2020 年度 幾何学特論 I
ホモトピー論入門

佃 修一

2020 年 5 月 2 日

2020 年度前期「幾何学特論 I」の講義メモ.
tom Dieck [5], Gray [2], 西田 [7], May [4] を参考にホモトピー論入門をやってみる.

目次

List of exercises

第 1 章

Introduction

1.1 ホモトピー

空間を分類したい!
位相空間を同相で分類するのは難しすぎる.

Example 1.1.1 (有限位相空間)**.**

もう少しゆるい関係で分類しよう.

Definition 1.1.2. 閉区間 $[0,1]$ を I で表す.
X, Y を位相空間とする.

1. $f, g\colon X \to Y$ を連続写像とする. 連続写像
$$H\colon X \times I \to Y$$
で, 任意の $x \in X$ に対し
$$H(x,0) = f(x)$$
$$H(x,1) = g(x)$$
をみたすものが存在するとき, f と g は**ホモトピック (homotopic)** であるといい, $f \simeq g$ と書く. また, H を f から g への**ホモトピー (homotopy)** という.
2. 連続写像 $f\colon X \to Y$ は, 連続写像 $g\colon Y \to X$ で,
$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$
$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$
をみたすものが存在するとき, **ホモトピー同値写像 (homotopy equivalence)** という.

また, このとき g を f の**ホモトピー逆写像 (homotopy inverse)** とよぶ.

3. X から Y へのホモトピー同値写像が存在するとき, X と Y は**ホモトピー同値 (homotopy equivalent)** であるという.

Proposition 1.1.3. X から Y への連続写像全体のなす集合を $\mathrm{F}(X,Y)$ と書く.
ホモトピックであるという関係「$\simeq$」は $\mathrm{F}(X,Y)$ 上の同値関係である.

証明は後で.

Definition 1.1.4. $\mathrm{F}(X,Y)$ の, ホモトピックという同値関係による商集合
$$[X,Y] = \mathrm{F}(X,Y)/\simeq$$
を X から Y への**ホモトピー集合 (homotopy set)** という.
$f\colon X \to Y$ のホモトピー類を $[f]$ と書くが, しばしば $[]$ を略して f と書く.

Problem 1.1.5. 二つの位相空間 X, Y が与えられたとき

1. X と Y はホモトピー同値か?
2. $[X,Y]$ はどんな集合か?

が知りたい!

Example 1.1.6. $\mathbb{R}^n$ は一点とホモトピー同値である.
見やすさのため, 一点 $*$ からなる集合 (空間) $\{*\}$ を $*$ と書く. $f\colon \mathbb{R}^n \to *$ を $f(x) = *$, $g\colon * \to \mathbb{R}^n$ を $g(*) = 0 := \{0,\dots,0\}$ で定める. 明らかに $f \circ g = \mathrm{id}$. よって $f \circ g \simeq \mathrm{id}$.
一方, $H\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ を
$$H(x,t) = tx$$
で定めると, H は連続で,
$$H(x,0) = 0x = 0 = g \circ f(x)$$
$$H(x,1) = 1x = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x)$$
だから, $g \circ f \simeq \mathrm{id}$.
一般に, 一点とホモトピー同値である空間を**可縮 (contractible)** であるという.

ホモトピー同値か?という観点からすると $\mathbb{R}^n$ と一点は同じものだとみなす. これくらい大雑把に見ると有限位相空間の分類を組合せ論的に記述できる.
さらに, これよりもう少しゆるい「弱ホモトピー同値」という概念があり, コンパクトで "よい" 位相空間は有限位相空間と弱ホモトピー同値であるということが知られている.

よってコンパクトで "よい" 位相空間を弱ホモトピー同値で分類するには有限位相空間を弱ホモトピー同値で分類すればよい. これなら, かなり現実的な問題と言えるだろう.
こんなに大雑把な分類をして何かの役に立つのかと思うかもしれないが, とても有用である.
入門的内容の場合, Brouwer の不動点定理がよく例として挙げられるが,「幾何学 I」あるいは「幾何学 II」で扱われるであろうから, 別の例を挙げよう.

1.2 基本的な空間

1.2.1 $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対し, その大きさ (ユークリッドノルム) を
$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$
で定める. どこかで学んだことがあると思うが, 次が成り立つ.

1. (a) $\|x\| \geq 0$.
   (b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. 任意の $a \in \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\|ax\| = |a|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

この講義では $\|x\|$ を $|x|$ と書くことがあるかもしれない.
$\mathbb{R}^n$ の 2 点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し x と y のユークリッド距離 $d(x,y)$ を
$$d(x,y) = \|x - y\|$$
で定めるとこれは $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.
このノートでは, 特に断らなければ $\mathbb{R}^n$ にはこの距離をいれ, 常にこの距離の定める位相を入れる.

Proposition 1.2.1. $d_\infty(x,y), d_1(x,y)$ を
$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$
で定めるとこれらは $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であり, これらの定める位相はユークリッド距離の定める位相と等しい.

Proposition 1.2.2. $\mathbb{R}^n$ の位相は, $\mathbb{R}$ の n 個の直積空間としての位相と等しい.

Corollary 1.2.3. X を位相空間, $B \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間, $f\colon X \to B$ を写像とする. このとき, f が連続であることと, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対し, $p_i \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ が連続であることは同値. ただし, $p_i\colon B \to \mathbb{R}$ は, 包含と第 i 成分への射影 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の合成.

Proposition 1.2.4. 足し算, 掛け算, 逆数
$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$$
は連続.

Corollary 1.2.5. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は連続.

Proof. 行列を使って書けば, 各成分は足し算と掛け算で書ける. □

Theorem 1.2.6 (Heine-Borel)**.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合であること.

1.2.2 D^n, S^{n-1}

Definition 1.2.7. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間
$$\begin{aligned} D^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \\ &= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\} \\ S^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \\ &= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$
をそれぞれ n **次元円盤 (n-dimensional disc)**, $n-1$ **次元球面 ($n-1$-dimensional sphere)** という.

Example 1.1.6 と全く同様にして D^n は可縮であることが分かる.

1.2.3 $\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$

複素数体の定義の仕方は色々あるが, このノートでは以下の定義を採用する.

Definition 1.2.8. $\mathbb{R}^2$ における和, 積を次のように定めると体となる.
$(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ に対し
$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$
$$(a,b)(c,d) = (ac - db, da + bc).$$

この体を複素数体といって $\mathbb{C}$ で表す [*1]. $\mathbb{C}$ の元を複素数という.

すぐわかるように和に関する単位元は $(0,0)$, 積に関する単位元は $(1,0)$ である.

exercise 1.
1. $(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b)$.
2. $(a,0)(b,c) = (ab, ac)$.

さて
$$(a,0) + (c,0) = (a + c, 0)$$
$$(a,0)(c,0) = (ac, 0)$$
であるから $a \in \mathbb{R}$ と $(a,0) \in \mathbb{C}$ を同一視して $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ とみなす. もう少し形式的にいうと

Proposition 1.2.9. $f(a) = (a,0)$ で定まる写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は体の (単射) 準同型であり, $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の 2 次拡大体である.

$(0,1) \in \mathbb{C}$ を記号 i で表す.
$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$
である.
任意の $(a,b) \in \mathbb{C}$ は
$$\begin{aligned} (a,b) &= (a,0) + (0,b) \\ &= (a,0) + (b,0)(0,1) \\ &= a + bi \end{aligned}$$
と表すことが出来る. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ であるとき, あきらかに
$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$$

である. すなわち, 任意の複素数 z は,
$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$
と一意的に表すことが出来る.
$\mathbb{C}$ は可換体なので" 普通に" 計算をすることが出来る. 例えば
$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + bic + adi + bidi \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i \end{aligned}$$
といった具合である.

Definition 1.2.10. $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ に対し, $(a,-b) \in \mathbb{C}$ を z の**共役 (conjugate)** といって $\overline{z}$ で表す. $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ と表したとき, $\overline{z} = a - bi$ である.

$z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し
$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \geq 0 \end{aligned}$$
である.

Definition 1.2.11. $\|z\| = \sqrt{z\overline{z}} \in \mathbb{R}$ を z の絶対値という.

定義より, $\|z\|$ は $\mathbb{R}^2$ におけるユークリッドノルムと同じものである. 特に, $z, w \in \mathbb{C}$ に対し,
$$d(z,w) = \|z - w\|$$
と定めると, これは $\mathbb{C}$ 上の距離関数である. もちろん, (我々の複素数体の定義では) 距離空間としては $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ そのものである. より一般に $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し, その大きさを
$$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|z_i\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i}}$$
で定め, $\mathbb{C}^n$ の 2 点 $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ に対し z と w の距離 $d(z,w)$ を
$$d(z,w) \|z - w\|$$
で定めるとこれは $\mathbb{C}^n$ 上の距離関数であり,
$$\mathbb{C}^n = \left(\mathbb{R}^2\right)^n \cong \mathbb{R}^{2n}$$

と自然に同一視したときのユークリッド距離と同じものである. このノートでは, 特に断らなければ $\mathbb{C}^n$ にはこの距離をいれ, 常にこの距離の定める位相を入れる.
奇数次元の球面 $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ は, $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ と同一視すると
$$S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum z_i \overline{z_i} = 1 \right\}$$
とみなせる. 特に
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$$
である. $\|zw\| = \|z\|\|w\|$ であること, $\|z\| = 1$ ならば $z\overline{z} = 1$ であることに注意すると, S^1 は複素数の積により (可換) 群となることが分かる.

[*1] この定義は Hamilton (William Rowan Hamilton, ウィリアム・ローワン・ハミルトン, 1805- 1865) による. 他にも $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ として, あるいは行列環の適当な部分環として定めることもある.

1.2.4 $\mathbb{H}, \mathbb{H}^n$

Definition 1.2.12. $\mathbb{C}^2$ における和, 積を次のように定めると (非可換) 体となる.
$(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}^2$ に対し
$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$
$$(a,b)(c,d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}).$$

この体を**四元数体**といって $\mathbb{H}$ で表す. $\mathbb{H}$ の元を**四元数 (quaternion)** という [*2].
(我々の定義では) 実ベクトル空間としては $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ であるから, $\mathbb{H}$ と $\mathbb{R}^4$ は実ベクトル空間として自然に同一視出来る:
$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{H} & = & \mathbb{C}^2 & = & \left(\mathbb{R}^2\right)^2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^4 \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ & & (a + bi, c + di) & = & ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a,b,c,d) \end{array}$$
$\mathbb{H} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ の元 $1, i, j, k$ を
$$1 = (1,0) = (1,0,0,0)$$
$$i = (i,0) = (0,1,0,0)$$
$$j = (0,1) = (0,0,1,0)$$
$$k = (0,i) = (0,0,0,1)$$
で定める. $\mathbb{H}$ の積は, $\mathbb{R}^4$ に
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k = -ji$$
$$jk = i = -kj$$
$$ki = j = -ik$$
で定めた積 [*3] と一致する.

Definition 1.2.13. $q = (a,b) \in \mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ に対し, $(\overline{a}, -b)$ を q の**共役 (conjugate)** といって $\overline{q}$ で表す. $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ と表したとき $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ である.

exercise 2. $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ と表したとき $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ であることを確かめよ.

$q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ に対し
$$\begin{aligned} q\overline{q} &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\ &= a^2 - abi - acj - adk \\ &\quad + abi - b^2 i^2 - bcij - bdik \\ &\quad + acj - bcji - c^2 j^2 - cdjk \\ &\quad + adk - bdki - cdkj - d^2 k^2 \\ &= a^2 - abi - acj - adk \\ &\quad + abi + b^2 - bck + bdj \\ &\quad + acj + bck + c^2 - cdi \\ &\quad + adk - bdj + cdi + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0 \end{aligned}$$
である (可換ではないので計算には注意が必要).

Definition 1.2.14. $\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} \in \mathbb{R}$ を q の絶対値という.

$\mathbb{C}$ の場合と同様に, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^n$ にこの絶対値を用いて距離を定めることが出来る. 距離空間として
$$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{H}^n \cong \left(\mathbb{R}^4\right)^n \cong \mathbb{R}^{4n}$$
である. $4n - 1$ 次元球面 $S^{4n-1} \subset \mathbb{R}^{4n}$ は $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{H}^n$ と同一視すると
$$S^{4n-1} = \{q \in \mathbb{H}^n \mid \|q\| = 1\}$$
とみなせる. 特に
$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

である. $\|qq'\| = \|q\|\|q'\|$ であること（が示せる）, $\|q\| = 1$ ならば $q\overline{q} = 1$ であることに注意すると, S^3 は四元数の積により（非可換）群となることが分かる.

*2 この作り方は, $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ を作った方法と同じである. この構成法を Cayley-Dickson 構成という.

*3 $e_1, \dots, e_n$ が実ベクトル空間 V の基底であるとき, n^2 個の元 $e_i \cdot e_j \in V$ を定めると

$$\left(\sum a_i e_i\right) \cdot \left(\sum b_i e_i\right) = \sum_{i,j} (a_i b_j)(e_i \cdot e_j)$$

により, V に, 分配法則をみたす積を定めることが出来る. 一般には, この積は単位元をもつとも結合的であるとも限らない.

1.3 可除代数

$\mathbb{R}$ に $i^2 = -1$ になる数 i を付け加えて新しい数（複素数, $\mathbb{C}$）を作った. $\mathbb{R}$ に $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ になる「数」i, j, k を付け加えて新しい数（四元数,$\mathbb{H}$）を作った. 同じようなことが他にも出来るのか? 例えば k は使わず i, j だけを考えて $\mathbb{R}^3$ が体になるようには出来ないのか? といった疑問は自然におこるであろう.

Definition 1.3.1. 実ベクトル空間 A に, 積 $\cdot\colon A \times A \to A$ が与えられており, 任意の $a, b, c \in A$ と任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し

1. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
3. $(ra) \cdot b = r(a \cdot b) = a \cdot (rb)$

が成り立つとき *4, A を $\mathbb{R}$ 上の**代数 (algebra)** あるいは $\mathbb{R}$ **代数**という.

$\mathbb{R}$ 代数 A は, 任意の $0 \neq a \in A$ と任意の $b \in A$ に対し次の二つの条件

1. $ax = b$ をみたす $x \in A$ がただ一つ存在する
2. $ya = b$ をみたす $y \in A$ がただ一つ存在する

をみたすとき**実可除代数 (real division algebra)** という.

実可除代数は, 分配法則が成り立ち加減乗除という四則演算が出来るという意味で, 広い意味での「数」の様なものである（ただし, 積については, 単位元の存在, 可換法則, 結合法則は要求しない）.

Example 1.3.2. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ から $\mathbb{H}$ を作ったのと同じことを $\mathbb{H}$ でやってみる.

$(a, b), (c, d) \in \mathbb{H}^2$ に対し, 和, 積を

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d)\\ (a, b)(c, d) &= (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c})\end{aligned}$$

で定める. この積は可換ではなく, 結合法則もみたさないが, この積により $\mathbb{H}^2$ は $\mathbb{R}$ 代数となる. さらに, 積に関する単位元 $(1, 0)$ を持ち, 0 でない元は積に関する逆元を持つ. また（結合法則をみたさないので, 逆元を持つことから直ちに言えるわけではないが）可除代数であることが示せる.

$\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^8$ にこの和, 積を入れたものを **Cayley 代数**といって $\mathbb{O}$ で表す. $\mathbb{O}$ の元を**八元数 (octonion)** あるいは Cayley 数という

実可除代数の例として $1, 2, 4, 8$ 次元のもの $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ を挙げた. 実は次が成り立つ.

Theorem 1.3.3 ([1], [3])**.** A が有限次元実可除代数ならば, A の次元は $1, 2, 4, 8$ のいずれかである.

この定理は次のホモトピー論の定理の系として得られた.

Theorem 1.3.4 ([1], [3])**.** 奇写像

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$$

が存在するのは $n = 1, 2, 4, 8$ に限る. ただし, 連続写像 $f\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ が奇写像であるとは, 任意の $x, y \in S^{n-1}$ に対し

$$f(-x, y) = -f(x, y) = f(x, -y)$$

が成り立つことをいう.

この講義でこの定理の証明を与えることは出来ないが, Theorem 1.3.4 を仮定して Theorem 1.3.3 を示しておこう.

Lemma 1.3.5. 可除代数は零因子をもたない. つまり, $a \cdot b = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$.

Proof. A を可除代数, $a, b \in A$, $ab = 0$ とする. $a \neq 0$ とすると,

$$a \cdot b = 0 = a \cdot 0$$

で, A は可除なので $b = 0$. □

Remark . A が有限次元ならば逆も成り立つことが知られている. つまり, A が有限次元代数で, 零因子をもたなければ, A は可除代数である（証明はさほど難しくない）. .

Proof of Theorem 1.3.3. A を n 次元実可除代数とする. 実ベクトル空間としての同型 $A \cong \mathbb{R}^n$ を一つとると, $\mathbb{R}^n$ が実可除代数（となる積が存在する）であるとしてよい. $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ ならば $x \cdot y \neq 0$ なので, 積を $S^{n-1} \times S^{n-1}$ に制限したものは連続写像

$$g\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

を与える. 写像 g と連続写像

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}, \quad \pi(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

の合成

$$f = \pi \circ g\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} S^{n-1}$$

を考える.

$$\begin{aligned}g(-x, y) &= (-x) \cdot y = -(x \cdot y) = -g(x, y)\\ g(x, -y) &= x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = -g(x, y)\\ \pi(-x) &= \frac{-x}{\|-x\|} = \frac{-x}{\|x\|} = -\frac{x}{\|x\|} = -\pi(x)\end{aligned}$$

ゆえ

$$\begin{aligned}f(-x, y) &= \pi(g(-x, y)) = \pi(-g(x, y)) = -\pi(g(x, y)) = -f(x, y)\\ f(x, -y) &= \pi(g(x, -y)) = \pi(-g(x, y)) = -\pi(g(x, y)) = -f(x, y)\end{aligned}$$

であるから f は奇写像である. よって Theorem 1.3.4 より $n = 1, 2, 4, 8$. □

*4 積が双線型 (bilinear) であるということ.

1.4 圏

圏のありがたみは不変量を扱う事のみにあるわけでは全然ないけれど...

二つの空間がホモトピー同値で**ある**ことを示すのは（出来るかどうかはともかく）実際にホモトピー同値写像を与えればよい. が, どう頑張ってもホモトピー同値写像が見つからないからといってホモトピー同値ではないというわけにはいかない.

ホモトピー同値で**ない**ことを示すのには不変量という考え方が有効である.

1.4.1 圏

Definition 1.4.1 (Category)**.** **圏（カテゴリー, category）** $\mathcal{C}$ とは以下の 3 つの data (i),(ii),(iii) からなり, 条件 (a),(b),(c) をみたすもののことをいう.

data (i) クラス $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.
$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ の元を**対象 (object)** という.

(ii) 対象の任意の順序対 (A, B) に対して定められた集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
この集合の元を A から B への**射 (morphism または arrow)** という.
射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を図式により $f\colon A \to B$ または $A \xrightarrow{f} B$ とあらわす.

(iii) 任意の $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対し定められた写像

$$\mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(B, C) \times \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B) \to \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, C).$$

この写像を**合成 (composition)** という.
射 $g \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(B, C)$ と $f \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B)$ の合成を gf または $g \circ f$ とあらわす.

条件 (a) 合成は結合的, すなわち, 任意の射 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ に対し, 等式 $h(gf) = (hg)f$ が成り立つ.

(b) 各対象 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対し, 次をみたす射 $1_A\colon A \to A$ が存在する.
『任意の $f\colon A \to B$ に対し $f \circ 1_A = f$.
任意の $g\colon C \to A$ に対し $1_A \circ g = g$.』

(c) 対 (A, B) と (A', B') が異なれば,

$$\mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B) \cap \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A', B') = \emptyset.$$

条件 (b) の射 $1_A \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, A)$ は各 A に対し一意的に定まることがわかる. これを A の**恒等射 (identity morphism)** という.

条件 (c) により, 各射 f に対し, $f \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B)$ となるような対象 A と B が一意的に定まる. A を f の **domain** または **source**, B を f の **codomain** または **target** とよぶ.

条件 (c) は若干テクニカルなもので, 実際に圏を扱う際, 大抵の場合あまり気にしなくてよい.

exercise 3. 条件 (b) の射 $1_A \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, A)$ は各 A に対し一意的に定まることを示せ.

記法上の注意を少し.

- クラス $\bigcup_{A,B} \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B)$ を $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ であらわす.

- しばしば $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ のかわりに $A \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ のかわりに $f \in \mathcal{C}$ と書く.
- $\mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B)$ を $\mathrm{Hom}(A, B)$ または $\mathcal{C}(A, B)$ と書くこともある.
- 射 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ の合成を図式 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ であらわす.

圏の例を挙げる.

Example-Definition 1.4.2.

1. **(Sets)**: 集合を対象とし, 集合の間の写像を射, 写像の合成を合成とする圏.
2. **(Abel)**: アーベル群を対象, 準同型写像を射, 準同型写像の合成を合成とする圏.
3. **(Top)**: 位相空間を対象, 連続写像を射, 連続写像の合成を合成とする圏.
4. ho**(Top)**: 位相空間を対象, 連続写像のホモトピー類を射, 連続写像の合成を合成とする圏（これが圏の条件をみたすことはいずれ示す）.

Definition 1.4.3. $\mathcal{C}$ を圏とする.

1. 射 $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が**同型射 (isomorphism)** である.
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $gf = 1_A$ と $fg = 1_B$ をみたすような射 $g\colon B \to A$ が存在する. このような射 g を f の**逆射**という.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

2. A から B への同型射が存在するとき A は B に（$\mathcal{C}$ において）**同型**であるといい, $A \cong B$ と表す.

Example 1.4.4. $f\colon X \to Y \in ho(\mathbf{Top})$ が同型射である $\Leftrightarrow$ f はホモトピー同値写像.
$X, Y \in ho(\mathbf{Top})$ が同型 $\Leftrightarrow$ X と Y はホモトピー同値.

1.4.2 関手

Definition 1.4.5 (Functor)**.** 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手 (functor)** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは以下の 2 つの data (i),(ii) からなり, 条件 (a),(b) をみたすもののことをいう.

data (i) 写像 $F\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$

(ii) $\mathcal{C}$ の対象の各順序対 (A, B) に対して定められた写像 $F_{A,B}\colon \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B) \to \mathrm{Hom}\,\mathcal{D}(F(A), F(B))$ 普通 $F_{A,B}$ を単に F と書く.

条件 (a) 任意の射 $f : A \to B \in \mathcal{C}$, $g : B \to C \in \mathcal{C}$ に対し, 等式 $F(gf) = F(g)F(f)$ が成り立つ.

(b) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A \in \mathcal{C}$ に対し, 等式 $F(1_A) = 1_{F(A)}$ が成り立つ.

Lemma 1.4.6. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする. $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が同型射ならば $F(f)\colon F(A) \to F(B) \in \mathcal{D}$ も同型射である.

特に, $A, B \in \mathcal{C}$ について, $F(A) \ncong F(B)$ ならば $A \ncong B$ である.

Proof. $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が同型射であるとする. $g\colon B \to A \in \mathcal{C}$ を f の逆射とする. すなわち $gf = 1_A$, $fg = 1_B$ が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned}F(g)F(f) &= F(gf) = F(1_A) = 1_{F(A)}\\ F(f)F(g) &= F(fg) = F(1_B) = 1_{F(B)}\end{aligned}$$

となり, $F(f)$ は同型射（で, $F(g)$ がその逆射）. □

Example 1.4.7. 関手

$$F\colon ho(\mathbf{Top}) \to (\mathbf{Abel})$$

で

$$\begin{aligned}F(S^{n-1}) &= \mathbb{Z}\\ F(*) &= 0\end{aligned}$$

をみたすものが存在するとする（実際に存在する. この講義でも扱う予定）.

これを仮定すると, $\mathbb{Z} \ncong 0$ なので S^{n-1} は一点とホモトピー同値ではない, つまり S^{n-1} は可縮ではないことが分かる.

また, 連続写像 $f\colon D^n \to S^{n-1}$ で, $f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$ となるものは存在しない *5 ことが次のようにして分かる. $i\colon S^{n-1} \to D^n$ を包含写像とする. $f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$ が成り立つとする. $f|_{S^{n-1}} = fi$ なので, $fi = \mathrm{id}$ が成り立つ. よって

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{id}_{F(S^{n-1})} = F(\mathrm{id}_{S^{n-1}}) = F(fi) = F(f)F(i)$$

となる. D^n は可縮なので $F(D^n) = F(*) = 0$ ゆえ右辺は 0 写像となり不合理.

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "f"] & S^{n-1} \\ S^{n-1} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "F(f)"] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "F(i)"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

*5 これは Brouwer の不動点定理と同値な命題である.

第 2 章

ホモトピー

2.1 ホモトピー

第 1 章で述べたホモトピーの性質を証明しよう.

Proposition 1.1.3. X から Y への連続写像全体のなす集合を $\mathrm{F}(X, Y)$ と書く.
ホモトピックであるという関係「$\simeq$」は $\mathrm{F}(X, Y)$ 上の同値関係である.

Proof.

1. $f\colon X \to Y$ に対し, $F\colon X \times I \to Y$ を $F(x, t) = f(x)$ で定めると *6 明らかに連続で $F(x, 0) = F(x, 1) = f(x)$ だから $f \simeq f$.
2. $f \simeq g$ とし, $H\colon X \times I \to Y$ を f から g へのホモトピーとする. $H^{-1}\colon X \times I \to Y$ を $H^{-1}(x, t) = H(x, 1 - t)$ で定めると *7 明らかに連続で $H^{-1}(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$, $H^{-1}(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$ だから H^{-1} は g から f へのホモトピー. よって $g \simeq f$.
3. $f \simeq g$, $g \simeq h$ とし, F を f から g への, G を g から h へのホモトピーとする. $H\colon X \times I \to Y$ を
$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\\ G(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1\end{cases} \tag{2.1}$$
で定めると H は連続で, $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ なので $f \simeq h$.

□

exercise 4. (2.1) の H が well-defined であることと連続であることを確かめよ. （ヒント: H を $X \times [0, 1/2]$ と $X \times [1/2]$ に制限したものは連続. Proposition A.3.3 参照）

Proposition 2.1.1. $f, f_0, f_1\colon X \to Y$, $g, g_0, g_1\colon Y \to Z$ を連続写像とする.

1. $f_0 \simeq f_1$ ならば $gf_0 \simeq gf_1$ である.
2. $g_0 \simeq g_1$ ならば $g_0 f \simeq g_1 f$ である.
3. $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$ ならば, $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$ である.

Proof.

1. $F\colon X \times I \to Y$ を f_0 から f_1 へのホモトピーとすると $gF\colon X \times I \to Y \to Z$ は gf_0 から gf_1 へのホモトピーである.
2. 同様.
3. 1,2 より $g_0 f_0 \simeq g_0 f_1 \simeq g_1 f_1$. よって $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$.

□

exercise 5. 2 を示せ.

Proposition 2.1.1.3 より写像の合成は, 写像

$$[X, Y] \times [Y, Z] \to [X, Z]$$

を定める.

Definition 2.1.2.

1. 位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の組 (X, A) を**位相空間対**という. しばしば省略して空間対とよぶ.
A が一点 $\{x_0\}$ であるときは, $(X, \{x_0\})$ を (X, x_0) と書き, **基点付き空間 (based space)** という. また x_0 を**基点 (basepoint)** という.
2. (X, A), (Y, B) を空間対とする. 連続写像 $f\colon X \to Y$ は, $f(A) \subset B$ をみたすとき**空間対の写像**とよび, $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ と表す.
基点付き空間の写像 $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, つまり連続写像 $f\colon X \to Y$ で, $f(x_0) = y_0$ をみたすものを**基点付き写像 (based map)** という.
3. 位相空間対を対象とし, 空間対の写像を射とする圏を空間対の圏といい **(Top(2))** と書く. **(Top(2))** の同型射を**空間対の同相写像**という.
4. 基点付き空間を対象とし, 基点付き写像を射とする圏を基点付き空間の圏といい $\mathbf{(Top)}_*$ と書く.

Lemma 2.1.3. $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ を空間対の写像とする.
このとき, f が空間対の同相写像 $\Leftrightarrow$ $f\colon X \to Y$, $f|_A\colon A \to B$ がどちらも同相写像.

Proof. $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ が空間対の同相写像であるとし, $g\colon (Y, B) \to (X, A)$ をその逆射とする. 明らかに $f\colon X \to Y$ は同相写像で, $g\colon Y \to X$ がその逆写像である.

また, $f(A) \subset B$, $g(B) \subset A$ なので, f および g の制限は写像 $f|_A\colon A \to B$, $g|_B\colon B \to A$ を定め, どちらも連続である. 明らかに互いに他の逆写像であるから同相.

逆に, $f\colon X \to Y$, $f|_A\colon A \to B$ がどちらも同相写像であるとする. $g\colon Y \to X$ を f

の逆写像とすると, f が同相写像なので g は連続である. $f|_A\colon A \to B$ は同相写像なので全射ゆえ $f(A) = B$ である. $b \in B$ に対し, $f(g(b)) = b \in B = f(A)$. f は単射だから $g(b) \in A$. よって $g(B) \subset A$. したがって g は空間対の写像であり, 明らかに $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ の逆射. □

exercise 6. $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ を空間対の写像とする. このとき, $f|_A\colon A \to B$ が連続であることを示せ（Proposition A.3.2 を見よ）.

Definition 2.1.4. 空間の 3 対, 基点付き空間対

---

*6 射影 $X \times I \to X$ と f の合成だから
*7 $\iota\colon I \to I$, $\iota(t) = 1 - t$ は連続で, $H^{-1} = H \circ (\mathrm{id}_X \times \iota)$

第 3 章

基本的な空間及び構成

第 4 章

Fibration と Cofibration

第 5 章

ホモトピー群

付録 A

予備知識

これまでに学んだ（かもしれない）であろう事で必用なことをまとめておく．証明がついていないものは幾何学序論の私の講義ノート [6] にあると思う．

A.1 同値関係

Definition A.1.1. 集合 X 上の関係が次の 3 つの条件:

1. （**反射律, reflexive law**） $x \sim x$,
2. （**対称律, symmetric law**） $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
3. （**推移律, transitive law**） $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

を満たすとき, 関係 $\sim$ は集合 X 上の**同値関係 (equivalence relation)** であるという．

Definition A.1.2. 関係 $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．X の要素 $a \in X$ に対し, a と同値な要素全体のなす X の部分集合

$$C_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

を a の**同値類 (equivalence class)** という．a の同値類を $[a]$, $\bar{a}$ 等と書くことも多い．
$x \in C_a$ をひとつとることを, x を C_a の**代表元 (representative)** としてとるという．

Definition A.1.3. X を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする．

1. 同値類の全体 $\{C_a \mid a \in X\}$ を $X/\sim$ と書き, 同値関係 $\sim$ による X の**商集合 (quotient set)** という．

2. $a \in X$ を $C_a \in X/\sim$ にうつす写像

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/\sim \\ \cup & & \cup \\ a & \longmapsto & C_a \end{array}$$

を**自然な写像** あるいは**商写像**, **自然な射影**などという．

Proposition A.1.4. X を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とし, $\pi\colon X \to X/\sim$ をこの関係による商集合への自然な射影, すなわち $x \in X$ に, x を含む同値類 $C_x \in X/\sim$ を対応させる写像とする．
$f\colon X \to Y$ を写像とする. 次は同値である．

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$.
2. $f = \bar{f} \circ \pi$ となるような写像 $\bar{f}\colon X/\sim \to Y$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim . \arrow[ur, dotted, "\exists \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

さらに, このような写像 $\bar{f}$ は一意的である．この写像 $\bar{f}$ を f により**誘導される写像 (induced map)** という．
具体的に書けば $\bar{f}(C_x) = f(x)$ である．

Corollary A.1.5. X, Y を集合, $\sim$, $\approx$ をそれぞれ X, Y 上の同値関係, $p\colon X \to X/\sim$, $q\colon Y \to Y/\approx$ をそれぞれ自然な射影とする．
$f\colon X \to Y$ を写像とする. 次は同値である．

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$.
2. $q \circ f = \bar{f} \circ p$ となるような写像 $\bar{f}\colon X/\sim \to Y/\approx$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/\sim \arrow[r, dotted, "\exists \bar{f}"'] & Y/\approx . \end{tikzcd}$$

この $\bar{f}$ は $\bar{f}(C_x) = C_{f(x)}$ により与えられる．

Proof. $q \circ f\colon X \to Y/\approx$ に Prop. A.1.4 を使えばよい． □

A.2 群の作用

Definition A.2.1. X を集合, G を群とする．写像 $\mu\colon X \times G \to X$ が与えられ, 次の条件をみたすとき, G は X に (μ により) 右から作用するという．

1. $\mu(\mu(x, g), h) = \mu(x, gh)$.
2. $\mu(x, e) = x$. ただし $e \in G$ は単位元.

しばしば, $\mu(x, g) \in X$ を $x \cdot g$ あるいは xg と書く．この書き方をすると上の条件は

1. $(xg)h = x(gh)$.
2. $xe = x$.

と書ける．
同様に, 写像 $\nu\colon G \times X \to X$ が与えられ, 次の条件をみたすとき, G は X に (ν により) 左から作用するという．

1. $\nu(h, \nu(g, x)) = \nu(hg, x)$.
2. $\nu(e, x) = x$. ただし $e \in G$ は単位元.

しばしば, $\nu(g, x) \in X$ を $g \cdot x$ あるいは gx と書く．この書き方をすると上の条件は

1. $h(gx) = (hg)x$.
2. $ex = x$.

と書ける．

Lemma A.2.2. G が X に左から作用しているとする．$g \in G$ に対し, 写像 $\nu_g\colon X \to X$ を $\nu_g(x) = \nu(g, x) = g \cdot x$ で定める．次が成り立つ．

1. $\nu_h \circ \nu_g = \nu_{hg}$.
2. $\nu_e = 1_X$.

特に ν_g は全単射で, $\nu_{g^{-1}}$ がその逆写像を与える．

Proof.

$$\begin{aligned} \nu_h(\nu_g(x)) &= h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x = \nu_{hg}(x) \\ \nu_e(x) &= e \cdot x = x = 1_X(x) \\ \nu_g \circ \nu_{g^{-1}} &= \nu_{gg^{-1}} = \nu_e = 1_X \\ \nu_{g^{-1}} \circ \nu_g &= \nu_{g^{-1}g} = \nu_e = 1_X \end{aligned}$$

□

Lemma A.2.3. G が X に左から作用しているとする．写像 $\mu\colon X \times G \to X$ を $\mu(x, g) = g^{-1} \cdot x$ と定めることにより G は X に右から作用する．

Proof.

$$\begin{aligned} \mu(\mu(x, g), h) &= h^{-1} \cdot \mu(x, g) = h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x) \\ &= (h^{-1}g^{-1}) \cdot x = (gh)^{-1} \cdot x = \mu(x, gh) \\ \mu(x, e) &= e^{-1} \cdot x = e \cdot x = x \end{aligned}$$

□

Lemma A.2.4. G が X に右から (左から) 作用しているとする．X における関係 $\sim$ を $x \sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G : x = y \cdot g$ ($x \sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G : x = g \cdot y$) により定めると $\sim$ は同値関係である．

Proof. 右作用の場合のみ示す．

1. $x = x \cdot e$ ゆえ $x \sim x$.
2. $x \sim y$ とすると, $x = y \cdot g$ となる $g \in G$ がある．$y = y \cdot e = y \cdot (gg^{-1}) = (y \cdot g) \cdot g^{-1} = x \cdot g^{-1}$ ゆえ $y \sim x$.
3. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とすると, $x = y \cdot g$, $y = z \cdot h$ となる $g, h \in G$ がある．このとき $x = y \cdot g = (z \cdot h) \cdot g = z \cdot (hg)$ ゆえ $x \sim z$.

□

Definition A.2.5. G が X に右から作用しているとき, 上の同値関係による商集合を X/G と書き, X を G で割った集合という．
同様に G が X に左から作用しているとき, 上の同値関係による商集合を $G \backslash X$ と書き, X を G で割った集合という．また, $G \backslash X$ を X/G と書くことも多い．

Remark . G が X に左から作用しているとき, Lem. A.2.3 により与えられる右作用を考えると, これらの作用の定める同値関係は同じであることが $g \cdot y = (g^{-1})^{-1} \cdot y = y \cdot g^{-1}$ より分かる．

Example A.2.6. H を G の部分群とする．群の積 $G \times H \to G$ により H は G に右から作用する．この作用による同値関係 $\sim$ は $g \sim k \Leftrightarrow k^{-1}g \in H$ により与えられる．実際, $g \sim k$ とすると $g = kh$ となる $h \in H$ がある．よって $k^{-1}g = h \in H$. 一方, $k^{-1}g \in H$ とすると $h = k^{-1}g$ とおけば $h \in H$ で $kh = g$.

A.3 部分空間

Definition A.3.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする．A の部分集合族 $\mathcal{O}_A$ を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

と定めると, $\mathcal{O}_A$ は A の位相となる．この位相を X による A の**相対位相 (relative topology)** という．
位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間と見たとき, **部分空間 (subspace)** という．

部分空間への写像の連続性を調べる際, 次は有用である．

Proposition A.3.2. X, Y を位相空間, $B \subset Y$ を部分空間, $i\colon B \to Y$ を包含写像とする．このとき,
写像 $f\colon X \to B$ が連続 $\Leftrightarrow$ 合成 $i \circ f\colon X \to Y$ が連続.

exercise 7. 証明せよ．

Proposition A.3.3. X を位相空間, $X = F_1 \cup F_2$, F_1, F_2 は閉集合とする．また, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする．このとき, $f|_{F_i}\colon F_i \to Y$ $(i = 1, 2)$ が連続ならば f は連続である．

exercise 8. 証明せよ．

A.4 直積空間

Definition A.4.1. $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする．直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に, 部分集合の族

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{p_\lambda^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

が生成する位相 (この位相を**直積位相** という) をいれた位相空間を, 族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の**直積空間**または**弱位相による直積空間**という．ただし $p_\lambda\colon \prod X_\lambda \to X_\lambda$ は標準的射影.
直積集合には普通とくにことわらなければ直積位相をいれる．

直積位相でよく使う/大事なのは次の性質である．

Theorem A.4.2. $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を直積空間, A を位相空間とする．

1. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し連続写像 $f_\lambda\colon A \to X_\lambda$ が与えられているとする．
   このとき連続写像 $f\colon A \to X$ で, 全ての λ に対し $p_\lambda \circ f = f_\lambda$ をみたすものがただひとつ存在する．
2. $f\colon A \to X$ を写像とする．
   f が連続であるための必要十分条件は全ての λ に対し $p_\lambda \circ f\colon A \to X_\lambda$ が連続となることである．

exercise 9. 1. 直積空間の位相は, 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し p_λ が連続となるような, 最弱の位相であることを示せ．
2. p_λ は開写像であることを示せ．
3. p_λ が閉写像とはならないような例を挙げよ．
4. Theorem A.4.2 を証明せよ．

A.5 商空間

Definition A.5.1. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする．Y の部分集合族

$$\mathcal{O}_f = \left\{O \subset Y \;\middle|\; f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\right\}$$

は Y に位相を与える．この位相を f による**等化位相**といい, 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_f)$ を f による**等化空間**という．

Definition A.5.2. 関係 $\sim$ を位相空間 X 上の同値関係とする．商集合 $X/\sim$ に, 自然な射影 $\pi\colon X \to X/\sim$ による等化位相を与えたものを同値関係 $\sim$ による**商空間**という．
定義により,「 $O \subset X/\sim$ が開集合 $\Leftrightarrow \pi^{-1}(O)$ が開集合」である．

Definition A.5.3. X を位相空間, $A \subset X$ を空でない部分空間とする．$A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係による商空間を部分空間 A を**一点に縮めた空間**といい, X/A と書く．

Remark . $A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係とは, $A \times A$ を含む最小の同値関係（$A \times A$ を含む同値関係全ての共通部分）.
具体的に書けば, $A \times A \cup \Delta(X)$. あるいは

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in A$$

等化位相, 商空間でよく使う/大事なのは次の性質である．

Theorem A.5.4. X, Z を位相空間, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とし, Y に f による等化位相を入れる．$g\colon Y \to Z$ を写像とする．
このとき g が連続であるための必要十分条件は $g \circ f\colon X \to Z$ が連続であることである．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Theorem A.5.5. X, Y を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係, $X/\sim$ を商空間, $\pi\colon X \to X/\sim$ を自然な射影とする．
$f\colon X \to Y$ を写像とし, 次が可換であるとする（Proposition A.1.4 参照）.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

このとき, $\bar{f}$ が連続であるための必用十分条件は f が連続であることである．

exercise 10. 1. Definition A.5.1 の $\mathcal{O}_f$ は位相であることを示せ．
2. Definition A.5.1 で, f による等化位相は, f を連続にする最強の位相であることを示せ．
3. Theorem A.5.4 を証明せよ．
4. Theorem A.5.5 を証明せよ．

A.6 ハウスドルフ空間

Definition A.6.1. 位相空間 X が **Hausdorff（ハウスドルフ）空間** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x の近傍 U と y の近傍 V で, $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する．

exercise 11. 位相空間 X が Hausdorff 空間である $\Leftrightarrow$ 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x を含む開集合 O と y を含む開集合 O' で, $O \cap O' = \emptyset$ となるものが存在する．

Example A.6.2. 距離空間は Hausdorff 空間である．実際 X を距離空間, $x, y \in X$, $x \neq y$ とすると, $\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$ で, $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap \mathrm{U}_\varepsilon(y) = \emptyset$.

Theorem A.6.3. Hausdorff 空間において，1 点は閉集合である．

Theorem A.6.4. Hausdorff 空間の部分空間も Hausdorff.

もう少し一般的に次が成り立つ．

Proposition A.6.5. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする．連続な単射 $f\colon X \to Y$ が存在すれば X も Hausdorff.

Proof. $a, b \in X$, $a \neq b$ とする．f は単射だから $f(a) \neq f(b)$ である．Y は Hausdorff だから $f(a)$ の近傍 U と, $f(b)$ の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある．f は連続なので $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ はそれぞれ a, b の近傍で, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. □

Theorem A.6.6. X, Y を位相空間とする．このとき $X \times Y$ が Hausdorff $\Leftrightarrow X, Y$ ともに Hausdorff.

Remark . 無限個の直積に対しても同様なことが成り立つ．証明もほぼ同じ．

Theorem A.6.7. X を位相空間とする．このとき, X が Hausdorff $\Leftrightarrow$ 対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合.

Corollary A.6.8. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間, $A \subset X$ とし, $f, g\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき次が成り立つ．

1. X の部分集合
$$C := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
は閉集合である．
2. f と g が部分集合 A 上一致すれば, A^a 上一致する．

Example A.6.9. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする．連続関数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上一致するならば $f = g$ である．

Corollary A.6.10. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が連続ならばグラフ

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

は $X \times Y$ の閉集合.

となるものが存在する．

$$\begin{aligned} A &= A \cap X \\ &= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i} \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} A \cap O_{x_i} \\ &\subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, \ldots, x_n\} \end{aligned}$$

だから，A は有限集合． □

Corollary A.7.7. コンパクト距離空間の任意の点列は収束する部分列を含む．

Proof. X をコンパクト距離空間，$\{x_n\}$ を X の点列とする．$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく．A が有限集合であれば，ある $x \in X$ が存在し，無限個の番号 n に対し $x_n = x$ となるのでよい．

A が無限集合であれば，A は集積点をもつ．$x \in X$ を集積点とすると，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathrm{U}_{\frac{1}{k}}(x) \cap A$ は無限集合であるので，$x_{n_k} \in \mathrm{U}_{\frac{1}{k}}(x)$, $n_k < n_{k+1}$ となる数列 $\{n_k\}_k$ がとれる．部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ は x に収束する． □

Remark．逆も成り立つ．すなわち，距離空間 X においては，X はコンパクトである $\Leftrightarrow$ 任意の点列は収束する部分列を含む．

A.8 コンパクト Hausdorff 空間

Theorem A.8.1. Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合である．

Corollary A.8.2. コンパクト Hausdorff 空間の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は閉集合であること．

Proof. Thm. A.7.3, A.8.1 よりあきらか． □

Corollary A.8.3. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である．

Proof. Thm. A.7.3, A.7.4, A.8.1 よりあきらか． □

Corollary A.8.4. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射は同相写像である． □

Corollary A.8.5. X をコンパクト空間，Y を Hausdorff 空間，$f\colon X \to Y$ を連続な全射とする．X 上の同値関係 $\sim$ を，$x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ により定める．このとき，誘導写像 $\bar{f}\colon X/\!\sim \to Y$ は同相写像である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\!\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. X はコンパクトで，商写像 $\pi\colon X \to X/\!\sim$ は連続な全射なので，Theorem A.7.4 より，$X/\!\sim$ もコンパクト．

f が連続なので，A.5.5 より $\bar{f}$ は連続である．$f = \bar{f} \circ \pi$ が全射なので，$\bar{f}$ も全射．同値関係の定め方より，あきらかに $\bar{f}$ は単射．

すなわち，$\bar{f}$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射である．よって同相写像． □

A.9 コンパクト距離空間

Definition A.9.1. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする．

写像 $f\colon X \to Y$ が**一様連続 (uniformly continuous)** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となる．

明かに一様連続ならば連続である．

exercise 12. 一様連続ならば連続であることを示せ．

X がコンパクトのときは逆も言える．

Theorem A.9.2. (X, d_X) をコンパクト距離空間，(Y, d_Y) を距離空間とする．このとき，写像 $f\colon X \to Y$ が連続ならば，f は一様連続である．

Proof. $\varepsilon > 0$ とする．

点 $a \in X$ に対し，$f\colon X \to Y$ は点 a で連続なので，ある $\delta_a > 0$ が存在し，$d_X(a, x) < 2\delta_a$ ならば $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ となる．

各 $a \in X$ に対し，この様な δ_a を一つとる [*8]．$\{\mathrm{U}_{\delta_a}(a)\}_{a \in X}$ は X の開被覆で，X はコンパクトなので，ある $a_1, \ldots, a_n \in X$ が存在し，

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_{\delta_i}(a_i)$$

となる．ただし見やすさのため $\delta_i = \delta_{a_i}$ とおいた．

$\delta := \min_i \delta_i$ とおく．$\delta > 0$ である．

$x, x' \in X$, $d_X(x, x') < \delta$ とする．$x \in X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_{\delta_i}(a_i)$ ゆえ，ある $1 \leq i \leq n$ が存在し，$x \in \mathrm{U}_{\delta_i}(a_i)$，すなわち $d_X(a_i, x) < \delta_i$ である．よって $d_Y(f(a_i), f(x)) < \varepsilon/2$．また

$$\begin{aligned} d_X(a_i, x') &\leq d_X(a_i, x) + d_X(x, x') \\ &< \delta_i + \delta \\ &\leq \delta_i + \delta_i = 2\delta_i \end{aligned}$$

ゆえ $d_Y(f(a_i), x') < \varepsilon/2$．したがって

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x')) &\leq d_Y(f(x), f(a_i)) + d_Y(f(a_i), f(x')) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

[*8] 例えば

$$\min\{1, \sup\{\delta \mid d_X(a, x) < 2\delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2\}\}$$

つづく…

参考文献

[1] R. Bott and J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:87–89, 1958.

[2] Brayton Gray. *Homotopy Theory*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.

[3] Michel A. Kervaire. Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 44(3):280–283, 1958.

[4] J. P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[5] Tammo tom Dieck. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[6] Shuichi Tsukuda. 幾何学序論講義ノート. `http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/`.

[7] 西田 吾郎. **ホモトピー論**. 共立出版, 1985.

A.7 コンパクト空間

Definition A.7.1.

1. 位相空間 X が**コンパクト (compact)** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X の任意の開被覆が有限部分被覆をもつ．
2. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトである $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 部分空間 A がコンパクトである．

Remark．コンパクト Hausdorff 空間のことをコンパクトといい，この定義 A.7.1 の条件をみたす空間を**準コンパクト (quassi-compact)** ということもある．

Proposition A.7.2. $A_1, A_2 \subset X$ がコンパクトならば $A_1 \cup A_2$ もコンパクトである．

Theorem A.7.3. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである．

Theorem A.7.4. コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトである．

Remark．コンパクト集合の連続写像による逆像はコンパクトとは限らない．例えば $\mathbb{R}$ 上の定数関数を考えてみよ．

Theorem A.7.5. X, Y ともにコンパクトなら $X \times Y$ もコンパクト．

Remark．無限個の直積の場合も同様なことが成り立つ（チコノフ (Tikhonov) の定理）が，こちらは選択公理が必要（選択公理と同値）であり証明はもう少し面倒．

Theorem A.7.6. コンパクト空間の無限部分集合は集積点をもつ．

Proof. X をコンパクト空間とする．$X \neq \emptyset$ としてよい．$A \subset X$ が集積点をもたないならば A は有限集合であることを示せばよい．

任意の $x \in X$ に対し，x は A の集積点ではないので，x を含む開集合 O_x で，$(A - \{x\}) \cap O_x = \emptyset$ となるものが存在する．

$$\emptyset = (A - \{x\}) \cap O_x = A \cap \{x\}^c \cap O_x = A \cap O_x \cap \{x\}^c$$

だから

$$A \cap O_x \subset \{x\}$$

である．各 $x \in X$ に対し，この様な O_x をとる．$\{O_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆である．X はコンパクトなので，$x_1, \ldots, x_n \in X$ で，

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$$