2020 年度 幾何学特論 I
ホモトピー論入門

佃 修一

2020 年 7 月 31 日

2020 年度前期「幾何学特論 I」の講義メモ.
tom Dieck [5], Gray [2], 西田 [7], May [4] を参考にホモトピー論入門をやってみる.

目次

List of exercises

第 1 章

Introduction

1.1 ホモトピー

空間を分類したい!
位相空間を同相で分類するのは難しすぎる.

Example 1.1.1 (有限位相空間)**.**

もう少しゆるい関係で分類しよう.

Definition 1.1.2. 閉区間 $[0,1]$ を I で表す.
X, Y を位相空間とする.

1. $f, g\colon X \to Y$ を連続写像とする. 連続写像
$$H\colon X \times I \to Y$$
で, 任意の $x \in X$ に対し
$$H(x,0) = f(x)$$
$$H(x,1) = g(x)$$
をみたすものが存在するとき, f と g は**ホモトピック (homotopic)** であるといい, $f \simeq g$ と書く. また, H を f から g への**ホモトピー (homotopy)** という.
2. 連続写像 $f\colon X \to Y$ は, 連続写像 $g\colon Y \to X$ で,
$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$
$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$
をみたすものが存在するとき, **ホモトピー同値写像 (homotopy equivalence)** という.

また, このとき g を f の**ホモトピー逆写像 (homotopy inverse)** とよぶ.
3. X から Y へのホモトピー同値写像が存在するとき, X と Y は**ホモトピー同値 (homotopy equivalent)** であるという.

Proposition 1.1.3. X から Y への連続写像全体のなす集合を $\mathrm{F}(X,Y)$ と書く.
ホモトピックであるという関係「$\simeq$」は $\mathrm{F}(X,Y)$ 上の同値関係である.

証明は後で.

Definition 1.1.4. $\mathrm{F}(X,Y)$ の, ホモトピックという同値関係による商集合

$$[X,Y] = \mathrm{F}(X,Y)/\simeq$$

を X から Y への**ホモトピー集合 (homotopy set)** という.
$f\colon X \to Y$ のホモトピー類を $[f]$ と書くが, しばしば $[]$ を略して f と書く.

Problem 1.1.5. 二つの位相空間 X, Y が与えられたとき

1. X と Y はホモトピー同値か?
2. $[X,Y]$ はどんな集合か?

が知りたい!

Example 1.1.6. $\mathbb{R}^n$ は一点とホモトピー同値である.
見やすさのため, 一点 $*$ からなる集合（空間）$\{*\}$ を $*$ と書く. $f\colon \mathbb{R}^n \to *$ を $f(x) = *$, $g\colon * \to \mathbb{R}^n$ を $g(*) = 0 := \{0,\dots,0\}$ で定める. 明らかに $f \circ g = \mathrm{id}$. よって $f \circ g \simeq \mathrm{id}$.
一方, $H\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ を
$$H(x,t) = tx$$
で定めると, H は連続で,

$$H(x,0) = 0x = 0 = g \circ f(x)$$
$$H(x,1) = 1x = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x)$$

だから, $g \circ f \simeq \mathrm{id}$.
一般に, 一点とホモトピー同値である空間を**可縮 (contractible)** であるという.

ホモトピー同値か?という観点からすると $\mathbb{R}^n$ と一点は同じものだとみなす. これくらい大雑把に見ると有限位相空間の分類を組合せ論的に記述できる.
さらに, これよりもう少しゆるい「弱ホモトピー同値」という概念があり, コンパクトで “よい” 位相空間は有限位相空間と弱ホモトピー同値であるということが知られている.

よってコンパクトで “よい” 位相空間を弱ホモトピー同値で分類するには有限位相空間を弱ホモトピー同値で分類すればよい. これなら, かなり現実的な問題と言えるだろう.
こんなに大雑把な分類をして何かの役に立つのかと思うかもしれないが, とても有用である.
入門的内容の場合, Brouwer の不動点定理がよく例として挙げられるが, 「幾何学 I」あるいは「幾何学 II」で扱われるであろうから, 別の例を挙げよう.

1.2 基本的な空間

1.2.1 $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対し, その大きさ（ユークリッドノルム）を

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

で定める. どこかで学んだことがあると思うが, 次が成り立つ.

1. (a) $\|x\| \geq 0$.
   (b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. 任意の $a \in \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\|ax\| = |a|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

この講義では $\|x\|$ を $|x|$ と書くことがあるかもしれない.
$\mathbb{R}^n$ の 2 点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し x と y のユークリッド距離 $d(x,y)$ を

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

で定めるとこれは $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.
このノートでは, 特に断らなければ $\mathbb{R}^n$ にはこの距離をいれ, 常にこの距離の定める位相を入れる.

Proposition 1.2.1. $d_\infty(x,y), d_1(x,y)$ を

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

で定めるとこれらは $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であり, これらの定める位相はユークリッド距離の定める位相と等しい.

Proposition 1.2.2. $\mathbb{R}^n$ の位相は, $\mathbb{R}$ の n 個の直積空間としての位相と等しい.

Corollary 1.2.3. X を位相空間, $B \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間, $f\colon X \to B$ を写像とする. このとき, f が連続であることと, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対し, $p_i \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ が連続であることは同値. ただし, $p_i\colon B \to \mathbb{R}$ は, 包含と第 i 成分への射影 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の合成.

Proposition 1.2.4. 足し算, 掛け算, 逆数

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$$

は連続.

Corollary 1.2.5. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は連続.

Proof. 行列を使って書けば, 各成分は足し算と掛け算で書ける. □

Theorem 1.2.6 (Heine-Borel)**.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合であること.

1.2.2 D^n, S^{n-1}

Definition 1.2.7. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間

$$\begin{aligned} D^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \\ &= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\} \\ S^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \\ &= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

をそれぞれ n 次元円盤 (**n-dimensional disc**), $n-1$ 次元球面 (**$n-1$-dimensional sphere**) という.

Example 1.1.6 と全く同様にして D^n は可縮であることが分かる.

1.2.3 $\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$

複素数体の定義の仕方は色々あるが, このノートでは以下の定義を採用する.

Definition 1.2.8. $\mathbb{R}^2$ における和, 積を次のように定めると体となる.
$(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$
$$(a,b)(c,d) = (ac - db, da + bc).$$

この体を複素数体といって $\mathbb{C}$ で表す [*1]. $\mathbb{C}$ の元を複素数という.

すぐわかるように和に関する単位元は $(0,0)$, 積に関する単位元は $(1,0)$ である.

exercise 1. 1. $(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b)$.
2. $(a,0)(b,c) = (ab, ac)$.

さて

$$(a,0) + (c,0) = (a + c, 0)$$
$$(a,0)(c,0) = (ac, 0)$$

であるから $a \in \mathbb{R}$ と $(a,0) \in \mathbb{C}$ を同一視して $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ とみなす. もう少し形式的にいうと

Proposition 1.2.9. $f(a) = (a,0)$ で定まる写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は体の（単射）準同型であり, $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の 2 次拡大体である.

$(0,1) \in \mathbb{C}$ を記号 i で表す.

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

である.
任意の $(a,b) \in \mathbb{C}$ は

$$\begin{aligned} (a,b) &= (a,0) + (0,b) \\ &= (a,0) + (b,0)(0,1) \\ &= a + bi \end{aligned}$$

と表すことが出来る. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ であるとき, あきらかに

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$$

である. すなわち, 任意の複素数 z は,

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

と一意的に表すことが出来る.
$\mathbb{C}$ は可換体なので” 普通に” 計算をすることが出来る. 例えば

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + bic + adi + bidi \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i \end{aligned}$$

といった具合である.

Definition 1.2.10. $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ に対し, $(a,-b) \in \mathbb{C}$ を z の**共役 (conjugate)** といって $\overline{z}$ で表す. $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ と表したとき, $\overline{z} = a - bi$ である.

$z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

である.

Definition 1.2.11. $\|z\| = \sqrt{z\overline{z}} \in \mathbb{R}$ を z の絶対値という.

定義より, $\|z\|$ は $\mathbb{R}^2$ におけるユークリッドノルムと同じものである. 特に, $z, w \in \mathbb{C}$ に対し,
$$d(z,w) = \|z - w\|$$
と定めると, これは $\mathbb{C}$ 上の距離関数である. もちろん, （我々の複素数体の定義では）距離空間としては $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ そのものである. より一般に $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し, その大きさを
$$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|z_i\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i}}$$
で定め, $\mathbb{C}^n$ の 2 点 $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ に対し z と w の距離 $d(z,w)$ を

$$d(z,w) \|z - w\|$$

で定めるとこれは $\mathbb{C}^n$ 上の距離関数であり,

$$\mathbb{C}^n = \left(\mathbb{R}^2\right)^n \cong \mathbb{R}^{2n}$$

と自然に同一視したときのユークリッド距離と同じものである. このノートでは, 特に断らなければ $\mathbb{C}^n$ にはこの距離をいれ, 常にこの距離の定める位相を入れる.
奇数次元の球面 $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ は, $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ と同一視すると

$$S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum z_i \overline{z_i} = 1 \right\}$$

とみなせる. 特に
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$$
である. $\|zw\| = \|z\|\|w\|$ であること, $\|z\| = 1$ ならば $z\overline{z} = 1$ であることに注意すると, S^1 は複素数の積により（可換）群となることが分かる.

[*1] この定義は Hamilton （William Rowan Hamilton, ウィリアム・ローワン・ハミルトン, 1805- 1865）による. 他にも $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ として, あるいは行列環の適当な部分環として定めることもある.

1.2.4 $\mathbb{H}, \mathbb{H}^n$

Definition 1.2.12. $\mathbb{C}^2$ における和, 積を次のように定めると（非可換）体となる.
$(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}^2$ に対し

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$
$$(a,b)(c,d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}).$$

この体を**四元数体**といって $\mathbb{H}$ で表す. $\mathbb{H}$ の元を**四元数 (quaternion)** という [*2].
（我々の定義では）実ベクトル空間としては $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ であるから, $\mathbb{H}$ と $\mathbb{R}^4$ は実ベクトル空間として自然に同一視出来る:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{H} & = & \mathbb{C}^2 & = & \left(\mathbb{R}^2\right)^2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^4 \\ & & \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ & & (a + bi, c + di) & = & ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a,b,c,d) \end{array}$$

$\mathbb{H} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ の元 $1, i, j, k$ を

$$1 = (1,0) = (1,0,0,0)$$
$$i = (i,0) = (0,1,0,0)$$
$$j = (0,1) = (0,0,1,0)$$
$$k = (0,i) = (0,0,0,1)$$

で定める. $\mathbb{H}$ の積は, $\mathbb{R}^4$ に

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k = -ji$$
$$jk = i = -kj$$
$$ki = j = -ik$$

で定めた積 [*3] と一致する.

Definition 1.2.13. $q = (a,b) \in \mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ に対し, $(\overline{a}, -b)$ を q の**共役 (conjugate)** といって $\overline{q}$ で表す. $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ と表したとき $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ である.

exercise 2. $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ と表したとき $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ であることを確かめよ.

$q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} q\overline{q} &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\ &= a^2 - abi - acj - adk \\ &\quad + abi - b^2 i^2 - bcij - bdik \\ &\quad + acj - bcji - c^2 j^2 - cdjk \\ &\quad + adk - bdki - cdkj - d^2 k^2 \\ &= a^2 - abi - acj - adk \\ &\quad + abi + b^2 - bck + bdj \\ &\quad + acj + bck + c^2 - cdi \\ &\quad + adk - bdj + cdi + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0 \end{aligned}$$

である（可換ではないので計算には注意が必要）.

Definition 1.2.14. $\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} \in \mathbb{R}$ を q の絶対値という.

$\mathbb{C}$ の場合と同様に, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^n$ にこの絶対値を用いて距離を定めることが出来る. 距離空間として
$$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{H}^n \cong \left(\mathbb{R}^4\right)^n \cong \mathbb{R}^{4n}$$
である. $4n - 1$ 次元球面 $S^{4n-1} \subset \mathbb{R}^{4n}$ は $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{H}^n$ と同一視すると

$$S^{4n-1} = \{q \in \mathbb{H}^n \mid \|q\| = 1\}$$

とみなせる. 特に
$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

また

$$\pi^{-1}(V_i) = \pi^{-1}(\pi_\star(U_i)) \subset U_i$$

ゆえ,

$$\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2) \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

だから $\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset$. π は全射だから $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
よって $X/\sim$ は Hausdorff. □

A.10　コンパクト距離空間

Definition A.10.1. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.
写像 $f\colon X \to Y$ が**一様連続 (uniformly continuous)** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となる.

明かに一様連続ならば連続である.

exercise 21. 一様連続ならば連続であることを示せ.

X がコンパクトのときは逆も言える.

Theorem A.10.2. (X, d_X) をコンパクト距離空間, (Y, d_Y) を距離空間とする. このとき, 写像 $f\colon X \to Y$ が連続ならば, f は一様連続である.

Proof. $\varepsilon > 0$ とする.
点 $a \in X$ に対し, $f\colon X \to Y$ は点 a で連続なので, ある $\delta_a > 0$ が存在し, $d_X(a, x) < 2\delta_a$ ならば $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ となる.
各 $a \in X$ に対し, この様な δ_a を一つとる [*8]. $\{\mathrm{U}_{\delta_a}(a)\}_{a \in X}$ は X の開被覆で, X はコンパクトなので, ある $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_{\delta_i}(a_i)$$

となる. ただし見やすさのため $\delta_i = \delta_{a_i}$ とおいた.
$\delta := \min_i \delta_i$ とおく. $\delta > 0$ である.
$x, x' \in X$, $d_X(x, x') < \delta$ とする. $x \in X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_{\delta_i}(a_i)$ ゆえ, ある $1 \le i \le n$ が存在し, $x \in \mathrm{U}_{\delta_i}(a_i)$, すなわち $d_X(a_i, x) < \delta_i$ である. よって $d_Y(f(a_i), f(x)) < \varepsilon/2$. また

$$\begin{aligned} d_X(a_i, x') &\le d_X(a_i, x) + d_X(x, x') \\ &< \delta_i + \delta \end{aligned}$$

$$\le \delta_i + \delta_i = 2\delta_i$$

ゆえ $d_Y(f(a_i), x') < \varepsilon/2$. したがって

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x')) &\le d_Y(f(x), f(a_i)) + d_Y(f(a_i), f(x')) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

*8 例えば

$$\min\{1, \sup\{\delta \mid d_X(a, x) < 2\delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2\}\}$$

つづく...

参考文献

[1] R. Bott and J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:87–89, 1958.

[2] Brayton Gray. *Homotopy Theory.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.

[3] Michel A. Kervaire. Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 44(3):280–283, 1958.

[4] J. P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[5] Tammo tom Dieck. *Algebraic topology.* EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[6] Shuichi Tsukuda. 幾何学序論講義ノート. `http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/`.

[7] 西田 吾郎. **ホモトピー論**. 共立出版, 1985.

である．$\|qq'\| = \|q\|\|q'\|$ であること（が示せる），$\|q\| = 1$ ならば $q\bar{q} = 1$ であることに注意すると，S^3 は四元数の積により（非可換）群となることが分かる．

[*2] この作り方は，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ を作った方法と同じである．この構成法を Cayley-Dickson 構成という．
[*3] $e_1, \ldots, e_n$ が実ベクトル空間 V の基底であるとき，n^2 個の元 $e_i \cdot e_j \in V$ を定めると

$$\left(\sum a_i e_i\right) \cdot \left(\sum b_i e_i\right) = \sum_{i,j} (a_i b_j)(e_i \cdot e_j)$$

により，V に，分配法則をみたす積を定めることが出来る．一般には，この積は単位元をもつとも結合的であるとも限らない．

1.3 可除代数

$\mathbb{R}$ に $i^2 = -1$ になる数 i を付け加えて新しい数（複素数，$\mathbb{C}$）を作った．$\mathbb{R}$ に $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ になる「数」i, j, k を付け加えて新しい数（四元数,$\mathbb{H}$）を作った．同じようなことが他にも出来るのか? 例えば k は使わず i, j だけを考えて $\mathbb{R}^3$ が体になるようには出来ないのか? といった疑問は自然におこるであろう．

Definition 1.3.1. 実ベクトル空間 A に，積 $\cdot\colon A \times A \to A$ が与えられており，任意の $a, b, c \in A$ と任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し

1. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
3. $(ra) \cdot b = r(a \cdot b) = a \cdot (rb)$

が成り立つとき [*4]，A を $\mathbb{R}$ 上の**代数 (algebra)** あるいは $\mathbb{R}$ **代数**という．
$\mathbb{R}$ 代数 A は，任意の $0 \neq a \in A$ と任意の $b \in A$ に対し次の二つの条件

1. $ax = b$ をみたす $x \in A$ がただ一つ存在する
2. $ya = b$ をみたす $y \in A$ がただ一つ存在する

をみたすとき**実可除代数 (real division algebra)** という．

実可除代数は，分配法則が成り立ち加減乗除という四則演算が出来るという意味で，広い意味での「数」の様なものである（ただし，積については，単位元の存在，可換法則，結合法則は要求しない）．

Example 1.3.2. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ から $\mathbb{H}$ を作ったのと同じことを $\mathbb{H}$ でやってみる．

$(a, b), (c, d) \in \mathbb{H}^2$ に対し，和，積を

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d)\\ (a, b)(c, d) &= (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})\end{aligned}$$

で定める．この積は可換ではなく，結合法則もみたさないが，この積により $\mathbb{H}^2$ は $\mathbb{R}$ 代数となる．さらに，積に関する単位元 $(1, 0)$ を持ち，0 でない元は積に関する逆元を持つ．また（結合法則をみたさないので，逆元を持つことから直ちに言えるわけではないが）可除代数であることが示せる．
$\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^8$ にこの和，積を入れたものを **Cayley 代数**といって $\mathbb{O}$ で表す．$\mathbb{O}$ の元を**八元数 (octonion)** あるいは Cayley 数という

実可除代数の例として $1, 2, 4, 8$ 次元のもの $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ を挙げた．実は次が成り立つ．

Theorem 1.3.3 ([1], [3])**.** A が有限次元実可除代数ならば，A の次元は $1, 2, 4, 8$ のいずれかである．

この定理は次のホモトピー論の定理の系として得られた．

Theorem 1.3.4 ([1], [3])**.** 奇写像

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$$

が存在するのは $n = 1, 2, 4, 8$ に限る．ただし，連続写像 $f\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ が奇写像であるとは，任意の $x, y \in S^{n-1}$ に対し

$$f(-x, y) = -f(x, y) = f(x, -y)$$

が成り立つことをいう．

この講義でこの定理の証明を与えることは出来ないが，Theorem 1.3.4 を仮定して Theorem 1.3.3 を示しておこう．

Lemma 1.3.5. 可除代数は零因子をもたない．つまり，$a \cdot b = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$.

Proof. A を可除代数，$a, b \in A$, $ab = 0$ とする．$a \neq 0$ とすると，

$$a \cdot b = 0 = a \cdot 0$$

で，A は可除なので $b = 0$. □

Remark . A が有限次元ならば逆も成り立つことが知られている．つまり，A が有限次元代数で，零因子をもたなければ，A は可除代数である（証明はさほど難しくない）．.

Proof of Theorem 1.3.3. A を n 次元実可除代数とする．実ベクトル空間としての同型 $A \cong \mathbb{R}^n$ を一つとると，$\mathbb{R}^n$ が実可除代数（となる積が存在する）であるとしてよい．$x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ ならば $x \cdot y \neq 0$ なので，積を $S^{n-1} \times S^{n-1}$ に制限したものは連続写像

$$g\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

を与える．写像 g と連続写像

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}, \quad \pi(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

の合成

$$f = \pi \circ g\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} S^{n-1}$$

を考える．

$$\begin{aligned}g(-x, y) &= (-x) \cdot y = -(x \cdot y) = -g(x, y)\\ g(x, -y) &= x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = -g(x, y)\\ \pi(-x) &= \frac{-x}{\|-x\|} = \frac{-x}{\|x\|} = -\frac{x}{\|x\|} = -\pi(x)\end{aligned}$$

ゆえ

$$\begin{aligned}f(-x, y) &= \pi(g(-x, y)) = \pi(-g(x, y)) = -\pi(g(x, y)) = -f(x, y)\\ f(x, -y) &= \pi(g(x, -y)) = \pi(-g(x, y)) = -\pi(g(x, y)) = -f(x, y)\end{aligned}$$

であるから f は奇写像である．よって Theorem 1.3.4 より $n = 1, 2, 4, 8$. □

[*4] 積が双線型 (bilinear) であるということ．

1.4 圏

圏のありがたみは不変量を扱う事のみにあるわけでは全然ないけれど...
二つの空間がホモトピー同値で**ある**ことを示すのは（出来るかどうかはともかく）実際にホモトピー同値写像を与えればよい．が，どう頑張ってもホモトピー同値写像が見つからないからといってホモトピー同値ではないというわけにはいかない．
ホモトピー同値で**ない**ことを示すのには不変量という考え方が有効である．

1.4.1 圏

Definition 1.4.1 (Category)**.** **圏（カテゴリー，category）** $\mathcal{C}$ とは以下の 3 つの data (i),(ii),(iii) からなり，条件 (a),(b),(c) をみたすもののことをいう．

data (i) クラス $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.
$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ の元を**対象 (object)** という．
(ii) 対象の任意の順序対 (A, B) に対して定められた集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
この集合の元を A から B への**射 (morphism または arrow)** という．
射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を図式により $f\colon A \to B$ または $A \xrightarrow{f} B$ とあらわす．
(iii) 任意の $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対し定められた写像

$$\mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(B, C) \times \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B) \to \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, C).$$

この写像を**合成 (composition)** という．
射 $g \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(B, C)$ と $f \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B)$ の合成を gf または $g \circ f$ とあらわす．

条件 (a) 合成は結合的，すなわち，任意の射 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ に対し，等式 $h(gf) = (hg)f$ が成り立つ．
(b) 各対象 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対し，次をみたす射 $1_A\colon A \to A$ が存在する．
『任意の $f\colon A \to B$ に対し $f \circ 1_A = f$.
任意の $g\colon C \to A$ に対し $1_A \circ g = g$.』

条件 (b) の射 $1_A \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, A)$ は各 A に対し一意的に定まることがわかる．これを A の**恒等射 (identity morphism)** という．
$f \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B)$ に対し，A を f の **domain** または **source**, B を f の **codomain** または **target** とよぶ．

exercise 3. 条件 (b) の射 $1_A \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, A)$ は各 A に対し一意的に定まることを示せ．

記法上の注意を少し．

- クラス $\bigcup_{A,B} \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B)$ を $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ であらわす．
- しばしば $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ のかわりに $A \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ のかわりに $f \in \mathcal{C}$ と書く．
- $\mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B)$ を $\mathrm{Hom}(A, B)$ または $\mathcal{C}(A, B)$ と書くこともある．
- 射 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ の合成を図式 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ であらわす．

圏の例を挙げる．

Example-Definition 1.4.2.
1. **(Sets)**: 集合を対象とし，集合の間の写像を射，写像の合成を合成とする圏．
2. **(Abel)**: アーベル群を対象，準同型写像を射，準同型写像の合成を合成とする圏．
3. **(Top)**: 位相空間を対象，連続写像を射，連続写像の合成を合成とする圏．
4. ho**(Top)**: 位相空間を対象，連続写像のホモトピー類を射，連続写像の合成を合成とする圏（これが圏の条件をみたすことはいずれ示す）．

Definition 1.4.3. $\mathcal{C}$ を圏とする．

1. 射 $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が**同型射 (isomorphism)** である．
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $gf = 1_A$ と $fg = 1_B$ をみたすような射 $g\colon B \to A$ が存在する．このような射 g を f の**逆射**という．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

2. A から B への同型射が存在するとき A は B に（$\mathcal{C}$ において）**同型**であるといい，$A \cong B$ と表す．

Example 1.4.4. $f\colon X \to Y \in ho$**(Top)** が同型射である $\Leftrightarrow$ f はホモトピー同値写像．
$X, Y \in ho$**(Top)** が同型 $\Leftrightarrow$ X と Y はホモトピー同値．

1.4.2 関手

Definition 1.4.5 (Functor)**.** 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手 (functor)** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは以下の 2 つの data (i),(ii) からなり，条件 (a),(b) をみたすもののことをいう．

data (i) 写像 $F\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$
(ii) $\mathcal{C}$ の対象の各順序対 (A, B) に対して定められた写像 $F_{A,B}\colon \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}(A, B) \to \mathrm{Hom}\,\mathcal{D}(F(A), F(B))$ 普通 $F_{A,B}$ を単に F と書く．

条件 (a) 任意の射 $f : A \to B \in \mathcal{C}$, $g : B \to C \in \mathcal{C}$ に対し，等式 $F(gf) = F(g)F(f)$ が成り立つ．
(b) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A \in \mathcal{C}$ に対し，等式 $F(1_A) = 1_{F(A)}$ が成り立つ．

Lemma 1.4.6. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．$f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が同型射ならば $F(f)\colon F(A) \to F(B) \in \mathcal{D}$ も同型射である．
特に，$A, B \in \mathcal{C}$ について，$F(A) \not\cong F(B)$ ならば $A \not\cong B$ である．

Proof. $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が同型射であるとする．$g\colon B \to A \in \mathcal{C}$ を f の逆射とする．すなわ

ち $gf = 1_A$, $fg = 1_B$ が成り立つ．このとき

$$\begin{aligned}F(g)F(f) &= F(gf) = F(1_A) = 1_{F(A)}\\ F(f)F(g) &= F(fg) = F(1_B) = 1_{F(B)}\end{aligned}$$

となり，$F(f)$ は同型射（で，$F(g)$ がその逆射）． □

Example 1.4.7. 関手

$$F\colon ho(\mathbf{Top}) \to (\mathbf{Abel})$$

で

$$\begin{aligned}F(S^{n-1}) &= \mathbb{Z}\\ F(*) &= 0\end{aligned}$$

をみたすものが存在するとする（実際に存在する．この講義でも扱う予定）．
これを仮定すると，$\mathbb{Z} \not\cong 0$ なので S^{n-1} は一点とホモトピー同値ではない，つまり S^{n-1} は可縮ではないことが分かる．
また，連続写像 $f\colon D^n \to S^{n-1}$ で，$f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$ となるものは存在しない [*5] ことが次のようにして分かる．$i\colon S^{n-1} \to D^n$ を包含写像とする．$f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$ が成り立つとする．$f|_{S^{n-1}} = fi$ なので，$fi = \mathrm{id}$ が成り立つ．よって

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{id}_{F(S^{n-1})} = F(\mathrm{id}_{S^{n-1}}) = F(fi) = F(f)F(i)$$

となる．D^n は可縮なので $F(D^n) = F(*) = 0$ ゆえ右辺は 0 写像となり不合理．

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "f"] & S^{n-1} \\ S^{n-1} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "F(f)"] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "F(i)"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

[*5] これは Brouwer の不動点定理と同値な命題である．

第 2 章

ホモトピー

2.1 ホモトピー

第 1 章で述べたホモトピーの性質を証明しよう．

Proposition 1.1.3. X から Y への連続写像全体のなす集合を $\mathrm{F}(X, Y)$ と書く．
ホモトピックであるという関係「$\simeq$」は $\mathrm{F}(X, Y)$ 上の同値関係である．

Proof.
1. $f\colon X \to Y$ に対し，$F\colon X \times I \to Y$ を $F(x, t) = f(x)$ で定めると [*6] 明らかに連続で $F(x, 0) = F(x, 1) = f(x)$ だから $f \simeq f$.
2. $f \simeq g$ とし，$H\colon X \times I \to Y$ を f から g へのホモトピーとする．$H^{-1}\colon X \times I \to Y$ を $H^{-1}(x, t) = H(x, 1 - t)$ で定めると [*7] 明らかに連続で $H^{-1}(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$, $H^{-1}(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$ だから H^{-1} は g から f へのホモトピー．よって $g \simeq f$.
3. $f \simeq g$, $g \simeq h$ とし，F を f から g への，G を g から h へのホモトピーとする．$H\colon X \times I \to Y$ を

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

で定めると H は連続で，$H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ なので $f \simeq h$.

□

exercise 4. (2.1) の H が well-defined であることと連続であることを確かめよ．（ヒント: H を $X \times [0, 1/2]$ と $X \times [1/2]$ に制限したものは連続．Proposition A.4.3 参照）

Proposition 2.1.1. $f, f_0, f_1\colon X \to Y$, $g, g_0, g_1\colon Y \to Z$ を連続写像とする．

1. $f_0 \simeq f_1$ ならば $gf_0 \simeq gf_1$ である．
2. $g_0 \simeq g_1$ ならば $g_0 f \simeq g_1 f$ である．
3. $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$ ならば，$g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$ である．

Proof.
1. $F\colon X \times I \to Y$ を f_0 から f_1 へのホモトピーとすると $gF\colon X \times I \to Y \to Z$ は gf_0 から gf_1 へのホモトピーである．
2. 同様．
3. 1,2 より $g_0 f_0 \simeq g_0 f_1 \simeq g_1 f_1$. よって $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$.

□

exercise 5. 2 を示せ．

Proposition 2.1.1.3 より写像の合成は，写像

$$[X, Y] \times [Y, Z] \to [X, Z]$$

を定め，これが圏の定義（Definition 1.4.1）の条件 (a), (b) をみたすことが分かる．

Definition 2.1.2.
1. 位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の組 (X, A) を**位相空間対**という．しばしば省略して空間対とよぶ．
A が一点 $\{x_0\}$ であるときは，$(X, \{x_0\})$ を (X, x_0) と書き，**基点付き空間 (based space)** という．また x_0 を**基点 (basepoint)** という．
2. (X, A), (Y, B) を空間対とする．連続写像 $f\colon X \to Y$ は，$f(A) \subset B$ をみたすとき**空間対の写像**とよび，$f\colon (X, A) \to (Y, B)$ と表す．
基点付き空間の写像 $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$，つまり連続写像 $f\colon X \to Y$ で，$f(x_0) = y_0$ をみたすものを**基点付き写像 (based map)** という．
3. 位相空間対を対象とし，空間対の写像を射とする圏を空間対の圏といい **(Top(2))** と書く．**(Top(2))** の同型射を**空間対の同相写像**という．
4. 基点付き空間を対象とし，基点付き写像を射とする圏を基点付き空間の圏といい $(\mathbf{Top})_*$ と書く．

Lemma 2.1.3. $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ を空間対の写像とする．
このとき，f が空間対の同相写像 $\Leftrightarrow$ $f\colon X \to Y$, $f|_A\colon A \to B$ がどちらも同相写像．

Proof. $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ が空間対の同相写像であるとし，$g\colon (Y, B) \to (X, A)$ をその逆射とする．明らかに $f\colon X \to Y$ は同相写像で，$g\colon Y \to X$ がその逆写像である．
また，$f(A) \subset B$, $g(B) \subset A$ なので，f および g の制限は写像 $f|_A\colon A \to B$, $g|_B\colon B \to A$ を定め，どちらも連続である．明らかに互いに他の逆写像であるから同相．
逆に，$f\colon X \to Y$, $f|_A\colon A \to B$ がどちらも同相写像であるとする．$g\colon Y \to X$ を f

の逆写像とすると, f が同相写像なので g は連続である. $f|_A\colon A \to B$ は同相写像なので全射ゆえ $f(A) = B$ である. $b \in B$ に対し, $f(g(b)) = b \in B = f(A)$. f は単射だから $g(b) \in A$. よって $g(B) \subset A$. したがって g は空間対の写像であり, 明らかに $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ の逆射. □

exercise 6. $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ を空間対の写像とする. このとき, $f|_A\colon A \to B$ が連続であることを示せ（Proposition A.4.2 を見よ）.

Definition 2.1.4. 空間対 (X, A) に対し, 空間対 $(X \times I, A \times I)$ を $(X, A) \times I$ と表す. $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ を空間対の写像とする. 空間対の写像

$$H\colon (X, A) \times I \to (Y, B)$$

で, 任意の $x \in X$ に対し

$$H(x, 0) = f(x)$$
$$H(x, 1) = g(x)$$

をみたすものが存在するとき, f と g は**ホモトピック (homotopic)** であるといい, $f \simeq g$ と書く. また, H を f から g への**ホモトピー (homotopy)** という.

基点付き写像 $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ がホモトピックであるとき**基点を止めてホモトピック**であるということがある. また, このときのホモトピーを**基点付きホモトピー**とよぶことがある.

定義より

$$H\colon (X, x_0) \times I \to (Y, y_0)$$

が f から g への基点付きホモトピーであるということは

$$H\colon X \times I \to Y$$

が連続で, 任意の $x \in X$ と $t \in I$ に対し

$$H(x_0, t) = y_0$$
$$H(x, 0) = f(x)$$
$$H(x, 1) = g(x)$$

をみたすということ. つまり, H は f から g への（基点を考えない普通の）ホモトピーであって, 任意の $t \in I$ に対し $H(x_0, t) = y_0$ をみたすもの（基点を動かさない）ということ.

空間対のホモトピーについても Proposition 1.1.3, Proposition 2.1.1 と同様なことが成り立つ. 証明も同じである（何箇所かで空間対の写像になっていることをチェックすればよい）.

Definition 2.1.5. 1. 空間対 (X, A), (Y, B) に対し, (X, A) から (Y, B) への空間対の写像全体のなす集合を $\mathrm{F}((X, A), (Y, B))$ で表す. 基点付き空間の場合, $\mathrm{F}((X, x_0), (Y, y_0))$ を $\mathrm{F}_*(X, Y)$ と書く.

2. (X, A) から (Y, B) への空間対の写像のホモトピー類全体のなす集合を $[(X, A), (Y, B)]$ で表す:

$$[(X, A), (Y, B)] := \mathrm{F}((X, A), (Y, B))/\simeq$$

基点付き空間の場合, $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ を $[X, Y]_*$ と書く.

以上のことは, 部分空間の個数が増えても同様なことを考えることができる.

Definition 2.1.6. 空間の 3 対, 基点付き空間対

1. 位相空間 X とその部分空間 $A_2 \subset A_1 \subset X$ の組 (X, A_1, A_2) を**位相空間の 3 対**という.
   A_2 が一点 $\{x_0\}$ であるときは, $(X, A, \{x_0\})$ を (X, A, x_0) と書き, **基点付き空間対**という. このとき $x_0 \in A \subset X$ である. また x_0 を**基点 (basepoint)** という.
2. (X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2) を空間の 3 対とする. 連続写像 $f\colon X \to Y$ は, $i = 1, 2$ に対し $f(A_i) \subset B_i$ をみたすとき**空間の 3 対の写像**とよび, $f\colon (X, A_1, A_2) \to (Y, B_1, B_2)$ と表す.
   基点付き空間対の写像 $f\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$, つまり連続写像 $f\colon X \to Y$ で, $f(A) \subset B$ $f(x_0) = y_0$ をみたすものを**基点付き写像 (based map)** という.
3. 位相空間の 3 対を対象とし, 空間の 3 対の写像を射とする圏を空間の 3 対の圏とい い **(Top(3))** と書く. **(Top(3))** の同型射を**空間の 3 対の同相写像**という.
4. 空間の 3 対 (X, A_1, A_2) から (Y, B_1, B_2) への 3 対の写像全体のなす集合を $\mathrm{F}((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ で表し, そのホモトピー類全体を $[(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)]$ と書く.
5. 基点付き空間対 (X, A, x_0) から (Y, B, y_0) への基点付き写像全体のなす集合を $\mathrm{F}_*((X, A), (Y, B))$ で表し, そのホモトピー類全体を $[(X, A), (Y, B)]_*$ と書く.

*6 射影 $X \times I \to X$ と f の合成だから
*7 $\iota\colon I \to I$, $\iota(t) = 1 - t$ は連続で, $H^{-1} = H \circ (\mathrm{id}_X \times \iota)$

第 3 章

基本的な空間及び構成

3.1 部分空間を一点に縮めた空間

X を位相空間, $A \subset X$ を空でない部分空間とする.

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in A$$

という同値関係による商空間を部分空間 A を**一点に縮めた空間**といい, X/A と書く（Definition A.6.3）.

$A = \emptyset$ のときは, $X/\emptyset$ を, X に一点を付け加えた空間（X と一点の直和）

$$X/\emptyset = X \amalg *$$

と定める.

X/A は, 一点に潰した点 $[A]$ を基点として基点付き空間と考える.

Remark . 集合として

$$X/A \cong (X - A) \amalg \{[A]\} \cong (X - A) \amalg \{*\}$$

であり, この対応のもと, 射影 $\pi\colon X \to X/A$ を $X - A$ に制限したものは恒等写像で, $\pi(A) = *$ である.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"'] & (X - A) \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \amalg & A \arrow[d] \\
X/A \arrow[r, phantom, "\cong"] & (X - A) & \amalg & \{*\}
\end{tikzcd}$$

Proposition 3.1.1. 空間対の写像 $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ は, 次の図式が可換となるよう

な（基点付き）連続写像 $\bar{f}$ を誘導する:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\
X/A \arrow[r, "\bar{f}"'] & Y/B
\end{tikzcd}$$

ただし p, q は自然な射影.

さらに, $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ が空間対の同相写像ならば, $\bar{f}\colon X/A \to Y/B$ は (基点付き) 同相写像である.

Proof. $f(A) \subset B$ であるから, $a, a' \in A$ ならば $f(a), f(a') \in B$. よって Corollary A.2.5 より, 図式を可換にするような写像 $\bar{f}$ がただ一つ存在する.

f, q はともに連続なので, Theorem A.6.5 より, $\bar{f}$ は連続である.

$f\colon (X, A) \to (Y, B)$ が空間対の同相写像ならば, $g\colon (Y, B) \to (X, A)$ で $gf = \mathrm{id}_X$, $fg = \mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在し, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "p"] \\
X/A \arrow[r, "\bar{f}"'] & Y/B \arrow[r, "\bar{g}"'] & X/A
\end{tikzcd}$$

$$\bar{g}\bar{f}p = \bar{g}qf = pgf = p = \mathrm{id}_{X/A}p$$

ゆえ, 一意性（Corollary A.2.5）より, $\bar{g}\bar{f} = \mathrm{id}_{X/A}$. 同様に $\bar{f}\bar{g} = \mathrm{id}_{Y/B}$ が分かる. □

Lemma という程のものではないが

Lemma 3.1.2. $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ を空間対の写像とする. このとき, $\bar{f}\colon X/A \to Y/B$ が全単射 $\Leftrightarrow$ $f(X - A) \subset (Y - B)$ かつ $f\colon X - A \to Y - B$ が全単射.

Proposition 3.1.3. X を Hausdorff 空間, $A \subset X$ をコンパクト部分空間とする. このとき, X/A も Hausdorff 空間である.

特に, X がコンパクト Hausdorff 空間で, $A \subset X$ が閉部分集合ならば, X/A は Hausdorff 空間である.

Proof. $x_1, x_2 \in X$, $[x_1] \neq [x_2] \in X/A$ とする. $x_1, x_2 \notin A$ のとき. このとき $x_1 \neq x_2$ である. X は Hausdorff なので, $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となる X の開集合 U_1, U_2 が存在する. A は Hausdorff 空間のコンパクト部分集合なので閉集合である. よって $U_i - A$ は開集合である.

$O_i := \pi(U_i - A) \subset X/A$ とおく. $x_i \in U_i - A$ であるから, $[x_i] \in O_i$ である. また,

$$\pi^{-1}(O_i) = \pi^{-1}\left(\pi(U_i - A)\right) = U_i - A$$

である（なぜか?）から, O_i は X/A の開集合である. π は全射で,

$$\pi^{-1}(O_1 \cap O_2) = \pi^{-1}(O_1) \cap \pi^{-1}(O_2) = (U_1 - A) \cap (U_2 - A) = \emptyset$$

ゆえ $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

$x_1 \notin A$, $x_2 \in A$ のとき. このとき, $[x_2] = [A] =: *$. $x := x_1$ とする. 各 $a \in A$ に対し, $x \neq a$ なので, $x \in U_a, a \in V_a$, $U_a \cap V_a = \emptyset$ となる開集合 U_a, V_a が存在する. A はコンパクトだから, ある $a_1, \ldots, a_n \in A$ が存在し, $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$ となる.

$$U := \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}, \quad V := \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$$

とおくと, U, V は開集合で, $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ となる. $\pi(U), \pi(V) \subset X/A$ を考えると

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U, \quad \pi^{-1}(\pi(V)) = V$$

だから開集合で, $[x] \in \pi(U)$, $* \in \pi(V)$, $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ であることが分かる.

コンパクト Hausdorff 空間の閉部分集合はコンパクトであることから後半が分かる. □

exercise 7. $\pi\colon X \to X/A$ を自然な射影とする. $B \subset X$ に対し,

$$\pi^{-1}\left(\pi(B)\right) = \begin{cases} B, & A \cap B = \emptyset \\ A \cup B, & A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

Remark . 一般に, X が Hausdorff 空間であっても, その商空間は Hausdorff とは限らない. X がコンパクト Hausdorff 空間のときに, 商空間が Hausdorff となるための必要十分条件が A.9.6 にある.

Definition 3.1.4. (X, x_0), (Y, y_0) を基点付き空間とする.

1.
$$X \tilde{\times} I := X \times I/x_0 \times I$$

2.
$$CX := X \times I/X \times 0 \cup x_0 \times I$$

3.
$$\Sigma X := X \times I/X \times 0 \cup x_0 \times I \cup X \times 1$$

4.
$$X \vee Y := X \amalg Y/x_0 \cup y_0$$

5.
$$X \wedge Y := X \times Y/X \times y_0 \cup x_0 \times Y = X \times Y/X \vee Y$$

Remark . $X \wedge Y \cong Y \wedge X$（同相）である.

$(X \wedge Y) \wedge Z$ と $X \wedge (Y \wedge Z)$ は同相とは限らない. X, Y, Z がコンパクトならば同相である（もっと弱い条件で O.K.）.

Proposition 3.1.1 より次が分かる.

Proposition 3.1.5. X_1, X_2, Y_1, Y_2 を基点付き空間とする. 基点付き写像 $f_i\colon X_i \to Y_i$ は, 基点付き写像

$$f_1 \vee f_2\colon X_1 \vee X_2 \to Y_1 \vee Y_2$$
$$f_1 \wedge f_2\colon X_1 \wedge X_2 \to Y_1 \wedge Y_2$$

を誘導する.

Notation 3.1.6. 空間対 (X, A), (Y, B) に対し, 空間対 $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ を $(X, A) \times (Y, B)$ と書く:

$$(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

Proposition 3.1.7. (X, A), (Y, B) を空間対とする. X, Y がコンパクト Hausdorff 空間で, A, B が閉集合ならば次は同相:

$$X \times Y/X \times B \cup A \times Y \cong X/A \wedge Y/B$$

Remark . $(X, A) \wedge (Y, B)$ という記号はあまり使わない（本当?）気がするけれど, 気持ちとしては $(X, A) \wedge (Y, B) \cong X/A \wedge Y/B$.

Proof. 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r] \arrow[d] & X/A \times Y/B \arrow[d] \\
X \times Y/X \times B \cup A \times Y \arrow[r, dotted] & X/A \wedge Y/B
\end{tikzcd}$$

□

3.2 球面, キューブ

円盤と球面の定義を再掲する.

Definition 3.2.1. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間

$$\begin{aligned} D^n : &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \\ &= \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\} \\ S^{n-1} : &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \\ &= \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

をそれぞれ n **次元円盤 (n-dimensional disc)**, $n-1$ **次元球面 ($n-1$-dimensional sphere)** という.

S^{n-1} と D^n は $e = (1, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1} \subset D^n$ を基点として, 基点付き空間と考える.

Lemma 3.2.2. 1. $(D^n, S^{n-1}) \cong (CS^{n-1}, S^{n-1})$（空間対の同相）.
2. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$（基点付き同相）.
3. $S^n \cong \Sigma S^{n-1}$（基点付き同相）.

Proof. 1.

$$CS^{n-1} = S^{n-1} \times I/S^{n-1} \times 0 \cup e \times I$$

であった. 写像 $q\colon S^{n-1} \times I \to D^n$ を $q(x, t) = tx + (1-t)e$ で定める.

$$\begin{aligned} |tx + (1-t)e| &\leq t|x| + (1-t)|e| \\ &\leq t + (1-t) = 1 \end{aligned}$$

ゆえ $q(x, t) \in D^n$ だから q は well defined. 明らかに連続で,

$$q(x, 0) = e, \quad q(e, t) = e$$

ゆえ, q は空間対の写像

$$q\colon (S^{n-1} \times I, S^{n-1} \times 0 \cup e \times I) \to (D^n, e)$$

を与え,

$$\bar{q}\colon CS^{n-1} = S^{n-1} \times I/S^{n-1} \times 0 \cup e \times I \to D^n/e = D^n$$

を定める. さらに $q(x, 1) = x$ なので, $\bar{q}$ は空間対の写像

$$\bar{q}\colon (CS^{n-1}, S^{n-1}) \to (D^n, S^{n-1})$$

を与える. 容易に

$$q\left(S^{n-1} \times I - S^{n-1} \times 0 \cup e \times I\right) \subset D^n - e$$

であり,

$$q\colon S^{n-1} \times I - S^{n-1} \times 0 \cup e \times I \to D^n - e$$

が全単射であることが分かる. よって

$$\bar{q}\colon CS^{n-1} \to D^n$$

は連続な全単射. CS^{n-1} はコンパクト, D^n は Hausdorff だから, $\bar{q}$ は同相.

2. 写像 $q\colon D^n \to S^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を $q(x) = (2|x|^2 - 1, \sqrt{1 - |x|^2}x)$ で定める. 明らかに q は連続で, $q(x) \in S^n$ であることが分かる. さらに, $x \in S^{n-1}$, すなわち $|x| = 1$ ならば, $q(x) = e$, $x \notin S^{n-1}$, すなわち $|x| < 1$ ならば, $q(x) \neq e$ であるから, q は空間対の写像 $(D^n, S^{n-1}) \to (S^n, e)$ であり, $q(D^n - S^{n-1}) \subset S^n - e$ である.
   写像 $f\colon S^{n-1} - e \to D^n - S^{n-1}$ を
   $$f(r, x) = \frac{x}{\sqrt{2(1-r)}}$$
   で定めると, f は $q|_{D^n - S^{n-1}}$ の逆写像であり, $q\colon D^n - S^{n-1} \to S^{n-1} - e$ が全単射であることが分かる.
   よって,
   $$\bar{q}\colon D^n/S^{n-1} \to S^n/e = S^n$$
   は全単射基点付き写像. D^n/S^{n-1} はコンパクト, S^{n-1} は Hausdorff なので, $\bar{q}$ は同相.
3. 1,2 及び $CX/X \cong \Sigma X$ であることより
   $$S^n \cong D^n/S^{n-1} \cong CS^{n-1}/S^{n-1} \cong \Sigma S^{n-1}.$$

□

Definition 3.2.3. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間

$$I^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : 0 \leq x_i \leq 1\}$$
$$\partial I^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n \mid \exists i : x_i \in \{0, 1\}\}$$

をそれぞれ n **次元キューブ (n-dimensional cube)** とその境界という.

$n \geq 1$ に対し,

$$J^n := \partial I^n \times I \cup I^n \times 0 \subset \partial I^{n+1} \subset I^n \times I$$

と定め,

$$J^0 := \{0\} \subset I$$

と定める.

Lemma 3.2.4. 空間対として $(I^n, \partial I^n) \cong (D^n, S^{n-1})$.

Proof.

$$\tilde{I}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : -1 \leq x_i \leq 1\}$$
$$\partial \tilde{I}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n \mid \exists i : x_i \in \{-1, 1\}\}$$

と定める. 明らかに写像

$$\tilde{I}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1+1}{2}, \ldots, \frac{x_n+1}{2}\right) \in I^n$$

により $\left(\tilde{I}^n, \partial \tilde{I}^n\right) \cong (I^n, \partial I^n)$ である.

さらに, 写像

$$\Psi\colon D^n \to \tilde{I}^n, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{\max_i |x_i|} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

が空間対の同相 $(D^n, S^{n-1}) \cong \left(\tilde{I}^n, \partial \tilde{I}^n\right)$ を与えることが示せる（詳細は 2019 年度幾何学 IV のノート Lem. 3.2.12 を参照）. □

Corollary 3.2.5. $I^n / \partial I^n \cong S^n$.

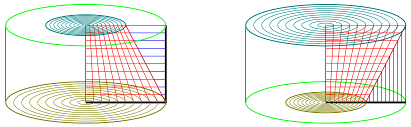
Proof. $I^n / \partial I^n \cong D^n / S^{n-1} \cong S^n$. □

Lemma 3.2.6. 空間対として $(I^{n+1}, J^n) = (I^n, \partial I^n) \times (I, \{0\}) \cong I^n \times (I, \{0\}) = (I^{n+1}, I^n \times \{0\})$.

Proof. $(D^n, S^{n-1}) \times (I, \{0\}) \cong D^n \times (I, \{0\})$ を示せばよい. $f, g\colon D^n \times I \to D^n \times I$ を

$$f(x,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{1+t}{2-t} x, t\right), & |x| \leq \dfrac{2-t}{2} \\ \left(\dfrac{1+t}{2|x|} x, 2(1-|x|)\right), & |x| \geq \dfrac{2-t}{2} \end{cases}$$

$$g(x,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{2-t}{1+t} x, t\right), & |x| \leq \dfrac{1+t}{2} \\ \left(\dfrac{2-t}{2|x|} x, 2|x|-1\right), & |x| \geq \dfrac{1+t}{2} \end{cases}$$



で定めると, f, g は well-defined で連続, 互いに他の逆であり, $f(x,0) \in D^n \times \{0\}$, $|x| = 1$ のとき $f(x,t) \in D^n \times \{0\}$ であるので, これらが求める同相を与える. □

Notation 3.2.7.

$$S(n) := I^n / \partial I^n$$
$$D(n+1) := CS(n)$$

Lemma 3.2.8.
$$(D(n+1), S(n)) \cong \left(I^{n+1}/J^n, \partial I^{n+1}/J^n\right)$$

Lemma 3.2.9.
1. $S(l) \wedge S(m) \cong S(l+m)$.
2. $\underbrace{S^1 \wedge \cdots \wedge S^1}_{n} \cong S^n$.

Definition 3.2.10. $\Sigma^n X := X \wedge S(n)$ を X の n **重懸垂**という.

Remark . 講義では $S^n \wedge X$ と定義したが, 後の都合により, こちらに変更.

Lemma 3.2.11.
1. $\Sigma X \cong \Sigma^1 X$.
2. $\Sigma^n X \cong \Sigma\Sigma^{n-1} X$.

Proof. 1.

$$\begin{aligned} \Sigma^1 X &= X \wedge S(1) \\ &\cong (X/*) \wedge (I/\partial I) \\ &\cong X \times I / X \times \partial I \cup * \times I \\ &= \Sigma X \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \Sigma^n X &= X \wedge S(n) \\ &\cong X \wedge S(n-1) \wedge S(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cong \Sigma^{n-1} X \wedge S(1) \\ &\cong \Sigma\Sigma^{n-1} X. \end{aligned}$$

□

以降,

$$S^n, D^n/S^{n-1}, \partial I^n, S(n), \Sigma S^{n-1}$$

の間の同相写像及び空間対の同相写像

$$(D^n, S^{n-1}) \cong (CS^{n-1}, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n) \cong (D(n), S(n-1)) \cong (I^n/J^{n-1}, \partial I^n/J^{n-1})$$

は, 特に断らなければこの節で定めた写像を考える.

3.3　射影空間

3.4　写像空間

Definition 3.4.1. X, Y を位相空間とする. X から Y への連続写像全体のなす集合を $\mathrm{F}(X,Y)$ と書くのであった.

コンパクト部分集合 $K \subset X$ と, 開集合 $U \subset Y$ に対し, $\mathrm{F}(X,Y)$ の部分集合 $W(K,U)$ を

$$W(K,U) := \{f \in \mathrm{F}(X,Y) \mid f(K) \subset U\}$$

により定める.

$$\left\{W(K,U) \,\middle|\, K \subset X\text{: コンパクト}, U \subset Y\text{: 開集合}\right\}$$

の生成する $\mathrm{F}(X,Y)$ の位相（これらが開集合となる最弱の位相, これらを準基とする位相）を**コンパクト開位相 (compact-open topology)** という.

$\mathrm{F}(X,Y)$ にコンパクト開位相を与えたものを**写像空間 (mapping space)** という.

空間対の写像全体 $\mathrm{F}((X,A),(Y,B))$, 空間の 3 対の写像全体 $\mathrm{F}((X,A_1,A_2),(Y,B_1,B_2))$ には, $\mathrm{F}(X,Y)$ からの相対位相を入れる.

写像空間の基本的性質について証明なしでまとめておく.

Proposition 3.4.2. X, Y, Z を位相空間, $f\colon X \to Y$ を連続写像とする. 連続写像の合成は連続なので, f の誘導する写像は写像空間の間の写像を定める.

1. 写像 $f_\sharp\colon \mathrm{F}(Z,X) \to \mathrm{F}(Z,Y)$ を $f_\sharp(g) = f \circ g$ で定めると, $f_\sharp$ は連続である:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}(Z,X) & \xrightarrow{f_\sharp} & \mathrm{F}(Z,Y) \\ \Cup & & \Cup \\ Z \underset{g}{\to} X & \longmapsto & Z \underset{g}{\to} X \underset{f}{\to} Y. \end{array}$$

2. 写像 $f^\sharp\colon \mathrm{F}(Y,Z) \to \mathrm{F}(X,Z)$ を $f^\sharp(h) = h \circ f$ で定めると, $f^\sharp$ は連続である.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}(Y,Z) & \xrightarrow{f^\sharp} & \mathrm{F}(X,Z) \\ \Cup & & \Cup \\ Y \underset{h}{\to} Z & \longmapsto & X \underset{f}{\to} Y \underset{h}{\to} Z. \end{array}$$

Proposition 3.4.3.
1. $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$. $\mathrm{id}_\sharp = \mathrm{id}$.
2. $(g \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp$. $\mathrm{id}^\sharp = \mathrm{id}$.

Corollary 3.4.4. f が同相写像ならば $f_\sharp$, $f^\sharp$ も同相写像.

これらは基点付きの場合も成り立つ.

3.4.1　随伴

（連続とは限らない）写像全体 $\mathrm{Map}(X,Y)$ を考えると, 次の全単射がある.

$$\mathrm{Map}(X \times Y, Z) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$$
$$(\Phi(f)(x))(y) = f(x,y)$$
$$\Psi(g)(x,y) = g(x)(y)$$

$\mathrm{F}(X,Y)$ の場合どの様になるであろうか.

Proposition 3.4.5. $f\colon X \times Y \to Z$ を連続写像とする. このとき, f の**随伴写像 (adjoint map)**

$$f^\wedge\colon X \to \mathrm{F}(Y,Z), \quad f^\wedge(x)(y) = f(x,y)$$

は連続である.

従って次の写像を定義することができる.

Definition 3.4.6. 写像

$$\varphi\colon \mathrm{F}(X \times Y, Z) \to \mathrm{F}(X, \mathrm{F}(Y,Z))$$

を $\varphi(f) = f^\wedge$ により定める.

φ は一般に連続とは限らないし, 全単射とも限らない. 連続であるとか, 全単射であるためには, 写像空間のソース（$\mathrm{F}(X,Y)$ の X）に何らかの仮定が必要である. 以下では, ソースがコンパクト Hausdorff であるという仮定をおいている. この仮定が不要なものもあるし, いずれもより弱い仮定でも成り立つが, 煩雑になるので, ここでは少し強い仮定をおくことにした.

Remark . この様に何らかの仮定が必要であるというのは色々と不便である. うまいことやる枠組みがある（コンパクト生成弱 Hausdorff 空間 (compactly generated weakly Hausdorff spaces) 等）.

Proposition 3.4.7. X をコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき**値写像 (evaluation map)**

$$ev\colon \mathrm{F}(X,Y) \times X \to Y, \quad ev(f,x) = f(x)$$

は連続である.

Definition 3.4.8. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき, 連続写像 $g\colon X \to \mathrm{F}(Y,Z)$ に対し, 写像

$$g^\vee := ev \circ (g \times \mathrm{id})\colon X \times Y \xrightarrow{g \times \mathrm{id}} \mathrm{F}(Y,Z) \times Y \xrightarrow{ev} Z, \quad g^\vee(x,y) = (g(x))(y)$$

は連続である（$g^\vee$ も g の随伴とよぶことがある）.

写像

$$\psi\colon \mathrm{F}(X, \mathrm{F}(Y,Z)) \to \mathrm{F}(X \times Y, Z)$$

を $\psi(g) = g^\vee$ により定める.

Proposition 3.4.9. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき φ, ψ は全単射で互いに他の逆.

$$\mathrm{F}(X \times Y, Z) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathrm{F}(X, \mathrm{F}(Y,Z))$$

Corollary 3.4.10. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

1. $f_0 \simeq f_1\colon X \times Y \to Z$ ならば, $f_0^\wedge \simeq f_1^\wedge\colon X \to \mathrm{F}(Y,Z)$.
2. $g_0 \simeq g_1\colon X \to \mathrm{F}(Y,Z)$ ならば, $g_0^\vee \simeq g_1^\vee\colon X \times Y \to Y$.
3. φ, ψ は全単射

$$[X \times Y, Z] \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} [X, \mathrm{F}(Y,Z)]$$

を誘導する.

Proof.

1. $H\colon X \times Y \times I \to Z$ をホモトピーとする. $H^\wedge\colon X \times I \to \mathrm{F}(Y,Z)$ は連続で,

$$H^\wedge(x,t)(y) = H(x,y,t) = f_t(x,y) = f_t^\wedge(x)(y)$$

なので $f_0^\wedge$ から $f_1^\wedge$ へのホモトピーを与える.

2. $G\colon X \times I \to \mathrm{F}(Y,Z)$ をホモトピーとする. $G^\vee\colon X \times Y \times I \to Z$ は連続で,

$$G^\vee(x,y,t) = G(x,t)(y) = g_t(x)(y) = g_t^\vee(x,y)$$

なので $g_0^\vee$ から $g_1^\vee$ へのホモトピーを与える.

3. 1 より φ は $\varphi\colon [X \times Y, Z] \to [X, \mathrm{F}(Y,Z)]$ を誘導し, 2 より ψ は $\psi\colon [X, \mathrm{F}(Y,Z)] \to [X \times Y, Z]$ を誘導する. 明らかに互いに他の逆.

□

φ と ψ の連続性にはもう少し条件が必要.

Theorem 3.4.11. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき φ, ψ は同相写像で互いに他の逆.

$$\mathrm{F}(X \times Y, Z) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathrm{F}(X, \mathrm{F}(Y,Z))$$

3.4.2　基点付きの場合

次に基点付きの場合を考える.

Proposition 3.4.12. (X,A) を空間対, (Y,y_0) を基点付き空間とする.

射影 $\pi\colon X \to X/A$ は連続な全単射

$$\pi^\sharp\colon \mathrm{F}_*(X/A, Y) \to \mathrm{F}((X,A),(Y,y_0))$$

及び全単射

$$[X/A, Y]_* \cong [(X,A),(Y,y_0)]$$

を誘導する.

さらに, A がコンパクト閉集合ならば $\pi^\sharp$ は同相写像である.

基点付き空間 X, Y に対し, $\mathrm{F}_*(X,Y)$ は, 定値写像（$c(x) = *$）を基点として基点付き空間と考える.

Definition 3.4.13. X, Y, Z を基点付き空間, $\pi\colon X \times Y \to X \times Y / X \times * \cup * \times Y = X \wedge Y$ を射影とする.

基点付き写像 $f\colon X \wedge Y \to Z$ に対し連続写像 $(f\pi)^\wedge\colon X \to \mathrm{F}(Y,Z)$ を考えると,

$$(f\pi)^\wedge(x)(*) = f\pi(x,*) = f(*) = *$$

ゆえ $(f\pi)^\wedge(x) \in \mathrm{F}_*(Y,Z)$ で,

$$(f\pi)^\wedge(*)(y) = f\pi(*,y) = f(*) = *$$

ゆえ $(f\pi)^\wedge \in \mathrm{F}_*(X, \mathrm{F}_*(Y,Z))$ である.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}_*(X \wedge Y, Z) \arrow[r, "\pi^\sharp"] \arrow[rrr, dotted, "\varphi"'] & \mathrm{F}(((X,*) \times (Y,*)),(Z,*)) \subset \mathrm{F}(X \times Y, Z) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{F}(X, \mathrm{F}(Y,Z)) \\ & & \cup \\ & & \mathrm{F}_*(X, \mathrm{F}_*(Y,Z)) \end{tikzcd}$$

写像

$$\varphi\colon \mathrm{F}_*(X \wedge Y, Z) \to \mathrm{F}_*(X, \mathrm{F}_*(Y,Z))$$

を $\varphi(f) = (f\pi)^\wedge$ により定める.

明らかに, $c\colon X \wedge Y \to Z$ が定値写像のとき $\varphi(c)$ も定値写像であるから, φ は基点を保つ.

Proposition 3.4.14. 値写像の制限を考えると,

$$ev(c,x) = c(x) = *$$
$$ev(f,*) = f(*) = *$$

であるから, $\mathrm{F}_*(X,Y) \wedge X$ からの基点を保つ写像を定める. これを同じ記号 ev で表す.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}_*(X,Y) \times X \arrow[r, "ev"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ \mathrm{F}_*(X,Y) \wedge X \arrow[ur, dotted, "ev"'] & \end{tikzcd}$$

X がコンパクト Hausdorff 空間ならば, $ev\colon \mathrm{F}(X,Y) \times X \to Y$ が連続なので,

$$ev\colon \mathrm{F}_*(X,Y) \wedge X \to Y$$

は連続である. □

Definition 3.4.15. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき, 基点付き写像 $g\colon X \to \mathrm{F}_*(Y,Z)$ に対し, 写像

$$g^\vee := ev \circ (g \wedge \mathrm{id})\colon X \wedge Y \xrightarrow{g \wedge \mathrm{id}} \mathrm{F}_*(Y,Z) \wedge Y \xrightarrow{ev} Z$$

は基点付き（連続）写像である.

写像

$$\psi\colon \mathrm{F}_*(X, \mathrm{F}_*(Y,Z)) \to \mathrm{F}_*(X \wedge Y, Z)$$

を $\psi(g) = g^\vee$ により定める.

Proposition 3.4.16. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき φ, ψ は全単射で互いに他の逆.

$$\mathrm{F}_*(X \wedge Y, Z) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathrm{F}_*(X, \mathrm{F}_*(Y,Z))$$

Corollary 3.4.17. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする. φ, ψ は全単射

$$[X \wedge Y, Z]_* \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} [X, \mathrm{F}_*(Y,Z)]_*$$

を誘導する.

Theorem 3.4.18. X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする.

このとき φ, ψ は同相写像で互いに他の逆.

$$\mathrm{F}_*(X \wedge Y, Z) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\underset{\cong}{\rightleftarrows}}} \mathrm{F}_*(X, \mathrm{F}_*(Y,Z))$$

3.4.3　ループ

3.2 で以下の同相を与えた:

$$(I^k, \partial I^k) \cong (D^k, S^{k-1})$$
$$S(k) = I^k / \partial I^k \cong D^k / S^{k-1} \cong S^k$$

特に断らない限り, これらの空間の間の同相写像はこれらを使う.

Definition 3.4.19. 基点付き空間 X に対し

$$\Omega X := \mathrm{F}((I, \partial I), (X, *))$$

を X の**ループ空間 (loop space)** という.

$$\Omega X \cong \mathrm{F}_*(S(1), X) \cong \mathrm{F}_*(S^1, X)$$

である. また

$$\Omega^k X := \mathrm{F}((I^k, \partial I^k), (X, *))$$

第 4 章

Fibration と Cofibration

第 5 章

ホモトピー群

5.1 ホモトピー群

Definition 5.1.1. 基点付き空間 $(X,*)$, 基点付き空間対 $(X,A,*)$, $n \geq 0$ に対し,

$$\pi_n(X,*) := [(I^n, \partial I^n), (X,*)]$$
$$\pi_{n+1}(X,A,*) := [(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X,A,*)]$$

を **Hurewicz のホモトピー集合**という.

$$\pi_n(X,*) \cong [S(n),X]_* \cong [S^n,X]_*$$

である.

ただし, $I^0 = \{0\}$, $\partial I^0 = \emptyset$. $S(0) = I^0/\partial I^0 = \{0\} \amalg *$ で, $\pi_0(X,*)$ は X の弧状連結成分の集合である.

また

$$\pi_0(X,A,*) := \pi_0(X/A,*)$$

と約束する.

Definition 5.1.2. $(X,*)$ を基点付き空間, $1 \leq i \leq n$ とする.

$\alpha, \beta \in \Omega^n X = F((I^n, \partial I^n), (X,*))$ に対し, $\alpha +_i \beta \in \Omega^n X$ を

$$(\alpha +_i \beta)(t_1,\dots,t_n) = \begin{cases} \alpha(t_1,\dots,t_{i-1},2t_i,t_{i+1},\dots,t_n), & t_i \leq \dfrac{1}{2} \\ \beta(t_1,\dots,t_{i-1},2t_i-1,t_{i+1},\dots,t_n), & t_i \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

で定める.

を k **重ループ空間**（**kth loop space**）という.

$$\Omega^k X \cong \mathrm{F}_*(S(k),X) \cong \mathrm{F}_*(S^k,X)$$

である.

Proposition 3.4.20. X をコンパクト Hausdorff 空間とする.

$$\mathrm{F}_*(\Sigma^k X, Y) \cong \mathrm{F}_*(X, \Omega^k Y)$$
$$\Omega\Omega^k X \cong \Omega^{k+1} X$$

Proof.

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_*(\Sigma^k X, Y) &= \mathrm{F}_*(X \wedge S(k), Y) \\ &\cong \mathrm{F}_*(X, \mathrm{F}_*(S(k), Y)) \\ &= \mathrm{F}_*(X, \Omega^k Y). \\ \Omega\Omega^k X &\cong \mathrm{F}_*(S(1), \Omega^k X) \\ &\cong \mathrm{F}_*(\Sigma^k S(1), X) \\ &\cong \mathrm{F}_*(S(k+1), X) \\ &= \Omega^{k+1} X. \end{aligned}$$

□

次節以降, 集合

$$[(I^k, \partial I^k), (X,*)] \cong [S(k),X]_* \cong [S^k,X]_*$$

を考察する.

$n = 1$ のときは $\alpha +_1 \beta$ を $\alpha * \beta$ と書く.

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq \dfrac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & t \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

である.

Lemma 5.1.3.
1. $f\colon X \to Y$ を基点付き写像とすると, $f_\sharp(\alpha +_i \beta) = f_\sharp(\alpha) +_i f_\sharp(\beta)$.
2. $1 \leq i < j \leq n$ とする. $\tau\colon I^n \to I^n$ を i 番目と j 番目の成分を入れかえる（同相）写像とすると, $\tau^\sharp(\alpha +_i \beta) = \tau^\sharp(\alpha) +_j \tau^\sharp(\beta)$.
3. $n \geq 2$ とする. $ad\colon \Omega^n X \to \Omega\left(\Omega^{n-1} X\right)$ を Proposition 3.4.20 で与えた同相写像とすると, $\mathrm{ad}(\alpha +_1 \beta) = \mathrm{ad}(\alpha) * \mathrm{ad}(\beta)$.

exercise 8. 上の 1（$n = 1$ の場合だけでもよい）, 2（$n = 2$ の場合だけでもよい）を確かめよ.

Proposition 5.1.4. $\alpha, \alpha_i, \beta_i \in \Omega X$ とする. 次が成り立つ. ただし, $\simeq$ は空間対の写像としてホモトピックということ.

1. 連続写像 $u\colon I \to I$ が $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ をみたせば $\alpha \simeq \alpha \circ u$.
2. $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 \simeq \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)$.
3. $\alpha * c \simeq \alpha \simeq c * \alpha$.
4. $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t)$ と定めると, $\alpha * \alpha^{-1} \simeq c \simeq \alpha^{-1} * \alpha$. ただし c は基点への定値写像.
5. $\alpha_0 \simeq \alpha_1$, $\beta_0 \simeq \beta_1$ ならば $\alpha_0 * \beta_0 \simeq \alpha_1 * \beta_1$.

Proof.
1. $H\colon I^2 \to I$ を $H(s,t) = (1-t)s + tu(s)$（s と $u(s)$ を $t : 1-t$ に内分する点）で定めると, H は $\mathrm{id}, u\colon (I, \partial I) \to (I, \partial I)$ の間のホモトピー（t がホモトピーのパラメータ）を与える. 実際,

$$\begin{aligned} H(s,0) &= s \\ H(s,1) &= u(s) \\ H(0,t) &= tu(0) = 0 \\ H(1,t) &= 1 - t + tu(1)) \\ &= 1 - t + t = 1 \end{aligned}$$

よって $\alpha \circ H$ が $\alpha = \alpha \circ \mathrm{id}$ と $\alpha \circ u$ の間のホモトピーを与える.

2. $u\colon I \to I$ を

$$u(t) = \begin{cases} 2t, & t \leq \dfrac{1}{4} \\ t + \dfrac{1}{4}, & \dfrac{1}{4} \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}, & t \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると, u は連続で $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, $(\alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)) \circ u = (\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$.

3. $u\colon I \to I$ を

$$u(t) = \begin{cases} 2t, & t \leq \dfrac{1}{2} \\ 1, & t \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると, u は連続で $u(0) = 0$, $u(1) = 1$. $\alpha \circ u = \alpha * c$.

4. $H\colon I^2 \to I$ を

$$H(s,t) = \begin{cases} 2s(1-t), & s \leq \dfrac{1}{2} \\ 2(1-s)(1-t), & s \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると, $\alpha \circ H$ が $\alpha * \alpha^{-1}$ から c へのホモトピーを与える.
$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ なので, $\alpha^{-1} * \alpha = \alpha^{-1} * (\alpha^{-1})^{-1} \simeq c$.

5. $F\colon I^2 \to X$ を α_0 から α_1 へのホモトピー, $G\colon I^2 \to X$ を β_0 から β_1 へのホモトピーとすると, $F +_1 G$, すなわち

$$(F +_1 G)(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & s \leq \dfrac{1}{2} \\ G(2s-1,t), & s \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

が $\alpha_0 * \beta_0$ から $\alpha_1 * \beta_1$ へのホモトピーを与える.

□

exercise 9.
1. 上の証明の 2 の $(\alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)) \circ u = (\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$ を確かめよ.
2. 上の証明の 3 の $\alpha \circ u = \alpha * c$ を確かめよ. また, $c * \alpha \simeq \alpha$ を示せ.
3. 上の証明の 4 の $\alpha \circ H$ が $\alpha * \alpha^{-1}$ から c へのホモトピーであること, つまり
   - $\alpha \circ H$ は連続
   - $\alpha \circ H(s,0) = (\alpha * \alpha^{-1})(s)$
   - $\alpha \circ H(s,1) = *$
   - $\alpha \circ H(0,t) = *$
   - $\alpha \circ H(1,t) = *$

   であることを確かめよ.

4. 上の証明の 5 の $F +_1 G$ が $\alpha_0 * \beta_0$ から $\alpha_1 * \beta_1$ へのホモトピーであること, つまり
   - $F +_1 G$ は連続
   - $(F +_1 G)(s,0) = (\alpha_0 * \beta_0)(s)$
   - $(F +_1 G)(s,1) = (\alpha_1 * \beta_1)(s)$
   - $(F +_1 G)(0,t) = *$
   - $(F +_1 G)(1,t) = *$

   であることを確かめよ.

Corollary 5.1.5. $\pi_1(X,*)$ は, 積を $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ により定めると群となる.
単位元は $[c]$ で, $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ である.

Definition 5.1.6. 上で積を定めた群 $\pi_1(X,*)$ を $(X,*)$ の**基本群 (fundamental group)** という.

Proposition 5.1.7. 集合 M に単位元をもつ二つの積 $\cdot_1$, $\cdot_2$ が与えられており, e_1, e_2 をそれぞれの単位元とする.

さらに, 任意の $a,b,c,d \in M$ に対し, 次の交換律

$$(a \cdot_1 b) \cdot_2 (c \cdot_1 d) = (a \cdot_2 c) \cdot_1 (b \cdot_2 d)$$

が成り立つとする.

このとき, $\cdot_1 = \cdot_2$, $e_1 = e_2$ であり, この積は可換, 結合的である.

Proof.

$$\begin{aligned} e_2 &= e_2 \cdot_2 e_2 && e_2 \text{ は } \cdot_2 \text{ の単位元} \\ &= (e_2 \cdot_1 e_1) \cdot_2 (e_1 \cdot_1 e_2) && e_1 \text{ は } \cdot_1 \text{ の単位元} \\ &= (e_2 \cdot_2 e_1) \cdot_1 (e_1 \cdot_2 e_2) && \text{交換律} \\ &= e_1 \cdot_1 e_1 && e_2 \text{ は } \cdot_2 \text{ の単位元} \\ &= e_1 && e_1 \text{ は } \cdot_1 \text{ の単位元} \end{aligned}$$

である. $e := e_1 = e_2$ とおく.

$a, b \in M$ に対し,

$$a \cdot_2 b = (a \cdot_1 e) \cdot_2 (e \cdot_1 b) = (a \cdot_2 e) \cdot_1 (e \cdot_2 b) = a \cdot_1 b$$

ゆえ二つの積は一致する. この積を「$\cdot$」と書く.

$$a \cdot b = (e \cdot a) \cdot (b \cdot e) = (e \cdot b) \cdot (a \cdot e) = b \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot e) \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (e \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

ゆえ, 可換, 結合的. □

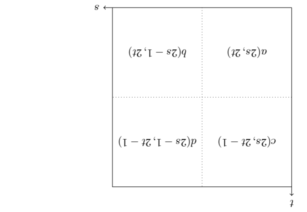
Lemma 5.1.8. $(X,*)$ を基点付き空間, $1 < i \leq n$ とする. $a, b, c, d \in \Omega^n X$ に対し,

$$(a +_1 b) +_i (c +_1 d) = (a +_i c) +_1 (b +_i d)$$

が成り立つ.

Proof. $i = 2$ の場合を示す.

$$\begin{aligned}((a +_1 b) +_2 (c +_1 d))(s, t, \dots) &= \begin{cases}(a +_1 b)(s, 2t, \dots), & t \leq 1/2 \\ (c +_1 d)(s, 2t-1, \dots), & t \geq 1/2\end{cases} \\ &= \begin{cases} a(2s, 2t, \dots), & s \leq 1/2,\ t \leq 1/2 \\ b(2s-1, 2t, \dots), & s \geq 1/2,\ t \leq 1/2 \\ c(2s, 2t-1, \dots), & s \leq 1/2,\ t \geq 1/2 \\ d(2s-1, 2t-1, \dots), & s \geq 1/2,\ t \geq 1/2 \end{cases} \\ ((a +_2 c) +_1 (b +_2 d))(s, t, \dots) &= \begin{cases}(a +_2 c)(2s, t, \dots), & s \leq 1/2 \\ (b +_2 d)(2s-1, t, \dots), & s \geq 1/2\end{cases} \\ &= \begin{cases} a(2s, 2t, \dots), & s \leq 1/2,\ t \leq 1/2 \\ c(2s, 2t-1, \dots), & s \leq 1/2,\ t \geq 1/2 \\ b(2s-1, 2t, \dots), & s \geq 1/2,\ t \leq 1/2 \\ d(2s-1, 2t-1, \dots), & s \geq 1/2,\ t \geq 1/2 \end{cases}\end{aligned}$$



□

Corollary 5.1.9. $n \geq 2$ のとき, $\pi_n(X,*)$ は, 和を $[\alpha] + [\beta] = [\alpha +_i \beta]$ により定めると（この和は i にはよらず, さらに）アーベル群となる. また, 群として $\pi_n(X,*) \cong \pi_1(\Omega^{n-1}X,*)$.

Proof. τ を 1 番目と i 番目の成分を入れかえる写像とすると, 全単射

$$\pi_n(X,*) \xrightarrow[\cong]{\tau^*} \pi_n(X,*) \xrightarrow[\cong]{\mathrm{ad}} \pi_1(\Omega^{n-1}X,*)$$

により $\mathrm{ad}(\tau^*([\alpha +_i \beta])) = \mathrm{ad}(\tau^*([\alpha])) * \mathrm{ad}(\tau^*([\beta]))$ となるので, $[\alpha] +_i [\beta] := [\alpha +_i \beta]$ と定めると, これは well-defined で, $\pi_n(X,*)$ は群となり, 上の全単射は群の同型である. $([a] +_1 [b]) +_i ([c] +_1 [d]) = ([a] +_i [c]) +_1 ([b] +_i [d])$ であるから, $[\alpha] +_i [\beta] = [\alpha] +_1 [\beta]$ であり, この和は可換. □

Remark . $\tau^*([\alpha]) = -[\alpha]$ であることが示せる（いずれ機会があれば示す）.

Definition 5.1.10. 群 $\pi_n(X,*)$ を $(X,*)$ の n **次元ホモトピー群 (nth homotopy group)** という. （1 次元ホモトピー群は基本群）.

Lemma 5.1.11. 1. 基点付き写像 $f\colon (X,*) \to (Y,*)$ は, 写像

$$f_*\colon \pi_n(X,*) \to \pi_n(Y,*), \quad f_*([\alpha]) = [f_\sharp(\alpha)] = [f \circ \alpha]$$

を誘導する. $n \geq 1$ のとき, これは準同型である.

2. $f \simeq g\colon (X,*) \to (Y,*)$ ならば $f_* = g_*\colon \pi_n(X,*) \to \pi_n(Y,*)$.

exercise 10. 証明せよ. （ヒント: Proposition 2.1.1 の基点付き版（認めてよい）と Lemma 5.1.3.1 を使う. ）

Proposition 5.1.12. 1. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を基点付き写像とすると,

$$(gf)_* = g_* f_*\colon \pi_n(X,*) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y,*) \xrightarrow{g_*} \pi_n(Z,*)$$

2. 恒等写像 $\mathrm{id}\colon X \to X$ は恒等写像を誘導する.

$$(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}\colon \pi_n(X,*) \to \pi_n(X,*)$$

exercise 11. （定義からほぼ明らかだけど）証明せよ.

Remark .

$$\begin{aligned}\pi_0&\colon ho(\mathbf{(Top)}_*) \to \mathbf{(Set)}_* \\ \pi_1&\colon ho(\mathbf{(Top)}_*) \to \mathbf{(Grp)}\end{aligned}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\pi_n\colon ho(\mathbf{(Top)}_*) \to \mathbf{(Abel)}$$

は関手である.

Lemma 5.1.13. $f\colon (X,*) \to (Y,*)$ を基点付き写像とする. f の誘導する写像

$$f_\sharp\colon \Omega^k X = F((I^k, \partial I^k), (X,*)) \to F((I^k, \partial I^k), (Y,*)) = \Omega^k Y$$

を $\Omega^k f$ と書く: $(\Omega^k f)(\alpha) = f \circ \alpha$. このとき次は可換:

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X,*) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathrm{ad}"', "\cong"] & \pi_n(Y,*) \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{ad}"] \\ \pi_1(\Omega^{n-1}X,*) \arrow[r, "(\Omega^{n-1}f)_*"'] & \pi_1(\Omega^{n-1}Y,*) \end{tikzcd}$$

Remark .

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X,*) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathrm{ad}"', "\cong"] & \pi_n(Y,*) \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{ad}"] \\ \pi_k(\Omega^{n-k}X,*) \arrow[r, "(\Omega^{n-k}f)_*"'] & \pi_k(\Omega^{n-k}Y,*) \end{tikzcd}$$

Definition 5.1.14. $(X,A,*)$ を基点付き空間対, $1 \leq i \leq n$ とする.
$\alpha, \beta \in F((I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X,A,*))$ に対し, $\alpha +_i \beta \in F((I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X,A,*))$ を

$$(\alpha +_i \beta)(t_1, \dots, t_{n+1}) = \begin{cases} \alpha(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i, t_{i+1}, \dots, t_{n+1}), & t_i \leq \frac{1}{2} \\ \beta(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i - 1, t_{i+1}, \dots, t_{n+1}), & t_i \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

で定める

Remark .

$$\begin{aligned} J^n &= (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \{0\}) \subset I^n \times I \\ J^0 &= \{0\} \end{aligned}$$

であった. 上の定義で $i \leq n$ というのは $n+1$ のタイポではない. 最後の座標は別扱い.

exercise 12. $\alpha +_i \beta \in F((I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X,A,*))$ であること, つまり

- $\alpha +_i \beta\colon I^{n+1} \to X$ は連続

- $t \in \partial I^{n+1}$ なら $(\alpha +_i \beta)(t) \in A$
- $t \in J^n$ なら $(\alpha +_i \beta)(t) = *$

であることを確かめよ.

基点付き空間対 $(X,A,*)$ に対し, 空間 $P(X,A)$ を

$$P(X,A) := F((I, \partial I, J^0), (X,A,*))$$

により定める. $P(X,A)$ の元は, X の道 $l\colon I \to X$ で, $l(0) = *$, $l(1) \in A$ を満たすものである.

随伴 $F(I, F(I^n, X)) \cong F(I^{n+1}, X) \cong F(I^n, F(I,X))$ の制限により全単射

$$\begin{array}{ccc} F((I, \partial I, J^0), (\Omega^n X, \Omega^n A, *)) & \subset & F(I, F(I^n, X)) \\ \wr\Vert & & \wr\Vert \\ F((I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X,A,*)) & \subset & F(I^{n+1}, X) \\ \wr\Vert & & \wr\Vert \\ F((I^n, \partial I^n), (P(X,A),*)) & \subset & F(I^n, F(I,X)) \end{array}$$

及び

$$\begin{array}{ccc} \big[(I, \partial I, J^0), (\Omega^n X, \Omega^n A, *)\big] & = & \pi_1(\Omega^n X, \Omega^n A, *) \\ \wr\Vert & & \\ \big[(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X,A,*)\big] & = & \pi_{n+1}(X,A,*) \\ \wr\Vert & & \\ [(I^n, \partial I^n), (P(X,A),*)] & = & \pi_n(P(X,A),*) \end{array}$$

が得られ, これらの全単射は $+_i$ を保つことが分かる.

Definition 5.1.15. $n \geq 1$ のとき, $\pi_{n+1}(X,A,*)$ は, 和を $[\alpha] + [\beta] = [\alpha +_i \beta]$ により定めると群となる. さらに, $n \geq 2$ のときはアーベル群となる. これを $n+1$ **次元相対ホモトピー群**あるいは**空間対の** $n+1$ **次元ホモトピー群**という.

群として $\pi_{n+1}(X,A,*) \cong \pi_n(P(X,A),*)$ である. さらに（$n \geq 1$ のときは）$\pi_1(\Omega^n X, \Omega^n A, *)$ も群となり $\pi_{n+1}(X,A,*) \cong \pi_1(\Omega^n X, \Omega^n A, *)$.

Remark . 射影 $I^{n+1} \to I^{n+1}/J^n$ 及び Lemma 3.2.8 により同型

$$\begin{aligned} \pi_{n+1}(X,A,*) &= [(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X,A,*)] \\ &\cong [(I^{n+1}/J^n, \partial I^{n+1}/J^n), (X,A)]_* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cong [(D(n+1), S(n)), (X,A)]_* \\ &\cong [(D^{n+1}, S^n), (X,A)]_* \end{aligned}$$

が得られる.

Lemma 5.1.16. 1. 基点付き空間対の写像 $f\colon (X,A,*) \to (Y,B,*)$ は, 写像

$$f_*\colon \pi_{n+1}(X,A,*) \to \pi_{n+1}(Y,B,*), \quad f_*([\alpha]) = [f_\sharp(\alpha)] = [f \circ \alpha]$$

を誘導する. $n \geq 1$ のとき, これは準同型である.

2. $\pi_{n+1}(X,*,*) = \pi_{n+1}(X,*)$ である. よって包含 $(X,*,*) \to (X,A,*)$ により写像

$$\pi_{n+1}(X,*) \to \pi_{n+1}(X,A,*)$$

が定まる.

3. $f \simeq g\colon (X,A,*) \to (Y,B,*)$ ならば $f_* = g_*\colon \pi_{n+1}(X,A,*) \to \pi_n(Y,B,*)$.

Proposition 5.1.17. 1. $f\colon (X,A,*) \to (Y,B,*)$, $g\colon (Y,B,*) \to (Z,C,*)$ を基点付き空間対の写像とすると,

$$(gf)_* = g_* f_*\colon \pi_{n+1}(X,A,*) \xrightarrow{f_*} \pi_{n+1}(Y,B,*) \xrightarrow{g_*} \pi_{n+1}(Z,C,*)$$

2. 恒等写像 $\mathrm{id}\colon X \to X$ は恒等写像を誘導する.

$$(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}\colon \pi_{n+1}(X,A,*) \to \pi_{n+1}(X,A,*)$$

Lemma 5.1.18. $f\colon (X,A,*) \to (Y,B,*)$ を基点付き空間対の写像とする. このとき次は可換:

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(X,A,*) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathrm{ad}"', "\cong"] & \pi_{n+1}(Y,B,*) \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{ad}"] \\ \pi_1(\Omega^n X, \Omega^n A, *) \arrow[r, "(\Omega^n f)_*"'] & \pi_1(\Omega^n Y, \Omega^n B, *) \end{tikzcd}$$

Definition 5.1.19. $I^n \times \{1\}$ への制限により得られる写像

$$\begin{aligned} F((I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X,A,*)) &\longrightarrow F((I^n, \partial I^n), (A,*)) \\ \alpha &\longmapsto \alpha|_{I^n \times \{1\}} \end{aligned}$$

はホモトピー集合の間の写像

$$\partial\colon \pi_{n+1}(X,A,*) \to \pi_n(A,*), \quad \partial([\alpha]) = [\alpha|_{I^n \times \{1\}}]$$

を定める. これを**境界写像**という.

$n \geq 1$ のとき, 境界写像は準同型である（ことが容易に分かる）. これを**境界準同型**とよぶ.

Proposition 5.1.20. $f\colon (X,A,*) \to (Y,B,*)$ を基点付き空間対の写像とする. このとき次は可換:

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(X,A,*) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_n(A,*) \arrow[d, "f_*"] \\ \pi_{n+1}(Y,B,*) \arrow[r, "\partial"'] & \pi_n(B,*) \end{tikzcd}$$

Proof. $i\colon I^n \to I^{n+1}$ を $i(t) = (t,1)$ により定めると, $\partial([\alpha]) = [\alpha \circ i]$ である.

$$\begin{aligned} f_*\partial([\alpha]) &= f_*([\alpha \circ i]) \\ &= [f \circ \alpha \circ i] \\ \partial f_*([\alpha]) &= \partial([f \circ \alpha]) \\ &= [f \circ \alpha \circ i] \end{aligned}$$

□

Lemma 5.1.21. 次は可換:

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(X,A,*) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mathrm{ad}"', "\cong"] & \pi_n(A,*) \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{ad}"] \\ \pi_1(\Omega^n X, \Omega^n A, *) \arrow[r, "\partial"'] & \pi_0(\Omega^n A, *) \end{tikzcd}$$

5.2 完全列

Definition 5.2.1. 基点付き集合の間の基点を保つ写像 $f\colon A \to B$ に対し, $f^{-1}(*)$ を $\mathrm{Ker}\, f$ と書く:

$$\mathrm{Ker}\, f = \{a \in A \mid f(a) = *\}$$

基点付き集合の間の基点を保つ写像の列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

は, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$ であるとき**完全列 (exact sequence)** であるという. また, 基点付き集合の間の基点を保つ写像の列

$$\dots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

は, 各 n に対し $\mathrm{Im}\, f_n = \mathrm{Ker}\, f_{n-1}$ であるとき, 完全列とよばれる.

群は, 単位元を基点として基点付き集合とみなす. 明らかに群の準同型は基点を保つ. 群と準同型の列

$$\dots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

は, 基点付き集合の列として完全であるとき, **群の完全列**とよばれる.

Remark . $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow gf = *$.

Theorem 5.2.2. $(X,A,*)$ を基点付き空間対, $i\colon (A,*) \to (X,*)$, $j\colon (X,*,*) \to (X,A,*)$ を包含写像とする. 次は完全列:

$$\dots \longrightarrow \pi_{n+1}(X,A,*) \xrightarrow[\partial]{} \pi_n(A,*) \xrightarrow[i_*]{} \pi_n(X,*) \xrightarrow[j_*]{} \pi_n(X,A,*) \longrightarrow$$

$$\dots \xrightarrow[j_*]{} \pi_1(X,A,*) \xrightarrow[\partial]{} \pi_0(A,*) \xrightarrow[i_*]{} \pi_0(X,*)$$

Proof. まず

$$\pi_1(A,*) \xrightarrow[i_*]{} \pi_1(X,*) \xrightarrow[j_*]{} \pi_1(X,A,*) \xrightarrow[\partial]{} \pi_0(A,*) \xrightarrow[i_*]{} \pi_0(X,*)$$

が完全であることを示す.

1.
$$\pi_1(X,A,*) \xrightarrow[\partial]{} \pi_0(A,*) \xrightarrow[i_*]{} \pi_0(X,*)$$

(a) $[l] \in \pi_1(X,A,*) = [(I, \{0,1\}, \{0\}), (X,A,*)]$ とし, $l\colon I \to X$ をその代表元とする. $i_*\partial([l]) = [l(1)]$ であるが, l が $l(0) = *$ と $l(1)$ を結ぶ（X の）道を与えるので, $[l(1)] = [l(0)] = *$. ゆえ $i_*\partial([l]) = *$, すなわち $\mathrm{Im}\,\partial \subset \mathrm{Ker}\, i_*$.

(b) $[a] \in \pi_0(A,*)$, $a \in A$ をその代表元, $i_*([a]) = *$ であるとする. $[a] = [*] \in \pi_0(X,*)$ なので, X の道 $l\colon I \to X$ で $l(0) = *$, $l(1) = a$ であるものが存在する. $[l] \in \pi_1(X,A,*)$ であり, $\partial([l]) = [l(1)] = [a]$ である. よって $\mathrm{Ker}\, i_* \subset \mathrm{Im}\,\partial$.

2.
$$\pi_1(X,*) \xrightarrow[j_*]{} \pi_1(X,A,*) \xrightarrow[\partial]{} \pi_0(A,*)$$

(a) $[l] \in \pi_1(X,*) = [(I, \{0,1\}), (X,*)]$ とし, $l\colon (I, \{0,1\}) \to (X,*)$ をその代表元とすると, $\partial j_*([l]) = [l(1)] = [*] = *$ ゆえ, $\mathrm{Im}\, j_* \subset \mathrm{Ker}\,\partial$.

(b) $[l] \in \pi_1(X,A,*)$,

$$l\colon (I, \{0,1\}, \{0\}) \to (X,A,*)$$

をその代表元, $\partial([l]) = [l(1)] = *$ であるとする. このとき, A の道 $u\colon I \to A$ で, $u(0) = l(1)$, $u(1) = *$ となるものが存在する.

$$l * u(s) = \begin{cases} l(2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ u(2s-1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

は $(X,*)$ のループ. $j_*([l * u]) = [l]$ であることを示そう. $H\colon I^2 \to X$ を

$$H(s,t) = \begin{cases} l\left(\frac{2s}{1+t}\right), & s \leq \frac{1+t}{2} \\ u(2s-1-t), & s \geq \frac{1+t}{2} \end{cases}$$

と定めると, H は連続で,

$$\begin{aligned} H(s,0) &= l * u(s) \\ H(s,1) &= l(s) \\ H(1,t) &= u(1-t) \in A \\ H(0,t) &= l(0) = * \end{aligned}$$

なので, $l * u$ から l へのホモトピー $(I, \{0,1\}, \{0\}) \times I \to (X,A,*)$ を与える. よって $j_*([l * u]) = [l]$.

3.
$$\pi_1(A,*) \xrightarrow[i_*]{} \pi_1(X,*) \xrightarrow[j_*]{} \pi_1(X,A,*)$$

(a) $[l] \in \pi_1(A,*)$ とし, $l\colon (I, \{0,1\}) \to (A,*)$ をその代表元とする.

$$l\colon (I, \{0,1\}, \{0\}) \to (X,A,*)$$

が $j_* i_*([l])$ の代表元である. $H\colon (I, \{0,1\}, \{0\}) \times I \to (X,A,*)$ を $H(s,t) = l(st)$ と定めると, H は $*$ から l へのホモトピーを与えるので, $j_* i_*([l]) = *$.

(b) $[l] \in \pi_1(X,*)$, $l\colon (I, \{0,1\}) \to (X,*)$ をその代表元とする.

$$l\colon (I, \{0,1\}, \{0\}) \to (X,A,*)$$

が $j_*([l])$ の代表元である. $j_*([l]) = *$ であるとし, $H\colon (I, \{0,1\}, \{0\}) \times I \to (X,A,*)$ を $*$ から l へのホモトピーとする. $H(1,t) \in A$, $H(1,0) = *(1) = *$,

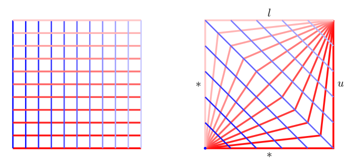
$H(1,1) = l(1) = *$ なので, $u(t) := H(1,t)$ は A のループ. $i_*([u]) = [l]$ であることを示そう. $F\colon I^2 \to I^2$ を

$$F(s,t) = \begin{cases} (2s(1-t), 2st), & s \le \frac{1}{2} \\ (1-t+(2s-1)t, (2s-1)(1-t)+t), & s \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると連続で,

$$\begin{aligned} F(0,t) &= (0,0) \\ F(1,t) &= (1,1) \\ F(s,0) &= \begin{cases} (2s,0), & s \le \frac{1}{2} \\ (1,2s-1), & s \ge \frac{1}{2} \end{cases} \\ F(s,1) &= \begin{cases} (0,2s), & s \le \frac{1}{2} \\ (2s-1,1), & s \ge \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

である.



$HF\colon I^2 \to X$ を考えると,

$$\begin{aligned} HF(0,t) &= H(0,0) = * \\ HF(1,t) &= H(1,1) = * \\ HF(s,0) &= \begin{cases} *, & s \le \frac{1}{2} \\ u(2s-1), & s \ge \frac{1}{2} \end{cases} \\ HF(s,1) &= \begin{cases} *, & s \le \frac{1}{2} \\ l(2s-1), & s \ge \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

ゆえ $c * u \simeq c * l$. 従って

$$i_*([u]) = [u] = [c * u] = [c * l] = [l].$$

$n \ge 1$ の部分は次の可換図式より従う:

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(A,*) \arrow[r, "i_*"'] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_{n+1}(X,*) \arrow[r, "j_*"'] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_{n+1}(X,A,*) \arrow[r, "\partial"'] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_n(A,*) \arrow[r, "i_*"'] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_n(X,*) \arrow[d, "\cong"'] \\ \pi_1(\Omega^n A,*) \arrow[r, "i_*"'] & \pi_1(\Omega^n X,*) \arrow[r, "j_*"'] & \pi_1(\Omega^n X,\Omega^n A,*) \arrow[r, "\partial"'] & \pi_0(\Omega^n A,*) \arrow[r, "i_*"'] & \pi_0(\Omega^n X,*) \end{tikzcd}$$

□

5.3 Serre Fibration

Definition 5.3.1. 連続写像 $p\colon E \to B$ が, 位相空間 W に関し**被覆ホモトピー性質（covering homotopy property, CHP）**あるいは**ホモトピー持ち上げ性質（homootopy lifting property, HLP）**を持つ $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 図の外側の四角形を可換にする（すなわち $pf = Hi_0$）任意の連続写像 $f\colon W \to E$ と, 任意のホモトピー $H\colon W \times I \to B$ に対し, 連続写像 $G\colon W \times I \to E$ で, 図を可換にするもの（$pG = H$ かつ $Gi_0 = f$）が存在する（このような G を (f,H) の持ち上げ拡張という）.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ W \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "G"] & B \end{tikzcd}$$

Definition 5.3.2. 連続写像 $p\colon E \to B$ は, すべてのキューブ I^n（$n \ge 0$）に対し CHP を持つとき, **Serre ファイブレーション（Serre fibration）**とよばれる. $E \ne \emptyset$ とする?

Definition 5.3.3. 連続写像 $p\colon E \to B$ は, すべての位相空間に対し CHP を持つとき, **Hurewicz ファイブレーション（Hurewicz fibration）**, あるいは**ファイブレーション**とよばれる.

exercise 13. $p\colon E \to B$ を Serre ファイブレーションとする. $E \ne \emptyset$ で B が弧状連結ならば, p は全射である.

ヒント: $* \in E$ をひとつ固定する. $p(*)$ と $b \in B$ を結ぶ道 l をとり, $I^0 = \{0\}$ に対する

CHP を使う.

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "*"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "l"'] & B \end{tikzcd}$$

Example 5.3.4. 直積空間の射影 $p\colon B \times F \to B$ はファイブレーションである. 実際, $pf = Hi_0$ なる写像 f, H に対し, $G\colon W \times I \to B \times F$ を $G(w,t) = (H(w,t), p_2 f(w))$ と定めると連続で,

$$\begin{aligned} pG(w,t) &= p(H(w,t), p_2 f(w)) \\ &= H(w,t) \\ Gi_0(w) &= G(w,0) \\ &= (H(w,0), p_2 f(w)) \\ &= (pf(w), p_2 f(w)) \\ &= f(w) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & B \times F \arrow[d, "p"] \\ W \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Definition 5.3.5. 連続写像 $p\colon E \to B$ は, ある位相空間 F が存在し, 任意の $b \in B$ に対し, b の近傍 U と, 次の図式が可換となるような同相 $p^{-1}(U) \cong U \times F$ が存在するとき, **F をファイバーとする局所自明ファイバー空間**という.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

F が離散位相空間のときは**被覆空間**という.

Example 5.3.6. 写像 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{2\pi x i}$ は, $\mathbb{Z}$ をファイバーとする被覆空間である.

Example 5.3.7. Hopf 写像 $q\colon S^3 \to S^2$ は S^1 をファイバーとする局所自明ファイバー空間である.

Theorem 5.3.8. $p\colon E \to B$ を連続写像, $\mathcal{U}$ を B の開被覆とする. 任意の $U \in \mathcal{U}$ に対し $p|_U\colon p^{-1}(U) \to U$ が Serre ファイブレーションならば, p は Serre ファイブレーションである.

Corollary 5.3.9. 局所自明ファイバー空間は Serre ファイブレーションである.

Lemma 5.3.10. $p\colon E \to B$ を Serre ファイブレーションとする. 空間対として $(X,A) \cong (I^{n+1}, I^n \times \{0\})$ であれば, p は包含 $i\colon A \to X$ に対し lifting property を持つ, すなわち, 次の左側の図式が可換ならば, 右側の図式を可換にするような連続写像 $X \to E$ が存在する:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"'] & B \end{tikzcd}$$

Proof. $\varphi\colon (I^{n+1}, I^n \times \{0\}) \to (X,A)$ を空間対の同相写像とする. 次の左側の図式は可換であるから, 右側の図式を可換にするような連続写像 $G\colon I^{n+1} \to E$ が存在する:

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r, "\varphi i_0"] \arrow[d, "i_0"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ I^{n+1} \arrow[r, "\varphi"'] & X \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I^n \arrow[r, "\varphi i_0"] \arrow[d, "i_0"'] & A \arrow[r, "f"] & E \arrow[d, "p"] \\ I^{n+1} \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[urr, "G"] & X \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

$\tilde{H} := G\varphi^{-1}$ とおくと,

$$\begin{aligned} p\tilde{H} &= pG\varphi^{-1} = H\varphi\varphi^{-1} = H \\ \tilde{H}i &= G\varphi^{-1}i = Gi_0(\varphi i_0)^{-1} \\ &= f\varphi i_0(\varphi i_0)^{-1} = f \end{aligned}$$

□

Proposition 5.3.11. $p\colon E \to B$ を Serre ファイブレーションとする. $* \in B$ に対し, $F := p^{-1}(*)$ とおき, 点 $* \in F$ をとる.

このとき, $n \ge 0$ に対し

$$p_*\colon \pi_{n+1}(E,F,*) \to \pi_{n+1}(B,*,*) = \pi_{n+1}(B,*)$$

は全単射である.

Proof. 全射であること.

$[\alpha] \in \pi_{n+1}(B,*,*) = [(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (B,*,*)]$ とし,

$$\alpha\colon (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (B,*,*)$$

を代表元とすると次の左側の図式は可換である. $(I^n \times I, J^n) \cong (I^n \times I, I \times \{0\})$ であるから右側の図式を可換にするような写像 $\beta\colon I^{n+1} \to E$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} J^n \arrow[r, "*"] \arrow[d, hook] & E \arrow[dd, "p"] \\ \partial I^{n+1} \arrow[d, hook] & \\ I^n \times I \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J^n \arrow[r, "*"] \arrow[d, hook] & E \arrow[dd, "p"] \\ \partial I^{n+1} \arrow[d, hook] & \\ I^n \times I \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[uur, "\beta"] & B \end{tikzcd}$$

$$p\beta\left(\partial I^{n+1}\right) = \alpha\left(\partial I^{n+1}\right) = *$$

であるから,

$$\beta\left(\partial I^{n+1}\right) \subset p^{-1}(*) = F$$

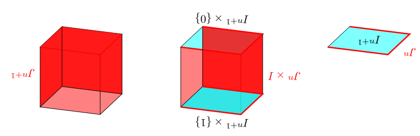
よって β は空間の 3 対の写像 $\beta\colon (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (E,F,*)$ である. $[\beta] \in \pi_{n+1}(E,F,*)$ を考えると $p_*([\beta]) = [p\beta] = [\alpha]$.

単射であること.

$[\beta_0], [\beta_1] \in \pi_{n+1}(E,F,*)$, $p_*([\beta_0]) = p_*([\beta_1])$ とし,

$$H\colon (I^{n+1} \times I, \partial I^{n+1} \times I, J^n \times I) \to (B,*,*)$$

を $p\beta_0$ から $p\beta_1$ へのホモトピーとする.



写像

$$\beta\colon I^{n+1} \times \partial I \cup J^n \times I \to E$$

を

$$\beta|_{I^{n+1} \times \{0\}} = \beta_0$$

$$\begin{aligned} \beta|_{I^{n+1} \times \{1\}} &= \beta_1 \\ \beta|_{J^n \times I} &= * \end{aligned}$$

により定めると, well defined, 連続で次の図式は可換:

$$\begin{tikzcd} I^{n+1} \times \partial I \cup J^n \times I \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^{n+1} \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

最後の 2 つの座標を入れ替える同相写像 $I^{n+1} \times I \cong I^{n+1} \times I$ により

$$\begin{aligned} I^{n+1} \times \partial I \cup J^n \times I &= I^{n+1} \times \partial I \cup (\partial I^n \times I \cup I^n \times \{0\}) \times I \\ &\cong I^n \times \partial I \times I \cup \partial I^n \times I \times I \cup I^n \times I \times \{0\} \\ &= (I^n \times \partial I \cup \partial I^n \times I) \times I \cup I^n \times I \times \{0\} \\ &= \partial I^{n+1} \times I \cup I^{n+1} \times \{0\} = J^{n+1} \end{aligned}$$

となるので, 空間対として

$$(I^{n+1} \times I, I^{n+1} \times \partial I \cup J^n \times I) \cong (I^{n+1} \times I, J^{n+1}) \cong (I^{n+1} \times I, I^{n+1} \times \{0\})$$

であるから, H の持ち上げ $G\colon I^{n+1} \times I \to E$ が存在する. 先と同様に $G(\partial I^{n+1} \times I) \subset F$ がわかり, G は β_0 から β_1 へのホモトピー

$$G\colon (I^{n+1} \times I, \partial I^{n+1} \times I, J^n \times I) \to (E,F,*)$$

を与える. よって $[\beta_0] = [\beta_1]$. □

Corollary 5.3.12. $p\colon E \to B$ を Serre ファイブレーションとする. $B_0 \subset B$ に対し, $E_0 := p^{-1}(B_0)$ とおき, 点 $* \in B_0$, $* \in E_0$ で $p(*) = *$ となるものをとる. このとき, $n \ge 1$ に対し

$$p_*\colon \pi_n(E,E_0,*) \to \pi_n(B,B_0,*)$$

は全単射である.

Theorem 5.3.13. $p\colon E \to B$ を Serre ファイブレーションとする. $* \in B$ に対し, $F := p^{-1}(*)$ とおき, 点 $* \in F$ をとる. $i\colon F \to E$ を包含写像とする.

$n \ge 1$ に対し次の合成

$$\Delta\colon \pi_n(B,*) = \pi_n(B,*,*) \xrightarrow[\cong]{p_*^{-1}} \pi_n(E,F,*) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F,*)$$

を**境界準同型**とよぶ.

このとき次は完全列:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B,*) \xrightarrow[\Delta]{} \pi_n(F,*) \xrightarrow[i_*]{} \pi_n(E,*) \xrightarrow[p_*]{} \pi_n(B,*) \xrightarrow[\Delta]{}$$

$$\cdots \xrightarrow[p_*]{} \pi_1(B,*) \xrightarrow[\Delta]{} \pi_0(F,*) \xrightarrow[i_*]{} \pi_0(E,*) \xrightarrow[p_*]{} \pi_0(B,*)$$

これを **(Serre) ファイブレーションのホモトピー完全列**とよぶ.

Proof. 次の図式は可換であるから, 最後の部分を除いて完全であることが分かる.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \pi_n(E,*) \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "p_*"'] & \pi_n(E,F,*) \arrow[r, "\partial"'] \arrow[d, "\cong"', "p_*"] & \pi_{n-1}(F,*) \arrow[r, "i_*"'] & {} \\ & & \pi_n(B,*) \arrow[ur, "\Delta"'] & & \end{tikzcd}$$

最後の部分

$$\pi_0(F,*) \xrightarrow[i_*]{} \pi_0(E,*) \xrightarrow[p_*]{} \pi_0(B,*)$$

については, $F = p^{-1}(*)$ であるから $p_* i_* = (pi)_* = *$.

$p_*([e]) = *$ とする. $[p(e)] = *$ ゆえ, $p(e)$ と $*$ を結ぶ道 $l\colon I \to B$ が存在する. CHP より, 道 $\tilde{l}\colon I \to E$ で, $p\tilde{l} = l$, $\tilde{l}(0) = e$ となるものが存在する. $p\tilde{l}(1) = l(1) = *$ ゆえ $\tilde{l}(1) \in F$. $[e] = [\tilde{l}(0)] = [\tilde{l}(1)]$ ゆえ $[e] \in \operatorname{Im} i_*$. □

Remark . 一般には $\pi_0(F,*)$ は群ではないので, 完全列

$$\pi_1(E,*) \xrightarrow[p_*]{} \pi_1(B,*) \xrightarrow[\Delta]{} \pi_0(F,*)$$

の Δ は準同型ではない. が, 単なる写像というよりは少しよい性質を持っている.

$\Delta([\alpha]) = \Delta([\beta])$ ならば, ある $[l] \in \pi_1(E,*)$ が存在し, $[\beta] = p_*([l])[\alpha]$ となる.

5.4 Blakers-Massey

5.5 Freudenthal

5.6 計算例

基点の取り替えについては扱わなかったが, X が弧状連結ならば, 任意の $x_0, x_1 \in X$ に対し $\pi_n(X,x_0) \cong \pi_n(X,x_1)$ であること, また, A が弧状連結ならば, 任意の $x_0, x_1 \in A$ に対し $\pi_n(X,A,x_0) \cong \pi_n(X,A,x_1)$ であることが示せる. （同型写像を与えることによ

り示されるが, これらの合成がどの様に振る舞うかということも重要であり（ある意味で）分かる）.

よって, 基点を気にしないときは $\pi_n(X,*)$, $\pi_n(X,A,*)$ を $\pi_n(X)$, $\pi_n(X,A)$ と書くことも多い.

Example 5.6.1. 明らかに $\pi_n(*,*) = 0$.

$(\mathbb{R},*) \cong (*,*)$ ゆえ $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$.

I^n は弧状連結であり, $n \ge 1$ のとき $\partial I^n \ne \emptyset$ である. よって, X が離散位相空間ならば, $n \ge 1$ のとき

$$\pi_n(X,*) = [(I^n, \partial I^n), (X,*)] = [(I^n, \partial I^n), (*,*)] = 0$$

であり, また, 集合として $\pi_0(X,*) \cong X$ である.

Remark . π_1 は一般には可換ではないので 0 とは書かず 1 と書くことが多い. ここでは自明な群（単位元のみからなる群）という意味.

π_0 は群ではない. ここでは一点のみからなるという意味.

Theorem 5.6.2.

$$\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n \ne 1 \end{cases}$$

Proof. S^1 は弧状連結だから $\pi_0(S^1) = 0$.

被覆空間 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = \exp(2\pi i x)$ のホモトピー完全列を考える. ファイバー $\mathbb{Z}$ は離散空間なので $n \ge 1$ に対し $\pi_n(\mathbb{Z}) = 0$. $n \ge 1$ に対し次は完全

$$\begin{tikzcd} \pi_n(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_n(S^1) \arrow[r, "\Delta"'] & \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) \arrow[r] & \pi_{n-1}(\mathbb{R}) \arrow[d, equal] \\ 0 & & & 0 \end{tikzcd}$$

よって, $n \ge 2$ のとき群として $\pi_n(S^1) \cong \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) = 0$.

$n = 1$ のときを考える. Δ の定義を思い出すと, 次の図式は可換である. ただし,

$e_1(f) = f(1)$, $p_\sharp(f) = p_*[f] = [pf]$ （$0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ と $1 \in S^1$ を基点にとる）.

$$\begin{tikzcd}
 & F((I,\{0,1\},0),(\mathbb{R},\mathbb{Z},0)) \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "p_\sharp"'] \arrow[ddr, "e_1"] & & \\
 & \pi_1(\mathbb{R},\mathbb{Z},0) \arrow[d, "\cong"', "p_*"] \arrow[dr, "\partial"] & & \\
0 \arrow[r] & \pi_1(S^1,1) \arrow[r, "\varDelta"'] & \pi_0(\mathbb{Z},0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

$f, g \in F((I,\{0,1\},0),(\mathbb{R},\mathbb{Z},0))$ に対し,

$$(f*g)(t) = \begin{cases} f(2t), & t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1)+f(1), & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

と定めると, $f*g\colon I \to \mathbb{R}$ は連続で, $(f*g)(0) = 0$, $(f*g)(1) = g(1)+f(1) \in \mathbb{Z}$ であるから, $f*g \in F((I,\{0,1\},0),(\mathbb{R},\mathbb{Z},0))$ であり, $e_1(f*g) = e_1(f)+e_1(g)$ である.
$f(1) \in \mathbb{Z}$ であるから,

$$\begin{aligned}
(p(f*g))(t) &= p((f*g)(t)) \\
&= \exp(2\pi i(f*g)(t)) \\
&= \begin{cases} \exp(2\pi i f(2t)) = p(f(2t)), & t \le \frac{1}{2} \\ \exp(2\pi i(g(2t-1)+f(1))) = \exp(2\pi i g(2t-1)) = p(g(2t-1)), & t \ge \frac{1}{2} \end{cases} \\
&= ((pf)*(pg))(t)
\end{aligned}$$

よって

$$p_\sharp(f*g) = p_\sharp(f) * p_\sharp(g)$$

ゆえ

$$\begin{aligned}
\varDelta(p_\sharp(f)) * (p_\sharp(g)) &= \varDelta(p_\sharp(f*g)) \\
&= e_1(f*g) \\
&= e_1(f)+e_1(g) \\
&= \varDelta(p_\sharp(f)) + \varDelta(p_\sharp(g))
\end{aligned}$$

$p_\sharp$ は全射なので, $\varDelta\colon \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$ は準同型. よって, 完全性より（準同型なので単射が分かり）同型. （Theorem 5.3.13 の後の Remark を使うと全単射であることはすぐ分かる. 準同型であることは, ここでやったのと同様な議論が必要だと思う.） □

次の二つの定理を示したかったが今回は時間の都合により証明出来ない.

Theorem 5.6.3. $i < n$ のとき $\pi_i(S^n) = 0$. □

Theorem 5.6.4 (Freudenthal の懸垂定理（の特別な場合））**.** 懸垂準同型

$$\Sigma\colon \pi_i(S^n) \to \pi_{i+1}(S^{n+1})$$

は $i < 2n-1$ のとき同型で, $i = 2n-1$ のとき全射である.

□

Theorem 5.6.5. $n \ge 1$ とする. このとき,
$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.
$\pi_n(S^n) \cong [S^n, S^n]_*$ とみたとき, $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$ が生成元.
$\Sigma\colon \pi_n(S^n) \to \pi_{n+1}(S^{n+1})$ は同型.

Proof. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ は上で示した. そこでの同型対応を見れば, $\mathrm{id}\colon S^1 \to S^1$ が生成元であることが分かる.
Hopf ファイブレーション $S^1 \to S^3 \to S^2$ のホモトピー完全列を考えると, 次は完全.

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_2(S^3) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \longrightarrow & \pi_1(S^1) & \longrightarrow & \pi_1(S^2) \\
\parallel & & & & \parallel & & \parallel \\
0 & & & & \mathbb{Z} & & 0
\end{array}$$

よって $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.
$1 = 2 \cdot 1 - 1$ ゆえ, Freudenthal の懸垂定理より $\Sigma\colon \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \to \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ は全射準同型. よって同型.
$n \ge 2$ のとき, $n < 2n-1$ であるから,

$$\Sigma\colon \pi_n(S^n) \to \pi_{n+1}(S^{n+1})$$

は同型.
よって, $n \ge 1$ のとき $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, $\Sigma\colon \pi_n(S^n) \to \pi_{n+1}(S^{n+1})$ は同型. $\Sigma\mathrm{id} = \mathrm{id}$ であるから, $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$ が生成元. □

Theorem 5.6.6. $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ で, Hopf の写像 $q\colon S^3 \to S^2$ が生成元.

Proof. Hopf ファイブレーション $S^1 \to S^3 \to S^2$ のホモトピー完全列

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_3(S^1) & \longrightarrow & \pi_3(S^3) & \xrightarrow[q_*]{} & \pi_3(S^2) & \longrightarrow & \pi_2(S^1) \\
\parallel & & \parallel & & & & \parallel \\
0 & & \mathbb{Z} & & & & 0
\end{array}$$

より明らか. □

exercise 14. 0 でない準同型写像 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ は単射であることを示せ.

exercise 15.

1. 次が（集合の）完全列であれば f は全射.

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow *$$

2. 次が（アーベル）群の完全列であれば f は単射.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

付録 A

予備知識

これまでに学んだ（かもしれない）であろう事で必要なことをまとめておく. 証明がついていないものは幾何学序論の私の講義ノート [6] にあると思う.

A.1　像と逆像

$f\colon X \to Y$ を写像とする.
$A \subset X$, $B \subset Y$ に対し,

$$f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$$

が成り立つ. また, Y の部分集合 $f_\star(A)$ を

$$f_\star(A) = f(A^c)^c$$

で定めると

$$f^{-1}(B) \subset A \Leftrightarrow B \subset f_\star(A)$$

が成り立つ. 実際,

$$f^{-1}(B) \subset A \Leftrightarrow f^{-1}(B)^c \supset A^c$$

$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ だから

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow f^{-1}(B^c) \supset A^c \\
&\Leftrightarrow B^c \supset f(A^c) \\
&\Leftrightarrow B \subset f(A^c)^c
\end{aligned}$$

特に

$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B) \qquad\qquad f_\star(A) \subset f_\star(A)$$

だから

$$B \subset f_\star\left(f^{-1}(B)\right) \qquad\qquad f^{-1}\left(f_\star(A)\right) \subset A$$

が成り立つ.

A.2　同値関係

Definition A.2.1. 集合 X 上の関係が次の 3 つの条件:

1. （**反射律, reflexive law**） $x \sim x$,
2. （**対称律, symmetric law**） $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
3. （**推移律, transitive law**） $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

を満たすとき, 関係 $\sim$ は集合 X 上の**同値関係 (equivalence relation)** であるという.

Definition A.2.2. 関係 $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする. X の要素 $a \in X$ に対し, a と同値な要素全体のなす X の部分集合

$$C_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

を a の**同値類 (equivalence class)** という. a の同値類を $[a]$, $\bar{a}$ 等と書くことも多い.
$x \in C_a$ をひとつとることを, x を C_a の**代表元 (representative)** としてとるという.

Definition A.2.3. X を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする.

1. 同値類の全体 $\{C_a \mid a \in X\}$ を $X/\sim$ と書き, 同値関係 $\sim$ による X の**商集合 (quotient set)** という.
2. $a \in X$ を $C_a \in X/\sim$ にうつす写像

$$\begin{array}{ccc}
X & \longrightarrow & X/\sim \\
\cup & & \cup \\
a & \longmapsto & C_a
\end{array}$$

を**自然な写像** あるいは**商写像**, **自然な射影**などという.

Proposition A.2.4. X を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とし, $\pi\colon X \to X/\sim$ をこの関係による商集合への自然な射影, すなわち $x \in X$ に, x を含む同値類 $C_x \in X/\sim$ を対応させる写像とする.
$f\colon X \to Y$ を写像とする. 次は同値である.

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$.

2. $f = \bar{f} \circ \pi$ となるような写像 $\bar{f}\colon X/\sim \to Y$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/\sim . \arrow[ur, dotted, "\exists \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

さらに, このような写像 $\bar{f}$ は一意的である. この写像 $\bar{f}$ を f により**誘導される写像 (induced map)** という.
具体的に書けば $\bar{f}(C_x) = f(x)$ である.

Corollary A.2.5. X, Y を集合, $\sim$, $\approx$ をそれぞれ X, Y 上の同値関係, $p\colon X \to X/\sim$, $q\colon Y \to Y/\approx$ をそれぞれ自然な射影とする.
$f\colon X \to Y$ を写像とする. 次は同値である.

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$.
2. $q \circ f = \bar{f} \circ p$ となるような写像 $\bar{f}\colon X/\sim \to Y/\approx$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\
X/\sim \arrow[r, dotted, "\exists \bar{f}"'] & Y/\approx .
\end{tikzcd}$$

この $\bar{f}$ は $\bar{f}(C_x) = C_{f(x)}$ により与えられる.

Proof. $q \circ f\colon X \to Y/\approx$ に Prop. A.2.4 を使えばよい. □

A.3　群の作用

Definition A.3.1. X を集合, G を群とする. 写像 $\mu\colon X \times G \to X$ が与えられ, 次の条件をみたすとき, G は X に (μ により) 右から作用するという.

1. $\mu(\mu(x,g),h) = \mu(x,gh)$.
2. $\mu(x,e) = x$. ただし $e \in G$ は単位元.

しばしば, $\mu(x,g) \in X$ を $x \cdot g$ あるいは xg と書く. この書き方をすると上の条件は

1. $(xg)h = x(gh)$.
2. $xe = x$.

と書ける.

同様に, 写像 $\nu\colon G \times X \to X$ が与えられ, 次の条件をみたすとき, G は X に (ν により) 左から作用するという.

1. $\nu(h,\nu(g,x)) = \nu(hg,x)$.
2. $\nu(e,x) = x$. ただし $e \in G$ は単位元.

しばしば, $\nu(g,x) \in X$ を $g \cdot x$ あるいは gx と書く. この書き方をすると上の条件は

1. $h(gx) = (hg)x$.
2. $ex = x$.

と書ける.

Lemma A.3.2. G が X に左から作用しているとする. $g \in G$ に対し, 写像 $\nu_g\colon X \to X$ を $\nu_g(x) = \nu(g,x) = g \cdot x$ で定める. 次が成り立つ.

1. $\nu_h \circ \nu_g = \nu_{hg}$.
2. $\nu_e = 1_X$.

特に ν_g は全単射で, $\nu_{g^{-1}}$ がその逆写像を与える.

Proof.

$$\begin{aligned}
\nu_h(\nu_g(x)) &= h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x = \nu_{hg}(x) \\
\nu_e(x) &= e \cdot x = x = 1_X(x) \\
\nu_g \circ \nu_{g^{-1}} &= \nu_{gg^{-1}} = \nu_e = 1_X \\
\nu_{g^{-1}} \circ \nu_g &= \nu_{g^{-1}g} = \nu_e = 1_X
\end{aligned}$$

□

Lemma A.3.3. G が X に左から作用しているとする. 写像 $\mu\colon X \times G \to X$ を $\mu(x,g) = g^{-1} \cdot x$ と定めることにより G は X に右から作用する.

Proof.

$$\begin{aligned}
\mu(\mu(x,g),h) &= h^{-1} \cdot \mu(x,g) = h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x) \\
&= (h^{-1}g^{-1}) \cdot x = (gh)^{-1} \cdot x = \mu(x,gh) \\
\mu(x,e) &= e^{-1} \cdot x = e \cdot x = x
\end{aligned}$$

□

Lemma A.3.4. G が X に右から (左から) 作用しているとする. X における関係 $\sim$ を $x \sim y \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G : x = y \cdot g$ ($x \sim y \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G : x = g \cdot y$) により定めると $\sim$ は同値関係

である．

Proof. 右作用の場合のみ示す．

1. $x = x \cdot e$ ゆえ $x \sim x$.
2. $x \sim y$ とすると, $x = y \cdot g$ となる $g \in G$ がある． $y = y \cdot e = y \cdot (gg^{-1}) = (y \cdot g) \cdot g^{-1} = x \cdot g^{-1}$ ゆえ $y \sim x$.
3. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とすると, $x = y \cdot g$, $y = z \cdot h$ となる $g, h \in G$ がある．このとき $x = y \cdot g = (z \cdot h) \cdot g = z \cdot (hg)$ ゆえ $x \sim z$.

□

Definition A.3.5. G が X に右から作用しているとき, 上の同値関係による商集合を X/G と書き, X を G で割った集合という．
同様に G が X に左から作用しているとき, 上の同値関係による商集合を $G\backslash X$ と書き, X を G で割った集合という．また, $G\backslash X$ を X/G と書くことも多い．

Remark ． G が X に左から作用しているとき, Lem. A.3.3 により与えられる右作用を考えると, これらの作用の定める同値関係は同じであることが $g \cdot y = (g^{-1})^{-1} \cdot y = y \cdot g^{-1}$ より分かる．

Example A.3.6. H を G の部分群とする．群の積 $G \times H \to G$ により H は G に右から作用する．この作用による同値関係 $\sim$ は $g \sim k \Leftrightarrow k^{-1}g \in H$ により与えられる．実際, $g \sim k$ とすると $g = kh$ となる $h \in H$ がある．よって $k^{-1}g = h \in H$. 一方, $k^{-1}g \in H$ とすると $h = k^{-1}g$ とおけば $h \in H$ で $kh = g$.

A.4 部分空間

Definition A.4.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする．A の部分集合族 $\mathcal{O}_A$ を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

と定めると, $\mathcal{O}_A$ は A の位相となる． この位相を X による A の**相対位相 (relative topology)** という．
位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間と見たとき, **部分空間 (subspace)** という．

部分空間への写像の連続性を調べる際, 次は有用である．

Proposition A.4.2. X, Y を位相空間, $B \subset Y$ を部分空間, $i \colon B \to Y$ を包含写像とする．このとき,
写像 $f \colon X \to B$ が連続 $\Leftrightarrow$ 合成 $i \circ f \colon X \to Y$ が連続.

exercise 16. 証明せよ．

Proposition A.4.3. X を位相空間, $X = F_1 \cup F_2$, F_1, F_2 は閉集合とする．また, Y を位相空間, $f \colon X \to Y$ を写像とする．このとき, $f|_{F_i} \colon F_i \to Y$ $(i = 1, 2)$ が連続ならば f は連続である．

exercise 17. 証明せよ．

A.5 直積空間

Definition A.5.1. $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする．直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に, 部分集合の族

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left\{ p_\lambda^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_\lambda \right\}$$

が生成する位相 (この位相を**直積位相** という) をいれた位相空間を, 族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の**直積空間**または**弱位相による直積空間**という．ただし $p_\lambda \colon \prod X_\lambda \to X_\lambda$ は標準的射影.
直積集合には普通とくにことわらなければ直積位相をいれる．

直積位相でよく使う/大事なのは次の性質である．

Theorem A.5.2. $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を直積空間, A を位相空間とする．

1. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し連続写像 $f_\lambda \colon A \to X_\lambda$ が与えられているとする．
   このとき連続写像 $f \colon A \to X$ で, 全ての λ に対し $p_\lambda \circ f = f_\lambda$ をみたすものがただひとつ存在する．
2. $f \colon A \to X$ を写像とする．
   f が連続であるための必要十分条件は全ての λ に対し $p_\lambda \circ f \colon A \to X_\lambda$ が連続となることである．

exercise 18.
1. 直積空間の位相は, 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し p_λ が連続となるような, 最弱の位相であることを示せ．
2. p_λ は開写像であることを示せ．
3. p_λ が閉写像とはならないような例を挙げよ．

4. Theorem A.5.2 を証明せよ．

A.6 商空間

Definition A.6.1. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, Y を集合, $f \colon X \to Y$ を写像とする．Y の部分集合族

$$\mathcal{O}_f = \left\{ O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X \right\}$$

は Y に位相を与える．この位相を f による**等化位相**といい, 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_f)$ を f による**等化空間**という．

Definition A.6.2. 関係 $\sim$ を位相空間 X 上の同値関係とする．商集合 $X/\sim$ に, 自然な射影 $\pi \colon X \to X/\sim$ による等化位相を与えたものを同値関係 $\sim$ による**商空間**という．
定義により,「 $O \subset X/\sim$ が開集合 $\Leftrightarrow \pi^{-1}(O)$ が開集合」である．

Definition A.6.3. X を位相空間, $A \subset X$ を空でない部分空間とする．$A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係による商空間を部分空間 A を**一点に縮めた空間**といい, X/A と書く．

Remark ． $A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係とは, $A \times A$ を含む最小の同値関係（$A \times A$ を含む同値関係全ての共通部分）．
具体的に書けば, $A \times A \cup \Delta(X)$. あるいは

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in A$$

等化位相, 商空間でよく使う/大事なのは次の性質である．

Theorem A.6.4. X, Z を位相空間, Y を集合, $f \colon X \to Y$ を写像とし, Y に f による等化位相を入れる．$g \colon Y \to Z$ を写像とする．
このとき g が連続であるための必要十分条件は $g \circ f \colon X \to Z$ が連続であることである．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Theorem A.6.5. X, Y を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係, $X/\sim$ を商空間, $\pi \colon X \to X/\sim$ を自然な射影とする．

$f \colon X \to Y$ を写像とし, 次が可換であるとする（Proposition A.2.4 参照）．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

このとき, $\bar{f}$ が連続であるための必要十分条件は f が連続であることである．

exercise 19.
1. Definition A.6.1 の $\mathcal{O}_f$ は位相であることを示せ．
2. Definition A.6.1 で, f による等化位相は, f を連続にする最強の位相であることを示せ．
3. Theorem A.6.4 を証明せよ．
4. Theorem A.6.5 を証明せよ．

A.7 ハウスドルフ空間

Definition A.7.1. 位相空間 X が **Hausdorff（ハウスドルフ）空間** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x の近傍 U と y の近傍 V で, $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する．

exercise 20. 位相空間 X が Hausdorff 空間である $\Leftrightarrow$ 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x を含む開集合 O と y を含む開集合 O' で, $O \cap O' = \emptyset$ となるものが存在する．

Example A.7.2. 距離空間は Hausdorff 空間である．実際 X を距離空間, $x, y \in X$, $x \neq y$ とすると, $\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$ で, $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap \mathrm{U}_\varepsilon(y) = \emptyset$.

Theorem A.7.3. Hausdorff 空間において, 1 点は閉集合である．

Theorem A.7.4. Hausdorff 空間の部分空間も Hausdorff.

もう少し一般的に次が成り立つ．

Proposition A.7.5. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする．連続な単射 $f \colon X \to Y$ が存在すれば X も Hausdorff.

Proof. $a, b \in X$, $a \neq b$ とする． f は単射だから $f(a) \neq f(b)$ である． Y は Hausdorff だから $f(a)$ の近傍 U と, $f(b)$ の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある． f は連続なので $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ はそれぞれ a, b の近傍で, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) =$

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. □

Theorem A.7.6. X, Y を位相空間とする．このとき $X \times Y$ が Hausdorff $\Leftrightarrow$ X, Y ともに Hausdorff.

Remark ． 無限個の直積に対しても同様なことが成り立つ．証明もほぼ同じ．

Theorem A.7.7. X を位相空間とする． このとき, X が Hausdorff $\Leftrightarrow$ 対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合.

Corollary A.7.8. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間, $A \subset X$ とし, $f, g \colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき次が成り立つ．

1. X の部分集合
   $$C := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
   は閉集合である．
2. f と g が部分集合 A 上一致すれば, A^a 上一致する．

Example A.7.9. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする．連続関数 $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上一致するならば $f = g$ である．

Corollary A.7.10. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする．写像 $f \colon X \to Y$ が連続ならばグラフ

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

は $X \times Y$ の閉集合.

A.8 コンパクト空間

Definition A.8.1.
1. 位相空間 X が**コンパクト (compact)** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X の任意の開被覆が有限部分被覆をもつ．
2. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトである $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 部分空間 A がコンパクトである．

Remark ． コンパクト Hausdorff 空間のことをコンパクトといい, この定義 A.8.1 の条件をみたす空間を**準コンパクト (quassi-compact)** ということもある．

Proposition A.8.2. $A_1, A_2 \subset X$ がコンパクトならば $A_1 \cup A_2$ もコンパクトである．

Theorem A.8.3. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである．

Theorem A.8.4. コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトである．

Remark ． コンパクト集合の連続写像による逆像はコンパクトとは限らない．例えば $\mathbb{R}$ 上の定数関数を考えてみよ．

Theorem A.8.5. X, Y ともにコンパクトなら $X \times Y$ もコンパクト．

Remark ． 無限個の直積の場合も同様なことが成り立つ（チコノフ (Tikhonov) の定理）が, こちらは選択公理が必要（選択公理と同値）であり証明はもう少し面倒.

Theorem A.8.6. コンパクト空間の無限部分集合は集積点をもつ．

Proof. X をコンパクト空間とする．$X \neq \emptyset$ としてよい．$A \subset X$ が集積点をもたないならば A は有限集合であることを示せばよい．
任意の $x \in X$ に対し, x は A の集積点ではないので, x を含む開集合 O_x で, $(A - \{x\}) \cap O_x = \emptyset$ となるものが存在する．

$$\emptyset = (A - \{x\}) \cap O_x = A \cap \{x\}^c \cap O_x = A \cap O_x \cap \{x\}^c$$

だから

$$A \cap O_x \subset \{x\}$$

である．各 $x \in X$ に対し, この様な O_x をとる．$\{O_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆である．X はコンパクトなので, $x_1, \ldots, x_n \in X$ で,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$$

となるものが存在する．

$$\begin{aligned} A &= A \cap X \\ &= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i} \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} A \cap O_{x_i} \\ &\subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, \ldots, x_n\} \end{aligned}$$

だから, A は有限集合. □

Corollary A.8.7. コンパクト距離空間の任意の点列は収束する部分列を含む.

Proof. X をコンパクト距離空間, $\{x_n\}$ を X の点列とする． $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく．A が有限集合であれば, ある $x \in X$ が存在し, 無限個の番号 n に対し $x_n = x$ となるのでよい．
A が無限集合であれば, A は集積点をもつ．$x \in X$ を集積点とすると, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathrm{U}_{\frac{1}{k}}(x) \cap A$ は無限集合であるので, $x_{n_k} \in \mathrm{U}_{\frac{1}{k}}(x)$, $n_k < n_{k+1}$ となる数列 $\{n_k\}_k$ がとれる．部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ は x に収束する． □

Remark ． 逆も成り立つ．すなわち, 距離空間 X においては, X はコンパクトである $\Leftrightarrow$ 任意の点列は収束する部分列を含む.

A.9 コンパクト Hausdorff 空間

Theorem A.9.1. Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合である．

Corollary A.9.2. コンパクト Hausdorff 空間の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は閉集合であること．

Proof. Thm. A.8.3, A.9.1 よりあきらか. □

Corollary A.9.3. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である．

Proof. Thm. A.8.3, A.8.4, A.9.1 よりあきらか. □

Corollary A.9.4. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射は同相写像である． □

Corollary A.9.5. X をコンパクト空間, Y を Hausdorff 空間, $f \colon X \to Y$ を連続な全射とする．X 上の同値関係 $\sim$ を, $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ により定める．このとき, 誘導写像 $\bar{f} \colon X/\sim \to Y$ は同相写像である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. X はコンパクトで, 商写像 $\pi \colon X \to X/\sim$ は連続な全射なので, Theorem A.8.4 より, $X/\sim$ もコンパクト．
f が連続なので, A.6.5 より $\bar{f}$ は連続である． $f = \bar{f} \circ \pi$ が全射なので, $\bar{f}$ も全射．同値関係の定め方より, あきらかに $\bar{f}$ は単射.

すなわち, $\bar{f}$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射である．よって同相写像. □

Proposition A.9.6. X をコンパクト Hausdorff 空間, $R \subset X \times X$ を同値関係とし, $(x, y) \in R$ のとき $x \sim y$ と書く．このとき次は同値.

1. $X/\sim$ は Hausdorff 空間.
2. R は $X \times X$ の閉集合.
3. 射影 $\pi \colon X \to X/\sim$ は閉写像.

Proof. $1 \Rightarrow 2$.

$$R = (\pi \times \pi)^{-1} \left(\Delta_{X/\sim} \right)$$

より分かる．
$2 \Rightarrow 3$. $F \subset X$ を閉集合とする． $\pi^{-1}(\pi(F)) \subset X$ が閉集合であることを示せばよい．

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(F)) &= \{y \in X \mid \exists x \in F : x \sim y\} \\ &= \{y \in X \mid \exists x \in F : (x, y) \in R\} \\ &= p_2((F \times X) \cap R) \end{aligned}$$

ただし $p_2 \colon X \times X \to X$ は射影．仮定より, F, R は閉集合なので $(F \times X) \cap R$ は閉集合． $X \times X$ はコンパクト, X は Hausdorff なので, p_2 は閉写像 (Corollary A.9.3). よって $\pi^{-1}(\pi(F)) = p_2((F \times X) \cap R) \subset X$ は閉集合.
$3 \Rightarrow 1$. $[x_1], [x_2] \in X/\sim$, $[x_1] \neq [x_2]$ とする． X は Hausdorff ゆえ一点は閉集合．仮定より射影 π は閉写像なので $X/\sim$ でも一点は閉集合. π は連続だから $\pi^{-1}([x_1]), \pi^{-1}([x_2])$ は X の閉集合. $[x_1] \neq [x_2]$ なので $\pi^{-1}([x_1]) \cap \pi^{-1}([x_2]) = \emptyset$. X はコンパクト Hausdorff なので正規．よって

$$\pi^{-1}([x_i]) \subset U_i, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

となる X の開集合 U_1, U_2 が存在する．

$$V_i := \pi_\star(U_i) = \pi(U_i^c)^c \subset X/\sim$$

とおく． U_i は開集合だから U_i^c は閉集合．仮定より π は閉写像なので $\pi(U_i^c)$ は閉集合. よって $V_i = \pi(U_i^c)^c$ は開集合.

$$\pi^{-1}([x_i]) \subset U_i$$

ゆえ

$$\{[x_i]\} \subset \pi_\star(U_i) = V_i$$

すなわち

$$[x_i] \in V_i.$$