Семинар 2

Умножение на специальные виды матриц

Диагональные матрицы Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеют следующий вид[1]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Тогда AB и BA будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \dots & \lambda_{n-1} a_{1\,n-1} & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_{n-1} a_{2\,n-1} & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 a_{n-1\,1} & \lambda_2 a_{n-1\,2} & \dots & \lambda_{n-1} a_{n-1\,n-1} & \lambda_n a_{n-1\,n} \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \dots & \lambda_{n-1} a_{n\,n-1} & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \dots & \lambda_1 a_{1\,n-1} & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_2 a_{2\,n-1} & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} a_{n-1\,1} & \lambda_{n-1} a_{n-1\,2} & \dots & \lambda_{n-1} a_{n-1\,n-1} & \lambda_{n-1} a_{n-1\,n} \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \dots & \lambda_n a_{n\,n-1} & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

То есть при умножении на диагональную матрицу B слева у матрицы A умножаются строки на соответствующие диагональные элементы B. А при умножении A на матрицу B справа, у матрицы A умножаются столбцы на соответствующие значения.

Сдвиги Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеют следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

где все незаполненные клетки считаются равными нулю. Тогда прямая проверка показывает, что

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1\,n-2} & a_{1\,n-1} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2\,n-2} & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,1} & \dots & a_{n-1\,n-2} & a_{n-1\,n-1} \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad BA = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть умножение на B справа сдвигает все столбцы матрицы A вправо, а умножение на B слева сдвигает все строки матрицы A вверх. Если мы хотим переставлять столбцы и строки по циклу, то надо умножать на матрицу B следующего вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

то есть добавить единичку слева снизу к предыдущей матрице. Проверьте, что умножение на нее действительно сдвигает столбцы и строки по циклу.

Коммутирующие матрицы

В общем виде матрицы не коммутируют друг с другом. Потому интересной является такая задача: для конкретной матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ найти все такие матрицы $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, которые коммутируют с A, то есть $AX = XA$. Давайте рассмотрим парочку конкретных матриц.

[1] Незаполненные части матриц – нули.

Диагональные матрицы Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Найдем $\{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$. Ответ на эту задачу достаточно простой. Оказывается в качестве X подходят диагональные матрицы и только они. Из определения умножения для диагональных матриц мы видим, что все диагональные точно коммутируют с A. Надо лишь показать, почему других матриц нет. Действительно, пусть X – произвольная матрица с неопределенными коэффициентами. Рассмотрим условие $AX = XA$. В произвольной ячейке с индексами i, j в левой матрице стоит элемент $\lambda_i x_{ij}$, а в правой матрице $\lambda_j x_{ij}$. Если $i = j$, то это один и тот же элемент и их равенство не дает никакого условия. Однако, для $i \neq j$ мы получаем, что условие $\lambda_i x_{ij} = \lambda_j x_{ij}$ влечет $x_{ij} = 0$ (тут мы пользуемся тем, что $\lambda_i \neq \lambda_j$). А это и означает, что все внедиагональные элементы матрицы X равны нулю, а значит она диагональна.

Матрица сдвига Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем $\{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$. Давайте для определенности рассмотрим задачу в случае $n = 4$, так будет проще уловить наши вычисления, то есть пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$AX = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Так как матрицы AX и XA равны, то у них равны все элементы. Давайте посмотрим на первый столбец для начала сверху вниз. Тогда $x_{21} = (AX)_{11} = (XA)_{11} = 0$. Значит

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Аналогично Тогда $x_{31} = (AX)_{21} = (XA)_{21} = 0$, то есть имеем

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{32} & x_{33} \\ 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Потом видим, что $x_{41} = (AX)_{31} = (XA)_{31} = 0$ и значит

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{32} & x_{33} \\ 0 & 0 & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Условие $(AX)_{41} = (XA)_{41}$ тривиальное и не дает никаких ограничений. Теперь сравним элементы матриц AX и XA во втором столбце начиная с диагонали вниз. Получим $x_{32} = (AX)_{22} = (XA)_{22} = 0$ и здесь мы пользуемся полученным знанием о том, что элемент $(XA)_{22}$ нулевой, получаем

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} \\ 0 & 0 & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}$$

Продолжая в том же духе и переходя к следующим столбцам с диагонали и ниже, мы видим, что у нас будет следующая ситуация

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь нам надо рассмотреть все ячейки в матрицах AX и XA выше главное диагонали. Давайте начнем с элемента $1, 2$ и будем идти по диагонали вправо вниз. Видим, что $x_{22} = (AX)_{12} = (XA)_{12} = x_{11}$. Аналогично $x_{33} = (AX)_{23} = (XA)_{23} = x_{22}$ и $x_{44} = (AX)_{34} = (XA)_{34} = x_{33}$. То есть мы видим

$$X = \begin{pmatrix} a & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & a & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & a & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & a & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & a & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & a & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & a & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Продолжая аналогично рассматривать элементы выше главное диагонали на диагоналях параллельных главной, мы видим, что

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом в общем случае множество матриц X коммутирующих с A имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & a_n \\ & a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_2 \\ & & & & a_1 \end{pmatrix}$$

То есть это верхнетреугольная матрица у которой на диагоналях главное параллельной стоят одинаковые числа.

Все матрицы Теперь найдем все матрицы $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, которые коммутируют со всеми матрицами $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Рассмотрим две матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь все пустые ячейки заполнены нулями. Тогда матрица X должна коммутировать с A_1. Но так как у A_1 на диагонали все разные элементы, то матрица X сама обязана быть диагональной. С другой стороны, X обязана коммутировать с A_2. А тогда матрица X верхнетреугольная с одинаковыми числами на диагоналях параллельных главной. Но так как она в то же время еще и диагональная, то $X = \lambda E$. С другой стороны ясно, что скалярные матрицы коммутируют с любой.

Сложность матричных операций

Если нам даны две матрицы $A, B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, то для их сложения или вычитания нужно выполнить mn операций сложения или вычитания, соответственно. Умножение матрицы A на число $\lambda \in \mathbb{R}$ так же занимает mn операций умножения. Если же мы хотим умножить матрицу $A \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R})$ на матрицу $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$, то результатом будет матрица $AB \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$. В результирующей матрице надо посчитать mn элементов по формуле

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$$

Для вычисления такого выражения нужно выполнить k умножений и $k-1$ сложение, то есть $2k-1$ операцию. В результате для произведения матриц нужно выполнить $mn(2k-1)$ операций.

Сложность произведения и расстановка скобок

Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$ – некоторые матрицы. Чтобы посчитать матрицу AB нужно найти mn ее коэффициентов. Причем каждый коэффициент требует k умножений и $k-1$ сложение. Обычно сложения игнорируются в таких подсчетах или суммируются вместе с умножениями. В любом случае общее количество можно записать как $O(mkn)$ операций. Если матрицы $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то получается n^3 операций (с точностью до константы).

Пример Пусть теперь даны матрицы $A, C \in \mathrm{M}_{1\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,1}(\mathbb{R})$.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline b_1 \\ \hline b_2 \\ \hline \vdots \\ \hline b_n \\ \hline\end{array}\right) \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \hline\end{array} \cdot \left(\begin{array}{|c|}\hline b_1 \\ \hline b_2 \\ \hline \vdots \\ \hline b_n \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \hline\end{array}\right)$$

Тогда посчитать произведение ABC можно двумя способами: (1) $(AB)C$ и (2) $A(BC)$. Давайте сравним количество операций для вычислений. В пером случае AB считается за n умножений и получаем число, которое умножается на C за n умножений. Итого $2n$ операций. Во втором случае BC считается за n^2 умножений и получается n на n матрица, которая умножается слева на A за n^2 операций. Итого $2n^2$ умножений. Как мы знаем, результат от расстановки скобок не зависит, но скорость вычисления будет сильно отличаться.

Насыщенность обратимых

Я хочу продемонстрировать еще одно полезное следствие из утверждения о 6 эквивалентных свойствах невырожденности. Предположим у нас есть две матрицы $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Тогда AB обратима тогда и только тогда, когда A и B обратимы. Действительно, справа налево мы уже знаем, обратимость обеих матриц A и B влечет обратимость произведения, мы даже знаем, что при этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Надо лишь показать в обратную сторону. Предположим, что AB обратима, это значит, что для некоторой матрицы $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ выполнено

$$ABD = E \quad \text{и} \quad DAB = E$$

Тогда первое равенство говорит, что BD является правым обратным к A. А в силу 6 эквивалентных свойств невырожденности означает, что A обратима. Аналогично, DA является левым обратным к B и из того же утверждения следует, что матрица B обратима. Так что произведение квадратных матриц обратимо тогда и только тогда, когда каждый сомножитель обратим.

Расширенный алгоритм Евклида и матричное умножение

Пусть нам даны два целых числа $m, n \in \mathbb{Z}$ и их нод равен $d = (m, n)$. Тогда известно, что существуют такие целые числа $a, b \in \mathbb{Z}$, что $d = an + bm$. При этом можно даже считать, что $|a| < m$ и $|b| < n$, но это нам сейчас не важно. Нахождение хотя бы одной такой пары можно сделать с помощью расширенного алгоритма Евклида. Вычисление строится на следующей идее

$$(m, n) = (n \,\%\, m, n)$$

Теперь нужно продолжать делить числа друг на друга, пока одно из них не станет нулем. В этом случае оставшееся будет нод d. Давайте напишем цепочку всех делений с остатком

$$
\begin{aligned}
n &= q_1 m + r_1\\
m &= q_2 r_1 + r_2\\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3\\
&\dots\\
r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + r_{k+1}\\
r_k &= q_{k+2} r_{k+1}
\end{aligned}
$$

В этом случае $d = r_{k+1}$ – последний ненулевой остаток. Чтобы получить его выражение через m и n, идейно нужно подставлять в предпоследнее выражение предыдущие равенства. Вот как это можно выразить в матричном виде. Заметим, что мы каждый раз работаем с парой чисел

$$(n, m) \mapsto (m, r_1) \mapsto (r_1, r_2) \mapsto \dots \mapsto (r_{k-1}, r_k) \mapsto (r_k r_{k+1})$$

Давайте выразим каждую пару через предыдущую следующим образом

$$\begin{pmatrix} m \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ r_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

В конце получим равенство

$$\begin{pmatrix} r_k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_k \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{k-1} \\ r_k \end{pmatrix}$$

Откуда получаем

$$\begin{pmatrix} r_k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

То есть если мы посчитаем произведение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ a & b \end{pmatrix}$$

То видим, что коэффициенты второй строки как раз выражают d через n и m. В частности это дает не рекурентную имплементацию расширенного алгоритма Евклида.