

Całkowanie numeryczne

Kwadratury Gaussa-Legendre'a

Kwadratury Gaussa-Legendre'a to kwadratury interpolacyjne, czyli takie, w których funkcja podcałkowa jest przybliżana wielomianem interpolacyjnym. Wzór ogólny na obliczenie wartości całki za pomocą kwadratury można zapisać jako:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (1)$$

gdzie: A_i – wagi węzłów kwadratury, x_i – węzły kwadratury, n – liczba węzłów.

Ważnym ograniczeniem kwadratur tego typu jest fakt, że przedział całkowania musi być równy $[-1,1]$. Wynika to z zastosowania bazy wielomianów ortogonalnych, które są ortogonalne tylko na takim przedziale. Tę niedogodność jednak łatwo ominąć. Wystarczy przeskalować odpowiednio zadanie wykorzystując fakt, że całkowanie jest operatorem liniowym, więc możemy zapisać:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(t)dt = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (2)$$

gdzie:

$$t_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i \quad (3)$$

Wagi i węzły dla poszczególnych kwadratur są tablicowane:

Liczba węzłów kwadratury	Węzły kwadratury	Wagi węzłów
2	$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$A_1 = 1$ $A_2 = 1$
4	$x_1 = -\frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$ $x_2 = -\frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$ $x_3 = \frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$ $x_4 = \frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$	$A_1 = \frac{1}{36}(18 - \sqrt{30})$ $A_2 = \frac{1}{36}(18 + \sqrt{30})$ $A_3 = \frac{1}{36}(18 + \sqrt{30})$ $A_4 = \frac{1}{36}(18 - \sqrt{30})$

Przykład obliczeń:

Oblicz wartość całki: $\int_{0.5}^{2.5} \sin(x) dx$. Wykorzystaj schemat dwu- i cztero-węzłowy.

Schemat dwuwęzłowy:

Węzły kwadratury oraz ich wagi:

$$\begin{array}{ll} x_1 = -0.57735 & A_1 = 1 \\ x_2 = 0.57735 & A_2 = 1 \end{array}$$

Skalowanie funkcji:

$$\begin{array}{l} t_1 = 0.92265 \\ t_2 = 2.07735 \end{array}$$

Wynik:

$$\int_{0.5}^{2.5} \sin(x) dx \approx 1.67163$$

Schemat czterowęzłowy:

Węzły kwadratury oraz ich wagi:

$$\begin{array}{ll} x_1 = -0.861136 & A_1 = 0.347855 \\ x_2 = -0.339981 & A_2 = 0.652145 \\ x_3 = 0.339981 & A_3 = 0.652145 \\ x_4 = 0.861136 & A_4 = 0.347855 \end{array}$$

Skalowanie funkcji:

$$\begin{array}{l} t_1 = 0.638864 \\ t_2 = 1.16002 \\ t_3 = 1.83998 \\ t_4 = 2.36114 \end{array}$$

Wynik:

$$\int_{0.5}^{2.5} \sin(x) dx \approx 1.67873$$

Zadanie obowiązkowe:

Zad 1. Napisz funkcję, która obliczy całkę z dowolnej funkcji podcałkowej za pomocą metody Gaussa- Legendre’a dla kwadratury dwu- i cztero-węzłowej. Funkcja podcałkowa powinna być jednym z argumentów dla funkcji obliczających wartość całki. Oblicz następujące całki wykorzystując schemat dwu- i czterowęzłowy:

- $\int_{0.5}^{2.5} \sin(x) dx$
- $\int_{0.5}^5 (x^2 + 2x + 5) dx$
- $\int_{0.5}^5 \exp(x) dx$

Na UPEL należy przesłać sprawozdanie zawierające wyniki obliczeń oraz plik *.cpp (10p).