

# リザーバーコンピューティングを用いた 安定性変換に基づくカオス制御

飯沼 柊馬  
Shuma Iinuma

坪根 正  
Tadashi Tsubone

2021 年 11 月 1 日

# 1 研究背景

## 1.1 カオスとカオス制御

非線形システムに関する研究は基礎的な面だけでなく工学的な面でも非常に重要である。非線形システムは、線形システムでは生じないカオスと呼ばれる初期値鋭敏性を持つ不安定な振動現象を呈する。一般的に、カオスアトラクタに内在する不安定周期軌道 (UPOs) を安定化する制御をカオス制御と呼ぶ [1]。

## 1.2 安定性変換に基づくカオス制御

坪根らは安定性変換 (STM) に基づくカオス制御法を提案した [2]。安定性変換とは、カオスアトラクタに内在する未知の不安定周期軌道を検出する手法であり、Pingel らによって提案された [5] ~ [7]。安定性変換の基本的な概念は Transformed system の構築である。安定性変換によって得られる Transformed system は、対象のカオスシステムがもつ不安定周期軌道と同じ位置情報を有する安定周期軌道を呈するシステムであり、このシステムの構築によって未知の不安定周期軌道を検出することができる。この制御法の基本的な原理は、制御対象システムの有する不安定周期軌道と同じ位置情報の安定周期軌道を持つ別システムの構築である。この手法は比較的簡素であり、位置情報が未知の不安定周期軌道の安定化することができる。我々の研究ではこれまでに、長い周期の不安定周期軌道に対して効果的な手法を提案し、ロバスト性の改善と実システムでの有効性を示した。また、高次元系や連続時間系に適用可能な安定性変換に基づくカオス制御法を提案している [4]。しかしながら、制御には制御対象システムの内部情報が必要であり、時系列情報のみで制御を行うことができなかった。

## 1.3 本研究の目的

本研究では、リザーバーコンピューティングを用いた安定性変換に基づくカオス制御を提案する。この提案手法では、リザーバーコンピューティングで非線形システムの内部状態を同定し、そのシステムに安定性変換を適用することで、観測された時系列情報のみで不安定周期軌道の安定化を行うことができる。本稿では、提案手法によるカオス制御について議論し、固定点安定化の手順を示す。ここでは、一次元カオス写像のロジスティック写像と二次元カオス写像のエノン写像の固定点が安定化できたことを示す。

## 2 リザーバーコンピューティングを用いた安定性変換に基づく固定点安定化

### 2.1 離散時間系のための安定性変換に基づくカオス制御法

まず，高次元カオス写像に適用可能な安定性変換に基づく不安定周期軌道の安定化制御法 [4] について説明する．制御対象として，次式で記述される  $l$  次元カオス写像  $F$  を考える．

$$\mathbf{u}_{k+1} = F(\mathbf{u}_k), (\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^l). \quad (1)$$

このとき， $\mathbf{u}_f = F(\mathbf{u}_f)$  なら  $\mathbf{u}_f$  は  $F$  の固定点である． $F$  を対象とした安定性変換に基づく制御システムのブロック図を図 (1) に示す．

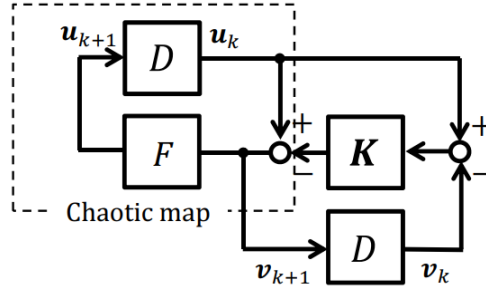


図 1: 制御システムのブロック図

ダイナミクスは次式の  $2l$  次元離散時間システムとして記述される．

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} &= F((\mathbf{I} - \mathbf{K})\mathbf{u}_k + \mathbf{K}\mathbf{v}_k). \\ \mathbf{v}_{k+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K})\mathbf{u}_k + \mathbf{K}\mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで， $D$  は遅延器， $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^l$  は時刻  $k$  における制御システムの内部状態， $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{l \times l}$  は定数の制御ゲインである． $k > 0$  で  $\mathbf{u}_k = F(\mathbf{v}_k)$  という関係から，式 (2) は次のような  $l$  次元ダイナミクスに縮約することができる．

$$\mathbf{v}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K})F(\mathbf{v}_k) + \mathbf{K}\mathbf{v}_k. \quad (3)$$

この制御システムは Transformed system と等価であり，制御ゲイン  $\mathbf{K}$  を適切に設定することで制御対象システムと同じ位置に安定固定点を持つ．安定性について議論するため，式 (3) を固定点  $\mathbf{u}_f$  周りで局所線形化した次のシステムを考える．

$$\delta \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A} \delta \mathbf{v}_k, (\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times l}, \delta \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^l). \quad (4)$$

ここで， $\delta \mathbf{v}_k \equiv \mathbf{v}_k - \mathbf{u}_f$  は固定点  $\mathbf{u}_f$  周りの微小変位を表す．この正方行列は次のように記述される．

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_{k+1}}{\partial \mathbf{v}_k} \right|_{\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_f} = (\mathbf{I} - \mathbf{K})DF(\mathbf{u}_f) + \mathbf{K} \quad (5)$$

ただし,  $DF(\mathbf{u}_f)$  はカオス写像  $F$  の固定点  $\mathbf{u}_f$  におけるヤコビ行列である.

$$DF(\mathbf{u}_f) = \left. \frac{\partial \mathbf{u}_{k+1}}{\partial \mathbf{u}_k} \right|_{\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_f} = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial u_1} & \frac{\partial f_l}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial u_l} \end{pmatrix} \right|_{\mathbf{u} = \mathbf{u}_f}. \quad (6)$$

制御ゲイン  $\mathbf{K}$  が次式を満たす場合は  $\mathbf{A}$  の固有値全てが 0 となり, Transformed system 式 (3) の固定点は超安定である.

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{I} - DF(\mathbf{u}_f))^{-1} DF(\mathbf{u}_f) \quad (7)$$

したがって,  $|\mathbf{I} - DF(\mathbf{u}_f)| \neq 0$  であれば上記の安定条件を満たす制御ゲイン  $\mathbf{K}$  が存在し,  $\mathbf{K}$  を適切に設定した場合, 制御システムはカオス写像  $F$  の固定点と同じ位置に安定固定点を持つ. また, 式 (2),(3) には  $\mathbf{u}_f$  が含まれていないので, 未知の固定点を安定化することが可能であるといえる.

## 2.2 提案手法によるカオス制御の手順

1. リザーバーコンピューティングで時系列情報から非線形システムを同定する.
2. 同定システムで自律的に予測を行い, 固定点を探索する.
3. 探索した固定点周りで自律システムを局所線形化する.
4. 自律システムに安定性変換を適用する.

## 2.3 1step 時系列予測による非線形システムの同定

まず, リザーバーコンピューティングで制御対象システムを同定し, 現在の状態から 1step 先の状態を予測可能なシステムを作る. 図 2 に利用したリザーバーコンピューティング [3] を示す.

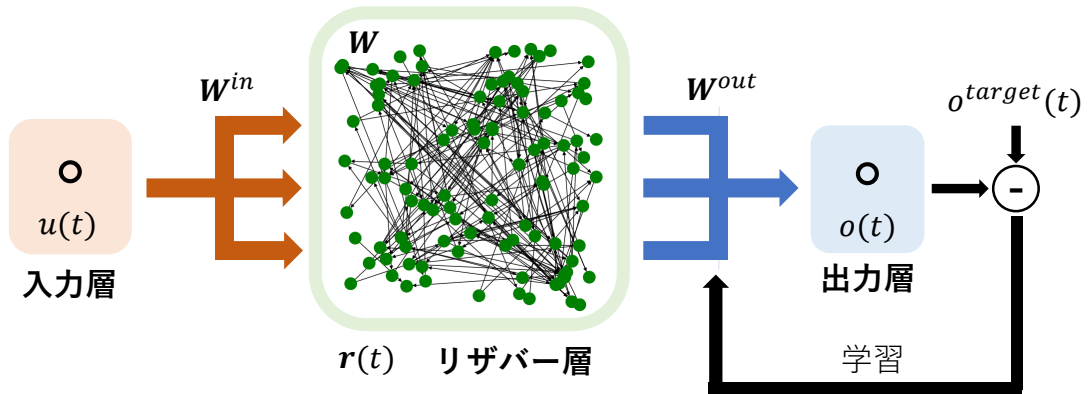


図 2: 利用したリザーバーコンピューティング.

リザーバー層の更新とリザーバーコンピューティングの出力は次の様に記述される。

$$\mathbf{r}(t+1) = (1 - \rho) \mathbf{r}(t) + \rho \tanh(\mathbf{W}^{in} u(t) + \mathbf{W} \mathbf{r}(t)). \quad (8)$$

$$o(t+1) = \mathbf{W}^{out} \mathbf{r}(t+1). \quad (9)$$

ただし,  $u(t) \in \mathbb{R}$  は入力信号,  $\mathbf{r}(t) = [r_1(t), \dots, r_N(t)]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  は  $N$  個のニューロンで形成されたりザーバーの状態,  $o(t) \in \mathbb{R}$  は出力信号である. 入力重み  $\mathbf{W}^{in} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  とリザーバー層のニューロン結合重み  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  はランダムに決定し固定する. 出力重み  $\mathbf{W}^{out} \in \mathbb{R}^{1 \times N}$  は教師信号  $o^{target}(t)$  と出力信号  $o(t)$  の差が小さくなるように逐次最小二乗法で学習を行う.  $\rho \in (0, 1]$  は漏れ率であり, リザーバー層が蓄える過去情報の保持割合である.

## 2.4 同定システムの自律的予測による固定点探索

リザーバーコンピューティングの出力信号を次の入力信号とすることで, 同定したシステムで自律的に予測(再帰予測) することができる. 図3に自律システムを示す.

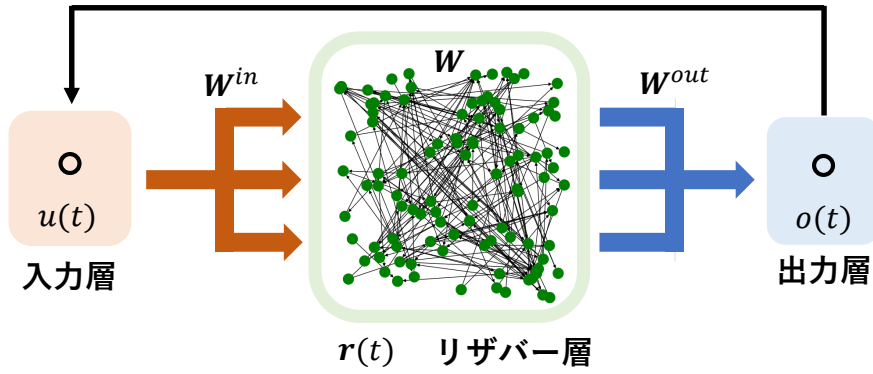


図3: 自律予測システム.

自律予測システムのリザーバー層の更新とリザーバーコンピューティングの出力は次の様に記述される。

$$\mathbf{r}(t+1) = (1 - \rho) \mathbf{r}(t) + \rho \tanh(\mathbf{W}^{in} o(t) + \mathbf{W} \mathbf{r}(t)). \quad (10)$$

$$o(t+1) = \mathbf{W}^{out} \mathbf{r}(t+1). \quad (11)$$

この自律予測システムで固定点の探索を行う. 以下の式を満たしたとき,  $\mathbf{r}(t+1)$  を固定点周りのシステムの内部状態とする.

$$r_e = \sum_{i=1}^N |r_i(t+1) - r_i(t)| < \varepsilon. \quad (12)$$

ここで,  $r_e$  はリザーバーの内部状態の変化量,  $\varepsilon$  はしきい値である.

## 2.5 固定点周りでの自律予測システムの局所線形化

図4に自律システムのブロック図を示す.

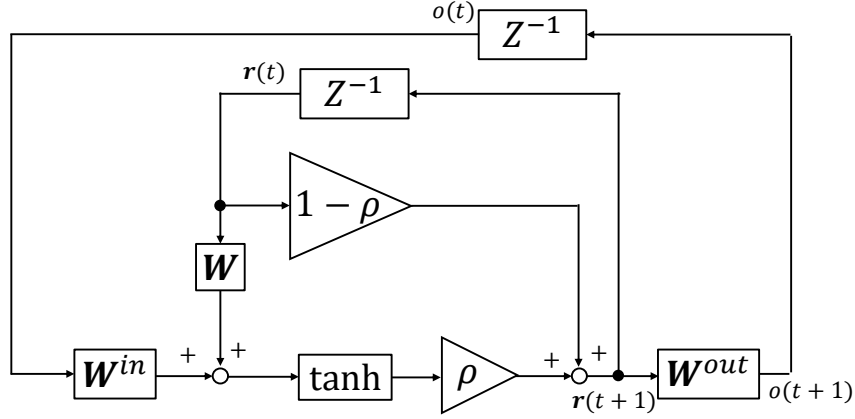


図 4: 自律予測システムのブロック図.

この自律予測システムに安定性変換を適用するため, 固定点周りで局所線形化した次のシステムを考える.

$$\delta \mathbf{r}(t+1) = \mathbf{R}_J \delta \mathbf{r}(t). \quad (13)$$

$$\mathbf{r}(t+1) = \mathbf{R}_J(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_f) + \mathbf{r}_f. \quad (14)$$

ただし,  $\delta \mathbf{r}(t)$  は固定点周りのリザーバーの内部状態  $\mathbf{r}_f$  の微小変位を表す.  $\mathbf{R}_J$  は固定点周りのリザーバーのヤコビ行列である.

$$\mathbf{R}_J = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{r}_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial r_1} & \frac{\partial r_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial r_N} \\ \frac{\partial r_2}{\partial r_1} & \frac{\partial r_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial r_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_N}{\partial r_1} & \frac{\partial r_N}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial r_N}{\partial r_N} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

局所線形化システムのブロック図を図 5 に示す.

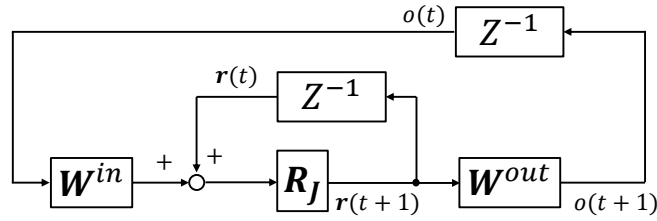


図 5: 局所線形化システムのブロック図.

このブロック図より制御ゲインを求める.

$$\mathbf{r}(t+1) = \mathbf{R}_J (\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}^{in} o(t)). \quad (16)$$

$$o(t) = \mathbf{W}^{out} \mathbf{r}(t). \quad (17)$$

代入して

$$\mathbf{r}(t+1) = \mathbf{R}_J (\mathbf{I} + \mathbf{W}^{in} \mathbf{W}^{out}) \mathbf{r}(t). \quad (18)$$

$\mathbf{R}_J (\mathbf{I} + \mathbf{W}^{in} \mathbf{W}^{out}) = \mathbf{A}$  と置くと,

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{A}. \quad (19)$$

## 2.6 安定性変換の適用

自律予測システム (式 10, 式 11) に安定性変換を適用すると以下の固定点安定化システムになる.

$$\mathbf{r}(t+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}) \left( (1 - \rho) \mathbf{r}(t) + \rho \tanh(\mathbf{W}^{in} o(t) + \mathbf{W} \mathbf{r}(t)) \right) + \mathbf{K} \mathbf{r}(t). \quad (20)$$

$$o(t+1) = \mathbf{W}^{out} \mathbf{r}(t+1). \quad (21)$$

### 3 ロジスティック写像の固定点安定化

この章では，ロジスティック写像の固定点安定化を行う．ロジスティック写像はカオスを呈する 1 次元離散非線形システムであり，次のように記述される．ロジスティック写像は 2 つの不安定固定点  $x_{f1} = 0.000$ ， $x_{f2} = 0.744$  をもつ．

$$x_{k+1} = 3.9x_t(1 - x_t) \quad (22)$$

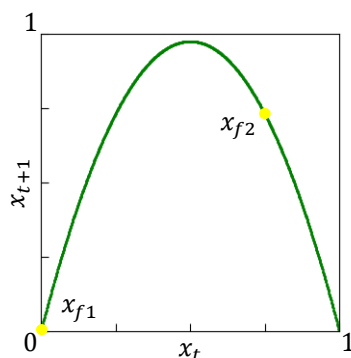


図 6: ロジスティック写像のカオスアトラクタと固定点.

このシステムに対して以下のパラメータを用いて固定点安定化を行った．

表 1: 各種パラメータ

リザバー層のニューロン数 $N$	200
リザバー層のニューロンネットワーク	Erdős-Rényi モデル
入力信号 $u(t)$	$x_t$
教師信号 $o^{target}(t)$	$x_{t+1}$
学習ステップ数	100000
出力重みの学習方法	逐次最小二乗法
漏れ率 $\rho$	0.8
入力重み $W^{in} = 0$ の確率	50%
入力重みの値 $W^{in}$	$\pm 0.5$ の 2 値ランダム
ニューロン結合重み $W$	平均 0, 分散 1 の正規分布
固定点のしきい値 $\epsilon$	2



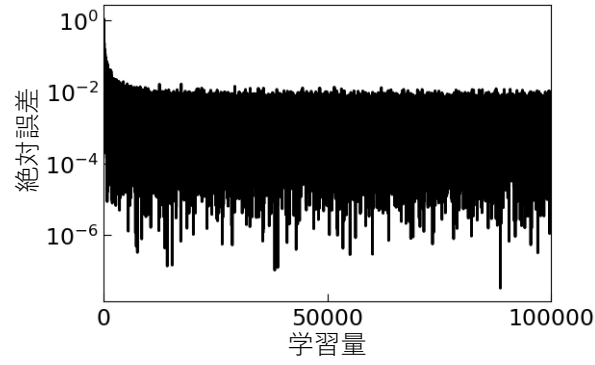
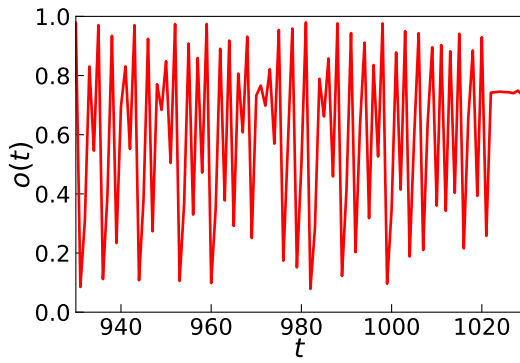
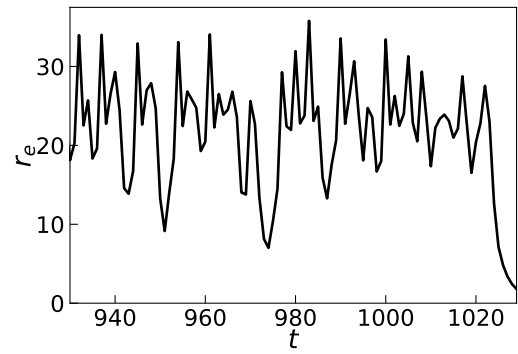


図 7: 学習中の教師信号と予測信号の絶対誤差.

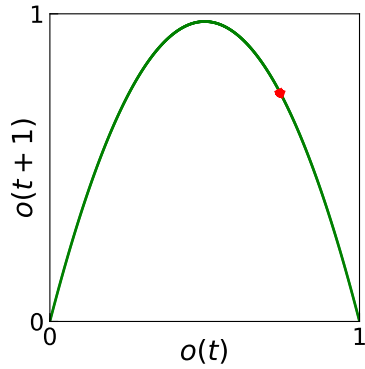


(a) 同定システムによる自律予測.

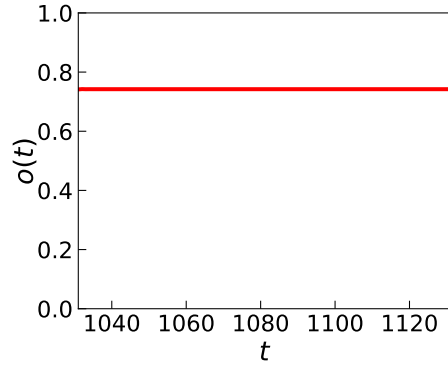


(b) 自律予測中のリザーバーの変化.

図 8: 自律予測システムによる固定点探索.



(a) 固定点安定化システムの呈する安定固定点.



(b) 固定点安定化システムの出力.

図 9: 固定点安定化の結果.

固定点安定化の結果, 0.742 に収束した. ロジスティック写像の不安定固定点  $x_{f2}$  と一致していることが確認できる.

## 4 エノン写像の固定点安定化

この章では, エノン写像 [8] の固定点安定化を行う. エノン写像はカオスを呈する 2 次元離散非線形システムであり, 次の式で表される. エノン写像は 2 つの不安定固定点  $\mathbf{u}_{f1} = (0.631, 0.189)$ ,  $\mathbf{u}_{f2} = (-1.131, -0.339)$  を持つ.

$$x_{t+1} = 1 - 1.4x_t^2 + y_t \quad (23)$$

$$y_{t+1} = 0.3x_t \quad (24)$$

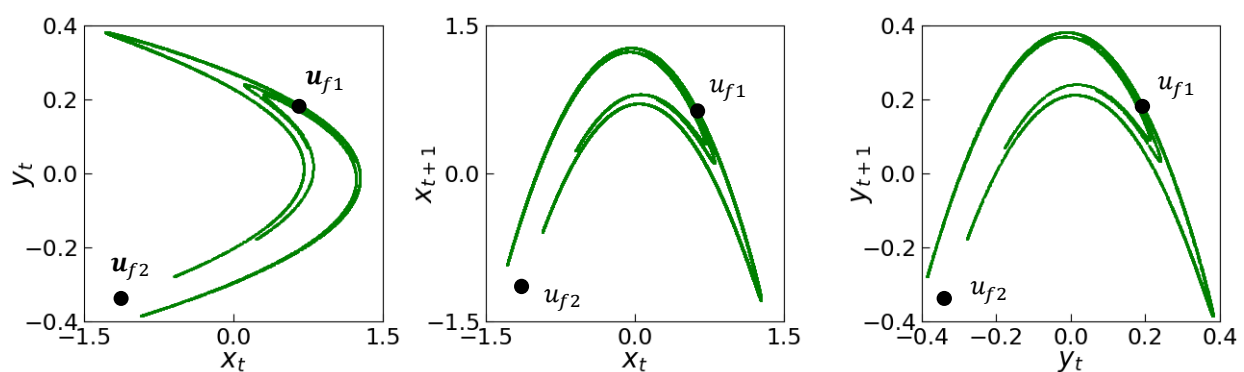


図 10: エノン写像のカオスアトラクタと各次元の遅延座標系.

このシステムに対して以下のパラメータを用いて固定点安定化を行った.

表 2: 各種パラメータ

リザバ層のニューロン数 $N$	400
リザバ層のニューロンネットワーク	Erdős-Rényi モデル
入力信号 $u(t)$	$x_t$
教師信号 $o^{target}(t)$	$x_{t+1}$
学習ステップ数	100000
出力重みの学習方法	逐次最小二乗法
漏れ率 $\rho$	0.8
入力重み $W^{in} = 0$ の確率	50%
入力重みの値 $W^{in}$	$\pm 0.5$ の 2 値ランダム
ニューロン結合重み $W$	平均 0, 分散 1 の正規分布
固定点のしきい値 $\epsilon$	20

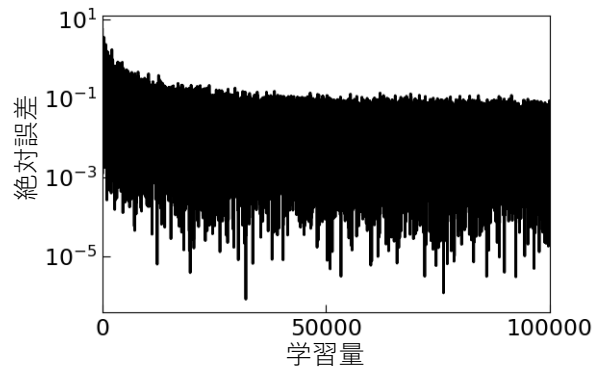
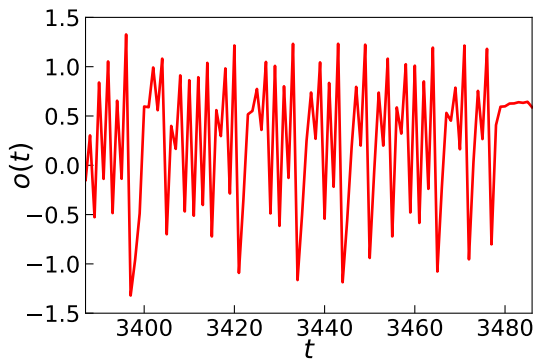
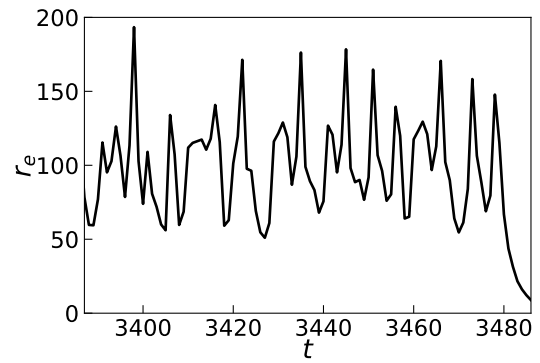


図 11: 学習中の教師信号と予測信号の絶対誤差.

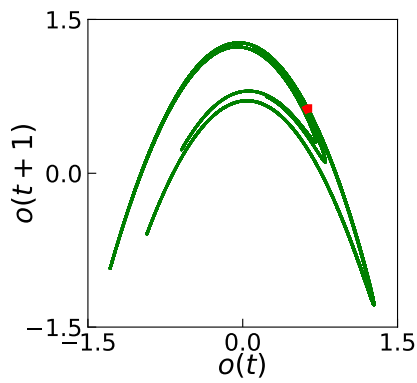


(a) 同定システムによる自律予測.

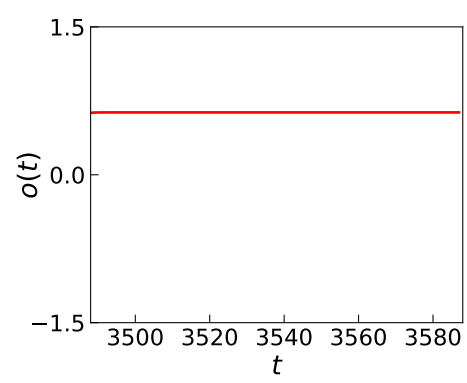


(b) 自律予測中のリザーバの変化.

図 12: 自律予測システムによる固定点探索.



(a) 固定点安定化システムの呈する安定固定点.



(b) 固定点安定化システムの出力.

図 13: 固定点安定化の結果.

0.633 に収束した. エノン写像の不安定固定点  $u_{f1}$  と一致していることが確認できる.

## 参考文献

- [1] E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke, “Controlling chaos,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 11, pp. 1196-1199, 1990.
- [2] T. Tsubone, and N. Kambayashi, “Chaos and periodic oscillation of a multirate sampled-data dynamical system,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E90-A, no. 9, pp. 1924-1931, 2007.
- [3] Mantas Lukoševičius, “A Practical Guide to Applying Echo State Networks,” *Neural Networks: Tricks of the Trade*, pp. 659-686, 2012.
- [4] 長谷川 拓海, 坪根 正, “安定性変換に基づく未知定常状態の安定化,” *電子情報通信学会論文誌 (A)*, vol. J96-A, no.9, pp. 623-630 Sep. 2013.
- [5] D. Pingel, P. Schmelcher, and F.K. Diakonov, “Detecting unstable periodic orbits of chaotic dynamical systems” *Phys. Rev. Lett.*, vol.78, no.25, pp.4733– 4736, June. 1997.
- [6] D. Pingel, P. Schmelcher, and F.K. Diakonov, “Detecting unstable periodic orbits in chaotic continuous-time dynamical systems,” *Phys. Rev. E*, vol.64, 026214, pp.026214-1–10, July. 2001.
- [7] D. Pingel, P. Schmelcher, and F.K. Diakonov, “Stability transformation: a tool to solve nonlinear problems,” *Physics Reports*, 400, pp.67–148, May. 2004
- [8] M. Henon, “A two-dimensional mapping with a strange attractor,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 69–77, 1976.
- [9] 河合 裕司, 小笹 悠歩, 朴 志勲, 浅田 稔, “結合コスト最小化によるエコステートネットワークの破滅的忘却の回避”, *The 33rd Annual Conference of the Japanese Society for Artificial Intelligence*, 2019
- [10] 池田 芳樹, “忘却係数付き逐次最小二乗法による建物動特性の地震時変化の評価”, *日本建築学会技術報告集*, 第 18 巻 第 38 号, pp.51-54, 2012.2
- [11] Loh, C.-H. and Lin H.-M., “Application of Off-line and On-line Identification Techniques to Building Seismic Response Data”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol.25, No.3, pp.269-290, 1996.3
- [12] 濱本卓司, 森田高市, 相馬澄子, “逐次最小二乗法による多層建築物の地震損傷追跡”, *日本建築学会構造系論文集*, 第 603 号, pp.39-46, 2006.5
- [13] 桐田史生ほか 3 名, “建築物の地震損傷検知のための適応回帰型システム同定”, *日本建築学会構造系論文集*, 第 619 号, pp.65-72, 2007.9
- [14] 中村充, 竹脇出, “地震観測結果に基づく免震建物モデルパラメータの時変性評価”, *日本建築学会大会学術講演梗概集 (近畿)*, B-2 構造 II, pp.675-676, 2005.9
- [15] Takewaki I. and Nakamura M, “Temporal Variation of Model Properties of a Base-isolated Building during an Earthquake”, *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, Vol.11, No.1, pp.1-8, 2010
- [16] 足立修一, “ユーザのためのシステム同定理論”, *計測自動制御学会編*, コロナ社, 1993.7
- [17] 竹下普備, “ヒステリシス素子で結合された離散時間発振器に見られる非線形現象に関する研究,” *修士論文*, 2019 年