Metody rozwiązania równań różniczkowych

Zagadnienie początkowe Cauchy'ego

Zagadnieniem początkowym Cauchy'ego nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne wraz z podanym warunkiem początkowym. Równanie różniczkowe zwyczajne (pierwszego rzędu) zapisujemy w postaci:

$$y'(x) = f(x, y), \text{ dla } x \in [a, b] \tag{1}$$

gdzie: f – funkcja dwóch zmiennych.

Warunek początkowy jest w postaci:

$$y(a) = y_a \tag{2}$$

Pochodną $y'(x)$ przybliżamy ilorazem różnicowym pierwszego rzędu opartym na węzłach x i $x + h$. Jeśli funkcja y jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i posiada pochodną, to ze wzoru Taylora otrzymamy:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi), gdzie\ \xi \in [x, x+h] \tag{3}$$

Krok różniczkowania:

$$h = \frac{b-a}{N} \tag{4}$$

Gdzie: N – liczba kroków.

Dla małych wartości h równanie (3) można uprościć do postaci:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \tag{5}$$

Podstawiając wzór (5) do (1) otrzymujemy:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f(x, y) \tag{6}$$

Lub:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y_i) \tag{7}$$

Ostatecznie:

$$\begin{gathered} y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y_i) \\ x_i = a + ih \end{gathered} \tag{8}$$

Przykład zagadnienia Cauchy'ego:

$y'(x) = 2x + y(x) + 3, dla\ 0 \leq x \leq 3$

$y(0) = 0$

Zatem mamy dane:

1. Funkcję $f(x, y)$, w tym przypadku $f(x, y) = 2x + y(x) + 3$
2. Warunek początkowy: $y(0) = 0$

1) Metoda Eulera

W metodzie Eulera schemat metody dany jest wzorem:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{9}$$

Przykład

Dane jest zagadnienie Cauchy'ego:

$$y'(x) = x^2 + y \tag{10}$$

$$y(0) = 0.1 \tag{11}$$

Wyznaczamy wartość w punkcie $x = 0.3$ dla $N = 3$ zatem $h = 0.1$.

Kolejne kroki obliczeń:

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.1 + 0.1(0^2 + 0.1) = 0.11$

$x_2 = x_1 + h = 0.2$

$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.11 + 0.1(0.1^2 + 0.11) = 0.122$

$x_3 = x_2 + h = 0.3$

$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 0.122 + 0.1(0.2^2 + 0.122) = 0.1382$

Rozwiązaniem zatem jest:

$y(0.3) = 0.1382$

2) Metoda Rungego-Kutty (ogólny wzór):

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h)$$
$$y(a) = y_a \tag{12}$$

Metoda Rungego-Kutty drugiego rzędu (RK2):

$$\phi(x, y, h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = f(x, y) \tag{13}$$
$$k_2 = f(x + h, y + hk_1)$$

Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4):

$$\phi(x, y, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + +k_4)$$
$$k_1 = f(x, y)$$
$$k_2 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1) \tag{14}$$
$$k_3 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2)$$
$$k_5 = f(x + h, y + hk_3)$$

Zad 1. Napisz program, który rozwiąże dowolne zagadnienie Cauchy'ego z dowolnym warunkiem początkowym. Równanie różniczkowe (czyli tak naprawdę funkcję $f(x, y)$) należy zaimplementować jako odrębną funkcję. Program powinien wyświetlić w wyniku:

1. Równanie, które rozwiązuje
2. Warunek początkowy
3. Punkt końcowy
4. Krok obliczeń
5. Rozwiązanie metodą Eulera w punkcie końcowym
6. Rozwiązanie metodą RK2 w punkcie końcowym
7. Rozwiązanie metodą RK4 w punkcie końcowym

Wyznacz rozwiązanie w punkcie $x = 1$ dla $N = 10$ dla następujących równań:

$y'(x) = x^2 + y$, $y(0) = 0.1$

$y'(x) = \mathrm{x} + y$, $y(0) = 0.1$

Przeprowadź badanie zbieżności zaimplementowanych metod (wyniki należy zamieścić w pliku excel – zrobić wykres). Uzyskane wyniki porównaj z wynikiem dokładnym.

Na UPEL należy przesłać sprawozdanie zawierające wyniki obliczeń, plik excel oraz plik *.cpp (10p).