I 編材学団数 東却 0202 PI人編ーソイチホ 一 <sup>油</sup> 曲 H et 月 a 辛 0505	5E         「No addud"         5.4           5E         「No addud"         5.4           7E         第一当月手本         東京業           7E         「W全宗         5.5           7E         「W全宗         5.5           7E         「Machandall"         5.5           7E         「Machandall"         5.5           6E         第四条章         A就付           6E         第四条章         A就付           6b         開空所有         5.4           6b         開空報報         6.6           7b         開空報報         6.6           6b         開空報報         6.6           7b         開空報         6.6           7b         日本         6.7           7c         6.7         6.7           7c         6.7         6.7           7c         6.7         6.7           7c         6.7	21 21 40 40 41 41 41 41 42 43 44 45 46 47 48 48 49 49 40 40 40 40 40 40 40 40 40 40
	4.5 Puppe № 35	S

exercise13 . . . . . exercise12 . . . . . . . . . . I I seizīszs exercise10 . . . . . exercise8 . . . . . Təsiərəxə exercise5 exercise4 exercise3 . . . . . . Səsiərəxə . . . . . . Issistaxs List of exercises 第1章 Introduction 1.2.1  $\mathbb{R}^n$  3
1.2.2  $D^n, S^{n-1}$  4 第2章 ホモトピー 第3章 基本的な空間及び構成 第4章 Fibration と Cofibration 

目次

2020 年度前期「幾何学特論 I」の講義メモ. tom Dieck [5], Gray [2], 西田 [7], May [4] を参考にホモトビー論入門をやってみる.

Proposition 1.1.3. X から Y への連続写像全体のなす集合を F(X,Y) と書く. ホモトピックであるという関係「 $\simeq$ 」はF(X,Y)上の同値関係である.

**Definition 1.1.4.** F(X,Y) の、ホモトピックという同値関係による商集合

 $[X, Y] = F(X, Y)/\simeq$ 

を X から Y へのホモトピー集合 (homotopy set) という.  $f: X \to Y$  のホモトビー類を [f] と書くが、しばしば [] を略して f と書く.

Problem 1.1.5. 二つの位相空間 X, Y が与えられたとき

 X と Y はホモトピー同値か? [X,Y] はどんな集合か?

が知りたい!

Example 1.1.6.  $\mathbb{R}^n$  は一点とホモトビー同値である.

見やすさのため、一点 \* からなる集合(空間) {\*} を \* と書く.  $f: \mathbb{R}^n \to *$  を f(x) = \*,  $g:* \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $g(*) = 0 := \{0, ..., 0\}$  で定める、明らかに  $f \circ g = id$ 、よって  $f \circ g \simeq id$ . 一方、H:  $\mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  を

H(x, t) = tx

で定めると、日 は連続で、

$$H(x, 0) = 0x = 0 = g \circ f(x)$$
  
 $H(x, 1) = 1x = x = id_{\mathbb{R}^n}(x)$ 

だから,  $g \circ f \simeq id$ .

一般に、一点とホモトビー同値である空間を可縮 (contractible) であるという.

ホモトビー同値か?という観点からすると Rn と一点は同じものだとみなす。これくら い大雑把に見ると有限位相空間の分類を組合せ論的に記述できる。

さらに、これよりもう少しゆるい「弱ホモトピー同値」という概念があり、コンパクト で"よい"位相空間は有限位相空間と弱ホモトピー同値であるということが知られている.

よってコンパクトで"よい"位相空間を弱ホモトピー同値で分類するには有限位相空間を 羽ホモトピー同値で分類すればよい. これなら, かなり現実的な問題と言えるだろう. こんなに大雑把な分類をして何かの役に立つのかと思うかもしれないが、とても有用で

入門的内容の場合、Brouwer の不動点定理がよく例として挙げられるが、「幾何学 I」あ るいは「幾何学 II」で扱われるであろうから、別の例を挙げよう.

# 1.2 基本的な空間

1.2.1  $\mathbb{R}^{n}$ 

$$\mathbb{R}^{n} = \{(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}) | x_{i} \in \mathbb{R}\}$$

の点  $x = (x_1, ..., x_n)$  に対し、その大きさ (ユークリッドノルム) を

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

で定める. どこかで学んだことがあると思うが、次が成り立つ.

(b)  $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

2. 任意の  $a \in \mathbb{R}$  と  $x \in \mathbb{R}^n$  に対し、||ax|| = |a|||x||.

3.  $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$ .

この講義では ||x|| を |x| と書くことがあるかもしれない.

 $\mathbb{R}^n$  の 2 点  $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$  に対し x と y のユークリッド距離 d(x,y)

$$d(x, y) = ||x - y||$$

で定めるとこれは Rn 上の距離関数である。

このノートでは、特に断らなければ  $\mathbb{R}^n$  にはこの距離をいれ、常にこの距離の定める位

Proposition 1.2.1.  $d_{\infty}(x, y), d_1(x, y) \stackrel{*}{\sim}$ 

$$d_{\infty}(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

第1章 Introduction

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

で定めるとこれらは R<sup>n</sup> 上の距離関数であり、これらの定める位相はユークリッド距離の 定める位相と等しい。

Proposition 1.2.2.  $\mathbb{R}^n$  の位相は、 $\mathbb{R}$  の n 個の直積空間としての位相と等しい。

Corollary 1.2.3. X を位相空間,  $B \subset \mathbb{R}^n$  を部分空間,  $f \colon X \to B$  を写像とする. この とき、f が連続であることと、任意の 1 < i < n に対し、 $p_i \circ f : X \to \mathbb{R}$  が連続であること は同値、ただし、 $p_i: B \to \mathbb{R}$  は、包含と第 i 成分への射影  $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  の合成。

Proposition 1.2.4. 足し算. 掛け算. 逆数

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$$
  
 $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$   
 $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ 

け凍紡

Corollary 1.2.5. 線形写像  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  は連続.

Proof. 行列を使って書けば、各成分は足し算と掛け算で書ける.

**Theorem 1.2.6** (Heine-Borel). ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の部分集合がコンパクトである ための必要十分条件は有界閉集合であること.

1.2.2  $D^n, S^{n-1}$ 

**Definition 1.2.7.** n 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の部分空間

$$\begin{split} D^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \\ &= \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right. \\ S^{n-1} &:= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\right\} \\ &= \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\right. \end{split}$$

をそれぞれ n 次元円盤 (n-dimensional disc), n-1 次元球面 (n-1-dimensional sphere) という.

Example 1.1.6 と全く同様にして  $D^n$  は可縮であることが分かる.

1.2 基本的な空間

1.2.3  $\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$ 

複素数体の定義の仕方は色々あるが、このノートでは以下の定義を採用する.

Definition 1.2.8.  $\mathbb{R}^2$  における和、積を次のように定めると体となる.  $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$  に対し

> (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)(a, b)(c, d) = (ac - db, da + bc),

この体を複素数体といって C で表す\*1. C の元を複素数という.

すぐわかるように和に関する単位元は (0,0)、積に関する単位元は (1,0) である.

exercise 1. 1. (a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)2. (a, 0)(b, c) = (ab, ac).

(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)(a, 0)(c, 0) = (ac, 0)

であるから  $a\in\mathbb{R}$  と  $(a,0)\in\mathbb{C}$  を同一視して  $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$  とみなす。もう少し形式的にいうと

Proposition 1.2.9. f(a)=(a,0) で定まる写像  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$  は体の(単射)準同型であ り. C は R の 2 次拡大体である

(0,1) ∈ C を記号 i で表す.

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

である。 任意の  $(a,b) \in \mathbb{C}$  は

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$
  
=  $(a, 0) + (b, 0)(0, 1)$   
=  $a + bi$ 

と表すことが出来る。a b c d c R であるとき あきらかに

 $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$ 

と (homotopy equivalence) としてよるできないないないないない としゅうしょう ホモトピー同権事務 (homotopy equivalence) と

2. 連続写像  $f\colon X\to Y$  は、連続写像  $g\colon Y\to X$  で、 · さいる (homotopy) ー コイチホの~ g され t ま H , さま . > 告 s g ≃ t そみたすものが存在するとき、∫とりはホモトピック (homotopic) であるといい,

> $(x)\theta = (1, x)H$ (x)f = (0,x)H

> > し校コX ∋ x の意丑, Φ

 $X \leftarrow I \times X : H$ 

4) 3: A → Y を連続写像とする、連続写像

. & 支と間空間か多 Y,X Definition 1.1.2. 閉区間 [0,1] を J で表す.

. さよし膝仕び糸関いるめしむさき

Example 1.1.1 (有限位相空間).

位相空間を同相で分類するのは難しすぎる. いりさし様代を開室

ーツィチホ 1.1

Introduction

草I無

 $C_{u} = (B_{\tau})_{..} \equiv B_{\tau u}$ 

で定めるとこれは Cn 上の距離関数であり、

き (w,z)b 糖躍の  $w \le z$  し核コ (nw,...,tw) = w (nz,...,tz) = z 点  $\Omega$  の の  $\Delta$  ななす

$$||z|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ||z_i||^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i \underline{z_i}}$$

離空間としては C は  $\mathbb{R}^2$  そのものである。より一般に  $z = z_1, \ldots, z_n$  )  $\in \mathbb{C}^n$  に対し、その 混(おう雑宝の朴雄素敷のヶ疣)、人ろさき、さるで複類離型の土 D おけこ , S るめ宝と

||m - z|| = (m'z)p

.  $\dot{c}$  いる雑技嫌の z 多  $\mathbb{R}$  多  $\mathbb{R}$  5  $\mathbb{R}$  3  $\mathbb{R}$  3  $\mathbb{R}$  3  $\mathbb{R}$  3  $\mathbb{R}$  4  $\mathbb{R}$  5  $\mathbb{R}$  5  $\mathbb{R}$  5  $\mathbb{R}$  5  $\mathbb{R}$  6  $\mathbb{R}$  6  $\mathbb{R}$  7  $\mathbb{R}$  6  $\mathbb{R}$  7  $\mathbb{R}$  8  $\mathbb{R}$  9  $\mathbb{R}$ 

 $= a_3 + p_3 \ge 0$  $= a_3 - p_3 i_3$  $= a_2 - (pi)_3$ 

 $(iq - v)(iq + v) = \underline{z}z$  $\exists \ \forall \exists \exists \ (\exists i \ (a,b) \ \exists i \ a+b=z$ 

Definition 1.2.10.  $z = (a,b) \in \mathbb{C} \bowtie \cup (a,-b) \in \mathbb{C}$  \$  $z \notin z$  \$  $z \notin z$  \$ 0 ∈ Conjugate) ≥

. ゆめが台共式でいる

i(2d + ba) + bd - 2a = $= ac + pci + aqi + pqi_z$  $ibid + iba + \circ id + \circ a = (ib + \circ)(id + a)$ お大陸、6米出位とこるで多葉指"刀重告"でのな物拠回おり . 6. 未出れるこも表コ内意一と

 $\mathbb{H} \ni q, p \quad ,iq + p = z$ 

第1章 Introduction

(おっ) 原素原の恵力,さななで、ふるで

 $i^2=j^2=k^2=-1$ 

\*\* PESS & H OM(4, R\* C

 $(1,0,0,0) = (i,0) = \lambda$ (0,1,0,0) = (1,0) = 0(0,0,1,0) = (0,i) = i(0,0,0,1) = (0,1) = 1

 $\mathbb{H}=\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4 \ \emptyset, i, i, i, \vec{h} \ \ \mathbb{R}$ 

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{C}^2} \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{C}^2} \mathbb{R}^4$$

:冬米出路一回コ然自てしる間空小

イベン実む \*星 4 日、されるあす \*星 = コ むすし 4 間空 4 イケン果(むで養宝のヶ身) - c^ さいら (noirreterp) 漢元四多元の H . す赤ツ H ファイと朴茂元四多朴のこ

> $(a,b)(c,d)=(ac-\overline{d}b,da+b\overline{c}).$ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)

> > $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}^2$  (5.3)

Definition 1.2.12. C\* における和, 種を次のように定めると (非可幾) 体となる.

1.2.4 H, Hn

、 るるきょこるの訳フリン類代報な芒酸の類似行動いるる、フリュ  $(1+*X)\setminus [X]$ 知 きご時、るよご

. さんないなこさなる神 (拠回) (113)時の凝素腫む 'S 

 $\{\mathfrak{l}=\|z\|\mid \mathfrak{I}\ni z\}={}_{\mathfrak{l}}S$ 

奇数次元の稼働 
$$S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$$
 は、 $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^n$  と同一報すると  
 
$$\left\{ z = \overline{z}, z \subset \mathbb{C}^n \mid z = \overline{z}, z_n \in \mathbb{R}^n \right\} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z \in \mathbb{Z} \right\}$$

らなければ C" にはこの距離をいれ, 常にこの距離の定める位相を入れる. と自然に同一視したときのユーケリッド距離と同じものである。このノートでは,特に断

間空な的本基 2.1

 $\{\mathfrak{l}=\|b\|\mid \mathbb{H}\ni b\}={}_{\mathbb{E}}S$ 

コ耕 .るサなもろ

2.12

 $\{\mathfrak{l}=\|b\|\mid {}_{u}\mathbb{H}\ni b\}={}_{\mathfrak{l}-u\mathfrak{p}}S$ 

るるを第一回  $^4$  4所  $^4$  m  $^4$ 

 $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^{4}, \quad \mathbb{H}^{n} \cong (\mathbb{R}^{4})^{n} \cong \mathbb{R}^{4n}$ 

□の場合と同様に, 田, 田"にこの絶対値を用いて距離を定めることが出来る. 距離空間

Definition 1.2.14.  $\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} \in \mathbb{R}$  変 q の絶対値という.

. (要後は意治却コ葉指すのいなおり幾万) るあり  $= a_x + p_x + c_x + q_x \ge 0$ 

 $+ adk - bdj + cdi + d^2$  $+ acj + pck + c_5 - cqi$ 

 $+ api + b^2 - bck + bdj$  $= a_{\tau} - api - acj - aqk$ 

 $+ aq_F - pq_{Fi} - cq_F j - q_z F_z$  $+ acj - pcji - c_5 l_5 - cqj k$ 

 $+ abi - b^2 i^2 - bcij - bdik$  $= a^2 - abi - acj - adk$  $d\underline{d} = (\alpha + pi + cj + qk)(\alpha - pi - cj - qk)$ 

 $q=a+bi+cj+dk\in\mathbb{H}\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ 

よるなかかるよこるあず

exercise 2.  $q=a+bi+cj+dk\in\mathbb{H}$   $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$   $\sharp \exists \cup t \succeq \exists \cup t \cup di-cj-dk$  $A = a - bi - cj + dk \in \mathbb{H}$  (a, b, c, d  $\in \mathbb{R}$  ) と表したとき $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ Definition 1.2.13.  $q=(a,b)\in\mathbb{H}=\mathbb{C}^2\boxtimes\mathbb{H}\cup (a,b)$  & q  $\oplus\mathbb{H}$  (conjugate)  $\boxtimes$ 

- 6本版一当 \*\* 樹土&宝ワ

yi - = l = iy $\ell y - = i = y\ell$  $i\ell - = \lambda = \ell i$ 

第1章 Introduction

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$$
  
 $(a,b)(c,d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c})$ 

で定める。この積は可換ではなく、結合法則もみたさないが、この積により  $H^2$  は  $\mathbb{R}$  代数 となる. さらに、積に関する単位元 (1,0) を持ち、0 でない元は積に関する逆元を持つ. ま た(結合法則をみたさないので、逆元を持つことから直ちに言えるわけではないが)可除 代物であることが示せる

 $\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^8$  にこの和、積を入れたものを Cayley 代数といって  $\mathbb O$  で表す.  $\mathbb O$  の元を八元 数 (octonion) あるいは Cayley 物という

宇可除代数の例として1.2.4.8次元のもの ℝ C. H. C. を挙げた。宇は次が成り立つ。

Theorem 1.3.3 ([1], [3]). A が有限次元実可除代数ならば, A の次元は 1, 2, 4, 8 のいず

この定理は次のホモトビー論の定理の系として得られた.

Theorem 1.3.4 ([1], [3]). 奇写像

$$S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$$

が存在するのは n=1,2,4,8 に限る. ただし、連続写像  $f\colon S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$  が奇写 像であるとは、任意の $x,y \in S^{n-1}$ に対し

$$f(-x, y) = -f(x, y) = f(x, -y)$$

が成り立つことをいう

この講義でこの定理の証明を与えることは出来ないが、Theorem 1.3.4 を仮定して Theorem 1.3.3 を示しておこう。

Lemma 1.3.5. 可除代数は零因子をもたない、つまり、 $a \cdot b = 0$  ならば a = 0 または

Proof. A を可除代数,  $a,b \in A$ , ab = 0 とする.  $a \neq 0$  とすると,

$$a \cdot b = 0 = a \cdot 0$$

で、Aは可除なのでb=0.

Remark , A が有限次元ならば逆も成り立つことが知られている。つまり、A が有限次元 代数で、零因子をもたなければ、Aは可除代数である(証明はさほど難しくない)...

Proof of Theorem 133 A を n 次元字可除代数とする 字ベクトル空間としての同型  $A \cong \mathbb{R}^n$  を一つとると、 $\mathbb{R}^n$  が実可除代数 (となる積が存在する) であるとしてよい.  $x,y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  ならば  $x \cdot y \neq 0$  なので、積を  $S^{n-1} \times S^{n-1}$  に制限したものは連 結写像

$$g: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

を与える 写像 α と連続写像

$$\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, \quad \pi(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

の会成

$$f=\pi\circ g\colon S^{n-1}\times S^{n-1}\to \mathbb{R}^n\setminus\{0\}S^{n-1}$$

を表える

$$g(-x, y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y) = -g(x, y)$$
  
 $g(x, -y) = x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = -g(x, y)$   
 $\pi(-x) = \frac{-x}{\|-x\|} = \frac{-x}{\|x\|} = -\pi(x)$ 

$$\begin{split} f(-x,y) &= \pi \left( g(-x,y) \right) = \pi \left( -g(x,y) \right) = -\pi \left( g(x,y) \right) = -f(x,y) \\ f(x,-y) &= \pi \left( g(x,-y) \right) = \pi \left( -g(x,y) \right) = -\pi \left( g(x,y) \right) = -f(x,y) \end{split}$$

であるから f は奇写像である. よって Theorem 1.3.4 より n = 1, 2, 4, 8.

# 14 巻

圏のありがたみは不変量を扱う事のみにあるわけでは全然ないけれど... 二つの空間がホモトビー同値であることを示すのは(出来るかどうかはともかく)実際 にホモトビー同値写像を与えればよい、が、どう頑張ってもホモトビー同値写像が見つか らないからといってホモトピー同値ではないというわけにはいかない。

ホモトピー同値でないことを示すのには不変量という考え方が有効である.

## 第1章 Introduction

Definition 1.4.1 (Category). 圏 (カテゴリー, category) Cとは以下の3つのdata (i),(ii),(iii) からなり、条件 (a),(b),(c) をみたすもののことをいう。

data (i) クラス Ob C.

ObC の元を対象 (object) という.

(ii) 対象の任意の順序対(A B) に対して定められた集合 Home(A B) この集合の元をAからBへの射 (morphism または arrow) という. 射  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  を図式により  $f : A \rightarrow B$  または  $A \xrightarrow{f} B$  とあらわす. (iii) 任意の  $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$  に対し定められた写像

 $\operatorname{Hom} C(B, C) \times \operatorname{Hom} C(A, B) \rightarrow \operatorname{Hom} C(A, C).$ 

この写像を合成 (composition) という.

射  $q \in \text{Hom } C(B, C)$  と  $f \in \text{Hom } C(A, B)$  の合成を qf または  $q \circ f$  とあら わす

条件 (a) 合成は結合的、すなわち、任意の射  $f: A \rightarrow B, q: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$  に対し、 等式 h(gf) = (hg)f が成り立つ.

(b) 各対象  $A \in Ob \mathcal{C}$  に対し、次をみたす射  $1_A : A \rightarrow A$  が存在する. 『任意の  $f: A \rightarrow B$  に対し  $f \circ 1_A = f$ . 任意の  $g: C \rightarrow A$  に対し  $1_A \circ g = g$ .』

条件 (b) の射  $1_A \in \operatorname{Hom} \mathcal{C}(A,A)$  は各 A に対し一意的に定まることがわかる. これを A の恒等射 (identity morphism) という.

 $f \in \text{Hom } C(A, B)$  に対し、 $A \otimes f \otimes \text{domain}$  または source.  $B \otimes f \otimes \text{codomain}$  ま たは target とよぶ.

exercise 3. 条件 (b) の射  $1_A \in \text{Hom } C(A, A)$  は各 A に対し一意的に定まることを示せ.

### 記法上の注音を少し

- $\mathcal{O}$   $\mathcal{O}$
- しばしば  $A \in ObC$  のかわりに  $A \in C$ ,  $f \in MorC$  のかわりに  $f \in C$  と書く.
- Hom C(A, B) を Hom(A, B) または C(A, B) と書くこともある.
- 射  $f: A \to B \succeq g: B \to C$  の合成を図式  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  であらわす.

圏の例を挙げる

Example-Definition 1.4.2. 1 (Sets): 集合を対象とし、集合の間の写像を射 写

像の合成を合成とする圏

- 2. (Abel): アーベル群を対象, 準同型写像を射, 準同型写像の合成を合成とする圏.
- 3. (Top): 位相空間を対象 連続写像を射 連続写像の合成を合成とする圏
- 4. ho(Top): 位相空間を対象、連続写像のホモトビー類を射、連続写像の合成を合成 とする圏 (これが圏の条件をみたすことはいずれ示す).

Definition 1.4.3 Cを開とする

1. 射  $f: A \rightarrow B \in C$   $\pi^i$ 同型射 (isomorphism) である.  $\underset{\mapsto}{\Leftrightarrow} gf=1_A$  と  $fg=1_B$  をみたすような射  $g\colon B\to A$  が存在する. このような射 gをその満触という



2. A から B への同型射が存在するとき A は B に(C において)同型であるといい、

Example 1.4.4.  $f: X \to Y \in ho(Top)$  が同型射である  $\Leftrightarrow f$  はホモトビー同値写像.  $X, Y \in ho(Top)$  が同型  $\Leftrightarrow X \ge Y$  はホモトピー同値.

# 142 閏手

Definition 1.4.5 (Functor). 圏 C から圏 D への関手 (functor)  $F: C \to D$  とは以下 の 2 つの data (i),(ii) からなり, 条件 (a),(b) をみたすもののことをいう.

data (i) 写像  $F : Ob \mathcal{C} \rightarrow Ob \mathcal{D}$ 

- (ii) C の対象の各順序対 (A, B) に対して定められた写像  $F_{A,B}$ :  $\operatorname{Hom} \mathcal{C}(A, B) \to$  $\operatorname{Hom} \mathcal{D}(F(A), F(B))$  普通  $F_{A,B}$  を単に F と書く.
- 条件 (a) 任意の射  $f: A \rightarrow B \in C$ ,  $g: B \rightarrow C \in C$  に対し, 等式 F(gf) = F(g)F(f) が
- (b) C の任意の対象  $A \in C$  に対し、等式  $F(1_A) = 1_{F(A)}$  が成り立つ.

Lemma 1.4.6.  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を関手とする.  $f: A \rightarrow B \in \mathcal{C}$  が同型射ならば  $F(f): F(A) \rightarrow F(B) \in \mathcal{D}$  も同型射である。

特に、 $A,B \in C$  について、 $F(A) \not\cong F(B)$  ならば  $A \not\cong B$  である.

 $Proof.\ f: A \rightarrow B \in \mathcal{C}$  が同型射であるとする.  $g: B \rightarrow A \in \mathcal{C}$  を f の逆射とする. すなわ

Example 1.3.2. Rから C, Cから H を作ったのと同じことを H でやってみる.

. (マロスの水型お開送台

請、開去幾万、 お芋の元 3単、 おすいて 3糖、 しさき) る あ す の き な 熱 の し 渡 ! の 字 刺 窓 い 力,少却意そいるる来出や葉底限四そいる効薬薬庫さ立で海や限去請せ、お選升額巨実

. そべる (stdegle noisivib leat) 渡井刹戸実さるすぶそか

S: ya = b をみたず  $y \in A$  かただーン存任する Ax = b をみたす  $x \in A$  かたた -3 存在する

. さいる選升 用 却いるあ (sidebia) 渡升の土 用 多 A , \*\* き 3 C 立 0 流 h

> 3.  $(ra) \cdot b = r(a \cdot b) = a \cdot (rb)$  $o \cdot p + q \cdot p = (o + q) \cdot p \cdot r$ J.  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

ひがい M ラ T (2) 数 出 S A ラ 5, d, b

の意力, ( は ア な ら え 早 な A ← A × A : 薄 , コ A 間空 ハ イ セ > 実 . L. & L noitinh o U

ことものできこおり然目は問題さらいと でれのいな

来出おコそえるなコがれ 5星 ア系巻多わさし, では動むえ気系圏 でんのる来出きコ砂ねと こなさまり同 . 去こ許多(田.媛元四) 遊いし禄フ夫成わわまま;;;; L渡」 るなコ fー = ニム  $= c_1 = c_2$  기표 . 숙소하송 (② ,遂秦財) 遊 $\sqrt{\sqrt{\pi}}$  天成付付金 i 절중な기  $I = c_2$  기표

及 計級 [ E.I

るるで他合語さとできを元効率は確心こ、ねり線一、る米出立とこるる気を確すされる側を抽合、コリノ(0.1.1)

 $\left(\sum_{q^i e^i}\right) \cdot \left(\sum_{p^i e^i}\right) = \sum_{r} (q^i p^j)(e^i \cdot e^j)$ 

. ふかかなよこるなど精 (幾戸非) ひよご酵の壊元四む 82,56 をお窓出 

73677364 LH 6.1

\*5 これは Brouwer の不動点定理と同値な命間である。



こなる.  $D^{**}$  は可能なので  $F(D^{**}) = F(*) = 0$  ゆれたわ返ば  $0 \neq \emptyset$  となり  $\Phi$ 

$$(i)_{\mathcal{A}}(f)_{\mathcal{A}} = (if)_{\mathcal{A}} = (i^{-u}Spi)_{\mathcal{A}} = (i^{-u}S)_{\mathcal{A}}pi = \mathbb{Z}pi$$

 $J \subset \mathcal{Z}$  .  $C \not\subset \mathcal{X}$   $G \not\cong \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ 

ふをとて立り類が bi = i-nS| f 、 るをと常写音響をする nG ← i-nS: i 、 るかれてしつきまる。 このではないこことがありであって

1-n2 (また、いなおで強同一当イチホミ点一お 1-n2 でのなり ¥ Z , ≤るで宝みを作ご (3代すぐ放きび薄髄のここのでかやい切実)のでるのでかかなのまでぶれる。

> 0 = (\*)A $\mathbb{Z} = ({}_{1-u}S)_{\mathcal{A}}$

п

 $(1 \text{po}(1 \text{po})) \rightarrow (4 \text{pe})$ 

Example 1.4.7. M#

となり, F(f) は同型射 (で, F(g) がその逆射) .

 $L(f) = L(f) = L(f) = I(f) = I^{L(B)}$  $(V)_{\mathcal{A}} \mathbf{1} = (V \mathbf{1})_{\mathcal{A}} = (f \mathcal{B})_{\mathcal{A}} = (f)_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})_{\mathcal{A}}$ 

考 M の J 、C 立 () 類 A R I = 8 f ・A I = 48 d

moitouhorini 章1葉

Proposition 2.1.1.  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7: Y \leftarrow X: f_4, f_4, f_4, f_5$  表連続等を示る。

(Fig. 6.4.A nonisodori 3886.410.6.5) U. 1/1/3 A. 5 (2/1,0) X. 5 (2/1,0) X. 5 (3/1,0) X. 5 (4/1,0) X. 5 (4/1,0 exercise 4. (2.1) の H が well-defined であることと連続であることを確かめよ、(とン

 $y = f \partial_x c_0$ 

で定めると H は連続で、H(x,0)=F(x,0)=f(x), H(x,1)=G(x,1)=h(x) な

$$H(z,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \geq i \geq 0 & (i\mathcal{L}, \lambda)^{T} \\ G(x, 2i - 1), & \frac{1}{2} \geq i \geq i \end{cases}$$

$$(2.1)$$

 $x : X \leftarrow I \times X : H$ 3. \$\pi \cong 9. 9 \cong 1 \co

 $c \pm . - \Im \dashv \mp \mp \Diamond \sim f \in \mathcal{A} \otimes \sharp \vdash^{1-} H \in \mathcal{A} \rtimes (x) \\ f = (0,x)H = (1,x)^{1-}H , (x) \\ g = (0,x)^{1-}H , (x)$  $=(1,x)H=(0,x)^{1-}H$  で幾重 ぶんき 明  $^{7*}$  幺るさます  $(t-1,x)H=(t,x)^{1-}H$  多 A に 連続で F(x,0) = F(x,1) = f(x) だがな  $f \simeq f$ .

승 배  $^{3*}$  < 중 66 젊은  $^{\prime}$  (x) t=(t,x) T 중  $Y\leftarrow I\times X$  :  $^{\prime}$  Y  $\leftrightarrow$   $Y\leftarrow X$  :  $^{\prime}$  t . Loon  $^{\prime}$ . さあび条関節回の土(Y, Y) 1 i L ≤ ト 条関 € い 3 さあむ セッケ マ カ 5 を 5 という 関係 1 ≥ 1 は F(X, Y) 上の 同値関係である. Proposition 1.1.3. X から Y への連続写像全体のなす集合を F(X,Y) と書く.

.そよし即当を資券のーソイチホホン払び辛1業

ーコイチホ 1.2

一当イチホ

車 7. 選

 $I \otimes X \leftarrow X : \emptyset$  . ふぞとる名字歌芒路同さるささ  $A \leftarrow A : A : A : A : X : \emptyset$  . 辺匹 Aを定め、どちらも連続である。明らかに互いに他の逆写像であるから同相。 ※執とする、明らかに f: X → Y は同相写像で, g: Y → X がその逆写像である。 

・ 歌写財同さらさXなA  $\leftarrow$  A : A : A  $\leftarrow$  A : A. c ( 2 場長の区間空分 ( g , f ) ← ( k , k ) : t . 5.1.2 smmo. Lemma 2.1.5. j . 5.1.5 smmo.

.>是2 \*(doL)

いいる側の間空告計点基金側るする様多郷草告計点基、J 3 象状を間空告計点基 よ ことでいる場合時間の位置数を理解している。

((Z)qoT) ババム圏の校開空多圏るする接き粉草の校開空, J 幺象状多校開空辞功. S. でいる (qem based) 参与さけ点差多のさでぶん多。 = (0x)f, つ Y ← X : f 動型器悪ひまつ,(0t,Y) ← (0x,X) : f 動車の間空き付点基

・支表さ(B,Y) ← (A,X): f, ひよる動写の校間空き 2 すれみ多  $B \supset (A, A)$  , は、 $Y \leftarrow X$  : L 線契線数 . るする校間空多 (B, Y) , (A, X) . 2

sbace) という、また xo を基点 (basepoint) という. bəsəd) 間空송한点基 , 송참≤ (<sub>0</sub>x, X) 총 ({<sub>0</sub>x}, X) , 치 총 ≤ 증 & ♡ {<sub>0</sub>x} 点 ~<sup>2</sup>4 Å スよる枚間空ブし部舎制し割し、そいる枝

るべ代がよこすされる (d), (a) 科条の (1.1.1 notinition ) 養実の働なれこ, (8.3.5)

 $[Z,X] \leftarrow [Z,Y] \times [X,X]$ 

粉草, お海合の粉草 0 1 €.1.1.2 noitisoqor¶

exercise 5. 2 ₹ πtt.

. If 18 = 0108 5 c t. . If 18 = 1108 = 0108 0 t. 2.1 . E

784(b) 17. 12 890 4.0 8 91 × 0× 1 3 × 0× 0 1 1  $Proof. \qquad L. \ F: X : Y \rightarrow Y \Leftrightarrow f_0 \Leftrightarrow f_1 \Leftrightarrow f_2 + 2 - 2 + 3 + 2 + 2 \Leftrightarrow f_1 \Leftrightarrow f_2 \Leftrightarrow f_3 \Rightarrow X \leftarrow I \times X : Y = I.$ 

3.  $f_0 \simeq f_1$ ,  $g_0 \simeq g_1$  %  $\odot f_4$ ,  $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$   $\odot g_0 = g_1$ 2. 90 = 91 \$2 \$1 \$ 91 \$ = 91 \$ 75 \$5.

1.  $f_0 \simeq f_1 \text{ for all } g f_0 \simeq g f_1 \text{ for all } g$ 

ースイチホ 並 2 紙

п

<sup>\*4</sup> 億が収線別 (bilinear) であるということ

Definition 2.1.5. 1. 空間対 (X, A), (Y, B) に対し, (X, A) から (Y, B) への空 間対の写像全体のなす集合を F((X,A),(Y,B)) で表す。基点付き空間の場合。  $F((X, x_0), (Y, y_0))$  を  $F_*(X, Y)$  と書く.

2. (X,A) から (Y,B) への空間対の写像のホモトビー類全体のなす集合を [(X, A), (Y, B)] で表す:

 $[(X, A), (Y, B)] := F((X, A), (Y, B))/\simeq$ 

基点付き空間の場合、 $[(X,x_0),(Y,y_0)]$ を $[X,Y]_*$ と書く.

以上のことは、部分空間の個数が増えても同様なことを考えることができる.

Definition 2.1.6. 空間の 3 対 基点付き空間対

位相空間 X とその部分空間 A<sub>2</sub> ⊂ A<sub>1</sub> ⊂ X の網 (X, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>) を位相空間の3対と

 $A_2$  が一点  $\{x_0\}$  であるときは、 $(X,A,\{x_0\})$  を  $(X,A,x_0)$  と書き、基点付き空間 対という. このとき  $x_0 \in A \subset X$  である. また  $x_0$  を基点 (basepoint) という.

2.  $(X, A_1, A_2)$ ,  $(Y, B_1, B_2)$  を空間の 3 対とする. 連続写像  $f: X \rightarrow Y$  は, i=1,2に対し  $f(A_i) \subset B_i$  をみたすとき空間の 3 対の写像とよび、 $f: (X, A_1, A_2) \rightarrow$ (Y, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>) と表す.

基点付き空間対の写像  $f:(X,A,x_0) \rightarrow (Y,B,y_0)$ , つまり連続写像  $f:X \rightarrow Y$  で、  $f(A) \subset B$   $f(x_0) = y_0$  をみたすものを基点付き写像 (based map) という.

- 3. 位相空間の3対を対象とし、空間の3対の写像を射とする圏を空間の3対の圏とい い (Top(3)) と書く. (Top(3)) の同型射を空間の 3 対の同相写像という.
- 4. 空間の 3 対 (X, A1, A2) から (Y, B1, B2) への 3 対の写像全体のなす 集合を F((X, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>), (Y, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>)) で表し、そのホモトピー類全体を  $[(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)]$  と書く、
- 5. 基点付き空間対 (X, A, x<sub>0</sub>) から (Y, B, y<sub>0</sub>) への基点付き写像全体のなす集合を F<sub>\*</sub>((X, A), (Y, B)) で表し、そのホモトビー類全体を [(X, A), (Y, B)]。と書く、

第3章

# 基本的な空間及び構成

3.1 部分空間を一点に縮めた空間

X を位相空間  $A \subset X$  を空でない部分空間とする

 $x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ $\sharp$ $\hbar$ $t$ $t$ $x,y \in A$}$ 

という同値関係による商空間を部分空間 A を一点に縮めた空間といい、X/A と書く

 $A = \emptyset$  のときは、 $X/\emptyset$  を、X に一点を付け加えた空間(X と一点の直和)

 $X/\emptyset = X \coprod *$ 

と使める

X/Aは、一点に潰した点 [A]を基点として基点付き空間と考える

Remark 集合として

 $X/A \cong (X - A) \coprod \{[A]\} \cong (X - A) \coprod \{*\}$ 

であり、この対応のもと、射影  $\pi: X \to X/A$  を X = A に制限したものは恒等写像で、

$$X = (X - A) \coprod A$$
 $\pi \downarrow \qquad \downarrow_{id} \qquad \downarrow$ 
 $X/A \cong (X - A) \coprod \{*\}$ 

Proposition 3.1.1. 空間対の写像  $f:(X,A) \rightarrow (Y,B)$  は、次の図式が可換となるよう

п

そいろ(パなち代慮を点差) のきずれみを og = (1,0x)H し校コ I ∋ 1 の意分, アc あか ー当 4 手木(の厳告いなえ考を点差)のへ g させ l お H , 0 まで . s こそい s セチホを

> $(x)\delta = (1, x)H$ (x)f = (0,x)H $0\hat{n} = (x, 0x) H$

> > → はこり 1 ラ 1 ≤ X ラ x の 息 中、つ 誘動・な

 $A \leftarrow I \times X : H$ 

おろこそいろるもケータイチ市省朴点基のへもそれとな

 $H: (Y, x_0) \times I \rightarrow (Y, y_0)$ 

6.工業形

.6844522

ピックであるということがある。また、このときのホモトビーを基点付きホモトピーとよ イチホブの北多点基ミスなるブペッソイチホ<sup>\*</sup>( $(v_t, Y)$ ) ←  $(v_t, X)$ : $v_t$ , 物ゼミけ点基 ことづる (Vortomotopy) ニコイチホのへり され ( また, 片 変 片, 六 ま 、) 告と

まみたすものが存在するとき、 $\{ \{ \{ \{ \{ \} \} \} \} \} \}$  (homotopic) であるといい、 $\{ \{ \{ \{ \} \} \} \} \} \}$  (homotopic) であるといい、 $\{ \{ \{ \{ \} \} \} \} \} \}$  (homotopic) であるといい。

 $(x)\delta = (1, x)H$ (x)f = (0,x)H

つ 採 コ X ∋ x の意丑 ' む

 $(a, x) \leftarrow i \times (h, x) : H$ 

期号の区間空 .  $\phi$  € 2 割号の区間空  $\phi$  ( $\mathbf{A}, \mathbf{Y}$ ) ← ( $\mathbf{A}, \mathbf{A}$ ) :  $\theta$  :  $\theta$ - 支表 S 1 × (A, X) ま (1 × A, 1 × X) 核間空, し核コ (A, X) 核間空 . L.L.C moitinna Definition

· (ま見き 2.4.A notiteoport) が水をここのあり exercise 6.  $f\colon (X,A)\to (Y,B)$  を空間対の写像とする。このとき、 $f|_A\colon A\to B$  が連続

: 速速の(A,Y) ← (A,X): ł コペモ即 ,  $\ell$  あび郷草の校間空却  $\varrho$  アーポオリ  $A \supset (B) \varrho$  アーネ  $A \ni (\delta) \varrho$  さかな 操単計 f . (A) f f f は f f f f f f f f f は 身 f f f は 身 f f f f は 身 f

-34±4 I.2

 $g/X \vee V/X \sim X \times V \cap g \times X/X \times X$ 

Proof 次の図式を考える.

. 6 で砂瓶を

 $g/J \lor F/X \equiv J \times F \cap G \times Y/J \times Y$ 

:卧回却次却さな音楽園でも, A, ツ面 

 $(X \times A \cup B \times X, Y \times X) =: (B, Y) \times (A, X)$ 

:2音5(4,1)×(A,A) 

> $t_1 \wedge t_2 : X_1 \wedge X_2 \rightarrow Y_1 \wedge Y_2$  $f^1 \wedge f^2 : X^1 \wedge X^2 \rightarrow X^1 \wedge X^2$

. & A WAR O L I.I.E noitisogory

. (.A.O ご 神楽小康 3 c き) るる で時間知らなイクバくにれ X,Y,X 、いなら規却 4 時間却  $(X \wedge Y) \wedge X \, \exists \, X \wedge (Y \wedge X)$ Remark .  $X \wedge Y \cong Y \wedge X$  (同相) である.

> $A \wedge X/A \times X = A \times {}^{0}X \cap {}^{0}R \times X/A \times X =: A \vee X$  $0 f \cap 0 x / X \prod X =: X \wedge X$

海綿で及間空な的本基 章 8 葉

Proof.  $f(A) \subset B$  であるから、 $a, a' \in A$  ならば  $f(a), f(a') \in B$ . よって Corollary A.2.5 より、図式を可換にするような写像 f がただ一つ存在する.

ただしp,qは自然な射影.

き) 同相写像である.

な (基占付き) 連続写像 F を誘導する:

f, q はともに連続なので、Theorem A.6.5 より、f は連続である.  $f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$  が空間対の同相写像ならば、 $g: (Y,B) \rightarrow (X,A)$  で  $gf = id_X$ 、  $f_a = id_v$  をみたすものが存在し、次の可換図式を得る:

さらに、 $f:(X,A) \rightarrow (Y,B)$  が空間対の同相写像ならば、 $\tilde{f}:X/A \rightarrow Y/B$  は (基点付

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$$
 $\downarrow q \qquad \downarrow p$ 
 $X/A \xrightarrow{r} Y/B \xrightarrow{g} X/A$ 

 $\bar{g}\bar{f}p = \bar{g}qf = pgf = p = id_{X/A}p$ 

ゆえ、一意性 (Corollary A.2.5) より、 $\bar{g}\bar{f}=\mathrm{id}_{X/A}$ . 同様に  $\bar{f}\bar{g}=\mathrm{id}_{Y/B}$  が分かる.

Lemma という程のものではないが

Lemma 3.1.2.  $f:(X,A) \to (Y,B)$  を空間対の写像とする. このとき,  $\bar{f}:X/A \to Y/B$ が全単射  $\Leftrightarrow f(X-A) \subset (Y-B)$  かつ  $f\colon X-A\to Y-B$  が全単射.

Proposition 3.1.3. X を Hausdorff 空間,  $A \subset X$  をコンパクト部分空間とする. この とき、X/A も Hausdorff 空間である.

特に, X がコンパクト Hausdorff 空間で,  $A\subset X$  が閉部分集合ならば, X/A は Hausdorff 空間である.

である. X は Hausdorff なので、 $x_1 \in U_1$ 、 $x_2 \in U_2$ 、 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  となる X の開集合  $U_1, U_2$  が存在する。A は Hausdorff 空間のコンパクト部分集合なので閉集合である。よっ TIL = A は関集会である

 $\bar{q}: (CS^{n-1}, S^{n-1}) \rightarrow (D^n, S^{n-1})$ 

 $\underline{d} : CS^{n-1} = S^{n-1} \times I / S^{n-1} \times 0 \cap \epsilon \times I \rightarrow D^n / \epsilon = D^n$ 

 $q: (S^{n-1} \times I, S^{n-1} \times 0 \cup e \times I) \rightarrow (D^n, e)$ 

a(x, 0) = e, a(e, t) = e

 $|s|(t-1) + |x|t \ge |s(t-1) + xt|$ 

 $GS_{u-1} = S_{u-1} \times I/S_{u-1} \times 0 \cap \epsilon \times I$ 

であった、写像  $q\colon S^{n-1} \times I \to D^n$  套  $q(x,t) = tx + (1-t)\varepsilon$  で混める.

 $S^{n-1}$  と  $D^n$  は  $e=(1,0,\dots,0)\in S^{n-1}\subset D^n$  を基点として, 基点付き空間と考える.

lenoisnamib-1 - n) 画琴元次 1 - n ,(>zib lenoisnamib-n) 盤円元次 n かずかけきか

 $1 \ge \frac{2}{i}x \sum_{i \to i} |^n \mathbb{R} \ni (_nx, \dots, _1x) = x$ 

 $T = (2 - T) + 2 \le$ 

象字の枚間空却 p, つのな x = (I,x)p コミち . さめ気き

ゆえ  $q(x,t) \in D^n$  だから q は well defined. 明らかに連続で,

Lemma 3.2.2. 1. (D<sup>n</sup>, S<sup>n-1</sup>) ≅ (CS<sup>n-1</sup>, S<sup>n-1</sup>) (空間対の同相).

 $\{I = ||x|| \mid uH \ni x\} = : _{t-u}S$ 

 $D_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ 

間空代電の % Manual Company of Ma

円盤と球面の定義を再掲する.

てーエキ ,面板 2.8

動型の核間空却 p, えめ

Sn ≥ ∑Sn-1 (基点付き同相).

Du/Su-1 ≈ Su (養質付美回相):

.I .loor4

3.1 部分空間を一点に縮めた空間

$$\pi^{-1}(O_i) = \pi^{-1}(\pi(U_i - A)) = U_i - A$$

である (なぜか?) から、 $O_i$  は X/A の開集合である。 $\pi$  は全射で、

$$\pi^{-1}(O_1\cap O_2)=\pi^{-1}(O_1)\cap\pi^{-1}(O_2)=(U_1-A)\cap(U_2-A)=\emptyset$$

 $\dot{\phi} \stackrel{*}{\sim} O_1 \cap O_2 = \emptyset$ .

 $x_1 \notin A, x_2 \in A$  のとき. このとき,  $[x_2] = [A] =: *. x := x_1$  とする. 各  $a \in A$  に対し,  $x \neq a$  なので、 $x \in U_a, a \in V_a, U_a \cap V_a = \emptyset$  となる開集合  $U_a, V_a$  が存在する. A はコン パクトだから、ある  $a_1, ..., a_n \in A$  が存在し、 $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$  となる.

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i}, \quad V := \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

とおくと、U,V は開集合で、 $x \in U$ 、 $A \subset V$ ,  $U \cap V = \emptyset$  となる。 $\pi(U),\pi(V) \subset X/A$  を考 えると

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U, \quad \pi^{-1}(\pi(V)) = V$$

だから開集合で、 $[x] \in \pi(U)$ 、 $* \in \pi(V)$ 、 $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$  であることが分かる. コンパクト Hausdorff 空間の閉部分集合はコンパクトであることから後半が分か

exercise 7.  $\pi: X \to X/A$  を自然な射影とする.  $B \subset X$  に対し、

$$\pi^{-1}(\pi(B)) = \begin{cases} B, & A \cap B = \emptyset \\ A \cup B, & A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

Remark . 一般に、X が Hausdorff 空間であっても、その商空間は Hausdorff とは限らな い Y がコンパクト Hanedorff 空間のときに 商空間が Hanedorff となるための必要十分 条件が A.9.6 にある.

**Definition 3.1.4.**  $(X, x_0)$ ,  $(Y, y_0)$  を基点付き空間とする.

 $X \tilde{\times} I := X \times I / \tau_0 \times I$ 

 $CX := X \times I/X \times 0 \cup x_0 \times I$ 

 $\Sigma X := X \times I/X \times 0 \cup x_0 \times I \cup X \times 1$ 

 $I \times uI \supset \iota_{+u}I \cap I_u \times 0 \subseteq 9I_{u+1} \subseteq \iota_u Y$ 

 $` \cap \mathbb{A} \supset \mathbb{I} \subseteq u$ 

. でいる程度の子と (adus lanoisional cube) とその地界という.

 $\{\{1,0\} \ni ix : i \in | ^nI \ni (i_nx,...,i_N)\} = : ^nI6$  $\{1 \ge ix \ge 0 : i\forall \mid {}^{n}\mathbb{H} \ni (_{n}x, \dots, _{t}x)\} = : {}^{n}I$ 

**開空状帯の "利 開空 1 ℃ 0 ℃ ー 上 元 次 π . č. Z. č notinná U** 

 $Z_u \equiv D_u/Z_{u-1} \equiv CZ_{u-1}/Z_{u-1} \equiv \Sigma Z_{u-1}$ .

3. 1,2 M G C  $X/X \cong \Sigma X$  G B G C L L D

は全事を表している。  $D^n/S^{n-1}$  は Hausdorff なのな  $T^{n-1}$  は Hausdorff なのな  $\bar{p}$  は  $\bar{p}$  、  $\bar{p}$  、

 $\underline{d}: D_u/S_{u-1} \rightarrow S_u/\varepsilon = S_u$ 

. 各位代位3 2 6 8 5 7 限

 $\overline{(\tau - 1)2} \overline{\bigvee} = (x, \tau) t$ 

.68

 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}}}$  の  $\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}}}$  の  $\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}}}$  の  $\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}_{\mathfrak{I}}}}$  の  $\mathfrak{I}_{\mathfrak{$  $|x|=1 \text{ if } \partial_t d_t \text{ } d(x)=e, \text{ } x\notin S^{n-1}, \text{ } \forall d_t d_t \text{ } |x| \geq |x| \text{ } |x|$ さななも、 $t^{-n}S$   $\ni x$  , ゴらち . るか分かることあっ  $^{n}S$   $\ni (x)p$  , 字跡転却 p ゴか

2.  $\Im \, \& \, q \colon \mathbb{D}^n \to S^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \, \& \, q(x) = (2|x|^2 - 1, \sqrt{1-|x|^2}x) \, \Im \, \& \, 0 \to 0$ は連続な全単射. CS<sup>n-1</sup> はコンパクト, D<sup>n</sup> は Hausdorff だから, q は同相.

 $\underline{d}: CS_{u-1} \rightarrow D_u$ 

丁でよ、る44代おこさあび操単全体

 $b: S^{n-1} \times I - S^{n-1} \times 0 \cup \epsilon \times I \rightarrow D^n - \epsilon$ 

 $b - uG \supset (I \times i \cap S^{n-1} \times I \cap S^{n-1} \times I) \subset D^n - \epsilon$ 

30倍級 でなそを

16000

海帯ひ及間空な的本基 章 8 葉

<sup>\*6</sup> 射影  $X \times I \rightarrow X \times f$  の合成だから

 $<sup>^{*7}\</sup>iota:I \rightarrow I$ ,  $\iota(t)=1-t$  は連続で,  $H^{-1}=H\circ(\mathrm{id}_X\times\iota)$ 

$$\begin{split} \Sigma^n X &= X \wedge S(n) \\ &\cong X \wedge S(n-1) \wedge S(1) \\ &\cong \Sigma^{n-1} X \wedge S(1) \\ &\cong \Sigma \Sigma^{n-1} X. \end{split}$$

以降.

$$S^n, D^n/S^{n-1}, \partial I^n, S(n), \Sigma S^{n-1}$$

の間の同相写像及び空間対の同相写像

 $(D^n, S^{n-1}) \cong (CS^{n-1}, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n) \cong (D(n), S(n-1)) \cong (I^n/J^{n-1}, \partial I^n/J^{n-1})$ 

は、特に断らなければこの節で定めた写像を考える。

# 3.3 射影空間

### 3.4 写像空間

**Definition 3.4.1.** X, Y を位相空間とする. X から Y への連続写像全体のなす集合を

コンパクト部分集合  $K \subset X$  と、開集合  $U \subset Y$  に対し、F(X,Y) の部分集合 W(K,U)

 $W(K,U):=\{f\in \mathcal{F}(X,Y)\mid f(K)\subset U\}$ 

により定める。

$$\big\{W(K,U) \; \big| \; K \subset X \colon \, \exists \, \nu \, {\it N} , \, U \subset Y \colon \mathbb{H}$$
集合 \begin{cases} \text{ \text{ \text{ \text{\$}}}} \text{ \text{\$}} \text{ \text{\$

の生成する F(X,Y) の位相 (これらが開集合となる最弱の位相, これらを準基とする位 相)をコンパクト開位相 (compact-open topology) という.

F(X,Y) にコンパクト開位相を与えたものを写像空間 (mapping space) という. 空間対の写像全体 F((X,A),(Y,B)), 空間の 3 対の写像全体  $F((X,A_1,A_2),(Y,B_1,B_2))$ には、F(X,Y) からの相対位相を入れる.

写像空間の基本的性質について証明なしでまとめておく.

Proposition 3.4.2. X, Y, Z を位相空間、 $f: X \rightarrow Y$  を連続写像とする. 連続写像の合 成は連続なので、f の誘導する写像は写像空間の間の写像を定める.

1. 写像  $f_\sharp\colon \mathrm{F}(Z,X) \to \mathrm{F}(Z,Y)$  を  $f_\sharp(g) = f\circ g$  で定めると,  $f_\sharp$  は連続である:

$$F(Z, X) \xrightarrow{f_{\sharp}} F(Z, Y)$$
 $U \longrightarrow Z \xrightarrow{q} X \xrightarrow{f} Y$ 

2. 写像  $f^{\sharp}$ :  $F(Y,Z) \rightarrow F(X,Z)$  を  $f^{\sharp}(h) = h \circ f$  で定めると,  $f^{\sharp}$  は連続である.

 ${\bf Proposition} \ \ {\bf 3.4.3.} \qquad 1. \ \ (g\circ f)_{\sharp} = g_{\sharp}\circ f_{\sharp}. \ \operatorname{id}_{\sharp} = \operatorname{id}.$ 2.  $(g \circ f)^{\sharp} = f^{\sharp} \circ g^{\sharp}$ .  $id^{\sharp} = id$ .

Corollary 3.4.4. f が同相写像ならば  $f_\sharp$ ,  $f^\sharp$  も同相写像.

これらは基点付きの場合も成り立つ.

### 34.1 随伴

(連続とは限らない) 写像全体  $\mathrm{Map}(X,Y)$  を考えると、次の全単射がある.

$$\operatorname{Map}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\frac{\Phi}{2}} \operatorname{Map}(X, \operatorname{Map}(Y, Z))$$
  
 $(\Phi(f)(x))(y) = f(x, y)$ 

F(X,Y) の場合どの様になるであろうか.

Proposition 3.4.5.  $f: X \times Y \rightarrow Z$  を連続写像とする. このとき, f の随伴写像 (adjoint map)

$$f^{\wedge} \colon X \to \mathrm{F}(Y,Z), \quad f^{\wedge}(x)(y) = f(x,y)$$

は連続である。

従って次の写像を定義することができる.

Definition 3.4.6. 写像

$$\varphi \colon F(X \times Y, Z) \to F(X, F(Y, Z))$$

を  $\varphi(f) = f^{\wedge}$  により定める.

σ は一般に連続とは限らないし、全単射とも限らない、連続であるとか、全単射であるた めには、写像空間のソース  $(F(X,Y) \cap X)$  に何らかの仮定が必要である。以下では、ソー スがコンパクト Hausdorff であるという仮定をおいている。この仮定が不要なものもある し、いずれもより弱い仮定でも成り立つが、炬燵になるので、ここでは少し強い仮定をおく

Remark . この様に何らかの仮定が必要であるというのは色々と不便である. うまいこ とやる枠組みがある(コンパクト生成物 Hausdorff 空間 (compactly generated weakly Hausdorff spaces) 等).

Proposition 3.4.7. X をコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき値写像 (evalua-

 $ev : F(X,Y) \times X \rightarrow Y, \quad ev(f,x) = f(x)$ 

Definition 3.4.8. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき、連続写像  $g: X \to F(Y, Z)$  に対し、写像

$$g^\vee := ev \circ (g \times \mathrm{id}) \colon X \times Y \xrightarrow{g \times \mathrm{id}} \mathrm{F}(Y,Z) \times Y \xrightarrow{ev} Z, \quad g^\vee(x,y) = (g(x))(y)$$

は連続である  $(g^{\vee} + g の随伴とよぶことがある)$ .

 $\psi \colon F(X, F(Y, Z)) \rightarrow F(X \times Y, Z)$ 

を  $\psi(g) = g^{\vee}$  により定める.

Proposition 3.4.9. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき  $\varphi$ ,  $\psi$  は全単射で互いに他の逆.

$$F(X \times Y, Z) \xrightarrow{\varphi} F(X, F(Y, Z))$$

Corollary 3.4.10. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

 f<sub>0</sub> ≃ f<sub>1</sub>: X × Y → Z ならば, f<sub>0</sub> ≃ f<sub>1</sub> : X → F(Y, Z). 2.  $g_0 \simeq g_1 \colon X \to F(Y, Z)$  ならば、 $g_0^{\vee} \simeq g_1^{\vee} \colon X \times Y \to Y$ .

$$[X\times Y,Z] \xrightarrow{\varphi} [X,\mathcal{F}(Y,Z)]$$

3.4 写像空間

Proof. 1.  $H: X \times Y \times I \rightarrow Z$  をホモトピーとする.  $H^{\wedge}: X \times I \rightarrow F(Y, Z)$  は連

 $H^{\wedge}(x, t)(y) = H(x, y, t) = f_t(x, y) = f_t^{\wedge}(x)(y)$ 

なので fc から fc へのホモトピーを与える. 2.  $G: X \times I \rightarrow F(Y, Z)$  をホモトピーとする.  $G^{\vee}: X \times Y \times I \rightarrow Z$  は連続で、

$$G^{\vee}(x, y, t) = G(x, t)(y) = g_t(x)(y) = g_t^{\vee}(x, y)$$

なので  $q_0^{\vee}$  から  $q_1^{\vee}$  へのホモトピーを与える. 3. 1 より  $\varphi$  は  $\varphi$ :  $[X \times Y, Z] \rightarrow [X, F(Y, Z)]$  を誘導し、2 より  $\psi$  は $\psi$ :  $[X, F(Y, Z)] \rightarrow$  $[X \times Y, Z]$  を誘導する. 明らかに互いに他の逆.

 $\varphi$ と $\psi$ の連続性にはもう少し条件が必要.

Theorem 3.4.11. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき  $\varphi$ ,  $\psi$  は同相写像で互いに他の逆.

$$F(X \times Y, Z) \xrightarrow{\varphi} F(X, F(Y, Z))$$

## 3.4.2 基点付きの場合

次に基点付きの場合を考える。

.更変コらさこ, (しょコ合語の数, たかし簽立と X ∧ "S おり養職 . ArannaA

Lemma 3.2.8 I. 
$$S(l) \wedge S(m) \cong S(l+m)$$
.  
 $2. S(l) \wedge ... \wedge S(l) \cong S(n+m)$ .

$$(n\mathbb{C}/\mathbb{C}^{1+n}16, n\mathbb{C}/\mathbb{C}/\mathbb{C}^{1+n}1) \cong ((n)\mathbb{C}, (\mathbb{C}+n)\mathbb{C})$$

$$^nI6/^nI = : (n)^nI^n$$
  
 $(n)^nI = : (1+n)^nI$ 

Action 3.2.6.

Corollary 3.2.5.  $I^n/\partial I^n \cong S^n$ .

. (照後ま 21.2.8 .ms.1 イーへの VI 学 両数割甲 6102 却職精)るサポれるころ永卓多  $\left( ^{n}\bar{\mathbf{I}} , ^{n}\bar{\mathbf{I}} \right) \cong \left( ^{1-n}\mathbf{R}, ^{n}\mathbf{G} \right)$  時間の核間空は

$$0 \stackrel{}{=} x \quad \stackrel{,x}{|i|} \frac{|x|}{|i|^{n}} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \\ 0 & \text{if } i = 0 \end{cases}$$

**劇型コペら即 . ひめ宝幺** 

$$\{i \ge ix \ge i - : \forall i \mid n \mathbb{R} \ni (nx, ..., ix)\} = :^n \tilde{I}$$
  
 $\{i \le ix \ge i - : \forall i \mid n \mathbb{R} \ni (nx, ..., ix)\} = :^n \tilde{I}\delta$ 

Lemma 3.2.4. 空間対として  $(I^n, \partial I^n) \cong (D^n, S^{n-1})$ . .¢0/30/2

 $I_0:=\{0\}\subset I$ 

'0/E(2)

てーエキ , 面料 2.8

海綿で及間空な的本基 章 8 葉

 $* = (*)f = (*, t)u \Rightarrow$  $\epsilon v(c, x) = \epsilon(x) = *$ 

, S ふえきを剥削の動車動 .かI.か.& noitisoqor¶

. δ δεΞε θ ± ⊃ \(πf) = (t) φ ૐ

$$\varphi\colon \operatorname{F}_*(X \wedge Y, Z) \to \operatorname{F}_*(X, \operatorname{F}_*(Y, Z))$$

 $\mathrm{F}_*(X \wedge Y, Z) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{F}(((X, *) \times (Y, *)), ((*, *) \times (X, *))) \subset \mathrm{F}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{F}(X, Y \times X) \times \mathrm{F}(X, X) = \mathrm{F}(X, X) \times \mathrm{F}(X, X) \times$ 

 $* = (*)f = (h, *)\pi f = (h)(*)\pi f$ 

 $(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}, \mathfrak{d$ 

 $A \Leftrightarrow (f_{\overline{\alpha}})^{\wedge} \in F_*(X, F_*(Y, Z)) \stackrel{?}{\sim} A \stackrel{?}{\sim} .$ 

 $* = (*)f = (*, x)\pi f = (*)(x)^{\wedge}(\pi f)$ 

よ点付き写像  $f: X \wedge Y \to Z$  に対し連続写像  $(f\pi )^{\wedge}: X \to F(Y,Z)$  を考えると、 - 8 本 3 須 持 3

. る大孝と間空 

 $[(00, Y), (K, X)] \cong *[Y, K/X]$ 

. 8 专專組多 排単全心気

 $\pi^{\sharp} \colon \mathcal{F}_{*}(X/\Lambda, Y) \to \mathcal{F}((X, \Lambda), (Y, y_{0}))$ 

検単全な誘惑却 K/X ← X :  $\pi$  復検 

. さる5字希望時间却 fr おらな合果関イ セパンピれん, コらち

 $F_*(X \land Y, Z) \xrightarrow{\underline{s}} F_*(X, F_*(Y, Z))$ 

このときゅ, かは同相写像で互いに他の逆。 Theorem 3.4.18. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

 $*[(X \land Y), X] \xrightarrow{\cong} [X, Y \land X]$ 

Corollary 3.4.17. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする. φ, ψ は全単射

$$\operatorname{F}_*(X \wedge Y, Z) \xrightarrow[\phi]{\varphi} \operatorname{F}_*(X, \operatorname{F}_*(Y, Z))$$

このときゅ, むは全単射で互いに他の遊. Proposition 3.4.16. Y きょンパクト Hausdorff 空間とする。

. So the section of the section  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{S}$   $\mathcal{S}$ 

 $\psi \colon F_*(X, F_*(Y, Z)) \rightarrow F_*(X \land Y, Z)$ 

谢五 (法基点付き (連載) 写像である。

 $g \overset{\text{e.s.}}{\rightarrow} X \wedge (X, X)_* \xrightarrow{\text{prid}} Y \wedge X : (\text{bi} \wedge y) \circ v \Rightarrow =: {}^{\vee} y$ 

動型, J技式(X,X)\*3 ← X: β 動型を付点基, きるのこ Definition 3.4.15. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

しるあり帰重却

 $ev: V \wedge (X, X) \wedge X \rightarrow Y$ 

X かコンパクト Hausdorff 空間ならば,  $ev: F(X,Y) \times X \to Y$  が速懸なので,

$$F_*(X,Y) \times X \xrightarrow{ev} Y$$

$$\downarrow x$$

. 支表で vo 号加り両されこ . るめ宝含物草で昇き点基のされ X ∧ (X,X), Y , されるあで

 $X^{1+\lambda}\Omega =$  $(X,(1+\lambda)S)^*A \cong$  $(X,(1)S^{\lambda}Z)_{*}Y\cong$  $\Omega\Omega^{\kappa}X \cong F_{*}(S(1), \Omega^{\kappa}X)$  $= F_*(X, \Omega^n Y).$  $\cong F_*(X, F_*(S(k), Y))$  $F_*(\Sigma^k X, Y) = F_*(X \wedge S(k), Y)$ 

71 . 5 d 5

 $X_{1+n}\Omega \equiv X_n\Omega\Omega$  $F_*(\Sigma^{\kappa}X, Y) \cong F_*(X, \Omega^{\kappa}Y)$ 

Proposition 3.4.20. X まるいと Hausdorff 空間とする.

 $\Im_{\mathbb{Y}}X \cong \mathcal{F}_*(S(k),X) \cong \mathcal{F}_*(S^k,X)$ 

を /k 重ループ空間 (Ath loop space) という.

 $\Omega^k X := F((I^k, \partial I^k), (X, *))$  $(X, X)_* \exists F_*(S(1), X) \cong F_*(S^1, X)$ 

· Ç ハコ (Joob sbace) こいっこう:

((\*,X),(16,I)) $A =: X\Omega$ 

し枝コ X 間空き付点基 .Q1.4.8 noitinad d

・そめまされこ紅鼻草科阿の間の間をのされこ、4.頃/4なら飛ぶ衿

 $S(k) = I_k/\partial I_k \equiv D_k/S_{k-1} \equiv S_k$  $(I^k, \partial I^k) \cong (D^k, S^{k-1})$ 

: 37.37 年を卧回(0.4 7行り, 7.5)

7-11 E.4.E

海帯ひ及間空な的本基 章 8 葉

第4章

# Fibration & Cofibration

- 4.1 Cofibration
- 4.2 Fibration
- 4.3 Lebesgue の補題
- 4.4 Hopf fibration
- 4.5 Puppe 列

第5章

# ホモトピー群

- 5.1 ホモトピー群
- 5.2 完全列
- 5.3 Blakers-Massey
- 5.4 Freudenthal
- 5.5 計算例

 $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B)$  $(V)*f \supset (V)*f$ 기사  $_{\circ}(_{\circ}V)f\supset g\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow B^c \supset f(A^c)$  $\Leftrightarrow f^{-1}(B^c) \supset A^c$  $f_{-1}(B_c) = f_{-1}(B)_c + \xi \psi_{\tau}$  ${}^{\circ} \mathbb{A} \subset {}^{\circ} (\mathbb{A})^{1} - \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{A} \supset (\mathbb{A})^{1} - \mathbb{A}$ ,効実 . C立ひあれ  $(h)_* = A \Leftrightarrow A \supset (B)^{1-1}$ 2893(2.  $^{\circ}(^{\circ}V)f = (V)^{*}f$ 多 (A)\*社 台巣代路の Y , 六ま . C立 ℓ 魚 th  $f(A) \cap B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$  $A \subset X$ ,  $B \subset Y \subset X \cup A$ Y → X を立備をする。 劇並と劇 I.A していないものは幾何学序論の私の結系をしましまにあると思う。 Cが表明証.〉はで必么まをとこな要金で事そろあて (いなんしかん) でん学コでまれこ 貓氓撒毛

A 鬆於

 $h \supset ((h)_* t)^{1-t}$  $B \subset f_*(f^{-1}(B))$ 

9.434

鑑成齡年 A 緑付

る专案する

 $_{*}[X,^{\prime}A] \cong _{*}[X,(\lambda)] \cong [(*,X),(^{\prime}Ab,^{\prime}AI)]$ 合果, 构以確水

間空動石 1.8

4.6 写像 2.4 6. による商集合への自然な対影、すなわち  $x \in X$  に、 x 含含む同種類  $C_x \in X/\sim$  を対応さ 

J: X → Y を写像とする、次は同値である。

 $f(x)f = f(x)f \Leftrightarrow f(x)$ 

それととなる機能な然目、動型関制いるも、動画な然目を

 $\sim \stackrel{\cap}{/X} \stackrel{\cap}{\longleftarrow} \stackrel{\cap}{X}$ 

 $S^{\circ} u \in X \otimes C^{\circ} \in X / \sim \mathbb{C}$  うま立像 (quotient set) 2 1/2.

合業商の X さよコ ~ 条関節同 , き書 S ~ \X き {X ∋ n | a□} 朴全の接種同 .1

Definition A.2.3. X 冬集舎, ~き.X 上の同権関係とする.

x∈Ca をひとつとることを, x を Ca の代表示 (representative) としてとるという.

※ a の同種類 (equivalence class) という。 a の同種類を [a], a 等と書くことも多い。

 $C_a = \{x \in X \mid x > a\}$ 

合単代階の X 专なの朴全素要な静同と n ,  $\cup$  核コ X  $\ni$  n 素変の X . ふすゞ希関語同の土 X 合乗き  $\sim$  条関 . S.S.A noitinfla  $\mathbf{D}$ 

・たいとさめず (equivalence relation) 不合果却 ~ 条票 かんしょ (equivalence relation)

 $z \sim x \Leftarrow z \sim y \subset d y \sim x$  (well evisitive it #特群) .8 2. (対称律, symmetric law )  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ ,

> (反射律, reflexive law) x ~ x, - 計楽ので & の水洗剤関の土 X 合巣 .I.2.A noitinad

> > A関動同 2.A

. C立で流れ

同様に、写像  $\nu$ :  $G \times X \rightarrow X$  が与えられ、次の条件をみたすとき、G は X に  $(\nu$  によ り) 左から作用するという.

1.  $\nu(h, \nu(q, x)) = \nu(hq, x)$ .

ν(e, x) = x, ただしe∈Gは単位元.

しばしば、 $\nu(q,x) \in X$  を  $q \cdot x$  あるいは qx と書く. この書き方をすると上の条件は

 $1 \quad h(ax) = (ha)x$ 

Lemma A.3.2. G が X に左から作用しているとする.  $g \in G$  に対し、写像  $\nu_g \colon X \to X$ を  $\nu_a(x) = \nu(g, x) = g \cdot x$  で定める. 次が成り立つ.

1.  $\nu_h \circ \nu_a = \nu_{ha}$ 2.  $\nu_e = 1_X$ .

特に $\nu_a$ は全単射で、 $\nu_{a^{-1}}$ がその逆写像を与える.

Proof.

 $\nu_h(\nu_g(x)) = h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x = \nu_{hg}(x)$  $\nu_e(x) = e \cdot x = x = 1_X(x)$  $\nu_g \circ \nu_{g^{-1}} = \nu_{gg^{-1}} = \nu_e = 1_X$  $\nu_{g^{-1}} \circ \nu_g = \nu_{g^{-1}g} = \nu_e = 1_X$ 

Lemma A.3.3. G が X に左から作用しているとする。 写像  $\mu$ : X × G  $\rightarrow$  X を  $\mu(x,g) = g^{-1} \cdot x$  と定めることにより G は X に右から作用する.

$$\begin{split} \mu(\mu(x,g),h) &= h^{-1} \cdot \mu(x,g) = h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x) \\ &= (h^{-1}g^{-1}) \cdot x = (gh)^{-1} \cdot x = \mu(x,gh) \\ \mu(x,e) &= e^{-1} \cdot x = e \cdot x = x \end{split}$$

Lemma A 3.4 Cが X にちから (たから) 作用しているとする X における関係 ~ を  $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G: x = y \cdot g \ (x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G: x = g \cdot y)$  により定めると  $\sim$  は同値関係

である。

A.4 部分空間

Proof 右作用の場合のみ示す

 $2.\ x\sim y$  రశ్వర,  $x=y\cdot g$  రభ్వ  $g\in G$  గోచ్చి.  $y=y\cdot e=y\cdot (gg^{-1})=$  $(y \cdot g) \cdot g^{-1} = x \cdot g^{-1} \not \triangleright \stackrel{\circ}{\nearrow} y \sim x.$ 

3.  $x\sim y$  かつ  $y\sim z$  とすると,  $x=y\cdot g,\,y=z\cdot h$  となる  $g,h\in G$  がある. このとき  $x = y \cdot q = (z \cdot h) \cdot q = z \cdot (hq) \Leftrightarrow x \sim z.$ 

Definition A.3.5. G が X に右から作用しているとき、上の同値関係による商集合を X/G と書き X を G で割った集合という

同様にG がX に左から作用しているとき、上の同値関係による商集合を $G \setminus X$  と書き、 X を G で割った集合という。また、 $G \setminus X$  を X/G と書くことも多い。

Remark . G が X に左から作用しているとき. Lem. A.3.3 により与えられる右作用を考 えると、これらの作用の定める同値関係は同じであることが  $g\cdot y=(g^{-1})^{-1}\cdot y=y\cdot g^{-1}$ 

Example A.3.6. H を G の部分群とする. 群の積  $G \times H \rightarrow G$  により H は G に右か ら作用する. この作用による同値関係  $\sim$  は  $g \sim k \Leftrightarrow k^{-1}g \in H$  により与えられる. 実際,  $g\sim k$  とすると g=kh となる  $h\in H$  がある. よって  $k^{-1}g=h\in H$ . 一方,  $k^{-1}g\in H$ とすると  $h=k^{-1}g$  とおけば  $h\in H$  で kh=g.

# A.4 部分空間

**Definition A.4.1.**  $(X, \mathcal{O})$  を位相空間,  $A \subset X$  を部分集合とする. A の部分集合族  $\mathcal{O}_A$ 

 $O_A = \{A \cap O \mid O \in O\}$ 

と定めると、 $\mathcal{O}_A$  は A の位相となる。 この位相を X による A の相対位相 (relative topology) という。

位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間と見たとき、部分空間 (subspace) と

部分空間への写像の連続性を調べる際, 次は有用である.

付録 A 予備知識

Proposition A.4.2. X,Y を位相空間,  $B\subset Y$  を部分空間,  $i\colon B\to Y$  を包含写像とす る. このとき.

写像  $f: X \to B$  が連続  $\Leftrightarrow$  合成  $i \circ f: X \to Y$  が連続

exercise 8. 証明せよ.

Proposition A.4.3. X を位相空間,  $X = F_1 \cup F_2$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  は閉集合とする. また, Y を 位相空間.  $f\colon X\to Y$  を写像とする. このとき,  $f|_{F_i}\colon F_i\to Y$  (i=1,2) が連続ならば fは連続である.

exercise 9. 証明計上

# A.5 直積空間

Definition A.5.1.  $\{(X_{\lambda}, \mathcal{O}_{\lambda})\}_{\lambda \in \Lambda}$  を位相空間の族とする. 直積集合  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}$  に、部

$$\bigcup \ \left\{ p_{\lambda}^{-1}(O) \ \middle| \ O \in \mathcal{O}_{\lambda} \right\}$$

が生成する位相 (この位相を直積位相 という) をいれた位相空間を、族  $\{(X_{\lambda}, \mathcal{O}_{\lambda})\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積空間または弱位相による直積空間という。 ただし  $p_{\lambda}$ :  $\prod X_{\lambda} \to X_{\lambda}$  は標準的射影. 直積集合には普通とくにことわらなければ直積位相をいれる.

直積位相でよく使う/大事なのは次の性質である.

Theorem A.5.2.  $\{X_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  を位相空間の族,  $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}$  を直積空間, A を位相空間

- 各 λ ∈ Λ に対し連続写像 f<sub>λ</sub>: A → X<sub>λ</sub> が与えられているとする. このとき連続写像  $f: A \rightarrow X$  で、全ての  $\lambda$  に対し  $m \circ f = f_1$  をみたすものがただ ひとつ存在する.
- 2.  $f: A \rightarrow X$  を写像とする. f が連続であるための必要十分条件は全ての  $\lambda$  に対し  $p_{\lambda}\circ f\colon A\to X_{\lambda}$  が連続とな

exercise 10. 1. 直積空間の位相は、全ての  $\lambda \in \Lambda$  に対し  $p_{\lambda}$  が連続となるような、最 弱の位相であることを示せ.

- p<sub>λ</sub> は開写像であることを示せ.
- pλ が閉写像とはならないような例を挙げよ.

A.6 商空間

4. Theorem A 5.2 を証明せよ

### A 6 商空間

ai以酬子 A 続付

Definition A.6.1.  $(X, \mathcal{O}_X)$  を位相空間, Y を集合,  $f: X \to Y$  を写像とする. Y の部 分集合族

$$\mathcal{O}_f = \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$$

は Y に位相を与える. この位相を f による等化位相といい、位相空間  $(Y, \mathcal{O}_f)$  を f によ る等化空間という

**Definition A.6.2.** 関係  $\sim$  を位相空間 X 上の同値関係とする. 商集合  $X/\sim$  に、自然な 射影  $\pi$ :  $X \to X/\sim$  による等化位相を与えたものを同値関係  $\sim$  による商空間という. 定義により、「 $O \subset X/\sim$  が開集合  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(O)$  が開集合」である.

**Definition A.6.3.** X を位相空間,  $A \subset X$  を空でない部分空間とする.  $A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係による商空間を部分空間 A を一点に縮めた空間といい、X/A と書く

Remark .  $A \times A \subset X \times X$  の生成する同値関係とは.  $A \times A$  を含む最小の同値関係 ( $A \times A$ を含む回値関係全ての共通部分)

具体的に書けば、 $A \times A \cup \Delta(X)$ . あるいは

 $x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ $\sharp$ $\hbar$ $t$ $t$ $x,y \in A$}$ 

等化位相、商空間でよく使う/大事なのは次の性質である。

Theorem A.6.4. X,Z を位相空間, Y を集合,  $f\colon X\to Y$  を写像とし, Y に f による等 化位相を入れる.  $q: Y \rightarrow Z$  を写像とする.

このとき q が連続であるための必要十分条件は  $q \circ f \colon X \to Z$  が連続であることである.



Theorem A.6.5. X, Y を位相空間、 $\sim$  を X 上の同値関係、 $X/\sim$  を商空間、 $\pi: X \rightarrow$  $X/\sim$  を自然な射影とする.

. ゆれ告ろ

П

П

 $x = \partial x \cdot z$ 

 $\cdot (y = y) = y = y = y$ 

2.  $\mu(x, e) = x$ . ただし $e \in G$  は単位元.

 $J \cdot (h(x, g), h) = (h(x, g, x), h)$ 

作をみたすとき, G は X に (μ により) 右から作用するという.

# 用乳の精 E.A

 $C \otimes f$  if  $f(C_x) = C_{f(x)}$  is  $f \otimes f \otimes f$  in  $f \otimes f \otimes f \otimes f$ .

$$\Rightarrow /X \Rightarrow f \in X$$

2.  $q \circ f = f \circ p$  となるような写像  $\bar{f}: X/\sim \to Y/\approx$  が存在する.  $(x)f \approx (x)f \Leftarrow x \sim x$ 

> J: X → Y を与得とする、次は同値である。 ウムス須添な器目はまなよる≈/A← A:b

Corollary A.2.5. X, Y を集合, ~, ≈をそれぞれ X, Y 上の同能関係, p: X → X/~,

具体的に書けば  $f(C_x) = f(x)$  である. .č √ ≤ (qsm beoubni)

数字る145事務(よコしを) 数字のこ こるもで四窓一封 | 数字なさえのこ ,コらち



2. ∫ = ∫ ∘ π となるような写像 ∫: X/~ → X が存在する.

田津の報 E.A

Proof. a, b  $\in X$ , a  $\neq b$  とする  $\int G$  は単射だから  $f(a) \neq f(b)$  である G X は Hausdorff

和本をすれば X も Hausdorff.

 $Y \leftarrow X:$  \ | 検単な誘惑 . ふさら間空間やFrobusH ま Y 、間空的かき X . 3.7.A noitisoqor  $\mathbf q$ 

この立ての表れないのは関一しまとす

Theorem A.Y.4. Hausdorff 空間の部分空間も A.Y.A mansdorff.

Theorem A.7.3. Hausdorff 空間において、1 点は関集合である.

 $\emptyset = (y)_{\exists} \cup (x)_{\exists} \cup$ 

 $X \ni \psi, x$  ,開空牆理多 X 渤実 .  $\delta$  & 引用空間空 Hausdorff 空間空 所  $X \in \mathbb{R}$  指 配  $X \in \mathbb{R}$  が  $X \in \mathbb{R}$ 

exercise 12. 位相空間 X が Hausdorff 空間である ⇔ 任意の相異なる 2点 x.y ∈ X に

\* C 6.77 存れのまるなる  $\emptyset=V\cap U$  ,  $\Im$  、V 粉近の  $\psi$  幺 U 粉近の x , J 校 J X  $\ni$   $\psi$  , x 点 2 るな異財 の意力 ⇔ るあす 間室(てポイスやハ)和robaseH st X 間空財业 .I.T.A noitinfled

間空てパネスセハ 7.A

4. Theorem A.6.5 冬証明せよ. 3. Theorem A.6.4 零融明せよ.

 2. Definition A.6.7 じ.7 にるるでが配列は、1 を連続でする地域の位的の A.6.7 じ.7 にるるでは加めている exercise 11. 1. Definition A.6.1 の O<sub>f</sub> は位相であることを示せ.

こるもつとこるもで誘動がもし対条件はすが連続であるもが膨動は € きちのこ



雞成聯子 A 綾付

.さあケイセバンにお合乗代幣間の間空イセバンに .8.8.A morosfT

Proposition A.8.2.  $A_1,A_2\subset X$   $h^{\sharp}\exists\vee\wedge\wedge\vee\wedge f$   $\sharp$   $\exists$   $A_1\cup A_2$   $\sharp$   $A_1\cup A_2$   $\sharp$   $A_2\cup A_3$ 

ふみさす立言でいる (quassi-compact) ということもある. 科条の 1.8.A 鋳造のこ , いいろイベハンに多ろこの間空 HobsusH イベハンに . strmmA

. るあゔイ セバンになん 開空代電 ⇔ るあゔイ セバンになん 合巣代語の X 開空時か . S Cさき要素化指規計が振速開 Definition A.S.T. 1. 使相空間 X かくロンパクト (compact) である  $\Leftrightarrow$  X の任意の Y

間型4 6 7/く E 8.A

・台集団の Y × X お

$$\{(x)f = \emptyset \mid X \times X \ni (\emptyset, x)\} =: f_{\mathbf{J}}$$

とそんぼらな縁 Corollary A.7.10. X 全位相空間, Y 委 Hausdorff 空間とする、写像 f: X → Y が運

· \$ \$ 2. 6 = f \$1 5 \$ \$ \$. 18-

2. | と g が部分集合 A 上一致すれば, A\* 上一致 4 2 2 2 . ゆめり 音楽閉却

 $\{(x)\theta = (x)f \mid X \ni x\} =: \mathcal{O}$ 台東状備の X J

.C立(別は次きるのこ、るでる割や誘動 Сого Пату А.7.8. X & Матае , Y & Hausdorff <br/> эт  $X \supset X \supset X$  ,  $\{g,g\}$  <br/>  $X \hookrightarrow X$  <br/>  $X \hookrightarrow X$  .

・合理関の  $X \times X$   $^{2}$  $\phi$   $\{X \ni x \mid (x,x)\} = \Delta$ 

合果線性核 ⇔ TrobeneH tà X , きょのこ . るする間空排型き X .7.7.A meroedT

. U同割割き即語、C立であれるこな熱同きてし校ご離直の勘頻無 . ArantaA

.Hausdorff.

 $0 = (0)^{-1}$ 

きさ Y,X ⇔ HrobsusH 7t Y × X きさのこ、& 支き間空閉型き Y,X . 3.7.A moroorT

開空 4 6 A V E 8.A

Corollary A.S.T. コンパクト距離空間空低空点のは別は収まする部分で 7.8.A violotoo

.音釆風計制 A, e44(2)

$$X \cap A = 1$$
  
 $\begin{pmatrix} x_0 O \bigcup_{i=1}^n \\ x_i O \cap A \bigcup_{i=1}^n \\ x_i O \cap A \bigcup_{i=1}^n \\ x_i O \cap A \bigcup_{i=1}^n \\ x_i O \bigcup_{i=1}^n \\ x$ 

. るをお存れなるるなる

$$_{,x}O\bigcup_{i=i}^{n}=X$$

'2 X ∋ "x'....'1x '2.0\$4 6 51 €

にお X . るるで郷期間の X お  $_{X \ni x}\{_{x}O\}$  . るとる。G な物のこ , しがコ  $X \ni x$  各、るるで

$$\mathcal{E}_{A} \mathcal{E}_{A} = \mathcal{E}_{A} \mathcal{E}_{A}$$

 ${}^{\circ}\{x\} \cap {}^{x}O \cap A = {}^{x}O \cap {}^{\circ}\{x\} \cap A = {}^{x}O \cap (\{x\} - A) = \emptyset$  $O_x = \emptyset$ となるものが存在する.

 $\cap$ ({x} - k),  $\neg$  xO 合果間ひ含ま x,  $\neg$  の  $\neg$  なおか点 語来  $\circ$  k お x, J 校  $\supset$  X  $\ni$  x  $\circ$  窓  $\rightarrow$ . いよおず木からこさるが台来場けれた ね Proof X でコンパクト空間とする。 $X \neq \emptyset$  としてよい、 $A \subset X$  が集構点をもたないなら

. C き多点酵果却合果价需與無の開空イベバンに . 3.8.A morosiT

・関面しむさき制即語であず (静同と理公理数) 要後が歴公児数却ささご, れ (野宝の (vonothiT) てくにそ) で立て流れるこな熱同き合物の酵酒の園場無 . Anoma R

. 北- 本フ- 大き 全 速関 壊宝 の

土 知知支機 バなる規制メイクバくに制御班るよる御草器町の合果イクバンに、ArtorneA

Theorem A.S.4. コンパクト空間の速聴与標による様にコンパクトである。

すなわち、 $\bar{f}$  はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射である。よって同

Proposition A.9.6. X をコンパクト Hausdorff 空間,  $R \subset X \times X$  を同値関係とし,  $(x,y) \in R$  のとき  $x \sim y$  と書く、このとき次は同値、

- 1. X/∼ は Hausdorff 空間.
- R は X × X の閉集合.
- 射影 π: X → X/~ は閉写像.

Proof.  $1 \Rightarrow 2$ .

$$R = (\pi \times \pi)^{-1} (\Delta_{X/\sim})$$

より分かる.

 $2 \Rightarrow 3$ .  $F \subset X$  を閉集合とする.  $\pi^{-1}\left(\pi(F)\right) \subset X$  が閉集合であることを示せばよい.

$$\pi^{-1}(\pi(F)) = \{y \in X \mid \exists x \in F : x \sim y\}$$
  
=  $\{y \in X \mid \exists x \in F : (x, y) \in R\}$   
=  $p_2((F \times X) \cap R)$ 

ただし  $p_2$ :  $X \times X \to X$  は射影. 仮定より, F, R は閉集合なので  $(F \times X) \cap R$  は閉集 合.  $X \times X$  はコンパクト, X は Hausdorff なので,  $p_2$  は閉写像 (Corollary A.9.3). よっ て  $\pi^{-1}(\pi(F)) = p_2((F \times X) \cap R) \subset X$  は閉集合.

 $3 \Rightarrow 1$ .  $[x_1], [x_2] \in X/\sim$ ,  $[x_1] \neq [x_2]$  とする. X は Hausdorff ゆえ一点は閉集合. 仮定 より射影  $\pi$  は閉写像なので  $X/\sim$  でも一点は閉集合.  $\pi$  は連続だから  $\pi^{-1}([x_1]),\pi^{-1}([x_2])$ は X の関集合.  $[x_1] \neq [x_2]$  なので  $\pi^{-1}([x_1]) \cap \pi^{-1}([x_2]) = \emptyset$ . X はコンパクト Hausdorff なので正規、よって

$$\pi^{-1}([x_i]) \subset U_i$$
,  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ 

となる X の開集合  $U_1, U_2$  が存在する.

$$V_i := \pi_{\star}(U_i) = \pi(U_i^c)^c \subset X/\sim$$

とおく、 $U_i$  は開集合だから  $U_i^c$  は関集合、仮定より  $\pi$  は閉写像なので  $\pi(U_i^c)$  は関集合、 よって  $V_i = \pi(U_i^c)^c$  は開集合.

$$\pi^{-1}([x_i]) \subset U_i$$

ゆえ

 $\{[x_i]\} \subset \pi_\star(U_i) = V_i$ 

すなわち

 $[x_i] \in V_i$ .

また  $\pi^{-1}(V_i) = \pi^{-1}(\pi_{\star}(U_i)) \subset U_i$ 

ゆえ

A.10 コンパクト距離空間

$$\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2) \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

だから  $\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset$ .  $\pi$  は全射だから  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . よって  $X/\sim$  は Hausdorff.

# A.10 コンパクト距離空間

**Definition A.10.1.**  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  を距離空間とする.

写像  $f\colon X\to Y$  が一様連続 (uniformly continuous) である  $\Leftrightarrow$  任意の  $\varepsilon >0$  に対 し、ある  $\delta > 0$  が存在して、 $d_X(x,x') < \delta$  ならば  $d_Y(f(x),f(x')) < \varepsilon$  となる.

明かに一様連続ならば連続である.

exercise 13. 一様連続ならば連続であることを示せ.

X がコンパクトのときは逆も言える.

Theorem A.10.2.  $(X, d_X)$  をコンパクト距離空間.  $(Y, d_Y)$  を距離空間とする. このと き、写像  $f: X \to Y$  が連続ならば、f は一様連続である.

点  $a \in X$  に対し、 $f: X \rightarrow Y$  は点 a で連続なので、ある  $\delta_a > 0$  が存在し、 $d_X(a,x) <$  $2\delta_a$  \$\sigma \cdot df \(d\_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2 \ge \varphi \varphi \varphi.

各  $a \in X$  に対し、この様な  $\delta_a$  を一つとる \*8.  $\{U_{\delta_a}(a)\}_{a \in X}$  は X の開被覆で、X はコ ンパクトなので、ある  $a_1, \ldots, a_n \in X$  が存在し、

$$X = \bigcup^n \mathrm{U}_{\delta_i}(a_i)$$

となる. ただし見やすさのため  $\delta_i = \delta_a$  とおいた.

 $x,x'\in X,\, d_X(x,x')<\delta$  とする.  $x\in X=\bigcup_{i=1}^n\mathrm{U}_{\delta_i}(a_i)$  ゆえ、ある  $1\leq i\leq n$  が存在 し、 $x \in U_{\delta_i}(a_i)$ 、すなわち  $d_X(a_i,x) < \delta_i$  である. よって  $d_Y(f(a_i),f(x)) < \varepsilon/2$ . また

$$d_X(a_i, x') \le d_X(a_i, x) + d_X(x, x')$$
  
 $< \delta_i + \delta$ 

 $\leq \delta_i + \delta_i = 2\delta_i$ 

ゆえ  $d_Y(f(a_i), x') < \varepsilon/2$ . したがって

 $d_Y(f(x), f(x')) \le d_Y(f(x), f(a_i)) + d_Y(f(a_i), f(x'))$  $< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ .

П

\*8 例えば

 $\min \{1, \sup \{\delta \mid d_Y(a, x) < 2\delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2\}\}$ 

つづく...

参考文献

- [1] R. Bott and J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. Bull. Amer. Math. Soc., 64:87-89, 1958.
- [2] Brayton Gray. Homotopy Theory. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.
- [3] Michel A. Kervaire. Non-parallelizability of the n-sphere for n > 7. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 44(3):280-283, 1958.
- [4] J. P. May. A Concise Course in Algebraic Topology. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [5] Tammo tom Dieck. Algebraic topology. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.
- [6] Shuichi Tsukuda. 幾何学序論講義ノート. http://math.u-ryukyu.ac.jp/ -tsukuda/lecturenotes/
- [7] 西田 吾郎. ホモトピー論. 共立出版, 1985.

、採申む ∤ コからきあ, 0 よため気の発展

顧同 .操全ま ₹ , かのな縁全がホッ ξ = ₹ . るあり踏逝却 ₹ はよる.0.A , かのな縁逝れれ ₹ .10/CE3~/Y'02

1.8.A moroofT , すのな様全な懇歌却 ~ /X ← X :π 鄭翠商 , すイクバくこむ X . loor9



·今望ふ樹女財回却 A ←~/X:∫ 勘女 葬器 , き 3 の こ . る め 宝 ( よ コ ( 'x ) l = (x ) l ⇔ 'x ~ x , 多 ~ 船関 過回 の ± X . る す と 縁 Corollary A.9.5. X ましいとします Y き Hausdorff 空間, f: X → Y を連続な全

Corollary A.9.4. コンパクト空間から Hausdorff 空間への運輸な全単射は同相写像で

.46 \$ \$ 4 1.9.A, 4.8.A, £.8.A .mdT .loor¶ 

Corollary A.9.3. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は関写像である.

.46 \$ \$ 0 \$ 1.9.A , E.8.A .mdT .loorq

公ののおるありすべへくこれ音楽状帯の開望 Hiobsuch すべへくこ .S.e.A Viellory.

.さるす合果周却合果イベバベビの間空 TrobsusH .1.6.A moroofT

# 間空 ThobsusH イクパベロ 6.A

・ひ合き所公常る 下東別は10点の意力

Acmanh: 選も高りですなから、すなかち、距離整開 X においては、X はこいくこう (あき選 . Arananh) . る专東班コエ 却 4{ \*\*\*\* } 爬 供幣 . る 作 幺

 $^{1}$ 化  $_{4}\{_{4}n\}$  所獲るなさ  $_{1+4}n>_{4}n$   $_{4}(x)$   $_{\frac{1}{2}}$ U  $_{2}$   $_{4}nx$  , 5 でるあす合単規無料  $A\cap(x)$   $_{\frac{1}{2}}$ U , J  $^{1}$ 校 コ M ラ 4 の窓丑 , 3 る で 3 点酵果ま X ラ π . で よ 3 点酵果却 A , 知 れ あ 字 合果 姻無 ね A

- 〉 はる  $\{N \ni n \mid nx\} = A$  . る 支 幺 例点の  $X \not S \{nx\}$  , 間空輸出  $4 \land N \lor C \not S X$  . foor A

開空 HrobsusH イクパくロ 6.A