1. Rozwiązywanie równań nieliniowych

1.1. Metoda bisekcji

Założenia:

1) W przedziale $[a, b]$ funkcja posiada pierwiastek $f(x) = 0$ gdy $f(a)f(b) < 0$.
2) Funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i posiada pochodną.
3) Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ ma stały znak na przedziale $[a, b]$.

Algorytm metody bisekcji:

1) Obliczamy $x_0 = \frac{a+b}{2}$
2) Jeżeli wartość funkcji $|f(x_0)| < \varepsilon$ to kończymy obliczenia, w przeciwnym wypadku z otrzymanych dwóch przedziałów $[a, x_0]$ i $[x_0, b]$ wybieramy ten na końcach którego funkcja ma przeciwne znaki, tj.:

   jeżeli $f(a)f(x_0) < 0$ wstawiamy: $b = x_0$, a się nie zmienia
   w przeciwnym razie: $a = x_0$, b się nie zmienia

Gdzie: ε – założony błąd.

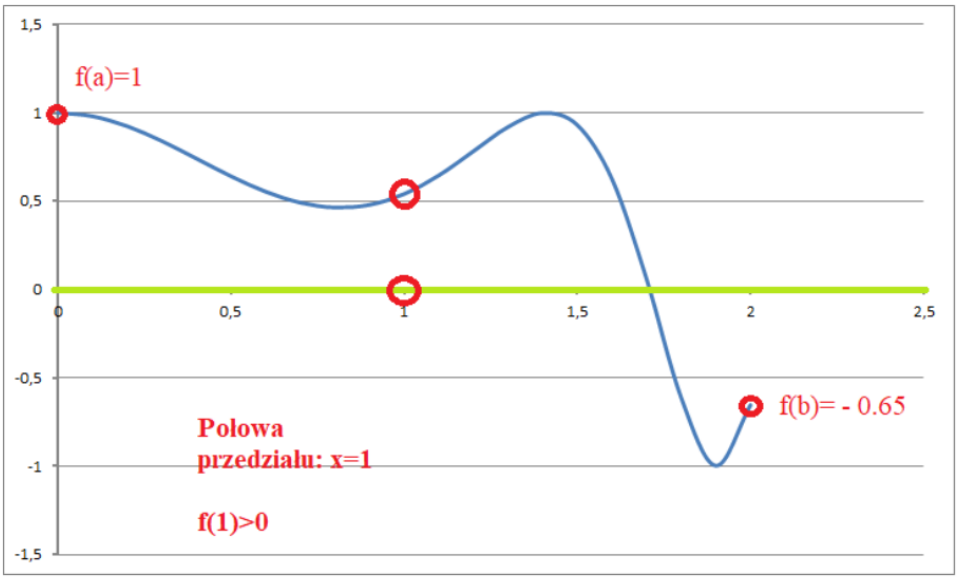
Przykład:

Dla funkcji $f(x) = \cos(x^3 - 2x) = 0$ wyznacz miejsce zerowe na przedziale [0, 2] dla błędu $\varepsilon = 0{,}01$.

Sprawdzamy czy $f(a)f(b) < 0$:

$$f(0)f(2) = 1 \cdot (-0.65) = -0.65$$

Pierwszy krok obliczeń:



Rys. 1. Metoda bisekcji – pierwszy krok obliczeń

Dzielimy przedział na połowę, obliczamy x_0 i sprawdzamy czy $|f(x_0)| < 0.01$:

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 1$$

$$f(1) = 0.5403 > 0.01$$

Sprawdzamy czy $f(a)f(x_0) < 0$:

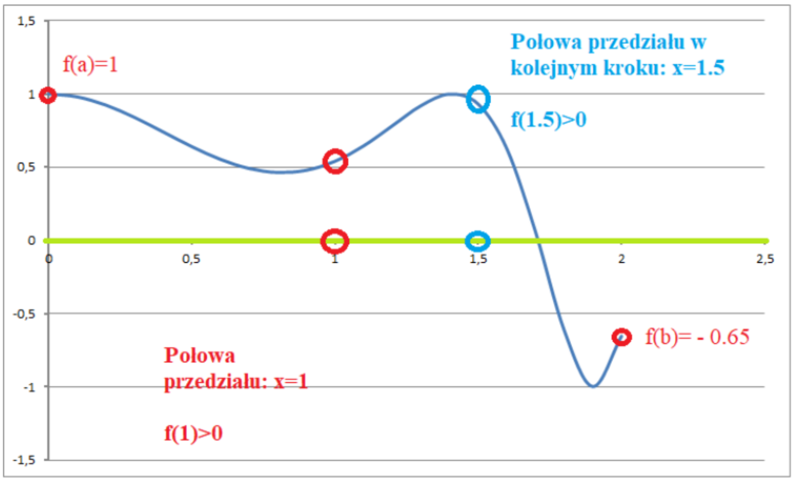
$$f(0)f(1) = 1 \cdot 0.5403 = 0.5403$$

Uzyskana wartość jest dodatnia (warunek niespełniony), więc podstawiamy:

$$a = x_0 = 1$$

Nowy przedział to: [1, 2]

Drugi krok obliczeń:



Rys. 2. Metoda bisekcji – drugi krok obliczeń

Dzielimy przedział na połowę, obliczamy x_0 i sprawdzamy czy $|f(x_0)| < 0.01$:

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$f(1.5) = 0.93051 > 0.01$$

Sprawdzamy czy $f(a)f(x_0) < 0$:

$$f(1)f(1.5) = 0.5403 \cdot 0.93051 = 0{,}50276$$

Uzyskana wartość jest dodatnia (warunek niespełniony), więc podstawiamy:

$$a = x_0 = 1.5$$

Nowy przedział to: [1.5, 2]

Trzeci krok obliczeń:

Dzielimy przedział na połowę, obliczamy x_0 i sprawdzamy czy $|f(x_0)| < 0.01$:

$$x_0 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75$$

$$f(1.75) = |-0.28459| > 0.01$$

Sprawdzamy czy $f(a)f(x_0) < 0$:

$$f(1.5)f(1.75) = 0.93051 \cdot (-0.28459) = -0.26481$$

Uzyskana wartość jest ujemna (warunek spełniony), więc podstawiamy:

$$b = x_0 = 1.75$$

Nowy przedział to: [1.5, 1.75]

	a	b	f(a)	f(b)	x0	f(x0)	f(a)*f(x0)
1	0.00000	2.00000	1.00000	-0.65364	1.00000	0.54030	0.54030
2	1.00000	2.00000	0.54030	-0.65364	1.50000	0.93051	0.50276
3	1.50000	2.00000	0.93051	-0.65364	1.75000	-0.28459	-0.26481

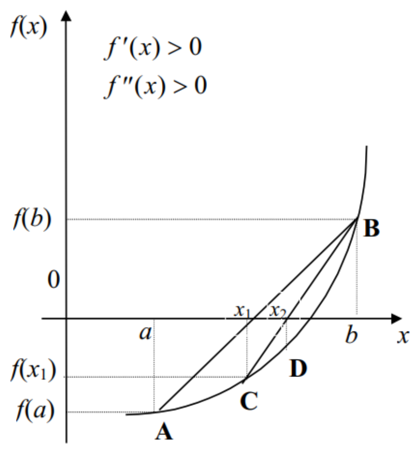
Rys. 3. Pierwsze 3 kroki obliczeń

1.2. Metoda fałszywej linii (regula falsi)

Wzór rekurencyjny do obliczania kolejnych przybliżeń pierwiastka:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Jeżeli $f(x_1)f(a) < 0$ wstawiamy: $b = x_1$
W przeciwnym wypadku: $a = x_1$



Rys. 4. Interpretacja geometryczna metody fałszywej linii

Zad 1. Napisz program, który rozwiąże dowolne równanie nieliniowe metodą bisekcji.

Program powinien wypisać:

- funkcję $f(x)$ – równanie,
- dane przedstawione na Rys. 3.

Wykonaj obliczenia dla przykładu podanego w instrukcji i dla dwóch dowolnych funkcji. Porównaj uzyskane wyniki wartościami dokładnymi.

Na UPEL należy przesłać sprawozdanie zawierające wyniki obliczeń i plik *.cpp.

Zad 2. Napisz program, który rozwiąże dowolne równanie nieliniowe metodą fałszywej linii.

Program powinien wypisać:

- funkcję $f(x)$ – równanie,
- znalezione rozwiązanie x i wartość funkcji $f(x)$ dla każdej iteracji.

Wykonaj obliczenia dla przykładu podanego w instrukcji i dla dwóch dowolnych funkcji. Porównaj uzyskane wyniki wartościami dokładnymi.

Na UPEL należy przesłać sprawozdanie zawierające wyniki obliczeń i plik *.cpp.