

目次

第 1 章	Introduction	1
1.1	ホモトピー	1
1.2	基本的な空間	3
1.2.1	\mathbb{R}^n	3
1.2.2	D^n, S^{n-1}	4
1.2.3	\mathbb{C}, \mathbb{C}^n	5
1.2.4	\mathbb{H}, \mathbb{H}^n	7
1.3	可除代数	9
1.4	圏	11
1.4.1	圏	12
1.4.2	関手	13
第 2 章	ホモトピー	15
2.1	ホモトピー	15
第 3 章	基本的な空間及び構成	19
3.1	部分空間を一点に縮めた空間	19
3.2	球面, キューブ	23
3.3	射影空間	26
3.4	写像空間	26
3.4.1	随伴	27
3.4.2	基点付きの場合	29
3.4.3	ループ	32
第 4 章	Fibration と Cofibration	35
4.1	Cofibration	35
4.2	Fibration	35

List of exercises

exercice1	5
exercice2	8
exercice3	12
exercice4	15
exercice5	16
exercice6	17
exercice7	21
exercice8	44
exercice9	44
exercice10	45
exercice11	46
exercice12	46
exercice13	51

目次

4.3	Lebesgue の補題	35
4.4	Hopf fibration	35
4.5	Puppe 列	35
第 5 章	ホモトピー群	37
5.1	ホモトピー群	37
5.2	完全列	37
5.3	Blakers-Nissey	37
5.4	Freudenthal	37
5.5	計算例	37
付録 A	予備知識	39
A.1	章と章	39
A.2	同値関係	40
A.3	群の作用	41
A.4	部分空間	43
A.5	直積空間	44
A.6	商空間	45
A.7	ハウスドルフ空間	46
A.8	コンパクト空間	47
A.9	コンパクト Hausdorff 空間	49
A.10	コンパクト距離空間	51
参考文献		53

2020 年度前期「幾何学特論 I」の講義メモ.
tom Dieck [5], Gray [2], 西田 [7], May [4] を参考にホモトピー論入門をやってみる.

2020 年度 幾何学特論 I
ホモトピー論入門
細 修一
2020 年 6 月 19 日

また、このとき g を f のホモトピー逆写像 (homotopy inverse) とよぶ。
3. X から Y へのホモトピー同値写像が存在するとき、 X と Y はホモトピー同値 (homotopy equivalent) であるという。

Proposition 1.1.3. X から Y への連続写像全体のなす集合を $F(X, Y)$ と書く。
ホモトピックであるという関係「 \simeq 」は $F(X, Y)$ 上の同値関係である。

証明は後で。

Definition 1.1.4. $F(X, Y)$ の、ホモトピックという同値関係による商集合

$$[X, Y] = F(X, Y) / \simeq$$

を X から Y へのホモトピー集合 (homotopy set) という。
 $f: X \rightarrow Y$ のホモトピー類を $[f]$ と書くが、しばしば $\|f\|$ を略して f と書く。

Problem 1.1.5. 二つの位相空間 X, Y が与えられたとき

1. X と Y はホモトピー同値か?
2. $[X, Y]$ はどんな集合か?

が知りたい!

Example 1.1.6. \mathbb{R}^n は一点とホモトピー同値である。
見やすさのため、一点 \ast からなる集合 (空間) $\{\ast\}$ を \ast と書く。 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \ast$ を $f(x) = \ast$,
 $g: \ast \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $g(\ast) = 0 := (0, \dots, 0)$ で定める。明らかに $f \circ g = \text{id}$ 。よって $f \circ g \simeq \text{id}$ 。
一方、 $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$H(x, t) = tx$$

で定めると、 H は連続で、

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= 0x = 0 = g \circ f(x) \\ H(x, 1) &= 1x = x = \text{id}_{\mathbb{R}^n}(x) \end{aligned}$$

だから、 $g \circ f \simeq \text{id}$ 。
一般に、一点とホモトピー同値である空間を可縮 (contractible) であるという。

ホモトピー同値か? という観点からすると \mathbb{R}^n と一点は同じものだとみなす。これくらい大雑把に見ると有有限位相空間の分類を組合せ論的に記述できる。
さらに、これよりも少しゆるい「前ホモトピー同値」という概念があり、コンパクトで “よい” 位相空間は有有限位相空間と前ホモトピー同値であるということが知られている。

よってコンパクトで “よい” 位相空間を前ホモトピー同値で分類するには有有限位相空間を前ホモトピー同値で分類すればよい。これなら、かなり現実的な問題と言えるだろう。
こんなに大雑把な分類をして何かの役に立つのかと思うかもしれないが、とても有用である。

入門的内容の場合、Brouwer の不動点定理がよく例として挙げられるが、「幾何学 I」あるいは「幾何学 II」で扱われるであろうから、別の例を挙げよう。

1.2 基本的な空間

1.2.1 \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対し、その大きさ (ユークリッドノルム) を

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

で定める。どこかで学んだことがあると思うが、次が成立立つ。

1. (a) $\|x\| \geq 0$.
(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. 任意の $a \in \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対し、 $\|ax\| = |a| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

この講義では $\|x\|$ を $|x|$ と書くことがあるかもしれない。
 \mathbb{R}^n の 2 点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し x と y のユークリッド距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で定めるとこれは \mathbb{R}^n 上の距離関数である。
このノートでは、特に断らなければ \mathbb{R}^n にはこの距離をいれ、常にこの距離の定める位相を入れる。

Proposition 1.2.1. $d_\infty(x, y)$, $d_1(x, y)$ を

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

第 1 章

Introduction

1.1 ホモトピー

位相空間を同時に分解するのとは異なる。
Example 1.1.1 (有有限位相空間)。

。

もう少しゆるい関係で分解しよう。

Definition 1.1.2. 開区間 $[0, 1]$ を I で表す。

X, Y を位相空間とする。

1. $f, g: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。連続写像

で、任意の $x \in X$ に対し

$$H(x, 0) = f(x)$$

$$H(x, 1) = g(x)$$

をみたすものが存在するとき、 f と g はホモトピー同値 (homotopic) であるといふ。
 $f \simeq g$ と書く。また、 H を f から g へのホモトピー (homotopy) といい。

2. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ を X で、

$$f \circ \text{id}_X = f$$

$$g \circ \text{id}_Y = g$$

をみたすものが存在するとき、ホモトピー同値写像 (homotopy equivalence) といい。

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

で定めるとこれらは \mathbb{R}^n 上の距離関数であり、これらの定める位相はユークリッド距離の定める位相と等しい。

Proposition 1.2.2. \mathbb{R}^n の位相は、 \mathbb{R} の n 個の直積空間としての位相と等しい。

Corollary 1.2.3. X を位相空間、 $B \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間、 $f: X \rightarrow B$ を写像とする。このとき、 f が連続であることと、任意の $1 \leq i \leq n$ に対し、 $p_i \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であることは同値。ただし、 $p_i: B \rightarrow \mathbb{R}$ は、包含と第 i 成分への射影 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の合成。

Proposition 1.2.4. 足し算、掛け算、逆数

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$$

は連続。

Corollary 1.2.5. 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は連続。

Proof. 行列を使って書けば、各成分は足し算と掛け算で書ける。□

Theorem 1.2.6 (Heine-Borel)。 \mathbb{R}^n の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合であること。

1.2.2 D^n, S^{n-1}

Definition 1.2.7. n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分空間

$$\begin{aligned} D^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \\ &= \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\right\} \\ S^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \\ &= \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\right\} \end{aligned}$$

をそれぞれ n 次元円盤 (n-dimensional disc)、 $n - 1$ 次元球面 ($n - 1$ -dimensional sphere) という。

Example 1.1.6 と全く同様にして D^n は可縮であることが分かる。

で定める。位相の相違は、 \mathbb{R}^2 に対し

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

$$f = (f_1, f_2) = (0, 0), g = (0, 1)$$

1.2.3 \mathbb{C}, \mathbb{C}^n

複素数体の定義の仕方は色々あるが、このノートでは以下の定義を採用する。

Definition 1.2.8. \mathbb{R}^2 における積、積を次のように定めると体となる。

$$(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 \text{ に対し}$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, da + bc).$$

この体を複素数体といって \mathbb{C} で表す¹⁾。 \mathbb{C} の元を複素数という。

すぐわかるように和に関する単位元は $(0, 0)$ 、積に関する単位元は $(1, 0)$ である。

exercise 1. 1. $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$.
2. $(a, 0)(b, c) = (ab, ac)$.

さて

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$$

$$(a, 0)(c, 0) = (ac, 0)$$

であるから $a \in \mathbb{R}$ と $(a, 0) \in \mathbb{C}$ を同一視して $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ とみなす。もう少し形式的にいうと

Proposition 1.2.9. $f(a) = (a, 0)$ で定まる写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は体の (単射) 準同型であり、 \mathbb{C} は \mathbb{R} の 2 次元拡大体である。

$(0, 1) \in \mathbb{C}$ を記号 i で表す。

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

である。

任意の $(a, b) \in \mathbb{C}$ は

$$\begin{aligned} (a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= a + bi \end{aligned}$$

と表すことが出来る。 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ であるとき、あきらかに

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$$

exercise 2. $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) と表したとき $q = a - bi - cj - dk$

である。

いって q で表す。 $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) と表したとき $q = a - bi - cj - dk$

Definition 1.2.13. $q = (a, b) \in \mathbb{H}$ と $q^* = (a, -b) \in \mathbb{H}$ の共役 (conjugate) と

で定めた積 “ \cdot ” を一致する。

$$ki = j = k = -j = -ki$$

$$ki = j = k = -j = -ki$$

$$ki = j = k = -j = -ki$$

$$ki = j = k = -j = -ki$$

$$ki = j = k = -j = -ki$$

$$ki = j = k = -j = -ki$$

$$ki = j = k = -j = -ki$$

$$ki = j = k = -j = -ki$$

$$ki = j = k = -j = -ki$$

Lemma 3.2.10. 1. $\Sigma X \cong \Sigma^1 X$.
2. $\Sigma^n X \cong \Sigma \Sigma^{n-1} X$.

Proof. 1.

$$\begin{aligned}\Sigma^1 X &= X \wedge S(1) \\ &\cong (X/\ast) \wedge (I/\partial I) \\ &\cong X \times I / X \times \partial I \cup \ast \times I \\ &= \Sigma X\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\Sigma^n X &= X \wedge S(n) \\ &\cong X \wedge S(n-1) \wedge S(1) \\ &\cong \Sigma^{n-1} X \wedge S(1) \\ &\cong \Sigma \Sigma^{n-1} X.\end{aligned}$$

□

以降,

$$S^n, D^n / S^{n-1}, \partial I^n, S(n), \Sigma S^{n-1}$$

の間の同相写像及び空間対の同相写像

$$(D^n, S^{n-1}) \cong (CS^{n-1}, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n) \cong (D(n), S(n-1)) \cong (I^n / J^{n-1}, \partial I^n / J^{n-1})$$

は、特に断らなければこの節で定めた写像を考える。

3.3 射影空間

3.4 写像空間

Definition 3.4.1. X, Y を位相空間とする。 X から Y への連続写像全体のなす集合を $F(X, Y)$ と書くのであった。

コンパクト部分集合 $K \subset X$ と、開集合 $U \subset Y$ に対し、 $F(X, Y)$ の部分集合 $W(K, U)$ を

$$W(K, U) := \{ f \in F(X, Y) \mid f(K) \subset U \}$$

により定める。

$$\{ W(K, U) \mid K \subset X: \text{コンパクト}, U \subset Y: \text{開集合} \}$$

の生成する $F(X, Y)$ の位相 (これらが開集合となる最弱の位相, これらを準基とする位相) をコンパクト開位相 (compact-open topology) という。

$F(X, Y)$ にコンパクト開位相を与えたものを写像空間 (mapping space) という。

空間対の写像全体 $F((X, A), (Y, B))$, 空間の3対の写像全体 $F((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ には, $F(X, Y)$ からの相対位相を入れる。

写像空間の基本的性質について証明なしでまとめておく。

Proposition 3.4.2. X, Y, Z を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。連続写像の合成は連続なので、 f の誘導する写像は写像空間の間の写像を定める。

1. 写像 $f_2: F(Z, X) \rightarrow F(Z, Y)$ を $f_2(g) = f \circ g$ で定めると、 f_2 は連続である:

$$\begin{array}{ccc} F(Z, X) & \xrightarrow{f_2} & F(Z, Y) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ Z \xrightarrow{g} X & \xrightarrow{\quad} & Z \xrightarrow{g} Y \end{array}$$

2. 写像 $f^2: F(Y, Z) \rightarrow F(X, Z)$ を $f^2(h) = h \circ f$ で定めると、 f^2 は連続である。

$$\begin{array}{ccc} F(Y, Z) & \xrightarrow{f^2} & F(X, Z) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ Y \xrightarrow{h} Z & \xrightarrow{\quad} & X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z. \end{array}$$

Proposition 3.4.3. 1. $(g \circ f)_2 = g_2 \circ f_2$. $\text{id}_2^2 = \text{id}$.
2. $(g \circ f)^2 = f^2 \circ g^2$. $\text{id}_2^2 = \text{id}$.

Corollary 3.4.4. f が同相写像ならば f_2, f^2 も同相写像。

これらは基点付きの場合も成り立つ。

3.4.1 随伴

(連続とは限らない) 写像全体 $\text{Map}(X, Y)$ を考えると、次の全単射がある。

$$\begin{aligned}\text{Map}(X \times Y, Z) &\xrightarrow[\cong]{\ast} \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z)) \\ (\Phi(f)(x))(y) &= f(x, y) \\ \Psi(g)(x, y) &= g(x)(y)\end{aligned}$$

$F(X, Y)$ の場合と同様になるであろうか。

Proposition 3.4.5. $f: X \times Y \rightarrow Z$ を連続写像とする。このとき、 f の随伴写像 (adjoint map)

$$f^\wedge: X \rightarrow F(Y, Z), \quad f^\wedge(x)(y) = f(x, y)$$

は連続である。

従って次の写像を定義することができる。

Definition 3.4.6. 写像

$$\varphi: F(X \times Y, Z) \rightarrow F(X, F(Y, Z))$$

を $\varphi(f) = f^\wedge$ により定める。

φ は一般に連続とはならないし、全単射とも限らない。連続であるとか、全単射であるためには、写像空間のソース $(F(X, Y))$ の X に何らかの仮定が必要である。以下では、ソースがコンパクト Hausdorff であるという仮定をおいている。この仮定が不要なものもあるし、いずれもより弱い仮定でも成り立つが、煩雑になるので、ここでは少し強い仮定をおくことにした。

Remark. この様に何らかの仮定が必要であるというのは色々と不便である。うまいことやる枠組みがある (コンパクト生成弱 Hausdorff 空間 (compactly generated weakly Hausdorff spaces) 等) 。

Proposition 3.4.7. X をコンパクト Hausdorff 空間とする。このとき値写像 (evaluation map)

$$ev: F(X, Y) \times X \rightarrow Y, \quad ev(f, x) = f(x)$$

は連続である。

Definition 3.4.8. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。

このとき、連続写像 $g: X \rightarrow F(Y, Z)$ に対し、写像

$$g^\vee := ev \circ (g \times \text{id}): X \times Y \xrightarrow{g \times \text{id}} F(Y, Z) \times Y \xrightarrow{ev} Z, \quad g^\vee(x, y) = (g(x))(y)$$

は連続である (g^\vee も g の随伴とよぶことがある) 。

写像

$$\psi: F(X, F(Y, Z)) \rightarrow F(X \times Y, Z)$$

を $\psi(g) = g^\vee$ により定める。

Proposition 3.4.9. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。

このとき φ, ψ は全単射で互いに他の逆。

$$F(X \times Y, Z) \xrightarrow[\psi]{\varphi} F(X, F(Y, Z))$$

Corollary 3.4.10. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。

- $f_0 \simeq f_1: X \times Y \rightarrow Z$ ならば、 $f_0^\wedge \simeq f_1^\wedge: X \rightarrow F(Y, Z)$.
- $g_0 \simeq g_1: X \rightarrow F(Y, Z)$ ならば、 $g_0^\vee \simeq g_1^\vee: X \times Y \rightarrow Y$.
- φ, ψ は全単射

$$[X \times Y, Z] \xrightarrow[\psi]{\varphi} [X, F(Y, Z)]$$

を誘導する。

Proof. 1. $H: X \times Y \times I \rightarrow Z$ をホモトピーとする。 $H^\wedge: X \times I \rightarrow F(Y, Z)$ は連続で、

$$H^\wedge(x, t)(y) = H(x, y, t) = f_t(x, y) = f_t^\wedge(x)(y)$$

なので f_0^\wedge から f_1^\wedge へのホモトピーを与える。

2. $G: X \times I \rightarrow F(Y, Z)$ をホモトピーとする。 $G^\vee: X \times Y \times I \rightarrow Z$ は連続で、

$$G^\vee(x, y, t) = G(x, t)(y) = g_t(x)(y) = g_t^\vee(x, y)$$

なので g_0^\vee から g_1^\vee へのホモトピーを与える。

3. 1 より ψ は $\varphi: [X \times Y, Z] \rightarrow [X, F(Y, Z)]$ を誘導し、2 より ψ は $\psi: [X, F(Y, Z)] \rightarrow [X \times Y, Z]$ を誘導する。明らかに互いに他の逆。

□

φ と ψ の連続性にはもう少し条件が必要。

Theorem 3.4.11. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。

このとき φ, ψ は同相写像で互いに他の逆。

$$F(X \times Y, Z) \xrightarrow[\psi]{\varphi} F(X, F(Y, Z))$$

3.4.2 基点付きの場合

次に基点付きの場合を考える。

Proposition 3.4.12. (X, A) を空間対, (Y, B_0) を基点付き空間とする。

射影 $\pi: X \rightarrow X/A$ は連続な全単射

$$\pi^\sharp: F_*(X/A, Y) \rightarrow F_*(X, A), (Y; B_0))$$

及び全単射

$$[X/A, Y], \cong [X, A], (Y; B_0)]$$

さらに、 A がコンパクトノット開集合ならば π^\sharp は同相写像である。

基点付き空間 X, Y に対し、 $F_*(X, F_*(Y, Z))$ は、定値写像 $(c(x) = *)$ を基点として基点付き

空間と考える。

このとき、基点付き写像 $g: X \rightarrow F_*(Y, Z)$ に対し、写像

$$g^\vee := ev \circ (g \vee \text{id}): X \times Y \xrightarrow{g \vee \text{id}} F_*(Y, Z) \times Y \xrightarrow{ev} Z$$

は基点付き (連続) 写像である。

写像

$$\varphi: F_*(X, F_*(Y, Z)) \rightarrow F_*(X \times Y, Z)$$

を $\varphi(g) = g^\vee$ により定める。

Proposition 3.4.16. X をコンパクト Hausdorff 空間とする。

このとき φ, ψ は全単射で互いに他の逆。

$$F_*(X \times Y, Z) \xrightarrow[\psi]{\varphi} F_*(X, F_*(Y, Z))$$

Corollary 3.4.17. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。 φ, ψ は全単射

$$[X \times Y, Z] \xrightarrow[\psi]{\varphi} [X, F_*(Y, Z)],$$

を誘導する。

Theorem 3.4.18. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。

このとき φ, ψ は同相写像で互いに他の逆。

$$[F_*(X \times Y, Z)] \xrightarrow[\psi]{\varphi} [F_*(X, F_*(Y, Z))]$$

であるから、 $F_*(X, Y) \wedge X$ からの基点を保持する写像を定める。これを同じ記号 ev で表す。

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \uparrow \pi & \\ F_*(X, Y) \times X & \xrightarrow{ev} & F_*(X, Y) \wedge X \end{array}$$

X がコンパクト Hausdorff 空間ならば、 $ev: F(X, Y) \times X \rightarrow Y$ が連続なので、

$$ev: F_*(X, Y) \wedge X \rightarrow Y$$

3.2 で以下の同相を与えた:

$$(t^\sharp, \partial t^\sharp) \cong (D^k, S^{k-1})$$

$$S(t) \cong I^k / \partial I^k \cong D^k / S^{k-1} \cong S^k$$

特に断らない限り、これらの空間の間の同相写像はこれらを使う。

Definition 3.4.19. 基点付き空間 X に対し

$$\Omega X := F((t, \partial t), (X, *))$$

を X のループ空間 (loop space) と言う。

$$\Omega X \cong F_*(S(1), (X, *)) \cong F_*(S^1, (X, *))$$

である。また

$$\Omega^2 X := F((t^\sharp, \partial t^\sharp), (X, *))$$

をループ空間 (kth loop space)

$$\Omega^k X \cong F_*(S(k), (X, *)) \cong F_*(S^k, (X, *))$$

である。

Proposition 3.4.20. X をコンパクト Hausdorff 空間とする。

$$\Omega X \cong \Omega^{k+1} X$$

$$F_*(\Omega^k X, X, Y) \cong F_*(\Omega^k X, F_*(Y, Z))$$

$$\Omega X \cong \Omega^{k+1} X$$

Proof.

$$F_*(\Omega^k X, X, Y) \cong F_*(\Omega^k X, F_*(Y, Z))$$

$$F_*(\Omega^k X, X, Y) \cong F_*(\Omega^k X, F_*(Y, Z))$$

$$F_*(\Omega^k X, X, Y) \cong F_*(\Omega^k X, F_*(Y, Z))$$

$$F_*(\Omega^k X, X, Y) \cong F_*(\Omega^k X, F_*(Y, Z))$$

$$\Omega X \cong \Omega^{k+1} X$$

□

第 5 章

ホモトピー群

- 5.1 ホモトピー群
- 5.2 完全列
- 5.3 Blakers-Massey
- 5.4 Freudenthal
- 5.5 計算例

1. $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

$f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 次の同値である.

自然写像とする.

Proposition A.2.4. X を集合, \sim を X 上の同値関係とし, $\pi: X \rightarrow X/\sim$ をこの関係による商集合への自然な射影, すなわち $x \in X$ に, x を含む同値類 $C_x \in X/\sim$ を対応させる写像とする.

自然な写像, あるいは自然写像, 自然な射影などという.

$a \xrightarrow{u} C_a$
 $X/\sim \xleftarrow{w}$

2. $a \in X$ を $C_a \in X/\sim$ につす写像 (quotient set) という.

1. 同値類の全体 $\{C_a \mid a \in X\}$ を X/\sim と書き, 同値関係 \sim による X の商集合

Definition A.2.3. X を集合, \sim を X 上の同値関係とする.

$x \in C_a$ をひとつとることを, x を C_a の代表元 (representative) としてとるという.

a の同値類 (equivalence class) といふ, a の同値類を $[a]$, a 等と書くことも多い.

$C_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$

\sim 同値な要素全体のなす X の部分集合

Definition A.2.2. 関係 \sim を集合 X 上の同値関係とする. X の要素 $a \in X$ に対し, a を満たすとき, 関係 \sim は集合 X 上の同値関係 (equivalence relation) であるという.

1. (反射律, reflexive law) $x \sim x$,
2. (対称律, symmetric law) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$,
3. (推移律, transitive law) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Definition A.2.1. 集合 X 上の関係が次の 3 つの条件:

だから

付録 A 予備知識

40

特に

$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B)$

$f(A) \subset f(A)$

$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ だから

$f^{-1}(B^c) \subset A^c$

$f^{-1}(B) \subset A \Leftrightarrow f^{-1}(B)^c \subset A^c$

が成り立つ. 実際,

で定めると

$f(A) = f(A)^c$

が成り立つ. また, Y の部分集合 $f(A)$ を

$f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$

$A \subset X, B \subset Y$ に対し,

$f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

A.1 像と逆像

これまでに学んだ (かもしれない) であろう事で必要なことをまとめておく. 証明がつかないものは幾何学序書の私の講義ノート [6] にあると思う.

予備知識

付録 A

39

第 4 章

Fibration と Cofibration

- 4.1 Cofibration
- 4.2 Fibration
- 4.3 Lebesgue の補題
- 4.4 Hopf fibration
- 4.5 Puppe 列

3.4 写像空間

次節以降, 集合

$[t^k, \partial t^k], (X, +) \cong [s(k), X], \cong [s^k, X],$

を考察する.

33

すなわち、 f はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射である。よって同相写像。□

Proposition A.9.6. X をコンパクト Hausdorff 空間、 $R \subset X \times X$ を同値関係とし、 $(x, y) \in R$ のとき $x \sim y$ と書く。このときは次は同値。

1. X/\sim は Hausdorff 空間。
2. R は $X \times X$ の閉集合。
3. 射影 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ は閉写像。

Proof. 1 \Rightarrow 2.

$$R = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/\sim})$$

より分かる。

2 \Rightarrow 3. $F \subset X$ を閉集合とする。 $\pi^{-1}(\pi(F)) \subset X$ が閉集合であることを示せばよい。

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(F)) &= \{y \in X \mid \exists x \in F : x \sim y\} \\ &= \{y \in X \mid \exists x \in F : (x, y) \in R\} \\ &= p_2((F \times X) \cap R) \end{aligned}$$

ただし $p_2: X \times X \rightarrow X$ は射影。仮定より、 F, R は閉集合なので $(F \times X) \cap R$ は閉集合。 $X \times X$ はコンパクト、 X は Hausdorff なので、 p_2 は閉写像 (Corollary A.9.3)。よって $\pi^{-1}(\pi(F)) = p_2((F \times X) \cap R) \subset X$ は閉集合。

3 \Rightarrow 1. $[x_1], [x_2] \in X/\sim, [x_1] \neq [x_2]$ とする。 X は Hausdorff ゆえ一点は閉集合。仮定より射影 π は閉写像なので X/\sim でも一点は閉集合。 π は連続だから $\pi^{-1}(\{[x_1]\}), \pi^{-1}(\{[x_2]\})$ は X の閉集合。 $[x_1] \neq [x_2]$ なので $\pi^{-1}(\{[x_1]\}) \cap \pi^{-1}(\{[x_2]\}) = \emptyset$ 。 X はコンパクト Hausdorff なので正規。よって

$$\pi^{-1}(\{[x_1]\}) \subset U_1, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

となる X の開集合 U_1, U_2 が存在する。

$$V_i := \pi_*(U_i) = \pi(U_i)^c \subset X/\sim$$

とおく。 U_i は開集合だから U_i^c は閉集合。仮定より π は閉写像なので $\pi(U_i^c)$ は閉集合。よって $V_i = \pi(U_i)^c$ は開集合。

$$\pi^{-1}([x_1]) \subset U_1$$

ゆえ

$$\{[x_1]\} \subset \pi_*(U_1) = V_1$$

すなわち

$$[x_1] \in V_1.$$

また

$$\pi^{-1}(V_i) = \pi^{-1}(\pi_*(U_i)) \subset U_i$$

ゆえ、

$$\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2) \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

だから $\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset$ 。 π は全射だから $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 。

よって X/\sim は Hausdorff。□

A.10 コンパクト距離空間

Definition A.10.1. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする。

写像 $f: X \rightarrow Y$ が**一様連続 (uniformly continuous)** である \Leftrightarrow 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、 $d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となる。

明かに一様連続ならば連続である。

exercise 13. 一様連続ならば連続であることを示せ。

X がコンパクトのときは逆も言える。

Theorem A.10.2. (X, d_X) をコンパクト距離空間、 (Y, d_Y) を距離空間とする。このとき、写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続ならば、 f は一様連続である。

Proof. $\varepsilon > 0$ とする。

点 $a \in X$ に対し、 $f: X \rightarrow Y$ は点 a で連続なので、ある $\delta_a > 0$ が存在し、 $d_X(a, x) < 2\delta_a$ ならば $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ となる。

各 $a \in X$ に対し、この様な δ_a を一つとる。^{*8} $\{U_{\delta_a}(a)\}_{a \in X}$ は X の開被覆で、 X はコンパクトなので、ある $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在し、

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_{\delta_i}(a_i)$$

となる。ただし見やすさのため $\delta_i = \delta_{a_i}$ とおいた。

$\delta := \min_i \delta_i$ とおく。 $\delta > 0$ である。

$x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta$ とする。 $x \in X = \bigcup_{i=1}^n U_{\delta_i}(a_i)$ ゆえ、ある $1 \leq i \leq n$ が存在し、 $x \in U_{\delta_i}(a_i)$ 、すなわち $d_X(a_i, x) < \delta_i$ である。よって $d_Y(f(a_i), f(x)) < \varepsilon/2$ 。また

$$\begin{aligned} d_X(a_i, x') &\leq d_X(a_i, x) + d_X(x, x') \\ &< \delta_i + \delta \end{aligned}$$

$$\leq \delta_i + \delta_i = 2\delta_i$$

ゆえ $d_Y(f(a_i), x') < \varepsilon/2$ 。したがって

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x')) &\leq d_Y(f(x), f(a_i)) + d_Y(f(a_i), f(x')) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

^{*8} 例えば

$$\min\{1, \sup\{\delta \mid d_X(a, x) < 2\delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2\}\}$$

つづく...

参考文献

- [1] R. Bott and J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:87–89, 1958.
- [2] Brayton Gray. *Homotopy Theory*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.
- [3] Michel A. Kervaire. Non-parallelizability of the n -sphere for $n > 7$. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 44(3):280–283, 1958.
- [4] J. P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [5] Tammo tom Dieck. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.
- [6] Shuichi Tsukuda. 幾何学序論講義ノート. <http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/>.
- [7] 西田 吾郎. ホモトピー論. 共立出版, 1985.