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_0 - b, x_0 + b]$ sol. a pb. (2).

$\boxed{\varphi(t_0 + T) \approx ?}$ $\quad 0 < T \leq \alpha$



= cu 5 =

= 21/2 =

$\varphi(t_0+T) \approx ?$

Parțial: 2 sub. teorie; 2 probleme.

Alegem $N>1$, $h=\frac{T}{N}$, $t_k = t_0 + k\cdot h$

↳ numărul de subintervale de lungimi egale în care împărțim $[t_0, t_0+\alpha]$

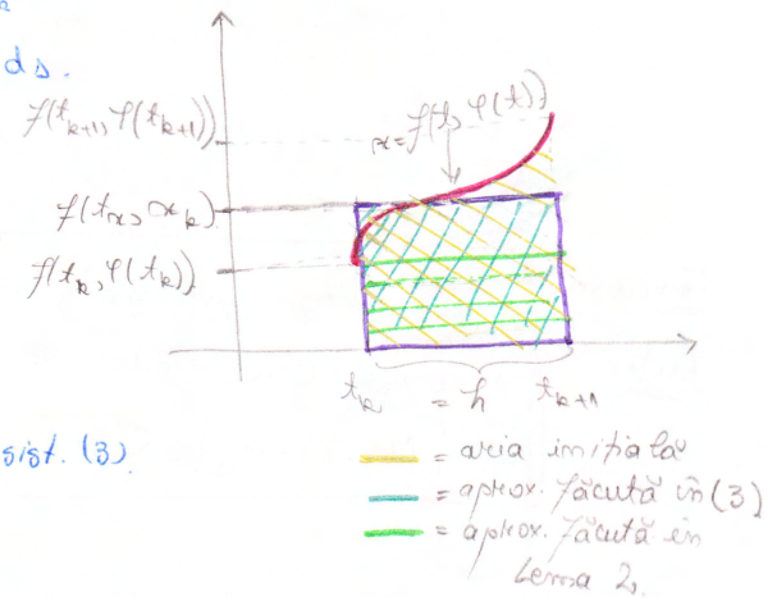
$x_k \approx \varphi(t_k)$, $0 \le k \le N$?

Ideea construcției val. aprox. x_k:

$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $t \in I$, $/\int_{t_k}^{t_{k+1}} \to$ $\quad 0 \le k \le N-1$.

$\Rightarrow \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, \varphi(s))\, ds.$

$\varphi(t_{k+1}) \approx x_{k+1}$, $\varphi(t_k) \approx x_k$, $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s,\varphi(s))\,ds \approx ? \; h f(t_k, x_k)$.



$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h f(t_k, x_k) \\ 0 &\le k \le N-1 \end{aligned}} \quad (3)$$

Tb. să arătăm buna def. a sist. (3)

<u>Lema 1:</u> Se verifică ineg. $|x_k - x_0| \le M \cdot k \cdot h$, $0 \le k \le N$

<u>Obs:</u> $M k h \le M \cdot N \cdot h$, $N = \frac{T}{h}$ $\Rightarrow M k h \le M \cdot \cancel{h} \cdot \frac{T}{\cancel{h}} \le M \cdot \alpha \le \cancel{M} \cdot \frac{b}{\cancel{M}} \le b.$

$\Rightarrow |x_k - x_0| \le b.$

$\Rightarrow$ pct. $x_k \in [x_0 - b, x_0 + b]$

pct. $(t_k, x_k) \in \Pi \subset D$ $\Rightarrow$ rel. (3) este bine def.

<u>Dem:</u> dem. prin inducție.

$k=0 \Rightarrow |x_0 - x_0| \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 0.$

$k \to k+1$: $|x_{k+1} - x_0| = |x_k - x_0 + h f(t_k, x_k)| \le |x_k - x_0| + |h \cdot f(t_k, x_k)| \le$

$\le M \cdot k \cdot h + h M = M h (k+1)$

q.e.d.

= cu 5 =

= 3/4 =

Lema 2: $\exists\, A > 0$ (indep. de t, T, N, h) a.î.

$$\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, \varphi(s))\,ds - h\cdot f(t_k, \varphi(t_k)) \right| \le A\cdot h^2, \quad 0 \le k \le N-1$$

Dem: $t_{k+1}-t_k$, $\exists\, c \in [t_k, t_{k+1}]$ (th. de medie)

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s,\varphi(s))\,ds - h\cdot f(t_k, \varphi(t_k)) = h\, f(c, \varphi(c)) - h\cdot f(t_k, \varphi(t_k)) =$$

$$= h\Big(\underbrace{f(c,\varphi(c)) - f(t_k, \varphi(c))} + \underbrace{f(t_k, \varphi(c)) - f(t_k, \varphi(t_k))}\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s,\varphi(s))\,ds - h f(t_k, \varphi(t_k)) \right| \le$$

$$\le h\,[L_1\cdot h + L\cdot M\cdot h] = h^2 (L_1 + LM).$$

$A = L_1 + LM$

Q.E.D

$L := \sup\limits_{\mathcal{U}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|, \quad L_1 := \sup\limits_{\mathcal{U}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|$

$$|f(c,\varphi(c)) - f(t_k, \varphi(c))| \le$$

$$\le L_1 \cdot \underbrace{|c - t_k|}_{\le h} \le L_1\cdot h$$

$$|f(t_k, \varphi(c)) - f(t_k, \varphi(t_k))| \le$$

$$\le L\cdot \underbrace{|\varphi(c) - \varphi(t_k)|} \le$$

$$\int_{t_k}^{c} \varphi'(t)\,dt = \int_{t_k}^{c} f(t, \varphi(t))\,dt$$

$$\le L\cdot \int_{t_k}^{c} \underbrace{|f(t, \varphi(t))|}_{\le M}\,dt \le$$

$$\le L\cdot M\cdot \underbrace{|c - t_k|}_{\le h} \le L\cdot M\cdot h.$$

Teorema Euler

$$\boxed{\text{În ipotezele precizate, există o const. } C > 0 \text{ (indep. de } \varphi, t, N, h) \text{ a.î. } |\varphi(t_0+T) - x_N| \le C\cdot h.}$$

=cu 5=

=4/4=

Metoda lui Euler (de calcul numeric) - cont

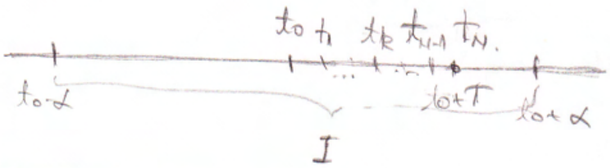
(1) $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Th: $f : D \to \mathbb{R}$ cont., $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial t} : D \to \mathbb{R}$ cont.
$D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) \in D$

$\xRightarrow[a,b>0]{} \exists!\ \varphi : I \equiv [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to [x_0-b] \times [x_0+b]$ sol. a pb (1).

$\Pi := [t_0-a, t_0+a] \times [x_0-b, x_0+b] \subset D$ (Teorema Cauchy-Picard).

$M := \sup\limits_{\Pi} |f|$, $\alpha := \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$



$0 < T < \alpha$.
$N \geq 1$, $h := \dfrac{T}{N}$
$t_k := t_0 + k \cdot h$, $0 \leq k \leq N$
$t_N = t_0 + T$

$\boxed{\varphi(t_0+T) \approx ?}$

$\Uparrow$

$\varphi(t_k) \overset{?}{\approx} x_k$, $0 \leq k \leq N$

$\varphi(t_{k+1}) = \varphi(t_k) + \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, \varphi(s))\,ds$, $0 \leq k \leq N-1$

(2) $\boxed{x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k), \ 0 \leq k \leq N-1}$

Lema 1: $|x_k - x_0| \leq M k h$, $0 \leq k \leq N$

Lema 2: $\exists\ A > 0$ (indep. de φ, k, h, T) a.î.

$$\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, \varphi(s))\,ds - h f(t_k, \varphi(t_k)) \right| \leq A \cdot h^2; \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Teorema (Euler) $\exists\ C > 0$ (indep de φ, h, T, k) a.î.

$$|\varphi(t_0+T) - x_N| \leq C \cdot h. \quad (3)$$

Dem. th :

① $E_k := |\varphi(t_k) - x_k|,\ 0 \le k \le N$.

Vrem să dem. că : $E_{k+1} \le (1+Lh)E_k + Ah^2,\ 0 \le k \le N-1$ (4).

$L := \sup_{\Pi} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$. (relația se poate deduce din recurență)

$$\begin{cases} \varphi(t_{k+1}) = \varphi(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, \varphi(s))\,ds. \\ x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k). \end{cases}$$

"−" : $\varphi(t_{k+1}) - x_{k+1} = \varphi(t_k) - x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s,\varphi(s))ds - h\cdot f(t_k, x_k) + h[f(t_k,\varphi(t_k)) - f(t_k, x_k)]$.

$E_{k+1} \le E_k + Ah^2 + h \cdot \underbrace{|f(t_k,\varphi(t_k)) - f(t_k, x_k)|}_{\le L\cdot \underbrace{|\varphi(t_k) - x_k|}_{=E_k}} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{k+1} \le E_k(1+hL) + Ah^2$

②. Dem. că $E_k \le \frac{(1+hL)^k - 1}{h\cdot L} \cdot Ah^2,\ 0 \le k \le N$ (5)

Prin inducție după k:

$k=0$: $E_0 = 0 \le |\varphi(t_0) - x_0| = |x_0 - x_0| = 0$ (A)

$k \Rightarrow k+1$: (4) $\Rightarrow E_{k+1} \le (1+hL)\left[\frac{(1+hL)^k - 1}{hL} \cdot Ah^2\right] + Ah^2 =$

$= Ah^2 \frac{(1+hL)^{k+1} - 1 \cancel{- hL} \cancel{+ hL}}{hL} = Ah^2 \frac{(1+hL)^{k+1} - 1}{hL}$

③ Ineg. (3) are loc cu $C = \frac{e^{L\alpha} - 1}{L} \cdot A$

Dem. afirm. utilizând ineg (5):

$1 + hL \le 1 + hL + \frac{(hL)^2}{2!} + \dots + \frac{(hL)^n}{n!} + \dots = e^{Lh}$

$(1+hL)^k \le e^{L\cdot k\cdot h}$, $k \cdot h = k \cdot \frac{T}{N} \underset{k \le N}{\le} T \le \alpha \Rightarrow (1+hL)^k \le e^{L\cdot\alpha} \xrightarrow{(5)}$

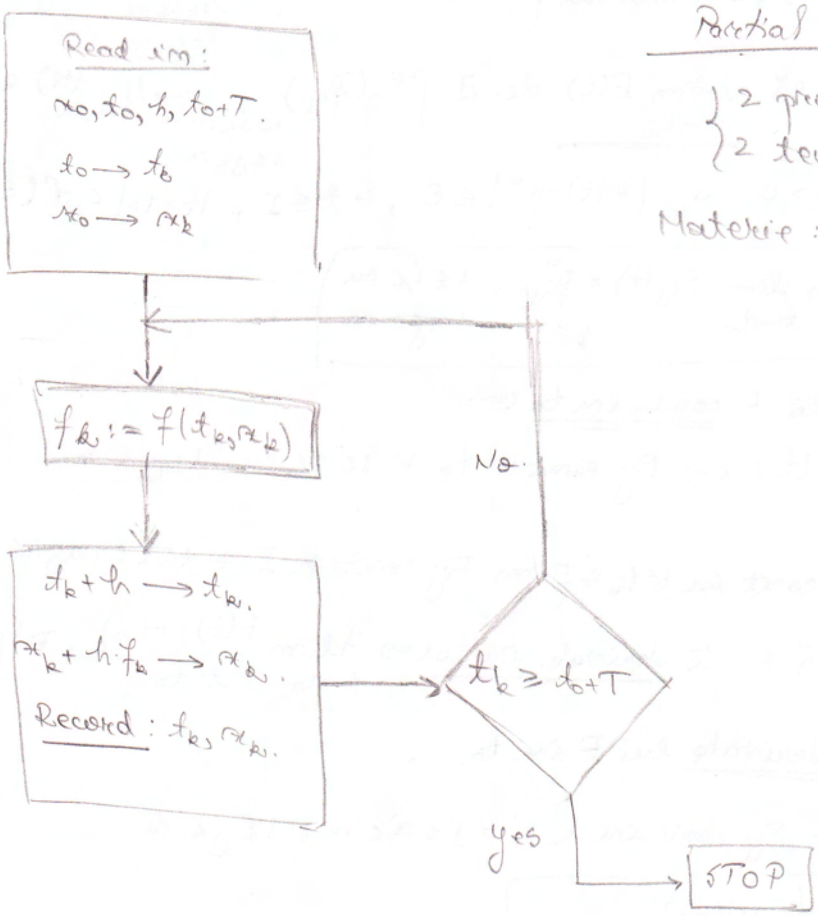
$\Rightarrow E_k \le \underbrace{\frac{e^{L\alpha} - 1}{L} \cdot A}_{= C} \cdot h,\ 0 \le k \le N$

Pt. $k = N \Rightarrow$ (3). $(t_0 + T = t_N)$ q.e.d

Parțial : peste 2 săpt.

} 2 probleme
} 2 teorie

Materie : Cap. I !



CAP. II. Sisteme diferențiale de ordin I

Notații : $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, $K^n = K \times \ldots K = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in K\}$ sp. vect / K.

$m, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{m,n}(K) := \{A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, a_{ij} \in K\}$;

$\mathcal{M}_m = \mathcal{M}_{m,m}$; $\mathcal{M}_{m,1}(K) = K^m$

Definiție: Normă pe $\mathcal{M}_{m,n}(K)$: $|\cdot| : \mathcal{M}_{m,n}(K) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $|A| := \sum\limits_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} |a_{ij}|$

Proprietăți :

(1) $|A| \geq 0$, $|A| = 0 \iff A = 0$.

(2) $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall \lambda \in K$, at. $|\lambda A| = |\lambda| \cdot |A|$

(3) $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\Rightarrow$ $|A+B| \le |A| + |B|$

(4) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K) \Rightarrow AB \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$

$|A \cdot B| \le |A| \cdot |B|$, în particular, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $x \in K^n \Rightarrow$

$\Rightarrow Ax \in K^m$ și $|Ax| \le |A| \cdot |x|$.

= cu 6 =

= 3/5 =

Definiție: Fie $F: I \to \mathcal{M}_{m,n}(K)$, I interval pe $\mathbb{R}$, $F(t) = (F_{ij}(t))_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $F_{ij}: I \to K$.

a) Fie $t_0 \in \overline{I}$; spunem că $\exists \lim\limits_{t\to t_0} F(t)$ dc. $\exists\ p^0 = (p_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ a.î.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, a.î. $|F(t) - p^0| \le \varepsilon$, $\forall t \in I$, $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$

$$\boxed{\lim_{t\to t_0} F(t) = p^0 \iff \lim_{t\to t_0} F_{ij}(t) = p^0_{ij},\ \begin{matrix}1\le i\le m\\ 1\le j\le n\end{matrix}}$$

b) Fie $t_0 \in I$, spunem că F cont. în $t_0 \iff$

$\iff \exists \lim\limits_{t\to t_0} F(t) = F(t_0) \iff F_{ij}$ cont în t_0 $\forall\ 1\le i\le m$, $1\le j\le n$

c) F cont. pe $I \iff F$ cont în $\forall\ t_0 \in I \iff F_{ij}$ cont. pe I $\forall\ 1\le i\le m$, $1\le j\le n$

d). Fie $t_0 \in I$. Spunem că F este derivab. în $t_0 \iff \exists \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} =: F'(t_0) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

$F'(t_0)$ s.n. derivata lui F în t_0.

F deriv. în $t_0 \iff F_{ij}$ deriv în t_0, $\forall\ 1\le i\le m$, $1\le j\le n$

$$\boxed{F'(t_0) = (F'_{ij}(t_0))_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}}$$

e) F deriv. pe $I \iff F$ deriv. în $\forall\ t_0 \in I \iff F_{ij}$ deriv. pe I, $\forall\ 1\le i\le m$, $1\le j\le n$

Derivata $F': I \to \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $F'(t) = (F'_{ij}(t))_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$

f). F integrab. pe $I \iff F_{ij}$ integrab. pe I, $\forall\ 1\le i\le m$, $1\le j\le n$

$$\boxed{\int_I F(t)\,dt := \left(\int_I F_{ij}(t)\,dt\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K).}$$

Definiție: Fie $(A^{(k)})_{k\ge 1}$, $A^{(k)} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

a) Șirul $(A^{(k)})_{k\ge 1}$ s.n. convergent $\iff \exists\ A^{(\infty)} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ a.î.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall k \ge N(\varepsilon)$ avem: $|A^{(k)} - A^{(\infty)}| < \varepsilon$.

Dc. $A^{(k)} = (a^{(k)}_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $a^{(k)}_{ij} \in K$, $A^{(\infty)} = (a^{(\infty)}_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $a^{(\infty)}_{ij} \in K$

at. $A^{(k)} \to A^{(\infty)} \iff a^{(k)}_{ij} \to a^{(\infty)}_{ij}$, $\begin{matrix}1\le i\le m,\\ 1\le j\le n\end{matrix}$

b) Şirul $(A^{(k)})_{k\geq 1}$ este **şir Cauchy** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $k, l \geq N(\varepsilon)$

avem: $|A^{(k)} - A^{(l)}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$ şirul $\{a_{ij}^{(k)}\}_{k\geq 1}$ sunt Cauchy, $\forall\ 1 \leq i \leq m$
$1 \leq j \leq n$

Obs: $(A^{(k)})_{k\geq 1}$ conv $\Leftrightarrow (A^{(k)})_{k\geq 1}$ este şir Cauchy

Definiţie: $(A^{(k)})_{k\geq 1}$, $A^{(k)} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

Seria $\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ este **convergentă** $\Leftrightarrow$ şirul sumelor parţiale $S^{(l)} := \sum_{k=1}^{l} A^{(l)}$

$l \geq 1$ este converg.

$$\boxed{S := \lim_{l\to\infty} S^{(l)} = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}}$$

= CU 6 =

= S 15 =

18. 11. 2010

Sisteme diferențiale de ordin I (cont.)

Definiție:

Se dă: $f=(f_1,\dots,f_n):D\to\mathbb{R}^n$, D deschis $\subset\mathbb{R}^{n+1}$. $f_i:D\to\mathbb{R}$, $f_i=f_i(t,x)$

$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

Se cere: $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n):I\to\mathbb{R}^n$, deriv., I int. $\subset\mathbb{R}$, $\varphi_i:I\to\mathbb{R}$, $\varphi_i=\varphi_i(t)$ a.î. $\Gamma_\varphi:=\{(t,\varphi(t))\in\mathbb{R}^{n+1}, t\in I\}\subset D$

și (1) $\boxed{\varphi'(t)=f(t,\varphi(t)),\ \forall t\in I}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi_1'(t)=f_1(t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))\\ \dots\\ \varphi_n'(t)=f_n(t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))\end{cases}$ $\forall t\in I$

Spunem că funcția φ este soluție a sist. dif. de ordin I:

(2) $\boxed{x'=f(t,x)}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x_1'=f_1(t,x_1,\dots,x_n)\\ \vdots\\ x_n'=f_n(t,x_1,\dots,x_n)\end{cases}$

II. 1. Problema Cauchy

- Se dă: $(x_0,t_0)\in D$, $x_0=(x_{10},\dots,x_{n0})\in\mathbb{R}^n$, $t_0\in\mathbb{R}$.
- Se cere: $\varphi:I\to\mathbb{R}^n$, soluție a sist. (2) a.î. $t_0\in I$ și să avem:

$\varphi(t_0)=x_0$ (3).

Teorema de existență și unicitate (Cauchy-Picard):

Ip. $f:D\to\mathbb{R}^n$ cont, pp. că $\exists\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}:D\to\mathbb{R}$ cont, $\forall i,j=\overline{1,n}$

Considerăm $a,b>0$ a.î. $\Pi:=[t_0-a,t_0+a]\times\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x-x_0|\le b\}}_{=:C_b(x_0)}\subset D$, $C_b(x_0)$ - cercul de centru x_0 și rază b.

$M:=\sup\limits_{\Pi}|f|$, $\alpha:=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$.

Atunci: Pb. Cauchy (4) $\begin{cases}x'=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ are o unică soluție $\varphi:[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\to\mathbb{R}^n$.

Teorema de existență și unicitate globală

NU sunt a, b din th. Cauchy.

Pp. că suntem în cond. th. Cauchy-Picard, dar în plus $D = [a,b] \times \mathbb{R}^n$, $-\infty < a < b < +\infty$ și se pp existența unor constante $A, B > 0$ a.î.

$$(5)\quad \boxed{|f(t,x)| \le A \cdot |x| + B, \ \forall (t,x) \in D} \quad \text{(adică } f \text{ este cu creștere liniară în raport cu } x\text{)}.$$

Atunci: pb. Cauchy (4) admite o unică soluție $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

II.2. Depend. cont. a sol. de datele init. și de param.

Teoremă:

Pp.
- $f : D \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$, $f = f(t,x,\lambda)$, D deschis $\subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\Lambda = \prod_{i=1}^{m} [\lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}] \subset \mathbb{R}^m$
  $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \infty$, $i = \overline{1,m}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda$
- f cont. în ansamblul variab., $\exists \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} : D \times \Lambda \to \mathbb{R}$ cont, $\forall i,j = \overline{1,n}$
- $(\overline{t_0}, \overline{x_0}) \in D$.

Atunci: $\exists \alpha > 0$ a.î. $\forall t_0 \in [\overline{t_0} - \alpha, \overline{t_0} + \alpha]$, $\forall x_0 \in C_\alpha(\overline{x_0})$, pb. Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

are o unică soluție $\forall \lambda \in \Lambda$, def. pe $[\overline{t_0} - \alpha, \overline{t_0} + \alpha]$ notată $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$

$\varphi : [\overline{t_0} - \alpha, \overline{t_0} + \alpha] \times [\overline{t_0} - \alpha, \overline{t_0} + \alpha] \times C_\alpha(\overline{x_0}) \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ este cont.

În plus, dc. $\exists \dfrac{\partial f_i}{\partial \lambda_j} : D \times \Lambda \to \mathbb{R}$ cont., $\forall i = \overline{1,n}$, $\forall j = \overline{1,m}$, atunci φ este derivabilă în raport cu toate componentele sale.

II. 3. Sisteme liniare

Definiție:

(1) $\boxed{x' = A(t)x + g(t) \equiv f(t,x)}$, $t \in [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$

$A : [a,b] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\underbrace{A(t)}_{\text{matr. sist. (1)}} = (a_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n}$, $t \in [a,b]$, $\underbrace{a_{ij}}_{\text{coef. sist (1)}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont

$\underbrace{g}_{\text{term. liber al sist. (1)}} : [a,b] \to K^n$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$, $g_i : [a,b] \to K$, cont.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K$.

Obs: $g(t) \equiv 0$ $(x' = A(t)x)$ at. sist. (1) s.n. omogen.

$g(t) \not\equiv 0$ at. sist. (1) s.n. neomogen.

Teoremă: În cond. de mai sus, $\forall t_0 \in [a,b]$, $\forall x_0 \in K^n$, pb. Cauchy

(2) $\begin{cases} x' = A(t)x + g(t), & t \in [a,b] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admite o unică soluție $\varphi : [a,b] \to K^n$.

Dem.

① $K = \mathbb{R}$. se aplică th. de existență și unicitate globală cu $f(t,x) = A(t)x + g(t)$

Verificăm ipotezele: • $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cont (A) pt. că f, g sunt cont.

• $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x) = a_{ij}(t)$: $f(t,x) = A(t)x + g(t) \iff$

$\iff f_i(t,x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + g_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in [a,b]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ deriv. part. și sunt cont.

• $\underline{|f(t,x)|} \le |A(t)x| + |g(t)| \le |A(t)| \cdot |x| + |g(t)| \le$

$\le \underline{A_0 |x| + B_0}$ $\quad A_0 := \sup |A(t)|$, $t \in [a,b]$

$\forall t \in [a,b]$ și $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\quad B_0 := \sup |g(t)|$, $t \in [a,b]$

$\Rightarrow$ cond. th. sunt îndeplinite $\Rightarrow$ pb (2) admite o unică sol $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

(2) $\mathcal{K}=\mathbb{C} \Rightarrow g(t) = g_1(t) + i g_2(t)$, $i=\sqrt{-1}$, $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont,

$$g_1 = \frac{g+\bar{g}}{2}, \quad g_2 = \frac{g-\bar{g}}{2i}$$

$\mathbb{C}^n \ni x_0 = y_0 + i z_0$, $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$

$\varphi : [a,b] \to \mathcal{K} \Rightarrow \varphi = \psi + i\theta$, $\psi, \theta : [a,b] \to \mathbb{R}^n$; $\psi = \frac{\varphi+\bar{\varphi}}{2}$, $\theta = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2}$

φ sol. a pb. (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + g(t), \ t \in [a,b] \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$ deriv. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \psi'(t) + i\theta'(t) = A(t)\cdot(\psi(t) + i\theta(t)) + g_1(t) + i g_2(t) \\ \psi(t_0) + i\theta(t_0) = y_0 + i z_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{(2')}{\begin{cases} \psi'(t) = A(t)\cdot\psi(t) + g_1(t) \\ \psi(t_0) = y_0 \quad \forall t \in [a,b] \end{cases}} \oplus \underset{(2'')}{\begin{cases} \theta'(t) = A(t)\cdot\theta(t) + g_2(t) \\ \theta(t_0) = z_0 \quad \forall t \in [a,b]. \end{cases}}$$

$(2) \Leftrightarrow \underbrace{(2') \oplus (2'')}$

sunt de tipul cazului (1) $\Rightarrow$ aplicăm pt. fiecare sub-prob.

th. de existență și unicit. globală

q.e.d.

1. Sisteme liniare omogene.

(3) $\boxed{x' = A(t)x;}$ $A : [a,b] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cont

Not: $E := \{\varphi : [a,b] \to \mathcal{K}^n$, deriv., sol. a ec. (3)$\}$.

Teoremă: E este spațiu vectorial peste $\mathcal{K}$ și $\dim_{\mathcal{K}} E = n$.

Dem:

①. E este sp. vect peste $\mathcal{K}$. $\varphi, \psi \in E$, $\lambda, \mu \in \mathcal{K} \Rightarrow \lambda\varphi + \mu\psi \in E$

$\left.\begin{array}{l} \varphi, \psi : [a,b] \to \mathcal{K}^n \text{ deriv.} \\ \varphi' = A(t)\cdot\varphi, \ \psi' = A(t)\cdot\psi, \ \forall t \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\varphi + \mu\psi : [a,b] \to \mathcal{K}^n$ deriv.

$\Rightarrow (\lambda\varphi + \mu\psi)' = \lambda\varphi' + \mu\psi' = \lambda A(t)\varphi + \mu A(t)\psi = A(t)\cdot(\lambda\varphi + \mu\psi)$

$\Rightarrow \lambda\varphi + \mu\psi \in E$

/ Celelalte cond. pt. ca E să fie sp. vect. sunt triviale

(2) $\underline{\dim_K E = n}$ $:\Longleftrightarrow \exists\, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)} \in E$ lin indep și generează E

$$(\forall \varphi \in E, \forall \lambda_j \in K, \varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi^{(j)})$$

Fie $e_1, \dots, e_n$ bază a lui K^n: $e_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$, $j = \overline{1,n}$

Def: $\varphi^{(j)} : [a,b] \to K^n$ $\begin{cases} [\varphi^{(j)}]' = A(t)\varphi^{(j)}, & t \in [a,b] \\ \varphi^{(j)}(t_0) = e_j, & t_0 \text{ fixat} \end{cases}$ $j = \overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi^{(j)} \in E$

Dem. că $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ lin. indep:

Red. la absurd: $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ (nu toate nule) a.î.

$$\lambda_1 \varphi^{(1)}(t) + \lambda_2 \varphi^{(2)}(t) + \dots + \lambda_n \varphi^{(n)}(t) = 0 \ \forall\, t \in [a,b] \xRightarrow{t = t_0}$$

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0. \ \underline{\text{abs}}$$

Dem. că familia $\{\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}\}$ generează E

$\varphi \in E \to \varphi : [a,b] \to K^n$ deriv., $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$, $t \in [a,b]$

$$\begin{cases} \psi(t) := \lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t), \\ \lambda_j = \varphi_j(t_0) \end{cases}$$

$\psi \in E$: $\psi'(t) = A(t)\psi(t)$

$\psi(t_0) = \varphi_1(t_0) e_1(t_0) + \dots + \varphi_n(t_0) e_n(t_0)$

$\varphi, \psi \in E$, $\varphi(t_0) = \psi(t_0) \xrightarrow{\text{Th. Unic}} \underline{\underline{\psi = \varphi}}$

= cu 7 =

= 5/5 =

Sisteme diferențiale liniare (cont.)

(1) $\boxed{x' = A(t)x + g}$, $t \in I := [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$,

$A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cont., $g : I \to \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ cont.

$x : I \to \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deriv.

(2) $\boxed{x(t_0) = x_0}$ $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$

Scalar:

(3) $\begin{cases} x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\cdot x_j + g_i(t), & t \in I \\ x_i(t_0) = x_{i0} \end{cases}$ $i = \overline{1,n}$

$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i,j = n}$; $g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$; $x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$

Teoremă: Problema Cauchy (1)+(2) admite o unică soluție $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$

Teoremă: $E := \{\varphi : I \to \mathbb{K}^n \mid \varphi$ soluție a sist. omogen $x' = A(t)x$ pe $I\}$. Atunci:

E este spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ și $\dim_{\mathbb{K}} E = n$

Definiție:

a) O bază $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ a sp. E s.n. sistem fundamental de soluții pt. sist. omogen $x' = A(t)\cdot x$. (4)

b) O matrice $\Phi := (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sol. ale sist. (4) s.n. matrice de soluții.

c) O matrice $\Phi(t)$ pt care coloanele $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sunt liniar indep. s.n. matrice fundamentală de soluții.

Obs: ① Fie $\phi(t)=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$ o matr. de sol. pt. (4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \phi'(t)=A(t)\cdot\phi(t)$, $t\in I$

② Fie $\phi(t)=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$ o matr. fundam. de sol. pt. (4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sol. gen. a sist. (4) este: $\varphi(t)=\phi(t)\cdot C$, unde $C\in\mathbb{K}^n$.

Teoremă (Liouville): Fie $\phi(t)$ o matr. de soluții pt. sist (4). Atunci $\forall t, t_0\in I$ avem: $\boxed{\det\phi(t)=\det\phi(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}\,A(s)\,ds}}$, unde $\mathrm{Tr}\,A(s)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(s)$.

Dem: Fie $W(t):=\det\phi(t)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t)&\dots&\varphi_{1n}(t)\\ \vdots&&\\ \varphi_{n1}(t)&\dots&\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$

$\phi(t)=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$; $\varphi_i(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{1i}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{ni}(t)\end{pmatrix}$,

$\varphi_{ij}(t): I\to\mathbb{K}$, deriv; $\varphi_{ij}'(t)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\varphi_{kj}(t)$, $t\in I$, $i,j\in\overline{1,n}$

$$W'(t)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}'(t)&\dots&\varphi_{1n}'(t)\\ \varphi_{21}(t)&\dots&\varphi_{2n}(t)\\ \dots&&\dots\\ \varphi_{n1}(t)&\dots&\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t)&\dots&\varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t)&\dots&\varphi_{2n}(t)\\ \dots&&\dots\\ \varphi_{n1}'(t)&\dots&\varphi_{nn}'(t)\end{vmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{vmatrix}\sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t)\varphi_{k1}(t)&\dots&\sum_{k=1}^{n}a_{1k}(t)\varphi_{kn}(t)\\ \varphi_{21}(t)&\dots&\varphi_{2n}(t)\\ \dots&&\dots\\ \varphi_{n1}(t)&\dots&\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}}_{\shortparallel}+\dots+\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t)&\dots&\varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t)&\dots&\varphi_{2n}(t)\\ \dots&&\dots\\ \sum_{k=1}^{n}a_{nk}(t)\varphi_{k1}(t)&\dots&\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(t)\varphi_{kn}(t)\end{vmatrix}\overset{*}{=}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix}a_{11}(t)\varphi_{11}(t)&\dots&a_{11}(t)\varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t)&\dots&\varphi_{2n}(t)\\ \dots&&\dots\\ \varphi_{n1}(t)&\dots&\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}}_{=a_{11}\cdot W(t)}+\underbrace{\begin{vmatrix}\sum_{k=2}^{n}a_{1k}(t)\varphi_{k1}(t)&\dots&\sum_{k=2}^{n}a_{1k}(t)\varphi_{kn}(t)\\ \varphi_{21}(t)&\dots&\varphi_{2n}(t)\\ \dots&&\dots\\ \varphi_{n1}(t)&\dots&\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}}_{=0}$$

$=0$ (fiecare term. este o comb. lin. a celorlalți)

= cu 8 =

= 2/5 =

$= a_{11}(t)\cdot W(t) + a_{22}(t)\cdot W(t) + \dots + a_{nn}(t) W(t) = [Tr\, A(t)]\cdot W(t)$

$W'(t) = [Tr\, A(t)]\cdot W(t)$, $t\in I$

$W(t) = C\cdot e^{\int_{t_0}^{t} Tr\, A(s)\, ds}$, $C\in K$.

Pt. a afla C, $t=t_0 \Rightarrow W(t_0) = C$

$\Rightarrow W(t) = W(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t} Tr\, A(s)\, ds}$.

Q.E.D

Obs: $\phi(t)$ matrice de soluții pt. (4), $\det \phi(t) \neq 0$ $\forall t\in I \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\, t_0 \in I$ a.î. $\det \phi(t_0)\neq 0$.

• Propoz: Fie $\phi(t)$ o matr. de sol. pt (4). Atunci $\phi(t)$ este o matr. fundam. de soluții $\Leftrightarrow \det \phi(t) \neq 0$, $\forall t\in I$

Dem: "$\Leftarrow$" $\phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sol. ale sist (4).

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $\lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_n\varphi_n = 0$ pe $I \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ //.

$\Downarrow$

$\lambda_1\varphi_1(t) + \dots + \lambda_n\varphi_n(t) = 0$, $\forall t\in I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi(t)\cdot\lambda = 0$, $\forall t\in I$, $\lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$.
$\det\phi(t) \neq 0$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ lin. indep $\Rightarrow$
$\Rightarrow \phi(t)$ matr. fundam. de sol.

"$\Rightarrow$". $\phi(t)$ matr. fundam. de sol $\Rightarrow \det\phi(t_0)\neq 0$, $t_0\in I$ //

dem prin reducere la absurd:

$\det\phi(t_0) = 0 \Rightarrow \exists\, \lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$, $\lambda\neq 0$, $\lambda\in K^n$, a.î. $\phi(t)\cdot\lambda = 0$.

$\psi(t) := \lambda_1\varphi_1(t) + \dots + \lambda_n\varphi_n(t)$, $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\psi'(t) = A(t)\cdot\psi(t), & t\in I\\ \psi(t_0) = \lambda_1\varphi_1(t) + \dots + \lambda_n\varphi_n(t) = \phi(t_0)\lambda = 0\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Unicitate}}$

$\Rightarrow \psi = 0$ $\forall t\in I \Rightarrow \lambda_1\varphi_1(t) + \dots + \lambda_n\varphi_n(t) = 0$, $\forall t\in I$ $\xrightarrow{\phi \text{ matr. fundam.}}$

$\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ $\not\!\!\Delta$ $\Rightarrow$ ipoteza falsă $\Rightarrow \det\phi(t)\neq 0$.

Sistemul neomogen.

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & x' = A(t)\cdot x + g, \quad t\in I \\ (2) & x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I, \ x_0 \in K^n. \end{array}}$$

Lemă: Fie $\psi: I \to K^n$ sol. a sist. (1). Atunci sol. generală a sist. (1) are forma: (5) $\boxed{x(t) = \psi(t) + \phi(t)\cdot C.}$, $C \in K^n$, $\phi(t)$ matr. fundam. de sol. pt (4)

Dem: Notăm $w(t) := \phi(t)\cdot C$, $C \in K^n \to w'(t) = A(t)\cdot w(t)$, $t \in I$

$$\psi'(t) = A(t)\cdot \psi(t) + g(t), \quad t\in I$$

Vrem să arăt. că: $x'(t) = A(t)\cdot x(t) + g(t)$ $\iff$

$$x(t) = \psi(t) + w(t)$$

$\iff \psi'(t) + \cancel{w'(t)} = A(t)\cdot \psi(t) + \cancel{A(t)\cdot w(t)} + g(t) \iff 0=0.$

Reciproc: fie $\varphi: I \to K^n$ sol. a sist (1) $\iff \begin{cases} \varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + g(t), & t \in I \\ \psi'(t) = A(t)\cdot\psi(t) + g(t), & t\in I \end{cases}$

$\overset{"-"}{\Longrightarrow} [\varphi(t) - \psi(t)]' = A(t)\cdot[\varphi(t)-\psi(t)], \ t \in I \Rightarrow \varphi(t) - \psi(t)$ este sol. a sist (4). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, C \in K^n$ a.i. $\varphi(t) - \psi(t) = \phi(t)\cdot C$, $\forall\, t \in I \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t) + \phi(t)\cdot C.$

Q.E.D

- **Propoz:** (Metoda variației constantelor): Fie $\phi(t)$ o matr. fundam. de soluții a sist. omogen (4). Atunci o soluție particulară a sist. neomogen (1). este de forma: $\boxed{\psi(t) = \phi(t)\cdot \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\cdot g(s)\, ds.}$

Dem: Sol. generală a sist (4) este $\phi(t)\cdot C$, $C \in K^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ căutăm o sol. a sist (4) de forma: $\psi(t) := \phi(t)\cdot z(t)$, $z: I \to K^n$ deriv. $\iff$

$\iff \psi'(t) = A(t)\cdot \psi(t) + g(t) \iff \cancel{\phi'(t)\cdot z(t)} + \phi(t)\cdot z'(t) = \cancel{A(t)\cdot\phi(t)\cdot z(t)} + g(t).$ $\iff$

$$\phi'(t) = A(t)\cdot \phi(t)$$

$\iff \phi(t)\cdot z'(t) = g(t).\ /\phi^{-1}(t) \to z'(t) = \phi^{-1}(t)\, g(t)\ \Big|\int \to z(t) = \int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)\cdot g(s)\,ds$

det $\phi(t) \neq 0$.

$$\to \psi(t) = \phi(t) + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\, g(s)\, ds.$$

= cu 8 =

= 4/5 =

Q.E.D

Concluzii (Teoremă)

Fie $\phi(t)$ o matrice fundam de soluții pt (4). Atunci :

a) Soluția gen. a sist. omogen (4) este : $\boxed{\varphi(t) = \phi(t) \cdot C, \; C \in K^n}$

b) Soluția gen. a sist. neomogen (1) este : $\boxed{\varphi(t) = \phi(t)\left[C + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\, g(s)\, ds\right]}$

$C \in K^n$

c) Soluția gen. a pb. Cauchy (1) + (2) este : $\boxed{\varphi(t) = \phi(t)\left[\phi^{-1}(t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s) \cdot g(s)\, ds\right]}$

=CU 8 =
=5/5 =

Sisteme diferențiale (cont.)

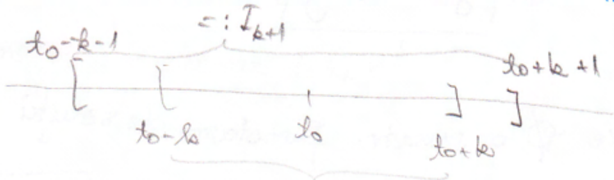
2. Sisteme dif. de ordin 1. cu coef. constanți

(1) $\boxed{x' = A \cdot x + g}$ pe $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g: \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(K)$ cont., $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

(2) $\boxed{x(t_0) = x_0}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$

• Propoz: Pb. Cauchy (1)+(2) admite o unică soluție $\varphi: \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(K)$.

Dem: 1. Existența:



$\varphi_k : I_k \to \mathcal{M}_{n,1}(K)$ deriv. $=: I_k$, $k \geq 1$. $\downarrow$ φ_k sol. a pb. (1)+(2) pe I_k.

$$(1_k) \begin{cases} \varphi_k'(t) = A \cdot \varphi_k(t) + g(t), & t \in I_k \\ \varphi_k(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$\varphi_{k+1} : I_{k+1} \to \mathcal{M}_{n,1}(K)$ deriv.

$$\begin{cases} \varphi_{k+1}'(t) = A \cdot \varphi_{k+1}(t) + g(t) & t \in I_{k+1} \\ \varphi_{k+1}(t_0) = x_0 \end{cases}$$

...

$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $I_k \subset I_{k+1}$

$\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$; $\psi_k := \varphi_{k+1}|_{I_k}$, $\psi_k : I_k \to \mathcal{M}_{n,1}(K)$ deriv.

$$(2_k) \begin{cases} \psi_k'(t) = A \cdot \psi_k(t) + g(t), & t \in I_k \\ \psi_k(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$(1_k), (2_k) \Rightarrow \underline{\varphi_k = \psi_k \text{ pe } I_k} \Rightarrow \boxed{\varphi_{k+1}|_{I_k} = \varphi_k}$

Definim $\varphi: \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $\varphi(t) := \varphi_k(t)$, $t \in I_k$ (def. lui φ este corectă, nu dep. de aleg. lui k pt. că $\varphi_{k+1}|_{I_k} = \varphi_k$)

φ deriv., sol a pb. (1)+(2) pe $\mathbb{R}$.

2. Unicitatea: Fie $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sol. ale pb. (1) + (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_k := \varphi|_{I_k}$, $\psi_k := \psi|_{I_k}$ $\Rightarrow$ φ_k, ψ_k sol. ale pb. (1) + (2) pe I_k.

I_k închis și mărginit $\Rightarrow$ soluție unică $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_k = \psi_k$ pe I_k, $\forall k \geq 1$. $\Rightarrow$ $\varphi = \psi$ pe $\mathbb{R}$.

Q.E.D.

Obs: Putem vorbi de matrice de soluții, matrice fundamentală de soluții, sistem fundamental de soluții pt. sist. omogen:

(3) $\boxed{y' = A \cdot y}$, pe $\mathbb{R}$ (A matr. constantă).

↳ sist. liniar și omogen cu coef. const.

Corolar: Fie ϕ o matr. fundam. de soluții pe $\mathbb{R}$ a sist. (3)

a) Sol. generală a sist. (3) este: $\boxed{\phi(t) \cdot C}$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

b) Sol. generală a sist (1): $\boxed{\phi(t)\left[C + \int_{t_0}^{t} \phi(s)^{-1} g(s)\, ds\right]}$, $t \in \mathbb{R}$

c) Sol. pb. Cauchy (1) + (2): $\boxed{\phi(t)\left[\phi(t_0)^{-1} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(s)^{-1} \cdot g(s)\, ds\right]}$, $t \in \mathbb{R}$.

* Matricea fundam. de soluții pt. sist. omogen (3) $y' = A \cdot y$ pe $\mathbb{R}$.

$n=1 \Rightarrow A = \mathbb{R}$, $y' = A \cdot y \Leftrightarrow y(t) = e^{t \cdot A} \cdot c$, $c \in \mathbb{K}$

$\boxed{\phi(t) = e^{t \cdot A}}$, $t \in \mathbb{R}$, $e^{t \cdot A} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t \cdot A)^j}{j!}$

$n \geq 2$?

Problemă: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Este converg. seria (4) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$?

- Propoz: a) Seria (4) converge în $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Not. cu e^A suma seriei și o vom numi exponențiala lui A.

  b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A B = B \cdot A$. Atunci: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$

  c) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $e^A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este inversabilă și $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Dem (a). $S_p := \sum_{j=0}^{p} \frac{A^j}{j!}$ converg. în $\mathcal{M}_n(K)$

$\Updownarrow$

şir Cauchy în $\mathcal{M}_n(K)$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{p,q\to\infty} |S_p - S_{p+q}| = 0$.

$$S_{p+q} - S_p = \sum_{j=0}^{p+q} \frac{A^j}{j!}$$

$$|S_{p+q} - S_p| \leq \sum_{j=0}^{p+q} \frac{|A|^j}{j!} = \underbrace{|\sigma_{p+q} - \sigma_p|}_{\downarrow p,q\to\infty \atop 0}, \quad \sigma_p := \sum_{j=0}^{p} \frac{|A|^j}{j!}.\ \sigma_p \xrightarrow[p\to\infty]{} e^{|A|} \in \mathbb{R}.$$

$\lim |S_p - S_{p+q}| = 0 \Rightarrow S_p$ şir Cauchy în $\mathcal{M}_n(K) \Rightarrow S_p$ converg

(b). $e^{A} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$, $e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$

$$e^A \cdot e^B = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{A^j B^k}{j! \cdot k!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \underbrace{\sum_{j+k=l} \frac{l!}{j! \cdot k!} \cdot A^j B^k}_{} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(A+B)^l}{l!} = e^{A+B}.$$

$\underset{A\cdot B = B\cdot A}{=\!=} (A+B)^l$ (form. binomului Newton)

(c). $$e^A \cdot e^{-A} \underset{A\cdot(-A) = (-A)\cdot A}{=\!=} e^{A-A} = e^{O_n} = I_n = e^{-A} \cdot e^{A}$$

■

• **Propoz.** : $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$, funcţia $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(K)$, $\phi(t) := e^{t\cdot A}$ este deriv. şi $\phi'(t) = A \cdot e^{t\cdot A}$

Dem: $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $|h| \leq 1$.

$$\frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} - A\cdot\phi(t) = \frac{\phi(h)\cdot\phi(t) - \phi(t)}{h} - A\cdot\phi(t) =$$

$$= \left(\frac{\phi(h) - I_n}{h} - A\right)\phi(t) = \left(\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(h\cdot A)^j}{j!} - I_n}{h} - A\right)\phi(t) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h^{j-1}\cdot A^j}{j!} - A\right)\phi(t) =$$

$$= \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{h^{j-1}\cdot A^j}{j!}\right)\cdot\phi(t).$$

$$\left|\frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} - A\cdot\phi(t)\right| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|h|^{j-1}\cdot|A|^j}{j!} \cdot |\phi(t)| \leq e^{|A|}\cdot|\phi(t)|\cdot|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Q.E.D.

Corolar: Funcția $\phi: \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi(t) := e^{t\cdot A}$ ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) este matrice fundamentală de soluții pt. sist. $y' = A\cdot y$ pe $\mathbb{R}$.

Dem: ϕ deriv: - adev., (am dem deja)

ϕ matr. de sol: $\phi'(t) = A\cdot\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. (am. dem. în Propoz.)

$\det \phi(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$: $\left. \begin{array}{l} (e^A)^{-1} = e^{-A} \\ \phi(t) = e^{tA} \end{array} \right| \Rightarrow \det \phi(t) \neq 0.$

• **Propoz:** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Sol. gen. a sist. (3) este: $\boxed{e^{t\cdot A}\cdot C,}$ $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

b) Sol. gen. a sist. (1) este: $\boxed{e^{t\cdot A}\left[C + \int_{t_0}^{t} e^{-s\cdot A}\cdot g(s)\,ds\right],}$ $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

c) Sol. pb. Cauchy (1) + (2) este: $\boxed{e^{(t-t_0)\cdot A}\cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\cdot g(s)\,ds}$

Rezultat algebric:

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

- valoare proprie a lui A: $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underbrace{\det(A - \lambda I_n) = 0}_{\text{ec. caracteristică}}$

Rădăcinile ec. caract. s.n. valoare proprie a lui A.

- λ val. propr. a lui A, s.n. subspațiu propriu generalizat asoc. lui λ:

$F_\lambda := \{ C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^n ; (A - \lambda I_n)^q \cdot C = 0$, q = multiplicitatea răd. λ pt. ec. caract. $\}$

Th: a) F_λ este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{C}^n$, de dimensiune q

b) F_λ este invariant în raport cu A: $A\cdot F_\lambda \subset F_\lambda$

c) Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ val. proprii ale lui A, de multiplicități $n_1, \dots, n_p$ și fie F_j subspațiu propriu generalizat asoc. λ_j, $1 \le j \le p$.

Atunci $\mathbb{C}^n = \underbrace{\bigoplus_{j=1}^{p}}_{\text{sumă directă}} F_j \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{C}^n, \exists!\, b_j \in F_j$ a.î. $c = \sum_{j=1}^{p} b_j$.

= C4 9 =
= 4/5 =

Aplicație la matricea fundamentală

$y' = Ay$ pe $\mathbb{R}$, $\Phi(t) = e^{t\cdot A}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Sol. generală : $e^{t\cdot A}\cdot C$, $C \in \mathbb{R}^n$.

$$e^{t\cdot A}\cdot C = \sum_{j=1}^{p} e^{t\cdot A}\cdot b_j = \sum_{j=1}^{p} e^{t(A-\lambda_j)} e^{t\cdot\lambda_j}\cdot b_j = \sum_{j=1}^{p} e^{t\cdot\lambda_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A-\lambda_j)^k}{k!}\cdot b_j \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$\left(C = \sum_{j=1}^{p} b_j,\ b_j \in F_j\right)$ - din Th c). $\qquad (A-\lambda_j)b_j = 0,\ k \geq n_j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{p} e^{t\cdot\lambda_j} \underbrace{\sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{t^k\cdot(A-\lambda_j)^k}{k!}\cdot b_j}_{=:P_j,\ \text{polinoame de grad } \leq n_j-1,\ \text{cu coef. din } F_j} = \sum_{j=1}^{p} e^{t\cdot\lambda_j}\cdot P_j(t)$$

09. 12. 2010.

Sisteme diferențiale (cont.)

2. Sisteme diferențiale liniare cu coef. constanți (cont.)

* Sisteme omogene

(1) $\boxed{x' = A x}$ pe $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Matr. fundam. de soluții: $\phi(t) = e^{t\cdot A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\cdot A)^k}{k!}$; $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Sol. gen. a sist. (1) este: $\phi(t)\cdot c$, $c \in \mathbb{R}^n$

- Rezultat algebric
  - Ec. caract. pt A: $\det(A - \lambda I_n) = 0$
    $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{C}$ rădăcini de multiplicitate $n_1, \dots, n_q$
  - Subspațiu propriu generalizat: $F_j := \{ c \in \mathbb{C}^n, (A - \lambda_j I_n)^{n_j} c = 0 \}$
    $1 \le j \le q$,
  - F_j subspațiu vectorial al lui $\mathbb{C}^n$, de dim. n_j
  - $A \cdot F_j \subset F_j$
  - $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{q} F_j \Rightarrow \forall c \in \mathbb{C}^n, \exists!\, b_j \in F_j$ a.î. $c = \sum_{j=1}^{q} b_j$

- $\varphi(t) := e^{t\cdot A}\cdot c = \sum_{j=1}^{q} \varphi_j(t)$, $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t}\cdot P_j(t)$, $P_j(t)$ - polinom de grad $\le n_j$, cu coef. din F_j
  $c \in \mathbb{R}^n$

- $\varphi'(t) - A\cdot\varphi(t) = 0$ pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} \underbrace{[\varphi_j'(t) - A\cdot\varphi_j(t)]}_{} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow \varphi_j'(t) = A\cdot\varphi_j(t)$ $\Leftrightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$= e^{\lambda_j t}[\underbrace{P_j'(t)}_{\in F_j} + \underbrace{\lambda_j P_j(t)}_{\in F_j} - \underbrace{A\cdot P_j(t)}_{\in F_j}] \in F_j$$

$\Leftrightarrow \varphi_j$ este soluție a sist. omogen (1) $\forall j = 1, \dots, q$.

Algoritm de calcul al soluțiilor generale ale sist. (1):

Pas. 1: Se calculează rădăcinile ec. caracteristice $\det(A-\lambda I_n)=0$: $\lambda_1,\dots,\lambda_q$

Pas. 2: Se caută soluții ale sist. (1) de forma:

$\boxed{\varphi_j(t)=e^{\lambda_j\cdot t}\cdot P_j(t)}$, $P_j(t)$ - polinom. de grad $\le n_j-1$ cu coef. din $\mathbb{C}^n$

Pas. 3: Soluția generală va fi:

$$\boxed{\varphi(t)=\sum_{j=1}^{q}\varphi_j(t).}$$

Pas 2': determinarea polinoamelor $P_j(t)$

- punem condiția: $\varphi_j'(t)=A\cdot\varphi_j(t)$, $t\in\mathbb{R}$.
- înlocuim $\varphi_j(t)$ cu $e^{\lambda_j t}\cdot P_j(t)$, $P_j(t)=\sum_{k=0}^{n_j-1}c_k\cdot t^k$, $c_k\in\mathbb{C}^n$.

Obs 1: $n_j=1$, $1\le j\le n \Rightarrow \lambda_1,\dots,\lambda_n$ sunt valori proprii distincte ale lui A

$\Rightarrow$ sol. generală a sist. $\varphi(t)=\sum_{j=1}^{n}e^{\lambda_j t}\cdot b_j$, $b_j\in\mathbb{C}^n$,

$(A-\lambda_j I_n)b_j=0$

Obs. 2. Sol. generală a sist. (1) este $\underbrace{e^{t\cdot A}\cdot C}_{\text{fct. reală}}$, $C\in\mathbb{R}^n$

Pt. a obține soluții reale calculăm partea reală a soluției:

$$Re\left(\sum_{j=1}^{q}e^{\lambda_j t}P_j(t)\right).$$

Exc: $z=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $e^z=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\Rightarrow e^z=e^\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)$.

Presup. $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ răd. reale ale ec. caract., de multiplicit. $n_1,\dots,n_p$.

Atunci avem și $\mu_1,\dots,\mu_r,\overline{\mu}_1,\dots,\overline{\mu}_r$ răd. complexe ale ec. caract. de multiplicit. $m_1,\dots,m_r$.

Sol. generală a sist. (1) este: $\varphi(t)=\sum_{j=1}^{p}e^{\lambda_j t}\underbrace{P_j(t)}_{\text{grad}\le n_j-1}+\sum_{k=1}^{r}\left[e^{\mu_k t}\cdot Q_k(t)+e^{\overline{\mu}_k\cdot t}\cdot R_k(t)\right]$; grad $\le m_k-1$

$$\Rightarrow \boxed{Re\,\varphi(t)=\sum_{j=1}^{p}e^{\lambda_j t}\cdot\tilde{P}_j(t)+\sum_{k=1}^{r}e^{\alpha_k\cdot t}\left[\cos\beta_k t\cdot\tilde{S}_k(t)+\sin\beta_k t\cdot\tilde{T}_k(t)\right].}$$

$\tilde{P}_j$: polinom. de grad $\le n_j-1$ cu coef. reali

$\tilde{S}_k,\tilde{T}_k$: polin. de grad $\le m_k-1$ cu coef. reali

$$\mathrm{Re}[e^{\mu_k \cdot t} \cdot Q_k(t)] = \mathrm{Re}[e^{\alpha_k t}(\cos\beta_k \cdot t + i\sin\beta_k t)$$

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k \ ; \ \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$$

$$[S_k(t) + iT_k(t)] = e^{\alpha_k t}[\cos\beta_k \cdot t \cdot S_k(t) - \sin\beta_k t \cdot T_k(t)].$$

polin. de grad $\leq m_k - 1$ cu coef. reali

* **Sisteme neomogene**

(2) $\boxed{x' = Ax + g(t)}$ pe $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ cont.

- Sol. generală a sist (2) este suma dintre sol. gen. a sist. omogen (1) ($\phi(t)C \equiv e^{t \cdot A}C$, $C \in \mathbb{R}^n$) și o sol. particulară a sist. neomogen (2) (notată $\psi(t)$, $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$) $\Rightarrow$ Sol. gen este : $\boxed{\phi(t) \cdot C + \psi(t)}$.

matr. fundam. de soluții

- Det. lui $\psi(t)$:
  - $\to$ Metoda variației constantelor : se caută $\psi(t) = \phi(t) \cdot z(t)$, $z: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deriv.

$$\psi'(t) = A \cdot \psi(t) + g(t) \iff z'(t) = \phi^{-1}(t)\, g(t) \iff$$

$$\iff z(t) = \int \phi^{-1}(t)\, g(t)\, dt \quad \left(z(t) = \int_0^t \phi^{-1}(s)\, g(s)\, ds \right).$$

  - $\to$ Metoda identificării coeficienților (dc. $g(t) = P(t) \cdot e^{\alpha t}$ sau $g(t) = e^{\alpha t} \cdot (Q(t) \cdot \cos\beta t + R(t) \cdot \sin\beta t)$ unde P, Q, R - polin. de grad $\leq m$ și coef. din $\mathbb{R}^n$).

Obs: $g(t) = \sum_{k=1}^{p} g_k(t)$

$$\psi_k' = A \cdot \psi_k + g_k \Rightarrow \psi' = A\psi + g$$

$$\psi := \sum_{k=1}^{p} \psi_k$$

$g(t) \sim e^{z \cdot t} \cdot S(t)$; $z = \alpha + i\beta$, $S(t)$ - polin. de grad $\leq m$ și coef. $\in \mathbb{C}^n$

$z(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} \cdot g(s)\, ds$; $g(s) = \sum_{k=0}^{m} c_k \cdot s^k$, $c_k \in \mathbb{C}^n$

$c_k = \sum_{j=1}^{2} b_{kj}$; $b_{kj} \in F_j$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(t) = e^{\alpha \cdot t}(\tilde{Q}(t) \cos\beta t + \tilde{R}(t) \cdot \sin\beta t)}$$

polin. cu coef. din $\mathbb{R}^n$ de grad $\leq m +$ multiplicit. lui $\alpha + i\beta$ ca răd. a ec. caract.

= cu 10 =

= 3/4 =

CAP III. Ecuații diferențiale de ordin „n"

Definiție: Numim ec. dif. de ordin $n \geq 1$, problema în care:

- Se dă: $f: D \to \mathbb{R}$, D deschis $\subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f = f(t, x_1, \dots, x_n)$, f cont.
- Se cere: o funcție $\varphi: I \to \mathbb{R}$, I int $\subset \mathbb{R}$, φ este de n ori derivab. a.î. $\{(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)), t \in I\} \subset D$ și

$$(1) \quad \boxed{\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)), \ t \in I}$$

Spunem că φ este soluție a ec. $\boxed{x^{(n)} = f(t, x', \dots, x^{(n-1)})}$ (2)

III.1. Problema Cauchy

Se dă: $f: D \to \mathbb{R}$, D deschis $\subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f = f(t, x_1, \dots, x_n)$, f cont
$(t_0, x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}) \in D$.

Se cere: $\varphi: I \to \mathbb{R}$, sol. a sist (2), $t_0 \in I$ a.î. se verifică:

$$(3) \begin{cases} \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t_0) = x_0' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Propoz: Ec. (2) este echivalentă cu sist. dif. de ordin 1 următor:
în sensul Obs:

$$(4) \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Obs: I int, $I \subset \mathbb{R}$

$S_2(I) :=$ mulț. sol. ec. (2) pe I

$S_4(I) :=$ mult. sol. ec. (4) pe I.

$i: S_2(I) \to S_4(I)$, $i(\varphi) := (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$,

i bine definită și este izomorfism și $i^{-1}(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}) = \varphi$

= cu 10 =

Ecuaţii
Curs n1

16 XII 2010

Ecuaţii de ordin superior

(1) $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$, $f = f(t, x_1, \dots, x_n) : \Delta \to \mathbb{R}$,
Δ deschis $\subset \mathbb{R}^{n+1}$.

<u>Pb. Cauchy</u>: se cer sol ec (1) care verifică

(2) $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$, $\dots$, $x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$, unde $(t_0, x_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \in \Delta$.

<u>Prop</u>: Ecuaţia (1) este echivalentă cu sistemul diferenţial de ordinul 1:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \iff$$

$$\iff (3')\quad \tilde{x}' = \tilde{f}(t, \tilde{x})$$

$$\tilde{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(t, \tilde{x}) := \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

<u>Dem</u>: I interval $\subset \mathbb{R}$, $S(I) = \{$mulţ. sol $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ec. (1)$\}$
$\tilde{S}(I) := \{$mulţ. sol $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ ale sist (3)$\}$.

<u>Definim</u>: $i : S(I) \to \tilde{S}(I)$, $i(\varphi) := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$, $\varphi \in S(I)$

1. Buna definire a lui i

$\varphi \in S(I)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\exists\, \varphi', \dots, \varphi^{(n)} : I \to \mathbb{R}$,
$(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Delta$, $\forall\, t \in I$.
$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$, $t \in I$

$$i(\varphi) := \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\\ \vdots\\ \varphi^{(n-1)}\end{pmatrix}$$, ψ sol. a sist (3) (arătăm buna def a lui i)

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1 = \varphi\\ \psi_2 = \varphi'\\ \vdots\\ \psi_n = \varphi^{(n-1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_n : I \to \mathbb{R}$$ sunt deriv și

$$\begin{cases}\psi_1' = \psi_2\\ \psi_2' = \psi_3\\ \dots\\ \psi_{n-1}' = \psi_n\\ \psi_n' = \varphi^{(n)} = f(t, \varphi, \dots, \varphi^{(n-1)}) = f(t, \psi_1, \dots, \psi_n)\end{cases}$$

$(\Rightarrow)$ $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$, $\forall t \in I \Rightarrow \psi = i(\varphi) \in \tilde{S}(I)$.

2. Def $i' : \tilde{S}(I) \to S(I)$, $i'(\psi) := \psi_1$, $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix} \in \tilde{S}(I)$
(nu deriv, e o notație)

∘ i' este bine definită

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix} \in \tilde{S}(I) \Rightarrow \psi : I \to \mathbb{R}^n$$ deriv și $$\begin{cases}\psi_1' = \psi_2\\ \psi_2' = \psi_3\\ \dots\\ \psi_{n-1}' = \psi_n\\ \psi_n' = f(t, \psi_1, \dots, \psi_n)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ inducție $\exists\, \psi_1^{(k)}$, $0 \le k \le n$, pe I și $\psi_{k+1} = \psi_1^{(k)}$, $0 \le k \le n-1$,

$\psi_1^{(n-1)} = \psi_n \Rightarrow \psi_1^{(n)} = \psi_n' = f(t, \psi_1, \dots, \psi_n) = f(t, \psi_1, \psi_1', \dots, \psi_1^{(n-1)})$

$$\Rightarrow \begin{cases}\psi_1 : I \to \mathbb{R} \text{ este de } n \text{ ori deriv}\\ (t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)) \in D\\ \psi_1^{(n)} = f(t, \psi_1, \dots, \psi_1^{(n-1)})\end{cases} \Rightarrow \boxed{\psi_1 \in S(I)}$$

$\psi_1 = i'(\psi) \Rightarrow i'$ bine definită

3. $\underbrace{(i' \circ i)(\varphi) = \varphi}_{//}$, $\forall \varphi \in S(I)$, $\varphi \in S(I)$, $i(\varphi) = \begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\\ \vdots\\ \varphi^{(n-1)}\end{pmatrix}$

$(i' \circ i) = i'(i(\varphi)) = \varphi$

4. $(i \circ i')(\psi) = \psi, \forall \psi \in \tilde{S}(I)$; $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$

$i'(\psi) = \psi_1$, $(i \circ i')(\psi) = i(i'(\psi)) = i(\psi_1) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1' \\ \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \psi_1' = \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{n-1}' = \psi_n \\ \psi_n' = f(t, \psi_1, \dots, \psi_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \psi_1^{(k)} = \psi_{k+1} \quad 0 \le k \le n-1. \\ \psi_1^{(n)} = f(t, \psi_1, \dots, \psi_1^{(n-1)}). \end{array}$$

$\Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1' \\ \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}$

Concluzia: i inv. și $i^{-1} = i'$

Deci φ este sol. pe I a ec. 1 $\Leftrightarrow$ $i(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$ este sol. pe I a sist (3).

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ sol pe I a sist 3 $\Leftrightarrow$

ψ_1 este sol ~~a ec.~~ pe I a ec. 1

La sol. dif. ale ec. 1 corespund sol. dif ale ec 3 și invers.

OBS: Problema Cauchy formată din ec 1 și cond 2 este echivalentă cu probl Cauchy 3 + cond Cauchy

$$4 \begin{cases} x_1(t_0) = x_0 \\ x_2(t_0) = x_0'. \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases}$$

I int $\in \mathbb{R}$, $S_0(I) := \{$ mulț. sol. probl. Cauchy 1 + 2 $\}$

$\tilde{S}(I) := \{$ —"— 3 + 4 $\}$

$i := S_0(I) \to \tilde{S}_0(I)$, $i(\varphi) := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$

i bijecție cu inversa $i^{-1}: \tilde{S}_0(I) \to S_0(I)$

$$i^{-1}(\Psi) = \psi_1 \ , \ \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \tilde{S}_0(I)$$

T (Cauchy-Picard pt ec. de ordin superior)

$f: \Delta \to \mathbb{R}$, Δ deschis $\subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f = f(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t_0, x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}) \in \Delta$.

Pp: că f este continuă și că $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i} : \Delta \to \mathbb{R}$ cont, $\forall\ 1 \le i \le n$. Fie $a, b > 0$ a.î. $\Pi := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1},$ $|t - t_0| \le a, |x_1 - x_0| + |x_2 - x_0'| + \dots + |x_n - x_0^{(n-1)}| \le b\}$ $\subset \Delta$. Notăm $M := \sup\limits_{\Pi} |f|$ și $\alpha := \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$.

Atunci pb Cauchy (1) și (2) admite o unică soluție $\varphi: (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \to \mathbb{R}$

Ec liniare de ordin superior

Sunt de forma:

(5) $x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + \dots + a_n(t) x = g(t)$

$t \in [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$

Este de forma (1) cu $f(t, x_1, \dots, x_n) = -a_n(t) x_1 - \dots - a_1(t) x_n + g(t)$

$a_1, \dots, a_n : I \to \mathbb{R}$, cont. $\to$ coeficienți

$g: I \to K$, cont, $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ $\to$ termen liber

Ec omogenă dacă $g \equiv 0$.

Ec neomogenă $g \not\equiv 0$.

Pb. Cauchy asociată: se dau $t_0 \in I := [a, b]$, $x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)} \in K$

Se cere $\varphi: I \to K$ soluție a ecuației (5) care verif. cond.

$\underbrace{\varphi(t_0) = x_0, \ \dots, \ \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}}_{(6)}$

Teoremă: Problema Cauchy (5) + (6) admite o unică soluție $\varphi : I \to K$.

Dem: $S_0 := \{ \varphi : I \to K \, ; \, \varphi \text{ soluție a pb Cauchy } (5) + (6) \}$

$\tilde{S}_0 := \{ \psi : I \to K^n \, ; \, \psi \text{ sol a pb Cauchy } (7) + (8) \}$

unde

$$(7) \quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_n(t) x_1 - \dots - a_1(t) x_n + g(t) \end{cases} \iff$$

$$(7') \iff \tilde{x}' = A\tilde{x} + \tilde{g}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & & - \\ 0 & \dots & & & 1 \\ -a_n(t) & & & & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \psi_1(t_0) = x_0 \\ \vdots \\ \psi_n(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases} \iff (8') \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$i : S_0 \to \tilde{S}_0, \quad i(\varphi) := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \varphi \in S_0$$

$$i \text{ bij. } i^{-1}(\psi) = \psi_1, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \tilde{S}_0$$

(7') + (8') admite o unică sol $\psi : I \to K^n \Rightarrow \varphi := i^{-1}(\psi) = \psi_1$, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ este unică soluție $: I \to K$ a pb (5) + (6)

Ec omogenă: (9) $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0$ pe I

$S := \{$ mulț. sol. def. pe I, ale ec. (9) $\}$

Teoremă: S sp. vect $/K$ de dim. n.

Dem: Sp vect $/K$ $\quad \varphi, \psi \in S \Rightarrow \varphi, \psi : I \to K$, n ori deriv.

$\lambda, \mu \in K$, $\lambda\varphi + \mu\psi : I \to K$ de n ori deriv.

$L\varphi = L\psi = 0$ pe I.

$L(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \underbrace{L\varphi}_{0} + \mu \underbrace{L\psi}_{0} = 0$ pe I.

$\Rightarrow \lambda\varphi + \mu\psi \in S$

$\tilde{S} := \{$ mult sol def pe I ale sist (10) $\}$ unde

(10) $\tilde{x}' = A(t)\tilde{x}$ pe I.

Aplicația $i : S \to \tilde{S}$, $i(\varphi) := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$, $\varphi \in S$, φ bij.

i aplicație liniară $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow i$ izomorfism liniar de la S la $\tilde{S}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_K S = \dim_K \tilde{S} = n$

Def: S.n. sist fundam. de sol. al ec (9) orice bază a lui S adică orice sist de n soluții $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ale ec. (9) definite pe I, liniar independente.

Cum se obțin? Se consideră un sist fundam. de sol

$\psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \vdots \\ \psi_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \psi_n = \begin{pmatrix} \psi_{n1} \\ \vdots \\ \psi_{nn} \end{pmatrix}$ pt. sistemul

$\tilde{x}' = A(t)\tilde{x}$ a.î. $\{\psi_{11}, \dots \psi_{n1}\}$ formează un sist fundamental de soluții pt. (9).

Ecuații liniare de ordin superior (cont.)

*. Ecuația omogenă

(4) $Lx := x^{(n)} + a_1(t)\cdot x^{(n-1)} + a_2(t)\cdot x^{(n-2)} + \dots + a_n(t)x = 0$ pe I

$E = \{x : I \to K,\ Lx = 0\}$, $F := \{y : I \to K^n,\ y' = Ay\} \Rightarrow$

$\Rightarrow i$ izomorf. liniar (i este din cursul precedent)

E sp. vect/K de dim n. O bază $\{e_1, \dots, e_n\}$ a lui E s.n. sistem fundamental de soluții pt. ec. (4).

Definiție: Fie $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \to K$ de n ori deriv. At. numim Wronskian al sist. $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ determinantul

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}(t).$$

Propoz (Liouville). : Fie $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E$ at. $\forall t, t_0 \in I$ avem

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds} \cdot W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t_0).$$

Dem: $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t) = \det \Phi(t)$, $\Phi(t) = (i(\varphi_1), \dots, i(\varphi_n))$

$i(\varphi_1), \dots, i(\varphi_n) \in F \Rightarrow$ din Liouville pt. sist.

$\det \Phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds} \det \Phi(t_0)$; $A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n(s) & \dots & \dots & -a_1(s) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{tr} A(s) = -a_1(s) \Rightarrow \det \Phi(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}.$

Teoremă: Fie $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \in E$ este sist. fundam. de soluții $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t) \neq 0, \forall t \in I \Leftrightarrow \exists t_0 \in I,\ W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t_0) \neq 0.$

Dem: Folosim prop. Liouville.

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ liniar indep $\Leftrightarrow i(\varphi_1), \dots, i(\varphi_n)$ liniar indep.

$\overset{\text{prop. de la sist.}}{\Longleftrightarrow} \det \Phi(t) \neq 0, \forall t \in I$, $\Phi(t) = (i(\varphi_1), \dots, i(\varphi_n))$.

* Aplic. liniară neomogenă

(1) $Lx = g$ pe I.

Lemă: Fie $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sist. fundam. de soluții ale ec. omogene (4). Fie ψ o soluție particulară a ec. neomogene (1). At. soluția generală este de forma: $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) + \psi(t)$, $t \in I$ (5)

$c_1, \dots, c_n \in K$ arbitrari

dem. Fie $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$.

"$\Rightarrow$" $\varphi: I \to K$ deriv. de n ori, $L\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{L\varphi_j}_{=0} + \underbrace{L\psi}_{=g} \Rightarrow L\varphi = g \ \forall t \in I$

"$\Leftarrow$" Fie φ o sol. a ec. (1) $\Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in K$ a.î. φ este de forma (5)

$\varphi - \psi : I \to K$, de n ori deriv.

$L(\varphi - \psi) = L\varphi - L\psi = g - g = 0$ pe I $\Rightarrow \varphi - \psi \in E$ (sol. a ec. omog.)

$\Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in K$ a.î. $\varphi - \psi = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j$

Obs: În cond. din lemă putem rezolva pb. Cauchy (1)+(2)

$$\begin{cases} Ly = g \ \mu, F \\ \varphi(t_0) = x_0, \ \varphi'(t_0) = x_0', \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}. \end{cases}$$

$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) + \psi(t)$; $t \in I$; $c_1, \dots, c_n \in K$.

$\varphi(t_0) = x_0 \Leftrightarrow c_1\varphi_1(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0) = x_0 - \psi(t_0)$

$\vdots$

$\varphi^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)} \Leftrightarrow c_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} - \psi^{(n-1)}(t_0)$

Propoz (Met. variației constantelor). Fie $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sist. fundam. de sol. ale ec. (4). Fie $z_1, \dots, z_n : I \to K$ deriv. sol. ale sist.

$$(6) \begin{cases} z_1'(t)\cdot\varphi_1(t) + \dots + z_n'(t)\cdot\varphi_n(t) = 0, \ \forall t \in I \\ z_1'(t)\cdot\varphi_1'(t) + \dots + z_n'(t)\cdot\varphi_n'(t) = 0, \ \forall t \in I \\ \dots \\ z_1'(t)\cdot\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dots + z_n'(t)\,\varphi^{(n-1)}(t) = 0, \ \forall t \in I \\ z_1'(t)\cdot\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dots + z_n'\,\varphi^{(n-1)}(t) = g(t), \ \forall t \in I. \end{cases}$$

At. funct. $\psi(t) := z_1(t)\varphi_1(t) + \dots + z_n(t)\cdot\varphi_n(t)$ (7) este sol. a ec. (1).

dem: Facem o verif. directă

1/ $\psi(t) = z_1(t)\cdot\varphi_1(t) + \dots + z_n(t)\cdot\varphi_n(t)$, $t \in I$, ψ deriv

a_{i-1}/ $\psi'(t) = z_1(t)\cdot\varphi_1'(t) + \dots + z_n(t)\cdot\varphi_n'(t) + \underbrace{z_1'(t)\cdot\varphi_1(t) + \dots + z_n'(t)\cdot\varphi_n(t)}_{=0}$

deriv. pe I.

a_{i-2}/ $\psi''(t) = z_1\cdot\varphi''(t) + \dots + z_n(t)\cdot\varphi_n''(t) + \underbrace{z_1'(t)\varphi_1'(t) + \dots + z_n'(t)\cdot\varphi_n'(t)}_{=0}$ deriv pe I

— — — — — — —

a_1/ $\psi^{(n-1)}(t) = z_1\cdot\varphi^{(n-1)}(t) + \dots + z_n(t)\cdot\varphi^{(n-1)}(t) + 0$ deriv. pe I.

1/ $\psi^{(n)}(t) = z_1(t)\,\varphi_1^{(n)}(t) + \dots + z_n(t)\cdot\varphi^{(n)}(t) + \underbrace{z_1'(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \dots + z_n'\varphi^{(n-1)}(t)}_{=g(t)}$.

$L\psi(t) = z_1(t)\cdot\underbrace{L\varphi_1(t)}_{=0} + \dots + z_n(t)\cdot\underbrace{L\varphi_n(t)}_{=0} + g(t)$

$\Rightarrow L\psi(t) = g(t)$, $\forall t \in I$.

Ecuații omogene cu coef. const.

(4) $Lx = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0$ pe $\mathbb{R}$; $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Teoremă: Pb. Cauchy pt. (4) adică $\begin{cases} Lx = 0 \text{ pe } \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}; \end{cases}$ $t_0 \in \mathbb{R}$; $x_0, \dots, x_0^{(n-1)} \in K$ admite o unică soluție $\varphi: \mathbb{R} \to K$.

Dem: $E := \{\varphi: \mathbb{R} \to K,\ \varphi \text{ sol. a ec. } L\varphi = 0 \text{ pe } \mathbb{R}\}$.

$F := \{\psi: \mathbb{R} \to K^n,\ \psi\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix} \text{ sol. a sist. } \psi' = A\psi\}$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$ $\quad i: E \to F$, $i(\varphi) = \begin{pmatrix}\varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}\end{pmatrix}$

izom alg $\quad i^{-1}(\psi) = \psi_1$.

= C4 / 2 =

= 3/4 =

Teoremă: Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_g \in K$ răd. distincte (de multiplicit. $n_1, \dots, n_g$, $n_1 + \dots + n_g = n$) ale ec. caract: $\lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ (8)

Un sist. fundam. de sol. pt (4) este: $\{t^j \cdot e^{\lambda_k t}, k = \overline{1,g}, 0 \le j \le n_k - 1\}$

Lema 1: Ec. (8) este ec. caracteristică a matr. A.

Dem: $\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \dots & & & -\lambda & 1 \\ -a_n & \dots & & \dots & -a_1 \end{vmatrix} =$

$= (-1)^n [a_n + \dots + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n] = (8).$

qed

=cu 12=

Ec. dif. cu coef. const. (cont.)

$\boxed{\text{Ec. omogenă}}$ (1) $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0$ pe $\mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Teoremă: Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_g \in \mathbb{C}$ răd. distincte (cu multiplic. $n_1, \dots, n_g$ cu $n_1 + \dots + n_g = n$) ale ec. caract: (2) $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$

Familia (3) $\{ t^j e^{\lambda_k t} ;\ 1 \le k \le g,\ 0 \le j \le n_k - 1 \}$ formează un sist. fundam. de soluții pt. ec. (1).

Lema 1: Ec. (2) este ec. caract. a matr. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$

Dem: vezi CU trecut.

Lema 2: Familia (3) este liniar indep / $\mathbb{C}$

Dem: Reducere la absurd – Pp. că $\exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ a.î. $|c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$ și

$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n t^{n_g - 1} e^{\lambda_g t} = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + R_g(t) e^{\lambda_g t} = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

R_j pol. de grad $\le n_j - 1$

$|R_1(t)| + \dots + |R_g(t)| \not\equiv 0 \Rightarrow R_g(t) \not\equiv 0$ pe $\mathbb{R}$

$R_1(t) = -\sum_{j=2}^{g} R_j(t) e^{(\lambda_j - \lambda_1)t}$

$0 = R_1^{(n_1)}(t) = \sum_{j=2}^{g} \underbrace{S_j(t)}_{\text{pol. de grad egal cu grad. pol. } R_j} e^{(\lambda_j - \lambda_1)t}$

În particular, $S_g \not\equiv 0$ pe $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \sum_{j=2}^{g} S_j(t) e^{\lambda_j t} = 0$ pe $\mathbb{R}$. $\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow T_g(t) \cdot e^{\lambda_g t} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow T_g(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow T_g \equiv 0$ pe $\mathbb{R}$

grad T_g = grad $S_g \Rightarrow T_g \not\equiv 0$ pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Abs

= CU 13 =

= 11 =

Dem. th: (cale indirectă) $G :=$ sp. vect. $/\mathbb{C}$ generat de (3) $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} G = n$

$F :=$ mulț. sol. ec (1) $\Rightarrow$ sp vect $/_{\mathbb{C}}$, $\dim_{\mathbb{C}} F = n$.

Tb. să arătăm că unul dintre spații este inclus în celălalt.

Pt. asta ne folosim de: Ec. (1) $\longleftrightarrow$ sist. $y' = A \cdot y$ pe $\mathbb{R}$ (4),

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$$

Ac. echiv. pp: dc. $E :=$ mulț. sol. sist. (4), at. E este sp. vect $/\mathbb{C}$ de dim. n, și aplic. $i : F \to E$, $i(\varphi) := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{n-1} \end{pmatrix}$, $\varphi \in F$ este izom. liniar,

iar $i^{-1}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \psi_1$, cu $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in E$.

Sol. gen. a sist. (4) este $\psi(t) = \sum_{j=1}^{q} P_j(t) \cdot e^{\lambda_j t}$, P_j polin$/\mathbb{C}^n$ de grad $\leq n_j - 1$.

(Obs: Nu orice polinom de ac. formă este sol. a sist. (4), dar orice sol. a sist. (4) ~~are~~ este de ac. formă).

$\Rightarrow$ Sol. gen. a ec. (1) este de forma: $\psi_1(t) = \sum_{j=1}^{q} Q_j(t) \cdot e^{\lambda_j t}$, Q_j polin$/\mathbb{C}$ cu grad $\leq n_j - 1$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} F \subset G \\ \dim_{\mathbb{C}} F = n \\ \dim_{\mathbb{C}} G = n \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{F = G}}$ Q.E.D.

Obs: Cum construim un sist. fundam. de soluții reale?

$\lambda_k \in \mathbb{R} \Rightarrow t^j e^{\lambda_k t}$ reale, $0 \leq j \leq n_k - 1$

$\lambda_k = \alpha + i\beta \Rightarrow t^j e^{\lambda_k t} = t^j e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t)$, $0 \leq j \leq n_k - 1$

$\Rightarrow \overline{\lambda_k} = \alpha - i\beta$, răd. a ec. (2) de aceeași multiplic. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{t^j e^{\overline{\lambda_k} t} = t^j e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \sin\beta t)\}_j$ 2n_k sol. complexe

$\Downarrow$?

2n_k sol. reale

$\mathrm{Re}\, t^j e^{\lambda_k t} = \frac{1}{2} t_j (e^{\lambda_k t} + e^{\overline{\lambda_k} t}) = t^j e^{\alpha t} \cos\beta t$.

$\mathrm{Im}\, t^j e^{\lambda_k t} = \frac{1}{2} t_j (e^{\lambda_k t} - e^{\overline{\lambda_k} t}) = t^j e^{\alpha t} \sin\beta t$.

$0 \leq j \leq n_k - 1$.

= Cu 13 =

= 21 =

$\boxed{\text{Ec. neomogenă:}}$ (5) $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$ pe $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont.

Determinarea unei soluții particulare a ec. (5).

I. Metoda variației constantelor.

II. $f(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t)$, P, Q polin. reale de grad $\leq m$. (max. gradelor lui P și Q)

Metoda coef. nedeterminați:

Considerăm sist. asoc. ec. (5) : (6) $\begin{cases} y' = Ay + g \text{ pe } \mathbb{R}. \\ A - \text{matricea considerată} \\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \end{cases}$

$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}(\tilde{P}(t) \cos \beta t + \tilde{Q}(t) \sin \beta t)$

$\tilde{P}, \tilde{Q}$ polin. de grad $\leq m$, cu coef. $\in \mathbb{R}^n$

$\alpha + i\beta$ răd. a ec. caract. $\det(A - \lambda I_n) = 0$ de multiplic. $p \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ (ec. (2)).

$\Rightarrow$ o sol. part. a sist. (6) este de forma $\psi(t) = e^{\alpha t}(\tilde{R}(t) \cos \beta t + \tilde{S}(t) \sin \beta t)$ cu $\tilde{R}, \tilde{S}$ polin. cu coef $\in \mathbb{R}^n$, de grad $\leq m+p$.

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \Rightarrow \psi_1$ sol. a ec. (5) $\Rightarrow$ ec (5) admite o sol. part. de forma:

$\varphi(t) = e^{\alpha t}(R(t) \cos \beta t + S(t) \sin \beta t)$, R, S polin. cu coef $\in \mathbb{R}$, de grad $\leq m+p$.

Obs: Se arată că putem lua $R(t) = t^p R_0(t)$, $S(t) = t^p S_0(t)$; R_0, S_0 polin. de grad $\leq m$, cu coef $\in \mathbb{R}$.

Examen: 4 subiecte (2 sub. de teorie, 2 exerciții). $\to$ 2h.

NMAU PARȚIAL: $\begin{cases} \text{1 sub. teorie Part 1, 1 sub teorie Part 2} \\ \text{1 exc Part 1, 1 exc. Part 2} \end{cases}$

AU PARȚIAL: 2 sub. teorie Part 2, 2 sub exerc. Part 2.
cei care vor să fie luat în considerare parțialul să scrie pe lucrare PARȚIAL.

Renunțăm la nota parțialului după ce am văzut subiectele.

= cu 13 =

= 3/ =