1. Metody rozwiązywania układów równań liniowych

1.1. Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego jest to metodą iteracyjną rozwiązywania układu równań liniowych. Metody te polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań $x^{(0)}, x^{(1)} \dots x^{(i)}$ określonego wzorem:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w \tag{1}$$

gdzie: $i = 0,1 \dots$, M – macierz kwadratowa, w – wektor.

Rozważmy układ równań:

$$Ax = b \tag{2}$$

Macierz A rozkładamy na 3 macierze:

$$A = L + D + U \tag{3}$$

gdzie: L – macierz trójkątna dolna, D – macierz diagonalna, U – macierz trójkątna górna.

Wstawiając równanie (3) do (2) możemy przekształcić kolejno:

$$(L + D + U)x = b \tag{4}$$

$$Dx = -(L + U)x + b \tag{5}$$

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \tag{6}$$

Ciąg przybliżeń rozwiązania przyjmuje następującą postać:

$$x^{(i+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(i)} + D^{-1}b \tag{7}$$

Metoda Jacobiego jest zbieżna dla macierzy nieredukowalnych i diagonalnie słabo dominujących.

Macierz $A = (a_{ij})$ nazywamy diagonalnie słabo dominującą jeśli dla $i = 0,1 \dots n$ spełniane są warunki:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{8}$$

oraz spełniony jest co najmniej jeden warunek dla dowolnego i:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{9}$$

Przykład 1

```
Uklad rownan:
8       2       2       4       5
2       5       1       1       -4
0       3       4       1       2
-1      -2      1       5       7

Macierz L+U:
0       2       2       4
2       0       1       1
0       3       0       1
-1      -2      1       0

Macierz diagonalna odwrotna (Dodw):
0.125   0       0       0
0       0.2     0       0
0       0       0.25    0
0       0       0       0.2

Rozwiazanie po 5 iteracjach:
x[0]: 0.28535
x[1]: -1.2878
x[2]: 1.28868
x[3]: 0.692447
```

<u>**Zadanie obowiązkowe:**</u>

Zad 1. Napisz program, który będzie rozwiązywał układ n równań liniowych o n niewiadomych metodą Jacobiego. Wymagania:

- Dane pobierane są z pliku.
- Program wypisze układ równań (macierz rozszerzoną), sprawdzi czy macierz jest diagonalnie słabo dominująca i wyświetli stosowny komunikat.
- Warunkiem zatrzymania algorytmu jest podana przez użytkownika ilość iteracji.
- Program wypisze macierze: $L + U$ oraz D^{-1}.
- Program wypisze ilość iteracji i rozwiązanie układu równań.

Zad 2. Zaimplementować warunek stopu w postaci:

$$\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right| < \varepsilon$$

Wymagania:

- Warunek musi być spełniony dla każdego x.
- Ustalić maksymalną ilość iteracji, aby program w razie nie znalezienia rozwiązania z zadaną dokładnością nie liczył w nieskończoność.
- Program wypisze przyjętą wartość błędu ε, ilość wykonanych iteracji, rozwiązanie układu równań i wartość błędu dla każdego x. Wykonać obliczenia dla $\varepsilon = 0.001$ oraz $\varepsilon = 0.0001$.

Na UPEL należy przesłać sprawozdanie zawierające wyniki obliczeń z zad1 i zad2 oraz plik *.cpp (10p)