

2020 年度 幾何学特論 I
ホモトピー論入門

佃 修一

2020 年 7 月 31 日

目次

第 1 章	Introduction	1
1.1	ホモトピー	1
1.2	基本的な空間	3
1.2.1	\mathbb{R}^n	3
1.2.2	D^n, S^{n-1}	4
1.2.3	C, C^n	5
1.2.4	H, H^n	7
1.3	可除代数	9
1.4	圏	11
1.4.1	圏	12
1.4.2	関手	13
第 2 章	ホモトピー	15
2.1	ホモトピー	15
第 3 章	基本的な空間及び構成	19
3.1	部分空間を一点に縮めた空間	19
3.2	球面, キューブ	23
3.3	射影空間	27
3.4	写像空間	27
3.4.1	随伴	28
3.4.2	基点付きの場合	30
3.4.3	ループ	32
第 4 章	Fibration と Cofibration	35
4.1	Cofibration	35
4.2	Fibration	35

4.3	Lebesgue の補題	35
4.4	Hopf fibration	35
4.5	Puppe 列	35
第 5 章		
5.1	ホモトピー群	37
5.2	完全列	46
5.3	Serre Fibration	50
5.4	Blakers-Massey	55
5.5	Eisenstein	55
5.6	計算例	55
付録 A		
A.1	像と逆像	61
A.2	同値関係	62
A.3	群の作用	63
A.4	部分空間	65
A.5	直積空間	66
A.6	商空間	67
A.7	ハウスドルフ空間	68
A.8	コンパクト空間	69
A.9	コンパクト Hausdorff 空間	71
A.10	コンパクト距離空間	73
参考文献		
75		

List of exercises

exercise1	5
exercise2	8
exercise3	12
exercise4	15
exercise5	16
exercise6	17
exercise7	21
exercise8	38
exercise9	40
exercise10	42
exercise11	42
exercise12	44
exercise13	51
exercise14	59
exercise15	59
exercise16	66
exercise17	66
exercise18	67
exercise19	68
exercise20	68
exercise21	73

2020 年度前期「幾何学特論 I」の講義メモ.
tom Dieck [5], Gray [2], 西田 [7], May [4] を参考にホモトピー論入門をやってみる.

第 1 章 Introduction

1.1 ホモトピー

空間を分類したい!
位相空間を同相で分類するのは難しすぎる。

Example 1.1.1 (有限位相空間)。

もう少しゆるい関係で分類しよう。

Definition 1.1.2. 閉区間 $[0, 1]$ を I で表す。
 X, Y を位相空間とする。

1. $f, g: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。連続写像
- $$H: X \times I \rightarrow Y$$
- で, 任意の $x \in X$ に対し

- $$H(x, 0) = f(x)$$
$$H(x, 1) = g(x)$$
- をみたすものが存在するとき, f と g はホモトピック (**homotopic**) であるといい,
 $f \simeq g$ と書く。また, H を f から g へのホモトピー (**homotopy**) という。
2. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は, 連続写像 $g: Y \rightarrow X$ で,

$$g \circ f \simeq \text{id}_X$$
$$f \circ g \simeq \text{id}_Y$$

をみたすものが存在するとき, ホモトピー同値写像 (**homotopy equivalence**) という。

$$d_I(x, y) = \sum_{i=1}^I |x_i - y_i|$$

定める位相と等しい。
定める位相と等しい。これらの定める位相はユークリッド距離の

Proposition 1.2.2. \mathbb{R}^n の位相は, \mathbb{R}^n の個の直積空間としての位相と等しい。

Corollary 1.2.3. X を位相空間, $B \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間, $f: X \rightarrow B$ を写像とする。このとき, f が連続であることと, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対し, $p_i \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であることとは同値。ただし, $p_i: B \rightarrow \mathbb{R}$ は, 包含と第 i 成分への射影 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の合成。

Proposition 1.2.4. 足し算, 掛け算, 逆数

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$$

は連続。

Corollary 1.2.5. 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は連続。

Proof. 行列を使って書けば, 各成分は足し算と掛け算で書ける。

Theorem 1.2.6 (Heine-Borel). ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合であること。

1.2.2 D^n, S^{n-1}

Definition 1.2.7. n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分空間

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$
$$= \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\right\}$$
$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$
$$= \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\right\}$$

をそれぞれ n 次元円盤 (*n-dimensional disc*), $n - 1$ 次元球面 (*n - 1-dimensional sphere*) という。

Example 1.1.6 と全く同様にして D^n は可縮であることが分かる。

1.2.3 \mathbb{C}, \mathbb{C}^n

Definition 1.2.8. \mathbb{R}^2 における和, 積を次のように定めると体となる。

$$(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 \text{ に対し}$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - db, da + bc).$$

この体を複素数体といて \mathbb{C} で表す¹。 \mathbb{C} の元を複素数という。

すぐわかるように和に関する単位元は $(0, 0)$, 積に関する単位元は $(1, 0)$ である。

exercise 1. 1. $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$.
2. $(a, 0)(b, c) = (ab, ac)$.

さて

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$$
$$(a, 0)(c, 0) = (ac, 0)$$

であるから $a \in \mathbb{R}$ と $(a, 0) \in \mathbb{C}$ を同一視して $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ とみなす。もう少し形式的にいうと **Proposition 1.2.9.** $f(a) = (a, 0)$ で定まる写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は体の (単射) 準同型である。

$(0, 1) \in \mathbb{C}$ を記号 i で表す。

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

である。

任意の $(a, b) \in \mathbb{C}$ は

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$
$$= (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$
$$= a + bi$$

と表すことが出来る。 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ であるとき, あきらかに

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$$

1.2 基本的な空間

第 1 章 Introduction

$$ij = k = -ji$$
$$jk = i = -kj$$
$$ki = j = -ik$$

で定めた積¹³ と一致する。

Definition 1.2.13. $q = (a, b) \in \mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ に対し, $(\overline{a}, -b)$ を q の共役 (**conjugate**) と言って \bar{q} で表す。 $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) と表したとき $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ である。

exercise 2. $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) と表したとき $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ であることを確かめよ。

$$q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \text{ } (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \text{ に対し}$$

$$q\bar{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk)$$
$$= a^2 - abi - acj - adk$$
$$+ abi - b^2i^2 - bcij - bdik$$
$$+ acj - bcji - c^2j^2 - cdjk$$
$$+ adk - bdk i - cd k j - d^2 k^2$$
$$= a^2 - abi - acj - adk$$
$$+ abi + b^2 - bck + bdj$$
$$+ acj + bck + c^2 - cdi$$
$$+ adk - bdj + cdi + d^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$$

である (可換ではないので計算には注意が必要) 。

Definition 1.2.14. $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} \in \mathbb{R}$ を q の絶対値という。

\mathbb{C} の場合と同様に, \mathbb{H} , \mathbb{H}^n にこの絶対値を用いて距離を定めることが出来る。距離空間として

$$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{H}^n \cong \left(\mathbb{R}^4\right)^n \cong \mathbb{R}^{4n}$$

である。 $4n - 1$ 次元球面 $S^{4n-1} \subset \mathbb{R}^{4n}$ は $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{H}^n$ と同一視すると

$$S^{4n-1} = \{q \in \mathbb{H}^n \mid \|q\| = 1\}$$

とみなせる。特に

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

である. すなわち, 任意の複素数 z は,

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

と一意的に表すことが出来る.

\mathbb{C} は可換体なので^{*} 普通に² 計算をすることが出来る. 例えば

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac + bci + adi + bd i^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Definition 1.2.10. $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ に対し, $(a, -b) \in \mathbb{C}$ を z の共役 (conjugate) といって \bar{z} で表す. $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) と表したとき, $\bar{z} = a - bi$ である.

$$z = a + bi \in \mathbb{C} \ (a, b \in \mathbb{R}) \text{ に対し}$$

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

である.

Definition 1.2.11. $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}$ を z の絶対値という.

定義より, $\|z\|$ は \mathbb{R}^2 におけるユークリッドノルムと同じものである. 特に, $z, w \in \mathbb{C}$ に

$$d(z, w) = \|z - w\|$$

と定めると, これは \mathbb{C} 上の距離関数である. もちろん, (我々の複素数体の定義では) 距離空間として \mathbb{C} は \mathbb{R}^2 そのものである. より一般に $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し, その

大きさを

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|z_i\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$$

で定め, \mathbb{C}^n の 2 点 $z = (z_1, \dots, z_n), w = (w_1, \dots, w_n)$ に対し z と w の距離 $d(z, w)$ を

$$d(z, w) = \|z - w\|$$

で定めるとこれは \mathbb{C}^n 上の距離関数であり,

$$\mathbb{C}^n = (\mathbb{R}^2)^n \cong \mathbb{R}^{2n}$$

1.2 基本的な空間

1.2.1 \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対し, その大きさ (ユークリッドノルム) を

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

で定める. ここで学んだことがあると思うが, 次が成り立つ.

- (a) $\|x\| \geq 0$.
- (b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 任意の $a \in \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\|ax\| = |a|\|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

この講義では $\|x\|$ を $|x|$ と書くことがあるかもしれない.

\mathbb{R}^n の 2 点 $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し x と y のユークリッド距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で定めるとこれは \mathbb{R}^n 上の距離関数である.

このノートでは, 特に断らなければ \mathbb{R}^n にはこの距離をいれ, 常にこの距離の定める位相を入れる.

Proposition 1.2.1. $d_\infty(x, y), d_1(x, y)$ を

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

71.2 基本的な空間

と自然に同一視したときのユークリッド距離と同じものである. このノートでは, 特に断らなければ \mathbb{C}^n にはこの距離をいれ, 常にこの距離の定める位相を入れる.

奇数次元 n の球面 $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ は, $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ と同一視すると

$$S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\} = \left\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\right\}$$

とみなせる. 特に

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$$

である. $\|zw\| = \|z\|\|w\|$ であること, $\|z\| = 1$ ならば $z\bar{z} = 1$ であることに注意すると, S^1 は複素数の積により (可換) 群となることが分かる.

1.2.4 \mathbb{H}, \mathbb{H}^n

Definition 1.2.12. \mathbb{C}^2 における和, 積を次のように定めると (非可換) 体となる.

($a, b), (c, d) \in \mathbb{C}^2$ に対し

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}). \end{aligned}$$

この体を四元数体といって \mathbb{H} で表す. \mathbb{H} の元を四元数 (quaternion) という^{*2}. (我々の定義では) 実ベクトル空間としては $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ であるから, \mathbb{H} と \mathbb{R}^4 は実ベクトル空間として自然に同一視出来る:

$$\mathbb{H} \xrightarrow[\cong]{\Psi} \mathbb{C}^2 \xrightarrow[\cong]{\Psi} (\mathbb{R}^2)^2 \xrightarrow[\cong]{\Psi} \mathbb{R}^4$$

$$(a + bi, c + di) \mapsto ((a, b), (c, d)) \mapsto (a, b, c, d)$$

$\mathbb{H} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ の元 $1, i, j, k$ を

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0) = (1, 0, 0, 0) \\ i &= (i, 0) = (0, 1, 0, 0) \\ j &= (0, 1) = (0, 0, 1, 0) \\ k &= (0, i) = (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

で定める. \mathbb{H} の積は, \mathbb{R}^4 に

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

2第 1 章 Introduction

また, このとき g を f のホモトピー逆写像 (homotopy inverse) とよぶ.

- X から Y へのホモトピー同値写像が存在するとき, X と Y はホモトピー同値 (homotopy equivalent) であるという.

Proposition 1.1.3. X から Y への連続写像全体のなす集合を $F(X, Y)$ と書く.

ホモトピックであるという関係 写像 $f \simeq g$ は $F(X, Y)$ 上の同値関係である.

証明は後で.

Definition 1.1.4. $F(X, Y)$ の, ホモトピックという同値関係による商集合

$$[X, Y] = F(X, Y) / \simeq$$

を X から Y へのホモトピー集合 (homotopy set) という.

$f: X \rightarrow Y$ のホモトピー類を $[f]$ と書くが, しばしば \llbracket を略して f と書く.

Problem 1.1.5. 二つの位相空間 X, Y が与えられたとき

- X と Y はホモトピー同値か?
- $[X, Y]$ はどんな集合か?

が知りたい!

Example 1.1.6. \mathbb{R}^n は一点とホモトピー同値である.

見やすさのため, 一点 $*$ からなる集合 (空間) $\{*\}$ を $*$ と書く. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow * = f(x) = *, g: * \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $g(*) = 0 := \{0, \dots, 0\}$ で定める. 明らかに $f \circ g = \text{id}$. よって $f \circ g \simeq \text{id}$. 一方, $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$H(x, t) = tx$$

で定めると, H は連続で,

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= 0x = 0 = g \circ f(x) \\ H(x, 1) &= 1x = x = \text{id}_{\mathbb{R}^n}(x) \end{aligned}$$

だから, $g \circ f \simeq \text{id}$.

一般に, 一点とホモトピー同値である空間を可縮 (contractible) であるという.

ホモトピー同値か? という観点からすると \mathbb{R}^n と一点は同じものだみなす. これくらい大雑把に見ると有限位相空間の分類を組合せ論的に記述できる.

さらに, これよりも少しゆるい「弱ホモトピー同値」という概念があり, コンパクトで“よい”位相空間は有限位相空間と弱ホモトピー同値であるということが知られている.

また

$$\pi^{-1}(V_i) = \pi^{-1}(\pi_*(U_i)) \subset U_i$$

ゆえ,

$$\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2) \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

だから $\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset$. π は全射だから $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

よって X/\sim は Hausdorff.

□

A.10 コンパクト距離空間

Definition A.10.1. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする.

写像 $f: X \rightarrow Y$ が一様連続 (uniformly continuous) である \Leftrightarrow 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となる.

明かに一様連続ならば連続である.

exercise 21. 一様連続ならば連続であることを示せ.

X がコンパクトのときは逆も言える.

Theorem A.10.2. (X, d_X) をコンパクト距離空間, (Y, d_Y) を距離空間とする. このとき, 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続ならば, f は一様連続である.

Proof. $\varepsilon > 0$ とする.

点 $a \in X$ に対し, $f: X \rightarrow Y$ は点 a で連続なので, ある $\delta_a > 0$ が存在し, $d_X(a, x) < 2\delta_a$ ならば $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ となる.

各 $a \in X$ に対し, この様な δ_a を一つとる *8. $\{U_{\delta_a}(a)\}_{a \in X}$ は X の開被覆で, X はコンパクトなので, ある $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_{\delta_i}(a_i)$$

となる. ただし見やすさのため $\delta_i = \delta_{a_i}$ とおいた.

$\delta := \min_i \delta_i$ とおく. $\delta > 0$ である.

$x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta$ とする. $x \in X = \bigcup_{i=1}^n U_{\delta_i}(a_i)$ ゆえ, ある $1 \leq i \leq n$ が存在し, $x \in U_{\delta_i}(a_i)$, すなわち $d_X(a_i, x) < \delta_i$ である. よって $d_Y(f(a_i), f(x)) < \varepsilon/2$. また

$$\begin{aligned} d_X(a_i, x') &\leq d_X(a_i, x) + d_X(x, x') \\ &< \delta_i + \delta \end{aligned}$$

参考文献

[1] R. Bott and J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:87–89, 1958.

[2] Brayton Gray. *Homotopy Theory*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.

[3] Michel A. Kervaire. Non-parallelizability of the n -sphere for $n > 7$. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 44(3):280–283, 1958.

[4] J. P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[5] Tammo tom Dieck. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[6] Shunichi Tsukuda. 幾何学序論講義ノート. <http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/>.

[7] 西田 吾郎. ホモトピー論. 共立出版, 1985.

付録 A 予備知識

$$\delta_i + \delta_i = 2\delta_i \leq$$

ゆえ $d_Y(f(a_i), x') < \varepsilon/2$. したがって

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f(a_i)) + d_Y(f(a_i), f(x')) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

*8 例えば $\min\{1, \sup\{\delta \mid d_X(a, x) < 2\delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2\}\}$

つづく...

1.4.1 圏

Definition 1.4.1 (Category). 圏 (カテゴリー, category) \mathcal{C} とは以下の3つの data (i) $\text{Ob } \mathcal{C}$ の元を対象 (object) といふ.

(ii) 対象の任意の順序対 (A, B) に対して定められた集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. この集合の元を A から B への射 (morphism または arrow) といふ.

(iii) 任意の $A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ に対して定められた写像 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$. 射 $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を図式により $f: A \xrightarrow{f} B$ または $A \xrightarrow{f} B$ とあらわす.

この写像を合成 (composition) といふ. 射 $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ と $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ の合成を gf または $g \circ f$ とあらわす.

条件 (a) 合成は結合的, すなわち, 任意の射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ に対し, 等式 $h(gf) = (hg)f$ が成り立つ.

(b) 各対象 $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ に対し, 次のみたす射 $1_A: A \rightarrow A$ が存在する. 『任意の $f: A \rightarrow B$ に対し $f \circ 1_A = f$. 任意の $g: C \rightarrow A$ に対し $1_A \circ g = g$.』

条件 (b) の射 $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ は各 A に対し一意的に定まることがわかる. これを A の恒等射 (identity morphism) といふ.

$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ に対し, A を f の domain または source, B を f の codomain または target とよぶ.

exercise 3. 条件 (b) の射 $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ は各 A に対し一意的に定まることが示せる.

記法上の注意を少し.

- ・ $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を $\text{Mor } \mathcal{C}(A, B)$ と書くこともある.
- ・ $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を $\text{Hom}(A, B)$ と書くこともある.
- ・ 射 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ の合成を図式 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ であらわす.

圏の例を挙げる.

Example-Definition 1.4.2.

- (Sets): 集合を対象とし, 集合の間の写像を射, 写像の合成を合成とする圏.
- (Abel): アーベル群を対象, 準同型写像を射, 準同型写像の合成を合成とする圏.
- (Top): 位相空間を対象, 連続写像を射, 連続写像の合成を合成とする圏.
- $ho(\text{Top})$: 位相空間を対象, 連続写像のホモトピー類を射, 連続写像の合成を合成とする圏 (これが圏の条件をみたすことはいずれ示す).

Definition 1.4.3. \mathcal{C} を圏とする.

- 射 $f: A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ が同型射 (isomorphism) である. $\overset{\text{def}}{=} gf = 1_A$ と $fg = 1_B$ をみたすような射 $g: B \rightarrow A$ が存在する. このような射 g を f の逆射といふ.

$$A \xrightleftharpoons[f]{g} B$$

- A から B への同型射が存在するとき A は B に (\mathcal{C} において) 同型であるといひ, $A \cong B$ と表す.

1.4.2 関手

Definition 1.4.5 (Functor). 圏 \mathcal{C} から圏 \mathcal{D} への関手 (functor) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ とは以下の2つの data (i) (ii) からなり, 条件 (a), (b) をみたすものといふ.

- 写像 $F: \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$
- \mathcal{C} の対象の各順序対 (A, B) に対して定められた写像 $F_{A, B}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$. 普通 $F_{A, B}$ を単に F と書く.

条件 (a) 任意の射 $f: A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ に対し, 等式 $F(gf) = F(g)F(f)$ が成り立つ.

(b) \mathcal{C} の任意の対象 $A \in \mathcal{C}$ に対し, 等式 $F(1_A) = 1_{F(A)}$ が成り立つ.

Lemma 1.4.6. $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を関手とする. $f: A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ が同型射ならば $F(f): F(A) \rightarrow F(B) \in \mathcal{D}$ も同型射である.

特に, $A, B \in \mathcal{C}$ について, $F(A) \not\cong F(B)$ ならば $A \not\cong B$ である.

Proof. $f: A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ が同型射であるとする. $g: B \rightarrow A \in \mathcal{C}$ を f の逆射とする. すなわ

である. $1 = \bar{b}b = b\bar{a}a$ となること ($\|b\| \|a\| \|b\| \|a\| = 1$) を注意すると, S^3 は四元数の積により (非可換) 群となることが分かる.

^{*2} この作り方は, \mathbb{R} から \mathbb{C} を作った方法と同じである. この構成法を Cayley-Dickson 構成という.

^{*3} e_1, \dots, e_n が実ベクトル空間 V の基底であるとき, n^2 個の元 $e_i \cdot e_j \in V$ を定めると

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} e_i \right) \cdot \left(\sum_{i,j} b_{ij} e_i \right) = \sum_{i,j} (a_{ij} b_{ij}) (e_i \cdot e_j)$$

により, V に, 分配法則をみたす積を定めることが出来る. 一般には, この積は単位元をもつとも結合的であるとも限らない.

1.3 可除代数

\mathbb{R} に $i^2 = -1$ になる数 i を付け加えて新しい数 (複素数, \mathbb{C}) を作った. \mathbb{R} に $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ になる「数」 i, j, k を付け加えて新しい数 (四元数, \mathbb{H}) を作った. 同じようなことが他にも出来るのか? 例えば k は使わず i, j だけを考えて \mathbb{R}^3 が体になるようには出来ないのか? といった疑問は自然におこるのであろう.

Definition 1.3.1. 実ベクトル空間 A に, 積 $\cdot: A \times A \rightarrow A$ が与えられており, 任意の $a, b, c \in A$ と任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し

- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $(ra) \cdot b = r(a \cdot b) = a \cdot (rb)$

が成り立つとき ^{*4}, A を \mathbb{R} 上の代数 (algebra) あるいは \mathbb{R} 代数という.

\mathbb{R} 代数 A は, 任意の $0 \neq a \in A$ と任意の $b \in A$ に対し次の二つの条件

- $ax = b$ をみたす $x \in A$ がただ一つ存在する
- $ya = b$ をみたす $y \in A$ がただ一つ存在する

をみたすとき実可除代数 (real division algebra) という.

実可除代数は, 分配法則が成り立ち加減乗除という四則演算が出来るという意味で, 広い意味での「数」の様なものである (ただし, 積については, 単位元の存在, 可換法則, 結合法則は要求しない) .

Example 1.3.2. \mathbb{R} から \mathbb{C} , \mathbb{C} から \mathbb{H} を作ったのと同じことを \mathbb{H} でやってみる.

- $f_0 f_1 g f_1 \approx f_1$ ならば $g f_0 f_1 g f_1$ である.
- $f_0 f_1 g f_1 \approx f_1$ ならば $g f_0 f_1 g f_1$ である.
- $f_0 f_1, g f_1, g f_0 f_1 g f_1$ である.

Proof. 1. $F: X \times I \rightarrow Y$ を f_0 から f_1 へのホモトピーとすると $gF: X \times I \rightarrow Y$ は $g f_0$ から $g f_1$ へのホモトピーである.

- 同様.
- $1, 2$ より $f_0 f_1 g f_0 f_1 g f_1 \approx f_1$. よって $f_0 f_1 g f_1 \approx f_1$.

□

exercise 5. 2 を示せ.

Proposition 2.1.1.3 より写像の合成は, 写像

$$[X, Y] \times [Y, Z] \rightarrow [X, Z]$$

を定め, これが圏の定義 (Definition 1.4.1) の条件 (a), (b) をみたすことが分かる.

Definition 2.1.2. 1. 位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の組 (X, A) を位相空間対という. しばしば省略して空間対とよぶ.

A が一点 $\{x_0\}$ であるときは, $(X, \{x_0\})$ を (X, x_0) と書き, 基点付き空間 (based space) という. また x_0 を基点 (basepoint) という.

2. $(X, A), (Y, B)$ を空間対とする. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は, $f(A) \subset B$ をみたすとき空間対の写像とよび, $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ と表す.

基点付き空間の写像 $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, つまり連続写像 $f: X \rightarrow Y$ で, $f(x_0) = y_0$ をみたすものを基点付き写像 (based map) という.

3. 位相空間対を対象とし, 空間対の写像を射とする圏を空間対の圏といい (Top(2)) と書く. (Top(2)) の同型射を空間対の同相写像という.

4. 基点付き空間を対象とし, 基点付き写像を射とする圏を基点付き空間の圏といい (Top)* と書く.

Lemma 2.1.3. $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を空間対の写像とする.

このとき, f が空間対の同相写像 $\Leftrightarrow f: X \rightarrow Y, f|_A: A \rightarrow B$ がどちらも同相写像.

Proof. $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が空間対の同相写像であるとし, $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ をその逆射とする. 明らかに $f: X \rightarrow Y$ は同相写像で, $g: Y \rightarrow X$ がその逆写像である.

また, $f(A) \subset B, g(B) \subset A$ なので, f および g の制限限は写像 $f|_A: A \rightarrow B, g|_B: B \rightarrow A$ を定め, どちらも連続である. 明らかに互いに他の逆写像であるから同相.

逆に, $f: X \rightarrow Y, f|_A: A \rightarrow B$ がどちらも同相写像であるとする. $g: Y \rightarrow X$ を f

第 2 章

ホモトピー

2.1 ホモトピー

第 1 章で述べたホモトピーの性質を証明しよう。

Proposition 1.1.3. X から Y への連続写像全体のなす集合を $F(X, Y)$ と書く。
ホモトピックであるという関係「 \simeq 」は $F(X, Y)$ 上の同値関係である。

Proof. 1. $f: X \rightarrow Y$ に対し、 $F: X \times I \rightarrow Y$ を $F(x, t) = f(x)$ で定めると *6 明らかに連続で $F(x, 0) = F(x, 1) = f(x)$ だから $f \simeq f$ 。
2. $f \simeq g$ とし、 $H: X \times I \rightarrow Y$ を f から g へのホモトピーとする。 $H^{-1}: X \times I \rightarrow Y$ を $H^{-1}(x, t) = H(x, 1 - t)$ で定めると *7 明らかに連続で $H^{-1}(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$, $H^{-1}(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$ だから H^{-1} は g から f へのホモトピー。 よって $g \simeq f$ 。
3. $f \simeq g, g \simeq h$ とし、 F を f から g への、 G を g から h へのホモトピーとする。
 $H: X \times I \rightarrow Y$ を

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

で定めると H は連続で、 $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ なので $f \simeq h$ 。

□

exercise 4. (2.1) の H が well-defined であることと連続であることを確かめよ。（ヒント: H を $X \times [0, 1/2]$ と $X \times [1/2, 1]$ に制限したものは連続。 Proposition A.4.3 参照）

Proposition 2.1.1. $f, f_0, f_1: X \rightarrow Y, g, g_0, g_1: Y \rightarrow Z$ を連続写像とする。

ち $gf = 1_A, fg = 1_B$ が成り立つ。このとき

$$F(g)F(f) = F(gf) = F(1_A) = 1_{F(A)} \\ F(f)F(g) = F(fg) = F(1_B) = 1_{F(B)}$$

となり、 $F(f)$ は同型射（で、 $F(g)$ がその逆射）。

Example 1.4.7. 関手

$$F: ho(Top) \rightarrow (Abel)$$

で

$$F(S^{n-1}) = \mathbb{Z} \\ F(*) = 0$$

をみたすものが存在するとする（実際に存在する。この講義でも扱う予定）。

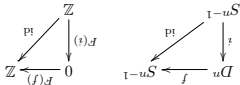
これを仮定すると、 $\mathbb{Z} \neq 0$ なので S^{n-1} は一点とホモトピー同値ではない、つまり S^{n-1} は可縮ではないことが分かる。

また、連続写像 $f: D^n \hookrightarrow S^{n-1}$ で、 $f|_{S^{n-1}} = \text{id}$ となるものは存在しない*5。 ことが次のようにして分かる。 $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ を包含写像とする。 $f|_{S^{n-1}} = \text{id}$ が成り立つとする。

$$f|_{S^{n-1}} = f! \text{ なので、} f! = = \text{id が成り立つ。よって}$$

$$\text{id} = \text{id}_{f(S^{n-1})} = F(f) = F(f!) = F(f|_{S^{n-1}}) = F(\text{id}_{S^{n-1}}) = F(f)$$

となる。 D^n は可縮なので $F(D^n) = F(*) = 0$ ゆえ右辺は 0 写像となり不合理。



*5 これは Brouwer の不動点定理と同値な命題である。

Proof of Theorem 1.3.3. A を n 次元実可除代数とする。実ベクトル空間としての同型 $A \simeq \mathbb{R}^n$ を一つとすると、 \mathbb{R}^n が実可除代数（となる積が存在する）であるとしてもよい。

線性写像 $g: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を与える。写像 g と連続写像

$$\pi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, \quad \pi\left(\frac{\|x\|}{x}\right) = x$$

の合成

$$f = \pi \circ g: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

を考える。

$$g(-x, x, y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y) = -g(x, y) \\ g(x, x, y) = (x \cdot y) = -(y \cdot (-x)) = -g(x, y) \\ g(x, y, -x) = (x \cdot y) = -(x \cdot (-y)) = -g(x, y)$$

ゆえ

$$f(-x, y) = \pi(g(-x, y)) = \pi(-g(x, y)) = -\pi(g(x, y)) = -f(x, y) \\ f(x, -y) = \pi(g(x, -y)) = \pi(-g(x, y)) = -\pi(g(x, y)) = -f(x, y)$$

であるから f は奇写像である。よって Theorem 1.3.4 より $n = 1, 2, 4, 8$ 。

□

*4 積が双線型 (bilinear) であるということ。

1.4 圖

圖のありかたみは不変量を取る事のみにあるわけではないけれども...

二つの空間がホモトピー同値であることを示すのは（出来るかどうかはともかく）実際

にホモトピー同値写像を与えればよい。が、どう頑張ってもホモトピー同値写像が見つ

からないからといってホモトピー同値ではないというわけにはいかない。

ホモトピー同値でないことを示すのには不変量という考え方が有効である。

な（基点付き）連続写像 \bar{f} を誘導する：

$$\begin{array}{ccc} X & & X/A \\ \downarrow f & & \downarrow d \\ Y & \xleftarrow{f} & Y/B \end{array}$$

ただし p, q は自然な射影．

さらに, $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が空間対の同相写像ならば, $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$ は (基点付き) 同相写像である．

Proof. $f(A) \subset B$ であるから, $a', a'' \in A$ ならば $f(a'), f(a'') \in B$ ．よって Corollary A.2.5 より, 図式を可換にするような写像 \bar{f} が存在する．

f, g はともに連続なので, Theorem A.6.5 より, f は連続である．

$f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が空間対の同相写像ならば, $g: (X, A) \rightarrow (X, A)$ で $gf = \text{id}_X$, $fg = \text{id}_Y$ をみたすものが存在し, 次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccc} X/A & & Y/B & & X/A \\ \uparrow d & & \uparrow b & & \uparrow d \\ X & \xleftarrow{f} & Y & \xleftarrow{g} & X \end{array}$$

ゆえ, 一意性 (Corollary A.2.5) より, $gf = \text{id}_{X/A}$ ．同様に $\bar{f}\bar{g} = \text{id}_{Y/B}$ が分かる． \square

Lemma という程のものではないが！

Lemma 3.1.2. $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を空間対の写像とする．このとき, $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$ が全単射 $\Leftrightarrow f(X - A) \subset (Y - B)$ かつ $f: X - A \rightarrow Y - B$ が全単射．

Proposition 3.1.3. X を Hausdorff 空間, $A \subset X$ をコンパクト部分空間とする．このとき, X/A も Hausdorff 空間である．

特に, X がコンパクト Hausdorff 空間で, $A \subset X$ が閉部分集合ならば, X/A は Hausdorff 空間である．

Proof. $x_1, x_2 \in X, [x_1] \neq [x_2] \in X/A$ とする． $x_1, x_2 \notin A$ のとき, このとき $x_1 \neq x_2$ である． X は Hausdorff なので, $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となる X の開集合 U_1, U_2 が存在する． A は Hausdorff 空間のコンパクト部分集合なので閉集合である．よって $U_1 - A$ は開集合である．

2.1 ホモトピー

の逆写像とすると, f が同相写像互換互換互換なので g は連続である． $f|_A: A \rightarrow B$ は同相写像なので全射ゆえ $f(A) = B$ である． $b \in B$ に対し, $f(g(b)) = b \in B = f(A)$ ． f は単射だから $g(b) \in A$ ．よって $g(B) \subset A$ ．したがって g は空間対の写像であり, 明らかに $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ の逆射． \square

exercise 6. $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を空間対の写像とする．このとき, $f|_A: A \rightarrow B$ が連続であることを示せ (Proposition A.4.2 を見よ) ．

Definition 2.1.4. 空間対 (X, A) に対し, 空間対 $(X \times I, A \times I)$ を $(X, A) \times I$ と表す． $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を空間対の写像とする．空間対の写像

$$H: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$$

で, 任意の $x \in X$ に対し

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \\ H(x, 1) &= g(x) \end{aligned}$$

をみたすものが存在するとき, f と g はホモトピック (homotopic) であるといい, $f \simeq g$ と書く．また, H を f から g へのホモトピー (homotopy) という．

基点付き写像 $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ がホモトピックであるとき基点を止めてホモトピックであるということがある．また, このときのホモトピーを基点付きホモトピーとよぶことがある．

定義より

$$H: (X, x_0) \times I \rightarrow (Y, y_0)$$

が f から g への基点付きホモトピーであるということは

$$H: X \times I \rightarrow Y$$

が連続で, 任意の $x \in X$ と $t \in I$ に対し

$$\begin{aligned} H(x_0, t) &= y_0 \\ H(x, 0) &= f(x) \\ H(x, 1) &= g(x) \end{aligned}$$

をみたすということ．つまり, H は f から g への (基点を考えない普通の) ホモトピーであって, 任意の $t \in I$ に対し $H(x_0, t) = y_0$ をみたすもの (基点を動かさない) ということ．

第 3 章 基本的な空間及び構成

な (基点付き) 連続写像 \bar{f} を誘導する：

$$\begin{array}{ccc} X & & X/A \\ \downarrow f & & \downarrow d \\ Y & \xleftarrow{f} & Y/B \end{array}$$

ただし p, q は自然な射影．

さらに, $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が空間対の同相写像ならば, $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$ は (基点付き) 同相写像である．

Proof. $f(A) \subset B$ であるから, $a', a'' \in A$ ならば $f(a'), f(a'') \in B$ ．よって Corollary A.2.5 より, 図式を可換にするような写像 \bar{f} が存在する．

f, g はともに連続なので, Theorem A.6.5 より, f は連続である．

$f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が空間対の同相写像ならば, $g: (X, A) \rightarrow (X, A)$ で $gf = \text{id}_X$, $fg = \text{id}_Y$ をみたすものが存在し, 次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccc} X/A & & Y/B & & X/A \\ \uparrow d & & \uparrow b & & \uparrow d \\ X & \xleftarrow{f} & Y & \xleftarrow{g} & X \end{array}$$

ゆえ, 一意性 (Corollary A.2.5) より, $gf = \text{id}_{X/A}$ ．同様に $\bar{f}\bar{g} = \text{id}_{Y/B}$ が分かる． \square

Lemma という程のものではないが！

Lemma 3.1.2. $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を空間対の写像とする．このとき, $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$ が全単射 $\Leftrightarrow f(X - A) \subset (Y - B)$ かつ $f: X - A \rightarrow Y - B$ が全単射．

Proposition 3.1.3. X を Hausdorff 空間, $A \subset X$ をコンパクト部分空間とする．このとき, X/A も Hausdorff 空間である．

特に, X がコンパクト Hausdorff 空間で, $A \subset X$ が閉部分集合ならば, X/A は Hausdorff 空間である．

Proof. $x_1, x_2 \in X, [x_1] \neq [x_2] \in X/A$ とする． $x_1, x_2 \notin A$ のとき, このとき $x_1 \neq x_2$ である． X は Hausdorff なので, $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となる X の開集合 U_1, U_2 が存在する． A は Hausdorff 空間のコンパクト部分集合なので閉集合である．よって $U_1 - A$ は開集合である．

$$\Sigma X := X \times I / X \times 0 \cup X \times 1$$

$$CX := X \times I / X \times 0 \cup X \times I$$

$$X \times I := X \times I / x_0 \times I$$

Definition 3.1.4. $(X, x_0), (Y, y_0)$ を基点付き空間とする．

条件が A.9.6 にある．

Remark. 一般に, X が Hausdorff 空間であって, 商空間は Hausdorff とは限らない． X がコンパクト Hausdorff 空間のときに, 商空間が Hausdorff となるための必要十分

$$\pi^{-1}(\pi(B)) = \begin{cases} A \cup B, & A \cap B \neq \emptyset \\ B, & A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

exercise 7. $\pi: X \rightarrow X/A$ を自然な射影とする． $B \subset X$ に対し,

る．

コンパクト Hausdorff 空間の部分集合はコンパクトであることから後半が分かる．
だから開集合で, $[x] \in \pi(U), * \in \pi(V), \pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ であることが分かる．

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U, \quad \pi^{-1}(\pi(V)) = V$$

えと

とおくと, U, V は開集合で, $x \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ となる． $\pi(U), \pi(V) \subset X/A$ を考

$$U := \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}, \quad V := \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$$

コンパクトだから, ある $a_1, \dots, a_n \in A$ が存在し, $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$ となる．

$x \neq a$ ので, $x \in U, a \in V, U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する． A はコンパクト $\nRightarrow A, x_2 \in A$ のとき, このとき $[x_2] = [a]$ とする．各 $a \in A$ に対し, $x_1 \notin A, x_2 \in A$ のとき, $x := *, x := x_1$ とする．

ゆえ $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ．

$$\pi^{-1}(O_1 \cap O_2) = \pi^{-1}(O_1) \cap \pi^{-1}(O_2) = (U_1 - A) \cap (U_2 - A) = \emptyset$$

である (なぜか?) から, O_1 は X/A の開集合である． π は全射で,

$$\pi^{-1}(O_i) = \pi^{-1}(\pi(U_i - A)) = U_i - A$$

$O_i := \pi(U_i - A) \subset X/A$ とおく． $x_i \in U_i - A$ であるから, $[x_i] \in O_i$ である．また,

3.1 部分空間を一点に縮めた空間

第 3 章 基本的な空間及び構成

を与える．容易に

$$q(S^{n-1} \times I - S^{n-1} \times 0 \cup e \times I) \subset D^n - e$$

であり,

$$q: S^{n-1} \times I - S^{n-1} \times 0 \cup e \times I \rightarrow D^n - e$$

が全単射であることが分かる．よって

$$\bar{q}: CS^{n-1} \rightarrow D^n$$

は連続な全単射． CS^{n-1} はコンパクト, D^n は Hausdorff だから, \bar{q} は同相．

- 写像 $q: D^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を $q(x) = (2|x|^2 - 1, \sqrt{1 - |x|^2}x)$ で定める．明らかに q は連続で, $q(x) \in S^n$ であることが分かる．さらに, $x \in S^{n-1}$, すなわち $|x| = 1$ ならば, $q(x) = e, x \notin S^{n-1}$, すなわち $|x| < 1$ ならば, $q(x) \neq e$ であるから, q は空間対の写像 $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, e)$ でであり, $q(D^n - S^{n-1}) \subset S^n - e$ である．

写像 $f: S^{n-1} - e \rightarrow D^n - S^{n-1}$ を

$$f(r, x) = \frac{x}{\sqrt{2(1-r)}}$$

で定めると, f は $q|_{D^n - S^{n-1}}$ の逆写像であり, $q: D^n - S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} - e$ が全単射であることが分かる．

よって,

$$\bar{q}: D^n / S^{n-1} \rightarrow S^n / e = S^n$$

は全単射基点付き写像． D^n / S^{n-1} はコンパクト, S^n は Hausdorff なので, \bar{q} は同相．

- 1.2 及び $CX/X \cong \Sigma X$ であることより

$$S^n \cong D^n / S^{n-1} \cong CS^{n-1} / S^{n-1} \cong \Sigma S^{n-1}.$$

\square

Definition 3.2.3. n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分空間

$$\begin{aligned} I^n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i: 0 \leq x_i \leq 1\} \\ \partial I^n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid \exists i: x_i \in \{0, 1\}\} \end{aligned}$$

をそれぞれ n 次元キューブ (n -dimensional cube) とその境界という．

$n \geq 1$ に対し,

$$J^n := \partial I^n \times I \cup I^n \times 0 \subset \partial I^{n+1} \subset I^n \times I$$

□

$$\begin{array}{ccc} X \times Y/X \times B \cup A \times Y & \xrightarrow{\quad} & X/A \vee Y/B \\ \uparrow & & \uparrow \\ X \times Y & \xleftarrow{\quad} & X/A \times Y/B \end{array}$$

Proof. 次の図式を考える.

ちとしては $(X, A) \vee (Y, B) \cong X/A \vee Y/B$.

Remark. $(X, A) \vee (Y, B)$ という記号はあまり使わない (本当?) 気がするけれど、気持

$$X \times Y/X \times B \cup A \times Y \cong X/A \vee Y/B$$

間 A, B が閉集合ならば次は同相:

Proposition 3.1.7. $(X, A), (Y, B)$ を空間対とする. X, Y がコンパクト Hausdorff 空

$$(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

$(X, A) \times (Y, B)$ と書く:

Notation 3.1.6. 空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対し, 空間対 $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ を

を誘導する.

$$\begin{array}{l} f_1 \vee f_2: X_1 \vee X_2 \rightarrow Y_1 \vee Y_2 \\ f_1 \wedge f_2: X_1 \wedge X_2 \rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \end{array}$$

は, 基点付き写像

Proposition 3.1.5. X_1, X_2, Y_1, Y_2 を基点付き空間とする. 基点付き写像 $f_i: X_i \rightarrow Y_i$

Proposition 3.1.1 より次が分かる.

ある (もっと弱い条件で O.K.).

$(X \wedge Y) \vee Z \leq X \vee (Y \vee Z)$ は同相とは限らない. X, Y, Z がコンパクトならば同相で

Remark. $X \vee Y \cong Y \vee X$ (同相) である.

$$X \vee Y := X \times Y/X \times y_0 \cup x_0 \times Y = X \times Y/X \vee Y$$

5.

$$X \vee Y := X \amalg Y/x_0 \cup y_0$$

4.

基本的な空間及び構成

第 3 章

3.1 部分空間を一点に縮めた空間

X を位相空間, $A \subset X$ を空でない部分空間とする.

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in A$$

という同値関係による商空間を部分空間 A を一点に縮めた空間といい, X/A と書く

(Definition A.6.3).

$A = \emptyset$ のときは, X/\emptyset を, X に一点を付け加えた空間 (X と一点の直和)

$$X/\emptyset = X \amalg *$$

と定める.

X/A は, 一点に潰した点 $[A]$ を基点として基点付き空間と考える.

Remark. 集合として

$$X/A \cong (X - A) \amalg \{[A]\} \cong (X - A) \amalg \{*\}$$

であり, この対応のもと, 射影 $\pi: X \rightarrow X/A$ を $X - A$ に制限したものは恒等写像で,

$$\pi(A) = *$$

$$\begin{array}{ccc} X/A & \xrightarrow{\pi} & X \\ \uparrow & \uparrow \text{id} & \uparrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & (X - A) \amalg A \end{array}$$

Proposition 3.1.1. 空間対の写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は, 次の図式が可換となるよう

3.2 球面, キューブ

円盤と球面の定義を再掲する.

Definition 3.2.1. n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分空間

$$\begin{aligned} D^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \\ &= \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\right\} \\ S^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \\ &= \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\right\} \end{aligned}$$

をそれぞれ n 次元円盤 (n -dimensional disc), $n - 1$ 次元球面 ($n - 1$ -dimensional sphere) という.

S^{n-1} と D^n は $e = (1, 0, \dots, 0) \in S^{n-1} \subset D^n$ を基点として, 基点付き空間と考える.

Lemma 3.2.2. 1. $(D^n, S^{n-1}) \cong (CS^{n-1}, S^{n-1})$ (空間対の同相).

2. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (基点付き同相).

3. $S^n \cong \Sigma S^{n-1}$ (基点付き同相).

Proof. 1.

$$CS^{n-1} = S^{n-1} \times I/S^{n-1} \times 0 \cup e \times I$$

であった. 写像 $q: S^{n-1} \times I \rightarrow D^n$ を $q(x, t) = tx + (1 - t)e$ で定める.

$$\begin{aligned} |tx + (1 - t)e| &\leq t|x| + (1 - t)|e| \\ &\leq t + (1 - t) = 1 \end{aligned}$$

ゆえ $q(x, t) \in D^n$ だから q は well defined. 明らかに連続で,

$$q(x, 0) = e, \quad q(e, t) = e$$

ゆえ, q は空間対の写像

$$q: (S^{n-1} \times I, S^{n-1} \times 0 \cup e \times I) \rightarrow (D^n, e)$$

を与え,

$$\bar{q}: CS^{n-1} = S^{n-1} \times I/S^{n-1} \times 0 \cup e \times I \rightarrow D^n/e = D^n$$

を定める. さらに $q(x, 1) = x$ なので, \bar{q} は空間対の写像

$$\bar{q}: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (D^n, S^{n-1})$$

空間対のホモトピーについても Proposition 1.1.3, Proposition 2.1.1 と同様なることが成り立つ. 証明も同じである (何箇所かで空間対の写像になっていることをチェックすればよい).

Definition 2.1.5. 1. 空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対し, (X, A) から (Y, B) への空間対の写像全体のなす集合を $F((X, A), (Y, B))$ で表す. 基点付き空間の場合, $F((X, x_0), (Y, y_0))$ を $F_*(X, Y)$ と書く.

2. (X, A) から (Y, B) への空間対の写像のホモトピー類全体のなす集合を $[(X, A), (Y, B)]$ で表す:

$$[(X, A), (Y, B)] := F((X, A), (Y, B))/\sim$$

基点付き空間の場合, $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ を $[X, Y]_*$ と書く.

以上のことは, 部分空間の個数が増えても同様なることを考えることができる.

Definition 2.1.6. 空間の 3 対, 基点付き空間対

1. 位相空間 X とその部分空間 $A_2 \subset A_1 \subset X$ の組 (X, A_1, A_2) を位相空間の 3 対という.

A_2 が一点 $\{x_0\}$ であるときは, $(X, A, \{x_0\})$ を (X, A, x_0) と書き, 基点付き空間対という. このとき $x_0 \in A \subset X$ である. また x_0 を基点 (basepoint) という.

2. $(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)$ を空間の 3 対とする. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は, $i = 1, 2$ に対し $f(A_i) \subset B_i$ をみたすとき空間の 3 対の写像とよび, $f: (X, A_1, A_2) \rightarrow (Y, B_1, B_2)$ と表す.

基点付き空間対の写像 $f: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$, つまり連続写像 $f: X \rightarrow Y$ で, $f(A) \subset B$ $f(x_0) = y_0$ をみたすものを基点付き写像 (based map) という.

3. 位相空間の 3 対を対象とし, 空間の 3 対の写像を射とする圏を空間の 3 対の圏といい (**Top(3)**) と書く. (**Top(3)**) の同型射を空間の 3 対の同相写像という.

4. 空間の 3 対 (X, A_1, A_2) から (Y, B_1, B_2) への 3 対の写像全体のなす集合を $F((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ で表し, そのホモトピー類全体を $[(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)]$ と書く.

5. 基点付き空間対 (X, A, x_0) から (Y, B, y_0) への基点付き写像全体のなす集合を $F_*, ((X, A), (Y, B))$ で表し, そのホモトピー類全体を $[(X, A), (Y, B)]_*$ と書く.

*6 射影 $X \times I \rightarrow X$ と f の合成だから

*7 $\iota: I \rightarrow I$, $\iota(t) = 1 - t$ は連続で, $H^{-1} = H \circ (\text{id}_X \times \iota)$

1. 写像 $f_{\sharp}: F(Z, X) \rightarrow F(Z, Y)$ を $f_{\sharp}(g) = f \circ g$ で定めると, f_{\sharp} は連続である:

$$\begin{array}{ccc} F(Z, X) & \xrightarrow{f} & F(Z, Y) \\ \wr & & \wr \\ Z \xrightarrow{g} X & \longrightarrow & Z \xrightarrow{f} Y \end{array}$$

2. 写像 $f^{\sharp}: F(Y, Z) \rightarrow F(X, Z)$ を $f^{\sharp}(h) = h \circ f$ で定めると, f^{\sharp} は連続である.

$$\begin{array}{ccc} F(Y, Z) & \xrightarrow{f^{\sharp}} & F(X, Z) \\ \wr & & \wr \\ Y \xrightarrow{h} Z & \longleftarrow & X \xrightarrow{f} Y \end{array}$$

Proposition 3.4.3. 1. $(g \circ f)_{\sharp} = g_{\sharp} \circ f_{\sharp}$, $\text{id}_{\sharp} = \text{id}$.
2. $(g \circ f)^{\sharp} = f^{\sharp} \circ g^{\sharp}$, $\text{id}^{\sharp} = \text{id}$.

Corollary 3.4.4. f が同相写像ならば f_{\sharp} , f^{\sharp} も同相写像.

これらは基点付きの場合も成り立つ.

3.4.1 隣接

(連続とは限らない) 写像全体 $\text{Map}(X, Y)$ を考えたと, 次の全単射がある.

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(X \times Y, Z) & \xrightarrow[\psi]{\varphi} & \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z)) \\ \Phi(f)(x)(y) = f(x, y) & & \Phi(f)(x)(y) = g(x)(y) \\ f \vee: X \rightarrow F(Y, Z), & f \vee(x)(y) = f(x, y) & \end{array}$$

(adjoint map)

Proposition 3.4.5. $f: X \times Y \rightarrow Z$ を連続写像とする. このとき, f の隣接写像

は連続である.

従って次の写像を定義することが出来る.

Definition 3.4.6. 写像

$$\varphi: F(X \times Y, Z) \rightarrow F(X, F(Y, Z))$$

を $\varphi(f) = f^{\vee}$ により定める.

φ は一般に連続とは限らないし, 全単射とも限らない. 連続であるとか, 全単射であるためには, 写像空間のノース ($F(X, Y)$ の X) に何らかの仮定が必要である. この仮定が不要なものもあるし, いずれもより弱い仮定でも成り立つが, 煩雑になるので, ここでは少し強い仮定をおくことにした.

Remark. この様に何らかの仮定が必要であるというのは色々な不便である. うまいコンパクト生成弱 Hausdorff 空間 (compactly generated weakly Hausdorff spaces) 等).

Proposition 3.4.7. X をコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき隣写像 (evaluation map)

$$ev: F(X, Y) \times X \rightarrow Y, \quad ev(f, x) = f(x)$$

は連続である.

Definition 3.4.8. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき, 連続写像 $g: X \rightarrow F(Y, Z)$ に対し, 写像

$$g^{\vee} := ev \circ (g \times \text{id}): X \times Y \xrightarrow{g \times \text{id}} F(Y, Z) \times Y \xrightarrow{ev} Z, \quad g^{\vee}(x, y) = (g(x))(y)$$

は連続である (g^{\vee} も g の隣接とよぶことができる).

写像

$$\psi: F(X, F(Y, Z)) \rightarrow F(X \times Y, Z)$$

を $\psi(g) = g^{\vee}$ により定める.

Proposition 3.4.9. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき φ, ψ は全単射で互いに他の逆.

$$\begin{array}{ccc} F(X \times Y, Z) & \xrightarrow[\psi]{\varphi} & F(X, F(Y, Z)) \\ \wr & & \wr \end{array}$$

Corollary 3.4.10. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

1. $f_0 \simeq f_1: X \times Y \rightarrow Z$ ならば, $f_0^{\vee} \simeq f_1^{\vee}: X \rightarrow F(Y, Z)$.

2. $g_0 \simeq g_1: X \rightarrow F(Y, Z)$ ならば, $g_0^{\vee} \simeq g_1^{\vee}: X \times Y \rightarrow Y$.

3. φ, ψ は全単射

$$[X \times Y, Z] \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} [X, F(Y, Z)]$$

3.2 球面, キューブ

と定め,

$$J^0 := \{0\} \subset I$$

と定める.

Lemma 3.2.4. 空間対として $(I^n, \partial I^n) \cong (D^n, S^{n-1})$.

Proof.

$$\begin{array}{l} \tilde{I}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i: -1 \leq x_i \leq 1\} \\ \partial \tilde{I}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \exists i: x_i \in \{-1, 1\}\} \end{array}$$

と定める. 明らかに写像

$$\tilde{I}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1 + 1}{2}, \dots, \frac{x_n + 1}{2} \right) \in I^n$$

により $(\tilde{I}^n, \partial \tilde{I}^n) \cong (I^n, \partial I^n)$ である.

さらに, 写像

$$\Psi: D^n \rightarrow \tilde{I}^n, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\max_i |x_i|} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

が空間対の同相 $(D^n, S^{n-1}) \cong (\tilde{I}^n, \partial \tilde{I}^n)$ を与えることが示せる (詳細は 2019 年度幾何学 IV のノート Lem. 3.2.12 を参照). □

Corollary 3.2.5. $I^n / \partial I^n \cong S^n$.

Proof. $I^n / \partial I^n \cong D^n / S^{n-1} \cong S^n$. □

Lemma 3.2.6. 空間対として $(I^{n+1}, J^n) = (I^n, \partial I^n) \times (I, \{0\}) \cong I^n \times (I, \{0\}) = (I^{n+1}, I^n \times \{0\})$.

Proof. $(D^n, S^{n-1}) \times (I, \{0\}) \cong D^n \times (I, \{0\})$ を示せばよい. $f, g: D^n \times I \rightarrow D^n \times I$ を

$$\begin{array}{l} f(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{1+t}{2-t} x, t \right), & |x| \leq \frac{2-t}{2} \\ \left(\frac{1+t}{2|x|} x, 2(1-|x|) \right), & |x| \geq \frac{2-t}{2} \end{cases} \\ g(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{2-t}{1+t} x, t \right), & |x| \leq \frac{1+t}{2} \\ \left(\frac{2-t}{2|x|} x, 2|x|-1 \right), & |x| \geq \frac{1+t}{2} \end{cases} \end{array}$$

第 3 章 基本的な空間及び構成

は基点付き (連続) 写像である.

写像

$$\psi: F_*(X, F_*(Y, Z)) \rightarrow F_*(X \wedge Y, Z)$$

を $\psi(g) = g^{\vee}$ により定める.

Proposition 3.4.16. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき φ, ψ は全単射で互いに他の逆.

$$F_*(X \wedge Y, Z) \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} F_*(X, F_*(Y, Z))$$

Corollary 3.4.17. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする. φ, ψ は全単射

$$[X \wedge Y, Z]_* \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} [X, F_*(Y, Z)]_*$$

を誘導する.

Theorem 3.4.18. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき φ, ψ は同相写像で互いに他の逆.

$$F_*(X \wedge Y, Z) \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} F_*(X, F_*(Y, Z))$$

3.4.3 ループ

3.2 で以下の同相を与えた:

$$\begin{array}{l} (I^k, \partial I^k) \cong (D^k, S^{k-1}) \\ S(k) = I^k / \partial I^k \cong D^k / S^{k-1} \cong S^k \end{array}$$

特に断らない限り, これらの空間の間の同相写像はこれらを使う.

Definition 3.4.19. 基点付き空間 X に対し

$$\Omega X := F((I, \partial I), (X, *))$$

を X のループ空間 (loop space) という.

$$\Omega X \cong F_*(S(1), X) \cong F_*(S^1, X)$$

である. また

$$\Omega^k X := F((I^k, \partial I^k), (X, *))$$

を誘導する.

Proof. 1. $H: X \times Y \times I \rightarrow Z$ をホモトピーとする. $H^\vee: X \times I \rightarrow F(Y, Z)$ は連続で,

$$H^\vee(x, t)(y) = H(x, t)(y) = f^t(x, y) = f^t_i(x, y)$$

なので f_0 から f_1^\vee へのホモトピーを与える.

2. $G: X \times I \rightarrow F(Y, Z)$ をホモトピーとする. $G^\vee: X \times Y \times I \rightarrow Z$ は連続で,

$$G^\vee(x, y, t) = G(x, t)(y) = g^t(x, t)(y) = g^t_\lambda(x, y)$$

なので g_0^λ から g_1^λ へのホモトピーを与える.

3. 1 より φ は $\varphi: [X \times Y, Z] \rightarrow [X, F(Y, Z)]$ を誘導し, 2 より ψ は $\psi: [X, F(Y, Z)] \rightarrow [X \times Y, Z]$ を誘導する. 明らかに互いに他の逆.

□

Theorem 3.4.11. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき φ, ψ は同相写像で互いに他の逆.

$$F(X \times Y, Z) \xrightarrow[\varphi]{\psi} F(X, F(Y, Z))$$

3.4.2 基点付きの場合

次に基点付きの場合を考える.

Proposition 3.4.12. (X, A) を基点付き空間とする.

射影 $\pi: X \rightarrow X/A$ は連続な全射

$$\pi^*: F_*(X/A, Y) \rightarrow F_*((X, A), (Y, y_0))$$

及び全射

$$[X/A, Y]_* \cong [(X, A), (Y, y_0)]$$

を誘導する.

さらに, A がコンパクト閉集合ならば π^* は同相写像である.

基点付き空間 X, Y に対し, $F_*(X, Y)$ は, 定値写像 ($c(x) = *$) を基点として基点付き空間と考える.

$$\cong \Sigma^{n-1} X \vee S(1) \cong \Sigma \Sigma^{n-1} X.$$

以降,

$$S^n, D^n, S^{n-1}/S^{n-1}, \partial I^n, S(n), \Sigma S^{n-1}$$

の間の同相写像及び空間対の同相写像

$$(D^n, S^{n-1}) \cong (CS^{n-1}, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n) \cong (D(n), S(n-1)) \cong (I^n/J^{n-1}, \partial I^n/J^{n-1})$$

は, 特に断らなければこの節で定めた写像を考える.

3.3 射影空間

3.4 写像空間

Definition 3.4.1. X, Y を位相空間とする. X から Y への連続写像全体のなす集合を $F(X, Y)$ と書くのであった.

コンパクト部分集合 $K \subset X$ と, 開集合 $U \subset Y$ に対し, $F(K, Y)$ の部分集合 $W(K, U)$ を

$$W(K, U) := \{f \in F(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$$

により定める.

$$\{W(K, U) \mid K \subset X: \text{コンパクト}, U \subset Y: \text{開集合}\}$$

の生成する $F(X, Y)$ の位相 (これらが開集合となる最弱の位相, これらを標準とする位相) をコンパクト開位相 (compact-open topology) という.

$F(X, Y)$ にコンパクト開位相を与えたものを写像空間 (mapping space) という. 空間対の写像全体 $F((X, A), (Y, B))$, 空間の3対の写像全体 $F((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ には, $F(X, Y)$ からの相対位相を入れる.

写像空間の基本的性質について証明なしでまとめておく.

Proposition 3.4.2. X, Y, Z を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. 連続写像の合成は連続なので, f の誘導する写像は写像空間の間の写像を定める.

Definition 3.4.13. X, Y, Z を基点付き空間, $\pi: X \times Y \rightarrow X \times Y/X \vee Y = X \wedge Y$ を射影とする.

基点付き写像 $f: X \wedge Y \rightarrow Z$ に対し連続写像 $(f\pi)^\wedge: X \rightarrow F(Y, Z)$ を考えると,

$$(f\pi)^\wedge(x)(*) = f\pi(x, *) = f(*) = *$$

ゆえ $(f\pi)^\wedge(x) \in F_*(Y, Z)$ で,

$$(f\pi)^\wedge(*) (y) = f\pi(*, y) = f(*) = *$$

ゆえ $(f\pi)^\wedge \in F_*(X, F_*(Y, Z))$ である.

$$F_*(X \wedge Y, Z) \xrightarrow{\pi^!} F(((X, *) \times (Y, *)), (Z, *)) \subset F(X \times Y, Z) \xrightarrow{\varphi} F(X, F(Y, Z))$$

$$\searrow \varphi \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \nearrow$$

$$F_*(X, F_*(Y, Z))$$

写像

$$\varphi: F_*(X \wedge Y, Z) \rightarrow F_*(X, F_*(Y, Z))$$

を $\varphi(f) = (f\pi)^\wedge$ により定める.

明らかに, $c: X \wedge Y \rightarrow Z$ が定値写像のとき $\varphi(c)$ も定値写像であるから, φ は基点を保つ.

Proposition 3.4.14. 値写像の制限を考えると,

$$ev(c, x) = c(x) = *$$

$$ev(f, *) = f(*) = *$$

であるから, $F_*(X, Y) \wedge X$ からの基点を保つ写像を定める. これを同じ記号 ev で表す.

$$\begin{array}{ccc} F_*(X, Y) \times X & \xrightarrow{ev} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow ev & \\ F_*(X, Y) \wedge X & & \end{array}$$

X がコンパクト Hausdorff 空間ならば, $ev: F(X, Y) \times X \rightarrow Y$ が連続なので,

$$ev: F_*(X, Y) \wedge X \rightarrow Y$$

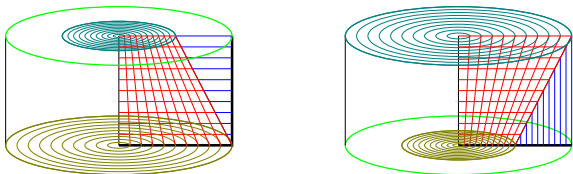
は連続である.

□

Definition 3.4.15. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき, 基点付き写像 $g: X \rightarrow F_*(Y, Z)$ に対し, 写像

$$g^\vee := ev \circ (g \wedge \text{id}): X \wedge Y \xrightarrow{g \wedge \text{id}} F_*(Y, Z) \wedge Y \xrightarrow{ev} Z$$



で定めると, f, g は well-defined で連続, 互いに他の逆であり, $f(x, 0) \in D^n \times \{0\}$, $|x| = 1$ のとき $f(x, t) \in D^n \times \{0\}$ であるので, これらが求める同相を与える.

□

Notation 3.2.7.

$$S(n) := I^n / \partial I^n$$

$$D(n+1) := CS(n)$$

Lemma 3.2.8.

$$(D(n+1), S(n)) \cong (I^{n+1}/J^n, \partial I^{n+1}/J^n)$$

Lemma 3.2.9.

$$1. S(l) \wedge S(m) \cong S(l+m).$$

$$2. \underbrace{S^1 \wedge \cdots \wedge S^1}_n \cong S^n.$$

Definition 3.2.10. $\Sigma^n X := X \wedge S(n)$ を X の n 重懸垂という.

Remark. 講義では $S^n \wedge X$ と定義したが, 後の都合により, こちらに変更.

Lemma 3.2.11.

$$1. \Sigma X \cong \Sigma^1 X.$$

$$2. \Sigma^n X \cong \Sigma \Sigma^{n-1} X.$$

Proof. 1.

$$\begin{aligned} \Sigma^1 X &= X \wedge S(1) \\ &\cong (X/*) \wedge (I/\partial I) \\ &\cong X \times I/X \times \partial I \cup * \times I \\ &= \Sigma X \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \Sigma^n X &= X \wedge S(n) \\ &\cong X \wedge S(n-1) \wedge S(1) \end{aligned}$$

第5章

ホモトピー群

5.1 ホモトピー群

である。
ただし、 $I^0 = \{0\}$ 、 $\partial I^0 = \emptyset$ 、 $S(0) = I^0/\partial I^0 = \{0\}$ である。
また、 $\pi_0(X, A, *) := \pi_0(X/A, *)$ と約束する。
Definition 5.1.2. $(X, *)$ を基点付き空間、 $1 \leq i \leq n$ とする。
 $\alpha, \beta \in \Omega^n X = F(I^n, \partial I^n)$ 、 $(X, *)$ に対し、 $\alpha +_i \beta \in \Omega^n X$ を
$$\alpha +_i \beta(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i - 1, t_{i+1}, \dots, t_n) & \text{if } t_i \geq \frac{1}{2} \\ \beta(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n) & \text{if } t_i \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

で定める。

Definition 5.1.1. 基点付き空間 $(X, *)$ 、基点付き空間対 $(X, A, *)$ 、 $n \geq 0$ に対し、
$$\pi_n(X, *) := [I^n, \partial I^n, (X, *)]$$

$$\pi_n(X, A, *) := [I^n, \partial I^n, (X, A, *)]$$

を **Hurewicz のホモトピー集合** という。

4. 上の証明の5の $F +_1 G$ が $\alpha_0 * \beta_0$ から $\alpha_1 * \beta_1$ へのホモトピーであること、つまり

- $F +_1 G$ は連続
- $(F +_1 G)(s, 0) = (\alpha_0 * \beta_0)(s)$
- $(F +_1 G)(s, 1) = (\alpha_1 * \beta_1)(s)$
- $(F +_1 G)(0, t) = *$
- $(F +_1 G)(1, t) = *$

であることを確かめよ。

Corollary 5.1.5. $\pi_1(X, *)$ は、積を $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ により定めると群となる。
単位元は $[c]$ で、 $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ である。

Definition 5.1.6. 上で積を定めた群 $\pi_1(X, *)$ を $(X, *)$ の **基本群 (fundamental group)** という。

Proposition 5.1.7. 集合 M に単位元をもつ二つの積 \cdot_1, \cdot_2 が与えられており、 e_1, e_2 をそれぞれの単位元とする。
さらに、任意の $a, b, c, d \in M$ に対し、次の交換律

$$(a \cdot_1 b) \cdot_2 (c \cdot_1 d) = (a \cdot_2 c) \cdot_1 (b \cdot_2 d)$$

が成り立つとする。
このとき、 $\cdot_1 = \cdot_2$ 、 $e_1 = e_2$ であり、この積は可換、結合的である。

Proof.

$e_2 = e_2 \cdot_2 e_2$	e_2 は \cdot_2 の単位元
$= (e_2 \cdot_1 e_1) \cdot_2 (e_1 \cdot_1 e_2)$	e_1 は \cdot_1 の単位元
$= (e_2 \cdot_2 e_1) \cdot_1 (e_1 \cdot_2 e_2)$	交換律
$= e_1 \cdot_1 e_1$	e_2 は \cdot_2 の単位元
$= e_1$	e_1 は \cdot_1 の単位元

である。 $e := e_1 = e_2$ とおく。

$a, b \in M$ に対し、

$$a \cdot_2 b = (a \cdot_1 e) \cdot_2 (e \cdot_1 b) = (a \cdot_2 e) \cdot_1 (e \cdot_2 b) = a \cdot_1 b$$

ゆえ二つの積は一致する。この積を「 \cdot 」と書く。

$$a \cdot b = (e \cdot a) \cdot (b \cdot e) = (e \cdot b) \cdot (a \cdot e) = b \cdot a$$

を k 重ループ空間 (k th loop space) という。

$$\Omega^k X \cong F_*(S(k), X) \cong F_*(S^k, X)$$

である。

Proposition 3.4.20. X をコンパクト Hausdorff 空間とする。

$$\begin{aligned} F_*(\Sigma^k X, Y) &\cong F_*(X, \Omega^k Y) \\ \Omega \Omega^k X &\cong \Omega^{k+1} X \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} F_*(\Sigma^k X, Y) &= F_*(X \wedge S(k), Y) \\ &\cong F_*(X, F_*(S(k), Y)) \\ &= F_*(X, \Omega^k Y). \\ \Omega \Omega^k X &\cong F_*(S(1), \Omega^k X) \\ &\cong F_*(\Sigma^k S(1), X) \\ &\cong F_*(S(k+1), X) \\ &= \Omega^{k+1} X. \end{aligned}$$

□

次節以降、集合

$$[(I^k, \partial I^k), (X, *)] \cong [S(k), X]_* \cong [S^k, X]_*$$

を考察する。

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

である。

Lemma 5.1.3. 1. $f: X \rightarrow Y$ を基点付き写像とすると, $f_*(\alpha + \beta) = f_*(\alpha) + f_*(\beta)$.
2. $1 \leq i < j \leq n$ とする. $\tau: I^n \rightarrow I^n$ を i 番目と j 番目の成分を入れかえる (同相) 写像とすると, $\tau^*(\alpha +_i \beta) = \tau^*(\alpha) +_j \tau^*(\beta)$.
3. $n \geq 2$ とする. $ad: \Omega^n X \rightarrow \Omega(\Omega^{n-1} X)$ を Proposition 3.4.20 で与えた同相写像とすると, $ad(\alpha +_1 \beta) = ad(\alpha) * ad(\beta)$.

exercise 8. 上の 1 ($n = 1$ の場合だけでもよい) , 2 ($n = 2$ の場合だけでもよい) を確かめよ.

Proposition 5.1.4. $\alpha, \alpha_1, \beta_1 \in \Omega X$ とする. 次が成り立つ. ただし, \simeq は空間対の写像としてホモトピーと見なすこと.

1. 連続写像 $u: I \rightarrow I$ が $u(0) = 0, u(1) = 1$ をみたせば $\alpha \simeq \alpha \circ u$.
2. $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 \simeq \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)$.
3. $\alpha * c \simeq c * \alpha$.
4. $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t)$ と定めると, $\alpha * \alpha^{-1} \simeq c \simeq \alpha^{-1} * \alpha$. ただし c は基点への定値写像.
5. $\alpha_0 \simeq \alpha_1, \beta_0 \simeq \beta_1$ ならば $\alpha_0 * \beta_0 \simeq \alpha_1 * \beta_1$.

Proof. 1. $H: I^2 \rightarrow I$ を $H(s, t) = (1-t)s + tu(s)$ (s と $u(s)$ を $t: 1-t$ に内分する点) で定めると, H は $\text{id}, u: (I, \partial I) \rightarrow (I, \partial I)$ の間のホモトピー (t がホモトピーのパラメータ) を与える. 実際,

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= s \\ H(s, 1) &= u(s) \\ H(0, t) &= tu(0) = 0 \\ H(1, t) &= 1-t+tu(1) \\ &= 1-t+t=1 \end{aligned}$$

よって $\alpha \circ H$ が $\alpha = \alpha \circ \text{id}$ と $\alpha \circ u$ の間のホモトピーを与える.

第4章 Fibration と Cofibration

- 4.1 Cofibration
- 4.2 Fibration
- 4.3 Lebesgue の補題
- 4.4 Hopf fibration
- 4.5 Puppe 列

2. $u: I \leftarrow I$ を

$$u(t) = \begin{cases} 2t, & t \leq \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると, u は連続で $u(0) = 0, u(1) = 1, (\alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)) \circ u = (\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$.

3. $u: I \rightarrow I$ を

$$u(t) = \begin{cases} 2t, & t \leq \frac{1}{2} \\ 1, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると, u は連続で $u(0) = 0, u(1) = 1. \alpha \circ u = \alpha * c$.

4. $H: I^2 \rightarrow I$ を

$$H(s, t) = \begin{cases} 2s(1-t), & s \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-s)(1-t), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると, $\alpha \circ H$ が $\alpha * \alpha^{-1}$ から c へのホモトピーを与える.

$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ なので, $\alpha^{-1} * \alpha = \alpha^{-1} * (\alpha^{-1})^{-1} \simeq c$.

5. $F: I^2 \rightarrow X$ を α_0 から α_1 へのホモトピー, $G: I^2 \rightarrow X$ を β_0 から β_1 へのホモトピーとすると, $F +_1 G$, すなわち

$$(F +_1 G)(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1, t), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

が $\alpha_0 * \beta_0$ から $\alpha_1 * \beta_1$ へのホモトピーを与える.

□

exercise 9. 1. 上の証明の 2 の $(\alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)) \circ u = (\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$ を確かめよ.

2. 上の証明の 3 の $\alpha \circ u = \alpha * c$ を確かめよ. また, $c * \alpha \simeq \alpha$ を示せ.

3. 上の証明の 4 の $\alpha \circ H$ が $\alpha * \alpha^{-1}$ から c へのホモトピーであること, つまり

- $\alpha \circ H$ は連続
- $\alpha \circ H(s, 0) = (\alpha * \alpha^{-1})(s)$
- $\alpha \circ H(s, 1) = *$
- $\alpha \circ H(0, t) = *$
- $\alpha \circ H(1, t) = *$

であることを確かめよ.

- $t \in \partial I^{n+1}$ なら $(\alpha + t, \beta)(t) \in A$
- $t \in I^n$ なら $(\alpha + t, \beta)(t) = *$

であることを確かめよ。

基点付き空間 $(X, A, *)$ に対し, 空間 $P(X, A)$ を

$$P(X, A) := F(I, \partial I, J^0), (X, A, *)$$

により定める. $P(X, A)$ の元は, X の道 $l: I \rightarrow X$ で, $l(1) = *, l(0) \in A$ を満たすもので

隣接 $F(I, F(I, X)) \cong F(I, F(I, X))$ の制限により全単射

$$\begin{aligned} F(I, \partial I, J^0), (\partial I, J^0, \partial I, J^0) &\subset F(I, F(I, X)) \\ &\cong F(I, \partial I, J^0, \partial I, J^0), (\partial I, J^0, \partial I, J^0) \\ &\cong F(I, \partial I, J^0, \partial I, J^0), (\partial I, J^0, \partial I, J^0) \\ &\cong F(I, \partial I, J^0, \partial I, J^0), (\partial I, J^0, \partial I, J^0) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} [I, \partial I, J^0], (\partial I, J^0, \partial I, J^0) &= \pi_1(\partial I, J^0, \partial I, J^0) \\ &\cong \pi_1(\partial I, J^0, \partial I, J^0) \\ &\cong \pi_1(\partial I, J^0, \partial I, J^0) \end{aligned}$$

が得られ, これらの全単射は $+$ を保つことが分かる.

Definition 5.1.15. $n \geq 1$ のとき, $\pi_{n+1}(X, A, *)$ は, 和を $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$ により定めると群となる. さらに, $n \geq 2$ のときは π_{n+1} 群となる. これを $n+1$ 次元相対ホモトピー群あるいは空間対の $n+1$ 次元ホモトピー群という.

$\pi_1(\partial I, J^0, \partial I, J^0)$ も群となり $\pi_{n+1}(X, A, *) \cong \pi_1(\partial I, J^0, \partial I, J^0)$ である. さらに $n \geq 1$ のときは

$$\pi_{n+1}(X, A, *) = [I]([I]^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X, A, *)$$

Remark. 射影 $I^{n+1} \rightarrow I^{n+1}/J^n$ 及び Lemma 3.2.8 により同型

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot (e \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

ゆえ, 可換, 結合的.

□

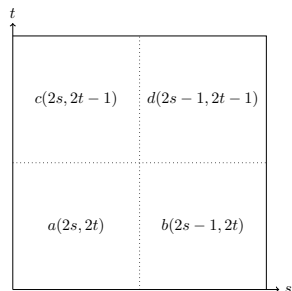
Lemma 5.1.8. $(X, *)$ を基点付き空間, $1 \leq i \leq n$ とする. $a, b, c, d \in \Omega^n X$ に対し,

$$(a +_1 b) +_i (c +_1 d) = (a +_i c) +_1 (b +_i d)$$

が成り立つ.

Proof. $i = 2$ の場合を示す.

$$\begin{aligned} ((a +_1 b) +_2 (c +_1 d))(s, t, \dots) &= \begin{cases} (a +_1 b)(s, 2t, \dots), & t \leq 1/2 \\ (c +_1 d)(s, 2t - 1, \dots), & t \geq 1/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a(2s, 2t, \dots), & s \leq 1/2, t \leq 1/2 \\ b(2s - 1, 2t, \dots), & s \geq 1/2, t \leq 1/2 \\ c(2s, 2t - 1, \dots), & s \leq 1/2, t \geq 1/2 \\ d(2s - 1, 2t - 1, \dots), & s \geq 1/2, t \geq 1/2 \end{cases} \\ ((a +_2 c) +_1 (b +_2 d))(s, t, \dots) &= \begin{cases} (a +_2 c)(2s, t, \dots), & s \leq 1/2 \\ (b +_2 d)(2s - 1, t, \dots), & s \geq 1/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a(2s, 2t, \dots), & s \leq 1/2, t \leq 1/2 \\ c(2s, 2t - 1, \dots), & s \leq 1/2, t \geq 1/2 \\ b(2s - 1, 2t, \dots), & s \geq 1/2, t \leq 1/2 \\ d(2s - 1, 2t - 1, \dots), & s \geq 1/2, t \geq 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\partial: \pi_{n+1}^1(X, A, *) \rightarrow \pi_n^1(X, A, *) \rightarrow \pi_n^1(X, A, *)$$

はホモトピー集合の間の写像

$$\alpha \longleftarrow \alpha|_{I^n \times \{1\}}$$

$$F(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X, A, *) \longrightarrow F(I^n, \partial I^n), (A, *)$$

Definition 5.1.19. $I^n \times \{1\}$ への制限により得られる写像

$$\begin{aligned} \pi_1(\partial I, J^0, \partial I, J^0) &\xleftarrow{(Gf)^*} \pi_1(\partial I, J^0, \partial I, J^0) \\ &\cong \pi_1(\partial I, J^0, \partial I, J^0) \end{aligned}$$

は可換:

Lemma 5.1.18. $f: (X, A, *) \rightarrow (Y, B, *)$ を基点付き空間対の写像とする. このとき次

$$(id)_* = id: \pi_{n+1}(X, A, *) \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, *)$$

2. 恒等写像 $id: X \rightarrow X$ は恒等写像を誘導する.

$$(gf)_* = g_* f_*: \pi_{n+1}(X, A, *) \xrightarrow{f_*} \pi_{n+1}(Y, B, *) \xrightarrow{g_*} \pi_{n+1}(Z, C, *)$$

付き空間対の写像とする.

Proposition 5.1.17. 1. $f: (X, A, *) \rightarrow (Y, B, *)$, $g: (Y, B, *) \rightarrow (Z, C, *)$ を基点

3. $f \simeq g: (X, A, *) \rightarrow (Y, B, *)$ ならば $f_* = g_*: \pi_{n+1}(X, A, *) \rightarrow \pi_n(Y, B, *)$.

が定まる.

$$\pi_{n+1}(X, *) \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, *)$$

2. $\pi_{n+1}(X, *, *) = \pi_{n+1}(X, *, *)$ である. よって包含 $(X, A, *) \rightarrow (X, X, A, *)$ により写像

を誘導する. $n \geq 1$ のとき, これは準同型である.

$$f_*: \pi_{n+1}(X, A, *) \rightarrow \pi_{n+1}(Y, B, *) \quad f_*([a]) = [f_*([a])] = [f \circ a]$$

Lemma 5.1.16. 1. 基点付き空間対の写像 $f: (X, A, *) \rightarrow (Y, B, *)$ は, 写像

が得られる.

$$\begin{aligned} &\cong [D^{n+1}, S(n), (X, A)]_* \\ &\cong [D^{n+1}, S(n), (X, A)]_* \end{aligned}$$

$$(b) \quad [l] \in \pi_1(X, A, *) \quad l: (I, \{0, 1\}, \{0\}) \rightarrow (X, A, *)$$

をその代表元, $\partial([l]) = [l(1)] = *$ であるとする. このとき, A の道 $u: I \rightarrow A$ で, $u(0) = l(1)$, $u(1) = *$ となるものが存在する.

$$l * u(s) = \begin{cases} l(2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ u(2s - 1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

は $(X, *)$ のループ. $j_*([l * u]) = [l]$ であることを示そう. $H: I^2 \rightarrow X$ を

$$H(s, t) = \begin{cases} l\left(\frac{2s}{1+t}\right), & s \leq \frac{1+t}{2} \\ u(2s - 1 - t), & s \geq \frac{1+t}{2} \end{cases}$$

と定めると, H は連続で,

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= l * u(s) \\ H(s, 1) &= l(s) \\ H(1, t) &= u(1 - t) \in A \\ H(0, t) &= l(0) = * \end{aligned}$$

なので, $l * u$ から l へのホモトピー $(I, \{0, 1\}, \{0\}) \times I \rightarrow (X, A, *)$ を与える. よって $j_*([l * u]) = [l]$.

3.

$$\pi_1(A, *) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, *) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, *)$$

(a) $[l] \in \pi_1(A, *)$ とし, $l: (I, \{0, 1\}) \rightarrow (A, *)$ をその代表元とする.

$$l: (I, \{0, 1\}, \{0\}) \rightarrow (X, A, *)$$

が $j_* i_*([l])$ の代表元である. $H: (I, \{0, 1\}, \{0\}) \times I \rightarrow (X, A, *)$ を $H(s, t) = l(st)$ と定めると, H は $*$ から l へのホモトピーを与えるので, $j_* i_*([l]) = *$.

(b) $[l] \in \pi_1(X, *)$, $l: (I, \{0, 1\}) \rightarrow (X, *)$ をその代表元とする.

$$l: (I, \{0, 1\}, \{0\}) \rightarrow (X, A, *)$$

が $j_*([l])$ の代表元である. $j_*([l]) = *$ であるとし, $H: (I, \{0, 1\}, \{0\}) \times I \rightarrow (X, A, *)$ を $*$ から l へのホモトピーとする. $H(1, t) \in A$, $H(1, 0) = *(1) = *$,

を定める. これを境界写像という.

$n \geq 1$ のとき, 境界写像は準同型である (これが容易に分かる). これを境界準同型と

よぶ.

Proposition 5.1.20. $f: (X, A, *) \rightarrow (Y, B, *)$ を基点付き空間対の写像とする. このと

き次は可換:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(X, A, *) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, *) \\ \uparrow f_* & & \uparrow f_* \\ \pi_{n+1}(X, A, *) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, *) \end{array}$$

Proof. $i: I^n \rightarrow I^{n+1}$ を $i(t) = (t, 1)$ ととり定める. $\partial([a]) = [\alpha \circ i]$ である.

$$\begin{aligned} f_*\partial([a]) &= f_*([\alpha \circ i]) \\ &= [f \circ \alpha \circ i] \\ &= \partial([f \circ \alpha]) \\ &= [f \circ \alpha \circ i] \end{aligned}$$

Lemma 5.1.21. 次は可換:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(X, A, *) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, *) \\ \uparrow \text{ad} & & \uparrow \text{ad} \\ \pi_1(\Omega^n X, \Omega^n A, *) & \xrightarrow{\partial} & \pi_0(\Omega^n A, *) \end{array}$$

5.2 完全列

Definition 5.2.1. 基点付き集合の間の基点を保つ写像 $f: A \rightarrow B$ に対し, $f^{-1}(*)$ を

$\text{Ker } f$ と書く:

$$\text{Ker } f = \{a \in A \mid f(a) = *\}$$

基点付き集合の間の基点を保つ写像の列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

は, $\text{Im } f = \text{Ker } g$ であるとき完全列 (exact sequence) であるという. また, 基点付き集

合の間の基点を保つ写像の列

$$\cdots \longleftarrow A_{n+1} \xleftarrow{f_{n+1}} A_n \xleftarrow{f_n} A_{n-1} \xleftarrow{f_{n-1}} \cdots$$

は圖手である.

Lemma 5.1.13. $f: (X, *) \rightarrow (Y, *)$ を基点付き写像とする. f の誘導する写像

$$f_*: \Omega_k X = F(I^k, \theta I^k, (X, *)) \rightarrow F(I^k, \theta I^k, (Y, *)) = \Omega_k Y$$

を $\Omega_k f$ と書く: $(\Omega_k f)(\alpha) = f \circ \alpha$. このとき次は可換:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\Omega^{n-1} X, *) & \xleftarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(\Omega^{n-1} Y, *) \\ \uparrow \text{ad} & & \uparrow \text{ad} \\ \pi_n(X, *) & \xleftarrow{f_*} & \pi_n(Y, *) \end{array}$$

Remark.

Definition 5.1.14. $(X, A, *)$ を基点付き空間対, $1 \leq i \leq n$ とする.

$\alpha, \beta \in F(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, \Omega^{n+1} X, A, *)$ に対し, $\alpha + i\beta \in F(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, \Omega^{n+1} X, A, *)$

を

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i, t_{i+1}, \dots, t_{n+1}), \quad t_i \leq \frac{2}{1} \\ \beta(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i - 1, t_{i+1}, \dots, t_{n+1}), \quad t_i \geq \frac{2}{1} \end{array} \right.$$

で定める

Remark.

$$J^n = (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \{0\}) \subset I^n \times I$$

$$J^0 = \{0\}$$

であつた. 上の定義で $i \leq n$ というのは $n+1$ の i 文字ではない. 最後の座標は別扱い.

exercise 12. $\alpha + i\beta \in F(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n, *)$ であること, つまり

$$\bullet \quad \alpha + i\beta: I^{n+1} \rightarrow X \text{ は連続}$$

5.2 完全列

は, 各 n に対し $\text{Im } f_n = \text{Ker } f_{n-1}$ であるとき, 完全列とよばれる.

群は, 単位元を基点として基点付き集合とみなす. 明らかに群の準同型は基点を保つ. 群と準同型の列

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$$

は, 基点付き集合の列として完全であるとき, 群の完全列とよばれる.

Remark. $\text{Im } f \subset \text{Ker } g \Leftrightarrow gf = *$.

Theorem 5.2.2. $(X, A, *)$ を基点付き空間対, $i: (A, *) \rightarrow (X, *)$, $j: (X, *, *) \rightarrow (X, A, *)$ を包含写像とする. 次は完全列:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(X, A, *) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, *) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, *) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, *) \longrightarrow \cdots$$

Proof. まず

$$\pi_1(A, *) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, *) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, *) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, *) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, *)$$

が完全であることを示す.

1.

$$\pi_1(X, A, *) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, *) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, *)$$

(a) $[l] \in \pi_1(X, A, *) = [(I, \{0, 1\}, \{0\}), (X, A, *)]$ とし, $l: I \rightarrow X$ をその代表元とする. $i_*\partial([l]) = [l(1)]$ であるが, l が $l(0) = *$ と $l(1)$ を結ぶ (X の) 道を与えるので, $[l(1)] = [l(0)] = *$. ゆえ $i_*\partial([l]) = *$, すなわち $\text{Im } \partial \subset \text{Ker } i_*$.

(b) $[a] \in \pi_0(A, *)$, $a \in A$ をその代表元, $i_*([a]) = *$ であるとする. $[a] = [*] \in \pi_0(X, *)$ なので, X の道 $l: I \rightarrow X$ で $l(0) = *, l(1) = a$ であるものが存在する. $[l] \in \pi_1(X, A, *)$ であり, $\partial([l]) = [l(1)] = [a]$ である. よって $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial$.

2.

$$\pi_1(X, *) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, *) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, *)$$

(a) $[l] \in \pi_1(X, *) = [(I, \{0, 1\}), (X, *)]$ とし, $l: (I, \{0, 1\}) \rightarrow (X, *)$ をその代表元とすると, $\partial j_*([l]) = [l(1)] = [*] = *$ ゆえ, $\text{Im } j_* \subset \text{Ker } \partial$.

Corollary 5.1.9. $n \geq 2$ のとき, $\pi_n(X, *)$ は, 和を $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + i\beta]$ により定めると (この和は i にはよらず, さらに) アーベル群となる. また, 群として $\pi_n(X, *) \cong \pi_1(\Omega^{n-1} X, *)$.

Proof. τ を 1 番目と i 番目の成分を入れかえる写像とすると, 全単射

$$\pi_n(X, *) \xrightarrow{\tau_*} \pi_n(X, *) \xrightarrow{\text{ad}} \pi_1(\Omega^{n-1} X, *)$$

により $\text{ad}(\tau^*([\alpha + i\beta])) = \text{ad}(\tau^*([\alpha])) * \text{ad}(\tau^*([\beta]))$ となるので, $[\alpha] + i[\beta] := [\alpha + i\beta]$ と定めると, これは well-defined で, $\pi_n(X, *)$ は群となり, 上の全単射は群の同型である. $([\alpha] + i[\beta]) + i([c] + i[d]) = ([\alpha] + i[c]) + i([\beta] + i[d])$ であるから, $[\alpha] + i[\beta] = [\alpha] + i[\beta]$ であり, この和は可換. \square

Remark. $\tau^*([\alpha]) = -[\alpha]$ であることが示せる (いずれ機会があれば示す).

Definition 5.1.10. 群 $\pi_n(X, *)$ を $(X, *)$ の n 次元ホモトピー群 (n th homotopy group) という. (1 次元ホモトピー群は基本群).

Lemma 5.1.11. 1. 基点付き写像 $f: (X, *) \rightarrow (Y, *)$ は, 写像

$$f_*: \pi_n(X, *) \rightarrow \pi_n(Y, *), \quad f_*([\alpha]) = [f_*(\alpha)] = [f \circ \alpha]$$

を誘導する. $n \geq 1$ のとき, これは準同型である.

2. $f \simeq g: (X, *) \rightarrow (Y, *)$ ならば $f_* = g_*: \pi_n(X, *) \rightarrow \pi_n(Y, *)$.

exercise 10. 証明せよ. (ヒント: Proposition 2.1.1 の基点付き版 (認めてよい) と Lemma 5.1.3.1 を使う.)

Proposition 5.1.12. 1. $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を基点付き写像とすると,

$$(gf)_* = g_* f_*: \pi_n(X, *) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, *) \xrightarrow{g_*} \pi_n(Z, *)$$

2. 恒等写像 $\text{id}: X \rightarrow X$ は恒等写像を誘導する.

$$(\text{id})_* = \text{id}: \pi_n(X, *) \rightarrow \pi_n(X, *)$$

exercise 11. (定義からほぼ明らかだけど) 証明せよ.

Remark.

$$\begin{aligned} \pi_0: ho((\mathbf{Top})_*) &\rightarrow (\mathbf{Set})_* \\ \pi_1: ho((\mathbf{Top})_*) &\rightarrow (\mathbf{Grp}) \end{aligned}$$

Corollary 5.3.9. 局所自明ファイバー空間は Serre ファイブレーションである。

Lemma 5.3.10. $p: E \rightarrow B$ を Serre ファイブレーションとする。空間対として $(X, A) \cong (I^{n+1}, I^n \times \{0\})$ であれば、 p は包含 $i: A \rightarrow X$ に対し lifting property を持つ、すなわち、次の左側の図式が可換ならば、右側の図式を可換にするような連続写像 $X \rightarrow E$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \uparrow i & \nearrow & \downarrow H \\ E & \xrightarrow{f} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ \uparrow i & \nearrow & \downarrow H \\ E & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Proof. $\varphi: (I^{n+1}, I^n \times \{0\}) \rightarrow (X, A)$ を空間対の同相写像とする。次の左側の図式は可換であるから、右側の図式を可換にするような連続写像 $G: I^{n+1} \rightarrow E$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \uparrow i_0 & \nearrow \varphi & \downarrow H \\ E & \xrightarrow{f} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ \uparrow i_0 & \nearrow \varphi & \downarrow H \\ E & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

$$H := G\varphi^{-1} \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} pH &= pG\varphi^{-1} = H\varphi\varphi^{-1} = H \\ H_i &= G\varphi^{-1}_i = G\varphi_0(\varphi_0^{-1})^{-1} \\ &= f\varphi_0(\varphi_0^{-1})^{-1} = f \end{aligned}$$

Proposition 5.3.11. $p: E \rightarrow B$ を Serre ファイブレーションとする。 $*$ $\in B$ に対し、 $F := p^{-1}(*)$ とおき、点 $*$ $\in F$ をとる。このとき、 $n \geq 0$ に対し $p_*: \pi_{n+1}(E, F, *) \rightarrow \pi_{n+1}(B, *, *) = \pi_{n+1}(B, *)$ は全単射である。

Proof. 全射であること。

$$[a] \in \pi_{n+1}(B, *, *) = [(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, j_n), (B, *, *)] \text{ とし,}$$

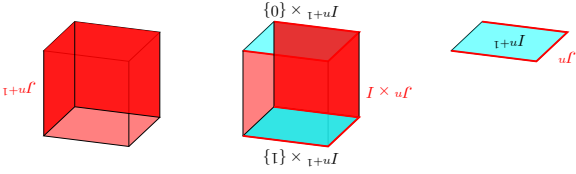
$$\alpha: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, j_n) \rightarrow (B, *, *)$$

を

$$\beta_0: I^{n+1} \times \{0\} \rightarrow B$$

写像

$$\beta: I^{n+1} \times \partial I \cup I \times I \rightarrow E$$



を $p\beta_0$ から $p\beta_1$ へのホモトピーをとる。

$$H: (I^{n+1} \times I, \partial I^{n+1} \times I, j_n \times I) \rightarrow (B, *, *)$$

$$[\beta_0], [\beta_1] \in \pi_{n+1}(E, F, *) = p_*([\beta_0]) = p_*([\beta_1]) \text{ とし,}$$

単射であること。

$$\pi_{n+1}(E, F, *) \text{ を考える。} p_*([\beta]) = [v].$$

よって β は空間の3対の写像 $\beta: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, j_n) \rightarrow (E, F, *)$ である。 $[\beta] \in$

$$\beta(\partial I^{n+1}) \subset p^{-1}(*) = F$$

であるから、

$$p\beta(\partial I^{n+1}) = \alpha(\partial I^{n+1}) = *$$

$$\begin{array}{ccc} & I \times I & \\ \uparrow \partial & \nearrow \beta & \downarrow v \\ E & \xrightarrow{f} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & I \times I & \\ \uparrow \partial & \nearrow \beta & \downarrow v \\ E & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

を代表元とすると次の左側の図式は可換である。 $(I^n \times I, j_n) \cong (I^n \times I, \{0\})$ であるから右側の図式を可換にするような写像 $\beta: I^{n+1} \rightarrow E$ が存在する。

り示されるが、これらの合成がどの様に振る舞うかということも重要であり（ある意味で分かる）。

よって、基点を気にしないときは $\pi_n(X, *)$, $\pi_n(X, A, *)$ を $\pi_n(X)$, $\pi_n(X, A)$ と書くことも多い。

Example 5.6.1. 明らかに $\pi_n(*, *) = 0$ 。

$$(\mathbb{R}, *) \cong (*, *) \text{ ゆえ } \pi_n(\mathbb{R}) = 0.$$

I^n は弧状連結であり、 $n \geq 1$ のとき $\partial I^n \neq \emptyset$ である。よって、 X が離散位相空間ならば、 $n \geq 1$ のとき

$$\pi_n(X, *) = [(I^n, \partial I^n), (X, *)] = [(I^n, \partial I^n), (*, *)] = 0$$

であり、また、集合として $\pi_0(X, *) \cong X$ である。

Remark . π_1 は一般には可換ではないので0とは書かず1と書くことが多い。ここでは自明な群（単位元のみからなる群）という意味。

π_0 は群ではない。ここでは一点のみからなるという意味。

Theorem 5.6.2.

$$\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

Proof. S^1 は弧状連結だから $\pi_0(S^1) = 0$ 。

被覆空間 $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(x) = \exp(2\pi i x)$ のホモトピー完全列を考える。ファイバー \mathbb{Z} は離散空間なので $n \geq 1$ に対し $\pi_n(\mathbb{Z}) = 0$ 。 $n \geq 1$ に対し次は完全

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \pi_n(S^1) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(\mathbb{R}) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

よって、 $n \geq 2$ のとき群として $\pi_n(S^1) \cong \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) = 0$ 。

$n = 1$ のときを考える。 Δ の定義を思い出すと、次の図式は可換である。ただし、

$H(1, 1) = l(1) = *$ なので、 $u(t) := H(1, t)$ は A のループ。 $i_*([u]) = [l]$ であることを示そう。 $F: I^2 \rightarrow I^2$ を

$$F(s, t) = \begin{cases} (2s(1-t), 2st), & s \leq \frac{1}{2} \\ (1-t + (2s-1)t, (2s-1)(1-t) + t), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると連続で、

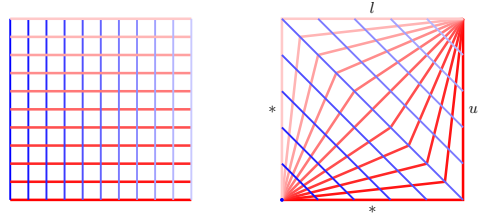
$$F(0, t) = (0, 0)$$

$$F(1, t) = (1, 1)$$

$$F(s, 0) = \begin{cases} (2s, 0), & s \leq \frac{1}{2} \\ (1, 2s-1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(s, 1) = \begin{cases} (0, 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ (2s-1, 1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

である。



$HF: I^2 \rightarrow X$ を考えると、

$$HF(0, t) = H(0, 0) = *$$

$$HF(1, t) = H(1, 1) = *$$

$$HF(s, 0) = \begin{cases} *, & s \leq \frac{1}{2} \\ u(2s-1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$HF(s, 1) = \begin{cases} *, & s \leq \frac{1}{2} \\ l(2s-1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

予備知識

付録 A

A.1 像と逆像

これまでで学んだ (かもしれない) であろう事で必要なことをまとめておく。証明が正しいものではない。[6] にあると思う。

$f: X \rightarrow Y$ を写像とする。
 $A \subset X, B \subset Y$ に対し、
 $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$
が成り立つ。また、 Y の部分集合 $f_*(A)$ を
 $f_*(A) = (f(A))^c$
で定めると
 $f^{-1}(B) \subset A \Leftrightarrow B \subset f_*(A)$
が成り立つ。実際、
 $f^{-1}(B) \subset A \Leftrightarrow f^{-1}(B)^c \supset A^c$
 $\Leftrightarrow f^{-1}(B^c) \supset A^c$
 $\Leftrightarrow B^c \subset f(A^c)$
 $\Leftrightarrow B \subset f(A)^c$
特に

同様に、写像 $\nu: G \times X \rightarrow X$ が与えられ、次の条件をみたすとき、 G は X に (ν により) 左から作用するという。

1. $\nu(h, \nu(g, x)) = \nu(hg, x)$.
2. $\nu(e, x) = x$. ただし $e \in G$ は単位元.

しばしば、 $\nu(g, x) \in X$ を $g \cdot x$ あるいは gx と書く。この書き方をすると上の条件は

1. $h(gx) = (hg)x$.
2. $ex = x$.

と書ける。

Lemma A.3.2. G が X に左から作用しているとする。 $g \in G$ に対し、写像 $\nu_g: X \rightarrow X$ を $\nu_g(x) = \nu(g, x) = g \cdot x$ で定める。次が成り立つ。

1. $\nu_h \circ \nu_g = \nu_{hg}$.
2. $\nu_e = 1_X$.

特に ν_g は全単射で、 $\nu_{g^{-1}}$ がその逆写像を与える。

Proof.

$$\begin{aligned}\nu_h(\nu_g(x)) &= h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x = \nu_{hg}(x) \\ \nu_e(x) &= e \cdot x = x = 1_X(x) \\ \nu_g \circ \nu_{g^{-1}} &= \nu_{gg^{-1}} = \nu_e = 1_X \\ \nu_{g^{-1}} \circ \nu_g &= \nu_{g^{-1}g} = \nu_e = 1_X\end{aligned}$$

□

Lemma A.3.3. G が X に左から作用しているとする。 写像 $\mu: X \times G \rightarrow X$ を $\mu(x, g) = g^{-1} \cdot x$ と定めることにより G は X に右から作用する。

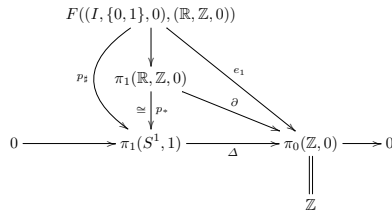
Proof.

$$\begin{aligned}\mu(\mu(x, g), h) &= h^{-1} \cdot \mu(x, g) = h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x) \\ &= (h^{-1}g^{-1}) \cdot x = (gh)^{-1} \cdot x = \mu(x, gh) \\ \mu(x, e) &= e^{-1} \cdot x = e \cdot x = x\end{aligned}$$

□

Lemma A.3.4. G が X に右から (左から) 作用しているとする。 X における関係 \sim を $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G: x = y \cdot g \Leftrightarrow \exists g \in G: x = g \cdot y$ により定めると \sim は同値関係

$e_1(f) = f(1), p_*(f) = p_*[f] = [pf] \quad (0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \text{ と } 1 \in S^1 \text{ を基点にとる})$.



$f, g \in F((I, \{0, 1\}, 0), (\mathbb{R}, \mathbb{Z}, 0))$ に対し、

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) + f(1), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると、 $f * g: I \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で、 $(f * g)(0) = 0, (f * g)(1) = g(1) + f(1) \in \mathbb{Z}$ であるから、 $f * g \in F((I, \{0, 1\}, 0), (\mathbb{R}, \mathbb{Z}, 0))$ であり、 $e_1(f * g) = e_1(f) + e_1(g)$ である。
 $f(1) \in \mathbb{Z}$ であるから、

$$\begin{aligned}(p(f * g))(t) &= p((f * g)(t)) \\ &= \exp(2\pi i(f * g)(t)) \\ &= \begin{cases} \exp(2\pi i f(2t)) = p(f(2t)), & t \leq \frac{1}{2} \\ \exp(2\pi i(g(2t - 1) + f(1))) = \exp(2\pi i g(2t - 1)) = p(g(2t - 1)), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= ((pf) * (pg))(t)\end{aligned}$$

よって

$$p_*(f * g) = p_*(f) * p_*(g)$$

ゆえ

$$\begin{aligned}\Delta(p_*(f)) * (p_*(g)) &= \Delta(p_*(f * g)) \\ &= e_1(f * g) \\ &= e_1(f) + e_1(g) \\ &= \Delta(p_*(f)) + \Delta(p_*(g))\end{aligned}$$

p_* は全射なので、 $\Delta: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ は準同型。よって、完全性より (準同型なので単射が分かり) 同型。(Theorem 5.3.13 の後の Remark を使うと全単射であることはすぐ分かる。準同型であることは、ここでやったのと同様な議論が必要だと思う。)

□

が成り立つ.

A.2 同値関係

Definition A.2.1. 集合 X 上の関係が次の 3 つの条件:

1. (反射律, reflexive law) $x \sim x$,
2. (対称律, symmetric law) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
3. (推移律, transitive law) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

を満たすとき, 関係 \sim は集合 X 上の同値関係 (equivalence relation) であるという.

Definition A.2.2. 関係 \sim を集合 X 上の同値関係とする. X の要素 $a \in X$ に対し, a と同値な要素全体のなす X の部分集合

$$C_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

を a の同値類 (equivalence class) という. a の同値類を $[a]$, a 等と書くことも多い. $x \in C_a$ をひしとすることと, x を C_a の代表元 (representative) としてとるという.

Definition A.2.3. X を集合, \sim を X 上の同値関係とする.

1. 同値類の全体 $\{C_a \mid a \in X\}$ を X/\sim と書き, 同値関係 \sim による X の商集合 (quotient set) という.
2. $a \in X$ を $C_a \in X/\sim$ にうつす写像

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & X/\sim \\ \cup & & \cup \\ a & \longmapsto & C_a \end{array}$$

を自然な写像, あるいは商写像, 自然な射影などという.

Proposition A.2.4. X を集合, \sim を X 上の同値関係とし, $\pi: X \rightarrow X/\sim$ をこの関係による商集合への自然な射影, すなわち $x \in X$ に, x を含む同値類 $C_x \in X/\sim$ を対応させる写像とする.

$f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 次は同値である.

$$1. \ x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

exercise 14. 0 でない準同型写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は単射であることを示せ.

exercise 15. 1. 次が (集合の) 完全列であれば f は全射.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{*} *$$

2. 次が (アーベル) 群の完全列であれば f は単射.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

2. $f = \bar{f} \circ \pi$ となるような写像 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \searrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

さらに, このような写像 \bar{f} は一意的である. この写像 \bar{f} を f により誘導される写像 (induced map) という.

具体的に書けば $\bar{f}(C_x) = f(x)$ である.

Corollary A.2.5. X, Y を集合, \sim, \approx をそれぞれ X, Y 上の同値関係, $p: X \rightarrow X/\sim$, $q: Y \rightarrow Y/\approx$ をそれぞれ自然な射影とする.

$f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 次は同値である.

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$.
2. $q \circ f = \bar{f} \circ p$ となるような写像 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y/\approx$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X/\sim & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/\approx \end{array}$$

この \bar{f} は $\bar{f}(C_x) = C_{f(x)}$ により与えられる.

Proof. $q \circ f: X \rightarrow Y/\approx$ に Prop. A.2.4 を使えばよい. □

A.3 群の作用

Definition A.3.1. X を集合, G を群とする. 写像 $\mu: X \times G \rightarrow X$ が与えられ, 次の条件をみたすとき, G は X に (μ により) 右から作用するという.

1. $\mu(\mu(x, g), h) = \mu(x, gh)$.
2. $\mu(x, e) = x$. ただし $e \in G$ は単位元.

しばしば, $\mu(x, g) \in X$ を $x \cdot g$ あるいは xg と書く. この書き方をすると上の条件は

1. $(xg)h = x(gh)$.
2. $xe = x$.

と書ける.

次の二つの定理を示したかったが今回は時間の都合により証明出来ない.

Theorem 5.6.3. $i < n$ のとき $\pi_i(S^n) = 0$. □

Theorem 5.6.4 (Freudenthal の懸垂定理 (の特別な場合)). 懸垂準同型

$$\Sigma: \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$$

は $i < 2n - 1$ のとき同型で, $i = 2n - 1$ のとき全射である. □

Theorem 5.6.5. $n \geq 1$ とする. このとき,

$$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

$$\pi_n(S^n) \cong [S^n, S^n]_* \text{ とみたとき, } \text{id}: S^n \rightarrow S^n \text{ が生成元.}$$

$$\Sigma: \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1}) \text{ は同型.}$$

Proof. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ は上で示した. そこでの同型対応を見れば, $\text{id}: S^1 \rightarrow S^1$ が生成元であることが分かる.

Hopf ファイブレーション $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ のホモトピー完全列を考えると, 次は完全.

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(S^3) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \longrightarrow & \pi_1(S^1) & \longrightarrow & \pi_1(S^2) \\ \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & & & \mathbb{Z} & & 0 \end{array}$$

よって $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

1 = 2 - 1 ゆえ, Freudenthal の懸垂定理より $\Sigma: \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ は全射準同型. よって同型.

$n \geq 2$ のとき, $n < 2n - 1$ であるから,

$$\Sigma: \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$$

は同型.

よって, $n \geq 1$ のとき $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, $\Sigma: \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$ は同型. $\Sigma \text{id} = \text{id}$ であるから, $\text{id}: S^n \rightarrow S^n$ が生成元. □

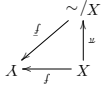
Theorem 5.6.6. $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ で, Hopf の写像 $q: S^3 \rightarrow S^2$ が生成元.

Proof. Hopf ファイブレーション $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ のホモトピー完全列

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_3(S^1) & \longrightarrow & \pi_3(S^3) & \xrightarrow{q_*} & \pi_3(S^2) & \longrightarrow & \pi_2(S^1) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & 0 \end{array}$$

より明らか. □

$f: X \rightarrow Y$ を写像とし, 次が可換であるとする (Proposition A.2.4 参照).



このとき, f が連続であるための必要十分条件は f が連続であることである.

exercise 19. 1. Definition A.6.1 の O_f は位相であることを示せ.

2. Definition A.6.1 で, f による等化位相は, f を連続にする最狭の位相であることを示す.

3. Theorem A.6.4 を証明せよ.

4. Theorem A.6.5 を証明せよ.

A.7 ハウスドルフ空間

Definition A.7.1. 位相空間 X が **Hausdorff** (ハウスドルフ) 空間である \Leftrightarrow 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x の近傍 U と y の近傍 V で, $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する.

exercise 20. 位相空間 X が Hausdorff 空間である \Leftrightarrow 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x を含む開集合 O と y を含む開集合 O' で, $O \cap O' = \emptyset$ となるものが存在する.

Example A.7.2. 距離空間は Hausdorff 空間である. 実際 X を距離空間, $x, y \in X$, $x \neq y$ とすると, $\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$ で, $U^\varepsilon(x) \cap U^\varepsilon(y) = \emptyset$.

Theorem A.7.3. Hausdorff 空間において, 1 点は閉集合である.

Theorem A.7.4. Hausdorff 空間の部分空間も Hausdorff.

もう少し一般的に次が成り立つ.

Proposition A.7.5. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする. 連続な単射 $f: X \rightarrow Y$ が存在すれば X も Hausdorff.

Proof. $a, b \in X$, $a \neq b$ とする. f は単射だから $f(a) \neq f(b)$ である. Y は Hausdorff だから $f(a)$ の近傍 U と, $f(b)$ の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがあ. f は連続なので $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ はそれぞれ a, b の近傍で, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = \emptyset$

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Theorem A.7.6. X, Y を位相空間とする. このとき $X \times Y$ が Hausdorff $\Leftrightarrow X, Y$ ともに Hausdorff.

Remark. 無限個の直積に対しても同様なことが成り立つ. 証明もほぼ同じ.

Theorem A.7.7. X を位相空間とする. このとき, X が Hausdorff \Leftrightarrow 対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合.

Corollary A.7.8. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間, $A \subset X$ とし, $f, g: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき次が成り立つ.

1. X の部分集合

$$C := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

は閉集合である.

2. f と g が部分集合 A 上一致すれば, A^a 上一致する.

Example A.7.9. \mathbb{R} を 1 次元ユークリッド空間とする. 連続関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が \mathbb{Q} 上一致するならば $f = g$ である.

Corollary A.7.10. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続ならば f は f を

連続ならば f は

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

は $X \times Y$ の閉集合.

A.8 コンパクト空間

Definition A.8.1. 1. 位相空間 X がコンパクト (compact) である $\Leftrightarrow X$ の任意の開被覆が有限部分被覆をもつ.

2. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトである \Leftrightarrow 部分空間 A がコンパクトである.

Remark. コンパクト Hausdorff 空間のことをコンパクトといい, この定義 A.8.1 の条件をみたす空間を準コンパクト (quasi-compact) ということもある.

Proposition A.8.2. $A_1, A_2 \subset X$ がコンパクトならば $A_1 \cup A_2$ もコンパクトである.

Theorem A.8.3. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである.

である.

Proof. 右作用の場合のみ示す.

- $x = x \cdot e$ ゆえ $x \sim x$.
- $x \sim y$ とすると, $x = y \cdot g$ となる $g \in G$ がある. $y = y \cdot e = y \cdot (gg^{-1}) = (y \cdot g) \cdot g^{-1} = x \cdot g^{-1}$ ゆえ $y \sim x$.
- $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とすると, $x = y \cdot g, y = z \cdot h$ となる $g, h \in G$ がある. このとき $x = y \cdot g = (z \cdot h) \cdot g = z \cdot (hg)$ ゆえ $x \sim z$.

□

Definition A.3.5. G が X に右から作用しているとき, 上の同値関係による商集合を X/G と書き, X を G で割った集合という.

同様に G が X に左から作用しているとき, 上の同値関係による商集合を $G \backslash X$ と書き, X を G で割った集合という. また, $G \backslash X$ を X/G と書くことも多い.

Remark. G が X に左から作用しているとき, Lem. A.3.3 により与えられる右作用を考えると, これらの作用の定める同値関係は同じであることが $g \cdot y = (g^{-1})^{-1} \cdot y = y \cdot g^{-1}$ より分かる.

Example A.3.6. H を G の部分群とする. 群の積 $G \times H \rightarrow G$ により H は G に右から作用する. この作用による同値関係 \sim は $g \sim k \Leftrightarrow k^{-1}g \in H$ により与えられる. 実際, $g \sim k$ とすると $g = kh$ となる $h \in H$ がある. よって $k^{-1}g = h \in H$. 一方, $k^{-1}g \in H$ とすると $h = k^{-1}g$ とおけば $h \in H$ で $kh = g$.

A.4 部分空間

Definition A.4.1. (X, \mathcal{O}) を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A の部分集合族 \mathcal{O}_A を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

と定めると, \mathcal{O}_A は A の位相となる. この位相を X による A の**相対位相 (relative topology)** という.

位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間と見たとき, **部分空間 (subspace)** という.

部分空間への写像の連続性を調べる際, 次は有用である.

すなわち, \bar{f} はコンパクト空間から Hausdorff 空間への全単射である. よって同相写像. □

Proposition A.9.6. X をコンパクト Hausdorff 空間, $R \subset X \times X$ を同値関係とし, $(x, y) \in R$ のとき $x \sim y$ と書く. このとき次は同値.

- X/\sim は Hausdorff 空間.
- R は $X \times X$ の閉集合.
- 射影 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ は閉写像.

Proof. 1 \Rightarrow 2.

$$R = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/\sim})$$

より分かる.

2 \Rightarrow 3. $F \subset X$ を閉集合とする. $\pi^{-1}(\pi(F)) \cap X$ が閉集合台であることを示せばよい.

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(F)) &= \{y \in X \mid \exists x \in F: x \sim y\} \\ &= \{y \in X \mid \exists x \in F: (x, y) \in R\} \\ &= p_2((F \times X) \cap R) \end{aligned}$$

ただし $p_2: X \times X \rightarrow X$ は射影. 仮定より, F, R は閉集合なので $(F \times X) \cap R$ は閉集合. $X \times X$ はコンパクト, X は Hausdorff なので, p_2 は閉写像 (Corollary A.9.3). よって $\pi^{-1}(\pi(F)) = p_2((F \times X) \cap R) \subset X$ は閉集合.

3 \Rightarrow 1. $[x_1], [x_2] \in X/\sim$, $[x_1] \neq [x_2]$ とする. X は Hausdorff ゆえ一点は閉集合. 仮定より射影 π は閉写像なので X/\sim でも一点は閉集合. π は連続だから $\pi^{-1}([x_1]), \pi^{-1}([x_2])$ は X の閉集合. $[x_1] \neq [x_2]$ なので $\pi^{-1}([x_1]) \cap \pi^{-1}([x_2]) = \emptyset$. X はコンパクト Hausdorff なので正規. よって

$$\pi^{-1}([x_i]) \subset U_i, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

となる X の開集合 U_1, U_2 が存在する.

$$V_i := \pi_*(U_i) = \pi(U_i^c)^c \subset X/\sim$$

とおく. U_i は開集合だから U_i^c は閉集合. 仮定より π は閉写像なので $\pi(U_i^c)$ は閉集合. よって $V_i = \pi(U_i^c)^c$ は開集合.

$$\pi^{-1}([x_i]) \subset U_i$$

ゆえ

$$\{[x_i]\} \subset \pi_*(U_i) = V_i$$

すなわち

$$[x_i] \in V_i.$$

Theorem A.8.4. コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトである。

Remark. コンパクト集合の連続写像による逆像はコンパクトとは限らない、例えば \mathbb{R} 上の定数関数を考えてみよ。

Theorem A.8.5. X, Y もともにコンパクトなら $X \times Y$ もコンパクト。

Remark. 無限個の直積の場合も同様なことが成り立つ (チコフ (Tikhonov) の定理) が、こちらは選択公理が必要 (選択公理と同値) であり証明はもう少し面倒。

Theorem A.8.6. コンパクト空間の無限部分集合は集積点をもつ。

Proof. X をコンパクト空間とする。 $X \neq \emptyset$ としてよい。 $A \subset X$ が集積点をもたないなら A は有限集合であることを示せばよい。

任意の $x \in X$ に対し x は A の集積点ではないので、 x を含む開集合 O_x で、 $(A - \{x\}) \cap O_x = \emptyset$ となるものが存在する。

だから
$$\emptyset = (A - \{x\}) \cap O_x = A \cap \{x\}^c \cap O_x = A \cap O_x \cap \{x\}^c$$

である。各 $x \in X$ に対し、この様な O_x をとる。 $\{O_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆である。 X はコンパクトなので、 $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ で、

$$A = A \cap X = A \cap \bigcup_{i=1}^n O_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n A \cap O_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^n \{x_i\} = \{x_1, \dots, x_n\}$$

だから、 A は有限集合。

□

Corollary A.8.7. コンパクト距離空間の任意の点列は収束する部分列を含む。

□

A.9 コンパクト Hausdorff 空間

Proof. X をコンパクト距離空間、 $\{x_n\}$ を X の点列とする。 $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく。 A が有限集合であれば、ある $x \in X$ が存在し、無限個の番号 n に対し $x_n = x$ となるのでよい。

A が無限集合であれば、 A は集積点をもつ。 $x \in X$ を集積点とすると、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、 $U_{\frac{1}{k}}(x) \cap A$ は無限集合であるので、 $x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(x)$ 、 $n_k > n_{k+1}$ となる数列 $\{n_k\}_k$ がとれる。部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ は x に収束する。 □

Remark. 逆も成り立つ。すなわち、距離空間 X においては、 X はコンパクトである \Leftrightarrow 任意の点列は収束する部分列を含む。

A.9 コンパクト Hausdorff 空間

Theorem A.9.1. Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合である。

Corollary A.9.2. コンパクト Hausdorff 空間の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は閉集合であること。

Proof. Thm. A.8.3, A.9.1 よりあきらか。 □

Corollary A.9.3. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である。

Proof. Thm. A.8.3, A.8.4, A.9.1 よりあきらか。 □

Corollary A.9.4. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射は同相写像である。 □

Corollary A.9.5. X をコンパクト空間、 Y を Hausdorff 空間、 $f: X \rightarrow Y$ を連続な全射とする。 X 上の同値関係 \sim を、 $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ により定める。このとき、誘導写像 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ は同相写像である。



Proof. X はコンパクトで、商写像 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ は連続な全射なので、Theorem A.8.4 より、 X/\sim もコンパクト。

f が連続なので、A.6.5 より \bar{f} は連続である。 $f = \bar{f} \circ \pi$ が全射なので、 \bar{f} も全射。同値関係の定め方より、あきらかに \bar{f} は単射。

4. Theorem A.5.2 を証明せよ。

A.6 商空間

Definition A.6.1. (X, O_X) を位相空間、 Y を集合、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。 Y の部分集合族

$$O_f = \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in O_X\}$$

は Y に位相を与える。この位相を f による等化位相といい、位相空間 (Y, O_f) を f による等化空間という。

Definition A.6.2. 関係 \sim を位相空間 X 上の同値関係とする。商集合 X/\sim に、自然な射影 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ による等化位相を与えたものを同値関係 \sim による商空間という。

定義により、 $「O \subset X/\sim \text{ が開集合} \Leftrightarrow \pi^{-1}(O) \text{ が開集合}」$ である。

Definition A.6.3. X を位相空間、 $A \subset X$ を空でない部分空間とする。 $A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係による商空間を部分空間 A を一点に縮めた空間といい、 X/A と書く。

Remark. $A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係とは、 $A \times A$ を含む最小の同値関係 $(A \times A)$ を含む同値関係全ての共通部分。

具体的に書けば、 $A \times A \cup \Delta(X)$ 。あるいは

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in A$$

等化位相、商空間でよく使う/大事なものは次の性質である。

Theorem A.6.4. X, Z を位相空間、 Y を集合、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とし、 Y に f による等

化位相を入れる。 $g: Y \rightarrow Z$ を写像とする。

このとき g が連続であるための必要十分条件は $g \circ f: X \rightarrow Z$ が連続であることである。



Theorem A.6.5. X, Y を位相空間、 \sim を X 上の同値関係、 X/\sim を商空間、 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ を自然な射影とする。

Proposition A.4.2. X, Y を位相空間、 $B \subset Y$ を部分空間、 $i: B \rightarrow Y$ を包含写像とする。このとき、

写像 $f: X \rightarrow B$ が連続 \Leftrightarrow 合成 $i \circ f: X \rightarrow Y$ が連続。

exercise 16. 証明せよ。

Proposition A.4.3. X を位相空間、 $X = F_1 \cup F_2$ 、 F_1, F_2 は閉集合とする。また、 Y を位相空間、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。このとき、 $f|_{F_i}: F_i \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) が連続ならば f は連続である。

exercise 17. 証明せよ。

A.5 直積空間

Definition A.5.1. $\{(X_\lambda, O_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする。直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に、部分集合の族

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{p_\lambda^{-1}(O) \mid O \in O_\lambda\}$$

が生成する位相 (この位相を直積位相 という) をいれた位相空間を、族 $\{(X_\lambda, O_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積空間または弱位相による直積空間という。ただし $p_\lambda: \prod X_\lambda \rightarrow X_\lambda$ は標準的射影。直積集合には普通とくにことわらなければ直積位相をいれる。

直積位相でよく使う/大事なものは次の性質である。

Theorem A.5.2. $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族、 $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を直積空間、 A を位相空間とする。

- 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し連続写像 $f_\lambda: A \rightarrow X_\lambda$ が与えられているとする。
このとき連続写像 $f: A \rightarrow X$ で、全ての λ に対し $p_\lambda \circ f = f_\lambda$ をみたすものがただひとつ存在する。
- $f: A \rightarrow X$ を写像とする。
 f が連続であるための必要十分条件は全ての λ に対し $p_\lambda \circ f: A \rightarrow X_\lambda$ が連続となることである。

exercise 18.

- 直積空間の位相は、全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し p_λ が連続となるような、最弱の位相であることを示せ。
- p_λ は開写像であることを示せ。
- p_λ が閉写像とはならないような例を挙げよ。